ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 83 за 2012 г.

Горючкина И.В.

О кратных и некратных решениях алгебраических ОДУ

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Горючкина И.В. О кратных и некратных решениях алгебраических ОДУ // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2012. № 83. 12 с. URL: **http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2012-83**

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
ИМЕНИ М.В. КЕЛДЫША

И. В. Горючкина

О КРАТНЫХ И НЕКРАТНЫХ РЕШЕНИЯХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ОДУ

Москва, 2012 г.

УДК 517.91

И. В. Горючкина. О кратных и некратных решениях алгебраических ОДУ. Препринт института прикладной математики им. М. В. Келдыша РАН, Москва, 2012.

Здесь изучаются формальные решения обыкновенного дифференциального уравнения (ОДУ) полиномиального вида. Эти решения являются формальными рядами Тейлора или Лорана с конечной главной частью. При этом, ОДУ рассматривается как алгебраическое уравнение (АУ) $n+2$ переменных. Это позволяет не использовать понятие формальной вариации в доказательствах лемм. Далее вводится понятие кратного решения АУ и показывается, что любое АУ с некратным формальным решением с помощью некоторой замены зависимой переменной приводится к АУ специального вида. И наконец, делается обратный переход к ОДУ специального вида. Для таких уравнений ранее была сформулирована и доказана теорема о достаточном условии сходимости его формальных решений.

I. V. Goryuchkina. On multiple and non-multiple solutions of algebraic ODEs. Preprint of the Keldysh Institute of Applied Mathematics of RAS. Moscow, 2012.

Here we consider formal solutions to an ordinary differential equation (ODE) of a polynomial form. These solutions are Taylor or Laurent series with a finite main part. At that, we look at the ODE as an algebraic equation (AE) of $n+2$ variables. It allows to avoid a notion of a formal variation in proves of lemmas. Further we give a notion of a multiple solution to AE and show that each AE with non-multiple solution reduces to special form AE by means of some transformation of dependent variable. At last, we return to special form ODE. For these equations earlier we formulated and proved the theorem on sufficient condition of the convergence of its formal solutions.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 11-01-00023 и проект 12-01-31421 мол_а).

1. Рассматриваемое ОДУ и его решения

Рассматривается обыкновенное дифференциальное уравнение

$$f(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0, \tag{1}$$

где $f(x, y, y', \ldots, y^{(n)})$ – это многочлен переменных x, y, y', …, $y^{(n)}$.

Пусть при $|x| \to 0$, $\arg x \in [0,\, 2\pi)$ уравнение (1) имеет решение в виде формального ряда Лорана с конечной главной частью, т. е. формальное решение вида

$$y = \sum_{k=0}^{\infty} c_k\, x^{s_k}, \tag{2}$$

где $s_k \in \mathbb{Z}$, $-\infty < s_0 < s_1 < \ldots$, $c_k = \mathrm{const} \in \mathbb{C}$, $c_k \neq 0$.

2. Приведение ОДУ к АУ

Сделаем в уравнении (1) замену переменных

$$y = y_0,\ xy' = y_1,\ \ldots,\ x^n y^{(n)} = y_n. \tag{3}$$

Обозначим

$$Y = (y_0,\, y_1,\, \ldots,\, y_n),$$
$$C_k = (c_k,\, c_k s_k,\, \ldots,\, c_k s_k(s_k - 1)\ldots(s_k - n + 1)).$$

После умножения на некоторую степень x получим алгебраическое уравнение $n+2$ переменных

$$\tilde{f}(x,\, Y) = 0. \tag{4}$$

Уравнение (4) имеет формальное решение

$$Y = \sum_{k=0}^{\infty} C_k\, x^{s_k}. \tag{5}$$

3. Об АУ и его решениях

Лемма 1. *Уравнение* (4) *с решением* (5) *с помощью преобразования*

$$Y = V x^{s_0}, \tag{6}$$

где $V = (v_0, v_1, \ldots, v_n)$, *приводится к уравнению вида*

$$\mathcal{P}_0(V) + \sum_{j=1}^{M} x^{k_j}\, \mathcal{P}_j(V) = 0, \tag{7}$$

где $k_1, \ldots, k_M \in \mathbb{N}$, $k_1 < k_2 < \cdots < k_M$, $\mathcal{P}_0(V)$, $\mathcal{P}_j(V)$ – *многочлены,*

$$\mathcal{P}_0(C_0) = 0. \tag{8}$$

Доказательство. В уравнении (4) сделаем преобразование (6) и получим уравнение

$$\tilde{f}(x, Vx^{s_0}) = 0, \tag{9}$$

с решением

$$V = \sum_{k=0}^{\infty} C_k x^{s_k - s_0}. \tag{10}$$

Разложим левую часть уравнения (9) в ряд Тейлора (по x) в точке $x = 0$, получим уравнение

$$\sum_{j=0}^{M} x^{\kappa_j} \mathcal{P}_j(V) = 0, \tag{11}$$

где $\kappa_0 < \kappa_1 < \cdots < \kappa_M$.

Разделив уравнение (11) на x^{κ_0} и положив $k_j = \kappa_j - \kappa_0$, получаем уравнение (7). Уравнение (7) имеет решение (10). Подставляем решение (10) в уравнение (7), пользуясь формулой бинома Ньютона, раскрываем скобки, группируем члены при каждой степени x. Получаем, что при x в нулевой (младшей) степени стоит выражение $\mathcal{P}_0(C_0)$, которое должно обращаться в ноль, поскольку формальное решение (10) удовлетворяет уравнению (7). Доказательство окончено.

Определение 1. Решение

$$Y = \Phi(x),$$

где $\Phi(x) = (\phi_0(x), \ldots, \phi_n(x))$, уравнения (4) называется *кратным*, если оно удовлетворяет системе уравнений

$$\frac{\partial \tilde{f}}{\partial y_j}(x, \Phi(x)) \equiv 0, \quad j = 0, \ldots, n. \tag{12}$$

Далее решения (10) уравнения (7) будем делить на *кратные* и *некратные*. Среди некратных решений будем различать принадлежащие одним и тем же струям и разным.

Лемма 2. *Если уравнение* (7) *имеет кратное формальное решение*

$$V \overset{\text{def}}{=} \Phi(x) = \sum_{k=0}^{\infty} C_k x^{s_k - s_0}, \tag{13}$$

то (укороченное) уравнение

$$\mathcal{P}_0(V) = 0 \tag{14}$$

имеет кратное (укороченное) решение

$$V = C_0. \tag{15}$$

Доказательство. Заметим, что согласно лемме 1 решение (15) является решением уравнения (14), т. е.

$$\mathcal{P}_0(C_0) = 0.$$

Далее заметим, что из условия леммы 2 и определения 1 следует, что решение (13) уравнения (7) является кратным решением, т. е. удовлетворяет системе уравнений

$$\frac{\partial \mathcal{P}_0}{\partial v_j}\,(\Phi(x)) + \sum_{i=1}^{M} x^{k_i}\,\frac{\partial \mathcal{P}_i}{\partial v_j}\,(\Phi(x)) \equiv 0,\ j = 0, \ldots, n. \tag{16}$$

Поскольку формальное решение (13) является решением системы уравнений (16), то согласно лемме 1 каждое укороченное уравнение этой системы (первое приближение соответствующего уравнения (16)) $\dfrac{\partial \mathcal{P}_0}{\partial v_j}\,(V) = 0$ имеет решение (15), т. е. $\dfrac{\partial \mathcal{P}_0}{\partial v_j}\,(C_0) = 0$, $j = 0, \ldots, n$. Из этого следует, что уравнение (14) имеет кратное решение (15). Доказательство окончено.

Понятие кратного решения алгебраического уравнения можно обобщить на случай алгебраического обыкновенного дифференциального уравнения.

Определение 2. Решение $y = \varphi(x)$ уравнения (1) называется *кратным*, если оно удовлетворяет системе уравнений

$$\left.\frac{\partial f(x, y, y', \ldots, y^{(n)})}{\partial y^{(j)}}\right|_{y\,=\,\varphi(x)} \equiv 0, \quad j = 0, \ldots, n. \tag{17}$$

Рассмотрим шестое уравнение Пенлеве

$$y'' = \frac{(y')^2}{2}\left(\frac{1}{y} + \frac{1}{y-1} + \frac{1}{y-x}\right) - y'\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} + \frac{1}{y-x}\right) + \\ + \frac{y(y-1)(y-x)}{x^2(x-1)^2}\left[a + b\frac{x}{y^2} + c\frac{x-1}{(y-1)^2} + d\frac{x(x-1)}{(y-x)^2}\right], \tag{18}$$

где $a,\ b,\ c,\ d$ – комплексные параметры, x и y – комплексные переменные, $y' = dy/dx$. Представим его в виде алгебраического ОДУ. Для этого умножим уравнение (18) на $2x^2(x-1)^2y(y-1)(y-x)$ и перенесем его правую часть влево, получим уравнение

$$f(x,y,y',y'') \stackrel{def}{=} 2y''x^2(x-1)^2y(y-1)(y-x)-(y')^2[x^2(x-1)^2(y-1)(y-x)+x^2(x-1)^2y(y-x)+x^2(x-1)^2y(y-1)]+2y'[x(x-1)^2y(y-1)(y-x)+x^2(x-1)y(y-1)(y-x)+x^2(x-1)^2y(y-1)]-[2ay^2(y-1)^2(y-x)^2+2bx(y-1)^2(y-x)^2+2c(x-1)y^2(y-x)^2+2dx(x-1)y^2(y-1)^2\,]=0. \quad (19)$$

Замечание 1. Уравнение (19) будем называть *преобразованным шестым ураненением Пенлеве.*

Лемма 3. Все кратные решения преобразованного шестого уравнения Пенлеве суть

$$\mathcal{I}_1: y=0, \text{ при } b=0; \quad \mathcal{I}_2: \ y=1, \text{ при } c=0; \quad (20)$$
$$\mathcal{I}_3: \ y=x, \text{ при } d=1/2; \quad \mathcal{I}_4: \ y=\infty, \text{ при } a=0.$$

Доказательство. Сделаем в уравнении (19) замену переменных (3). Получим АУ

$$\tilde f(x,Y) \stackrel{def}{=} 2y_2(x-1)^2y_0(y_0-1)(y_0-x)-y_1^2[(x-1)^2(y_0-1)(y_0-x)+(x-1)^2y_0(y_0-x)+(x-1)^2y_0(y_0-1)]+2y_1[(x-1)^2y_0(y_0-1)(y_0-x)+x(x-1)y_0(y_0-1)(y_0-x)+x(x-1)^2y_0(y_0-1)]-[2ay_0^2(y_0-1)^2(y_0-x)^2+2bx(y_0-1)^2(y_0-x)^2+2c(x-1)y_0^2(y_0-x)^2+2dx(x-1)y_0^2(y_0-1)^2\,]=0, \quad (21)$$

где $Y=(y_0,y_1,y_2)$. Дифференцируя уравнение (21) по y_0, y_1 и y_2, получаем уравнения

$$\partial\tilde f(x,Y)/\partial y_0 \stackrel{def}{=} 2y_2(x-1)^2[(y_0-1)(y_0-x)+y_0(y_0-x)+y_0(y_0-1)]-2y_1^2(x-1)^2[(y_0-1)+(y_0-x)+y_0]+2y_1[(x-1)^2[(y_0-1)(y_0-x)+y_0(y_0-x)+y_0(y_0-1)]+x(x-1)[(y_0-1)(y_0-x)+y_0(y_0-x)+y_0(y_0-1)]+x(x-1)^2[y_0+(y_0-1)]]-[4a[y_0(y_0-1)^2(y_0-x)^2+y_0^2(y_0-1)(y_0-x)^2+y_0^2(y_0-1)^2(y_0-x)]+4bx[(y_0-1)(y_0-x)^2+(y_0-1)^2(y_0-x)]+4c(x-1)[y_0(y_0-x)^2+y_0^2(y_0-x)]+4dx(x-1)[y_0(y_0-1)^2+y_0^2(y_0-1)]\,]=0. \quad (22)$$

$$\partial\tilde f(x,Y)/\partial y_1 \stackrel{def}{=} -2y_1(x-1)^2[(y_0-1)(y_0-x)+y_0(y_0-x)+y_0(y_0-1)]+2y_0(y_0-1)[(x-1)^2(y_0-x)+x(x-1)(y_0-x)+x(x-1)^2]=0. \quad (23)$$

$$\partial\tilde f(x,Y)/\partial y_2 \stackrel{def}{=} 2(x-1)^2y_0(y_0-1)(y_0-x)=0. \quad (24)$$

Очевидно, что уравнение (24) имеет решения $y_0=0$, $y_0=1$ и $y_0=x$. И других решений, удовлетворяющих уравнению (24), нет. Учитывая функциональную зависимость переменных y_0, y_1, y_2, получаем соответствующие векторные решения

$$\mathcal{I}_1: Y=(0,0,0); \quad \mathcal{I}_2: \ Y=(1,0,0); \quad \mathcal{I}_3: \ Y=(x,x,0).$$

Решения $\mathcal{I}_1$, $\mathcal{I}_2$, $\mathcal{I}_3$ удовлетворяют системе уравнений (21), (22), (23), (24), т. е. являются кратными решениями уравнения (21), только при определенных значениях параметров b, c и d. А именно: $\mathcal{I}_1$ при $b = 0$, $\mathcal{I}_2$ при $c = 0$, $\mathcal{I}_3$ при $d = 1/2$. Для симметрии еще добавляется решение $\mathcal{I}_4 : Y = (\infty, \infty, \infty)$ при $a = 0$. Доказательство окончено.

В статье [1] решения $\mathcal{I}_1 - \mathcal{I}_4$ названы исключительными.

Замечание 2. Кратные решения $y = 0$, $y = 1$, и $y = x$ уравнения (19) не являются кратными для уравнения (18). Кратность решений возникает после умножения уравнения (18) на его общий знаменатель

$$2x^2(x-1)^2 y(y-1)(y-x), \tag{25}$$

так как эти решения являются корнями многочлена (25). Нам важна кратность решений преобразованных уравнений, поскольку техника вычисления формальных решений применима именно к алгебраическим ОДУ и зависит от кратности их решений.

Пусть при $|x| \to 0$, $\arg x \in [0,\, 2\pi)$ уравнение (4) имеет два некратных формальных решения, представляемых в виде рядов Лорана с конечной главной частью, принадлежащих одной и той же s_m-струе. А именно, решение

$$Y = \sum_{k=0}^{m} C_k\, x^{s_k} + \Phi_1(x)\, x^{s_m} \tag{26}$$

и решение

$$Y = \sum_{k=0}^{m} C_k\, x^{s_k} + \Phi_2(x)\, x^{s_m}, \tag{27}$$

где

$$C_k = (c_k,\, c_k s_k,\, \ldots,\, c_k s_k(s_k-1)\ldots(s_k-n+1)),\ c_k = \mathrm{const} \in \mathbb{C},\ c_k \neq 0,$$

$$s_k \in \mathbb{Z},\ \ -\infty < s_0 < s_1 < \cdots < s_m < +\infty,$$

$\Phi_1(x)$ и $\Phi_2(x)$ – это формальные ряды Тейлора, младшие члены которых имеют степень, большую нуля. При этом младший член ряда Тейлора $\Phi_1(x)$ не равен тождественно младшему члену ряда $\Phi_2(x)$.

Замечание 3. Если в формулах (26) и (27) $m \geq 0$, то уравнение (4) приводится к уравнению вида (7) преобразованием

$$Y = \sum_{k=0}^{m} C_k\, x^{s_k} + V x^{s_{m+1}}.$$

При этом решениям (26) и (27) соответствуют решения $V = \Phi_1(x)$ и $V = \Phi_2(x)$. Мы будем полагать, что все необходимые преобразования сделаны и уравнение (4) приведено к уравнению вида (7) с некратными формальными решениями $V = \Phi_1(x)$ и $V = \Phi_2(x)$.

Лемма 4. *Если уравнение* (7) *имеет некратное формальное решение* (10) *и уравнение* $\mathcal{P}_0(V) = 0$ *имеет некратное решение* $V = C_0$, *то*

$$A(U) \stackrel{\text{def}}{=} \left(\left(u_0 \frac{\partial}{\partial v_0} + \dots + u_n \frac{\partial}{\partial v_n} \right) \mathcal{P}_0(V) \right) \bigg|_{V=C_0} \not\equiv 0,$$

и уравнение (7) *после подстановки* $V = C_0 + U$, *где* $U = (u_0, u_1, \dots, u_n)$, *принимает специальный вид*

$$f_1(x, U) \stackrel{\text{def}}{=} A(U) + B(U) + xC(x, U) + xD(x) = 0, \tag{28}$$

$A(U)$ *– это линейная функция,*

$B(U)$ *– это многочлен, содержащий только нелинейные по* u_0, u_1, $\dots$, u_n *члены,*

$C(x, U)$ *– это многочлен, состоящий из линейных и нелинейных по* u_0, u_1, $\dots$, u_n *членов,*

$D(x)$ *– это многочлен.*

Доказательство. Сделаем в уравнении (7) замену зависимой переменной $V = C_0 + U$. Получим уравнение

$$\mathcal{P}_0(C_0) + \left(\sum_{t=1}^{R} \left(u_0 \frac{\partial}{\partial v_0} + \dots + u_n \frac{\partial}{\partial v_n} \right)^t \mathcal{P}_0(V) \right) \bigg|_{V=C_0} + \tag{29}$$

$$+ \sum_{j=1}^{M} x^{k_j} \left[\mathcal{P}_j(C_0) + \left(\sum_{t=1}^{R} \left(u_0 \frac{\partial}{\partial v_0} + \dots + u_n \frac{\partial}{\partial v_n} \right)^t \mathcal{P}_j(V) \right) \bigg|_{V=C_0} \right] = 0,$$

где $R \in \mathbb{N}$, $R < +\infty$, $\mathcal{P}_0(C_0) = 0$.

Поскольку по условию леммы 4, уравнение (14) имеет некратное решение (15), то

$$\sum_{j=0}^{n} \left(\frac{\partial \mathcal{P}_0}{\partial v_j} (C_0) \right)^2 > 0,$$

$j = 0, \dots, n$.

Следовательно,

$$\left(\left(u_0\frac{\partial}{\partial v_0}+\cdots+u_n\frac{\partial}{\partial v_n}\right)\mathcal{P}_0(V)\right)\Bigg|_{V=C_0}\not\equiv 0.$$

Таким образом получаем

$$A(U)\stackrel{\text{def}}{=}\left(\left(u_0\frac{\partial}{\partial v_0}+\cdots+u_n\frac{\partial}{\partial v_n}\right)\mathcal{P}_0(V)\right)\Bigg|_{V=C_0}\not\equiv 0, \tag{30}$$

$$B(U)\stackrel{\text{def}}{=}\left(\sum_{t=2}^{R}\left(u_0\frac{\partial}{\partial v_0}+\cdots+u_n\frac{\partial}{\partial v_n}\right)^t\mathcal{P}_0(V)\right)\Bigg|_{V=C_0}, \tag{31}$$

если $R\geq 2$ и $B(U)\equiv 0$, если $R=1$.

$$xC(x,U)\stackrel{\text{def}}{=}\sum_{j=1}^{M}x^{k_j}\left(\sum_{t=1}^{R}\left(u_0\frac{\partial}{\partial v_0}+\cdots+u_n\frac{\partial}{\partial v_n}\right)^t\mathcal{P}_j(V)\right)\Bigg|_{V=C_0}, \tag{32}$$

$$xD(x)\stackrel{\text{def}}{=}\sum_{j=1}^{M}x^{k_j}\,\mathcal{P}_j(C_0). \tag{33}$$

Доказательство окончено.

Лемма 5. *Если в уравнении* (28) *сделать преобразование*

$$U=\sum_{k=1}^{m}C_k x^{s_k\,-\,s_0}+x^{s_{m+1}\,-\,s_0}W, \tag{34}$$

а затем разделить преобразованное уравнение на $x^{s_{m+1}\,-\,s_0}$*, то получим уравнение, аналогичное уравнению* (28). *А именно:*

$$A(W)+x\tilde{C}(x,W)+\tilde{D}(x)=0, \tag{35}$$

где $W=(w_0,w_1,\ldots,w_n)$,

$A(W)$ *– это линейная функция,*

$\tilde{C}(x,W)$ *– это многочлен, состоящий из линейных и нелинейных по* w_0, w_1, $\ldots$, w_n *членов,*

$\tilde{D}(x)$ *– это многочлен.*

Доказательство. Сделаем в уравнении (28) замену зависимой переменной (34). Положим $\Phi(x) = \sum\limits_{k=1}^{m} C_k x^{s_k - s_0}$, где $\Phi(x) = (\varphi_0(x), \ldots, \varphi_n(x))$, и определим линейные дифференциальные операторы

$$\mathcal{N}\left(x, W, \frac{\partial}{\partial V}\right) \stackrel{\text{def}}{=} w_0 \frac{\partial}{\partial v_0} + \cdots + w_n \frac{\partial}{\partial v_n},$$

$$\mathcal{M}\left(x, \frac{\partial}{\partial V}\right) \stackrel{\text{def}}{=} \varphi_0(x) \frac{\partial}{\partial v_0} + \cdots + \varphi_n(x) \frac{\partial}{\partial v_n}.$$

При этом

$$U = \Phi(x) + x^{s_{m+1} - s_0} W$$

и

$$A(U) = A(\Phi(x) + x^{s_{m+1} - s_0} W) = A(\Phi(x)) + x^{s_{m+1} - s_0} A(W). \tag{36}$$

$$B(U) = B(\Phi(x) + x^{s_{m+1} - s_0} W) = B(\Phi(x)) + B(x^{s_{m+1} - s_0} W) + \tag{37}$$

$$+ \sum_{t=2}^{R} \sum_{h=1}^{t-1} \frac{t!}{(t-h)!\,h!}\, x^{(s_{m+1} - s_0)h} \left(\left(\mathcal{N}\left(x, W, \frac{\partial}{\partial V}\right)^h \mathcal{M}\left(x, \frac{\partial}{\partial V}\right)^{t-h} \right) \mathcal{P}_0(V) \right) \Bigg|_{V=C_0},$$

если $R \geq 2$; и $B(U) \equiv 0$, если $R = 1$.

$$x\, C(x, U) = x\, C(x, \Phi(x) + x^{s_{m+1} - s_0} W) =$$

$$= \sum_{j=1}^{M} x^{k_j} \sum_{t=1}^{R} \left(\mathcal{M}\left(x, \frac{\partial}{\partial V}\right)^t \mathcal{P}_j(V) \right) \Bigg|_{V=C_0} + \tag{38}$$

$$+ \sum_{j=1}^{M} x^{k_j} \sum_{t=1}^{R} \sum_{h=1}^{t} \frac{t!}{(t-h)!\,h!}\, x^{(s_{m+1} - s_0)h} \times$$

$$\times \left(\left(\mathcal{N}\left(x, W, \frac{\partial}{\partial V}\right)^h \mathcal{M}\left(x, \frac{\partial}{\partial V}\right)^{t-h} \right) \mathcal{P}_j(V) \right) \Bigg|_{V=C_0}.$$

Получаем

$$A(U) + B(U) + xC(x, U) + xD(x) =$$

$$= x^{s_{m+1} - s_0} \left(A(W) + x\tilde{C}(x, W) + \tilde{D}(x) \right),$$

где

$$x\tilde{C}(x, W) = x^{s_0 - s_{m+1}} B(x^{s_{m+1} - s_0} W) + \sum_{t=2}^{R} \sum_{h=1}^{t-1} \frac{t!}{(t-h)!\, h!} \times$$

$$\times\ x^{(s_{m+1} - s_0)(h-1)} \left(\left(\mathcal{N} \left(x, W, \frac{\partial}{\partial V} \right)^h \mathcal{M} \left(x, \frac{\partial}{\partial V} \right)^{t-h} \right) \mathcal{P}_0(V) \right) \Bigg|_{V=C_0} + \tag{39}$$

$$+ \sum_{j=1}^{M} x^{k_j} \sum_{t=1}^{R} \sum_{h=1}^{t} \frac{t!}{(t-h)!\, h!} x^{(s_{m+1} - s_0)(h-1)} \times$$

$$\times \left(\left(\mathcal{N} \left(x, W, \frac{\partial}{\partial V} \right)^h \mathcal{M} \left(x, \frac{\partial}{\partial V} \right)^{t-h} \right) \mathcal{P}_j(V) \right) \Bigg|_{V=C_0}.$$

$$\tilde{D}(x) = x^{s_0 - s_{m+1}} \left(A(\Phi(x)) + B(\Phi(x)) + D(x) + xC(x, \Phi(x)) \right) \tag{40}$$

Из формулы (39) следует, что функция $\tilde{C}(x, W)$ – это многочлен. Функция $\tilde{D}(x)$ также многочлен, поскольку многочлен $f_1(x, \Phi(x))$ начинается со степени $x^{s_{m+1} - s_0}$. Действительно, уравнение $f_1(x, \Phi(x) + x^{s_{m+1} - s_0} W) = 0$ имеет формальное решение $x^{s_{m+1} - s_0} W = \sum\limits_{k=m+1}^{\infty} C_k x^{s_k - s_0}$. Поделив каждый из многочленов на $x^{s_{m+1} - s_0}$, получаем уравнение (35) с формальным решением

$$W = \sum_{k=m+1}^{\infty} C_k x^{s_k - s_{m+1}}. \tag{41}$$

Доказательство окончено.

4. Переход от АУ к ОДУ

Несложно проследить связь между переменными $y_0, \ldots, y_n$ и $w_0, \ldots, w_n$. Учитывая все проделанные преобразования, перейдем от уравнения (35) к уравнению

$$f_0(x, w, w', \ldots, w^{(n)}) \stackrel{\text{def}}{=} A(w, xw', \ldots, x^n w^{(n)}) + \tag{42}$$
$$+ x\tilde{C}(x, w, xw', \ldots, x^n w^{(n)}) + \tilde{D}(x) = 0.$$

Используя обозначения из [1]

$$\mathcal{L}(x)w = A(w, xw', \dots, x^n w^{(n)}),$$
$$g(x, w, w', \dots, w^{(n)}) = x\tilde{C}(x, w, xw', \dots, x^n w^{(n)}) + \tilde{D}(x),$$

получаем уравнение

$$f_0(x, w, w', \dots, w^{(n)}) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \mathcal{L}(x)w + g(x, w, w', \dots, w^{(n)}) = 0, \tag{43}$$

где $\mathcal{L}(x)w$ – это линейный дифференциальный оператор,

$$\mathcal{L}(x)w = \sum_{l=0}^{n} a_l\, x^l\, w^{(l)},$$

$\mathcal{L}(x)w \not\equiv 0$, a_l – комплексные постоянные, носитель $\mathbf{S}(\mathcal{L}(x)u) = (0,1)$, причем $(0,1)$ – это вершина многоугольника $\Gamma(f_0)$. Функция $g(x, w, w', \dots, w^{(n)})$ может содержать члены, зависящие только от x, члены, линейные по w, w', $\dots$, $w^{(n)}$, например, члены вида

$$c\, x^{\alpha+1} \frac{d^\alpha u}{dx^\alpha},\ \ \alpha \in \mathbb{Z},\ 0 \le \alpha \le n,\ c = \mathrm{const} \in \mathbb{C},$$

и члены нелинейные по w, w', $\dots$, $w^{(n)}$.

Уравнение (43) имеет формальное решение

$$w = \sum_{k=m+1}^{\infty} c_k x^{s_k - s_{m+1}}, \tag{44}$$

где $s_k \in \mathbb{Z}$, $-\infty < s_0 < s_1 < \dots$, $c_k = \mathrm{const} \in \mathbb{C}$, $c_k \ne 0$.

В работе [1] (гл. 1, § 7) с помощью метода мажорант и методов степенной геометрии доказана

Теорема. *Если в уравнении* (43) *порядок старшей производной в* $\mathcal{L}(x)w$ *равен порядку старшей производной в многочлене* $f_0(x, w, w', \dots, w^{(n)})$, *тогда ряд* (44) *сходится для достаточно малых* $|x|$.

Список литературы

1. Брюно А.Д., Горючкина И.В. Асимптотические разложения решений шестого уравнения Пенлеве // Труды московского математического общества. 2010. **71**. С. 6–118.

2. Брюно А.Д. Асимптотики и разложения решений обыкновенного дифференциального уравнения // УМН. 2004. **59**. №3. С. 31–80.