ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 88 за 2012 г.

Зайцев Н.А.

Усеченные условия полной прозрачности на открытых границах в изотропных средах

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Зайцев Н.А. Усеченные условия полной прозрачности на открытых границах в изотропных средах // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2012. № 88. 16 с. URL: http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2012-88

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ ИМ. М. В. КЕЛДЫША

Н. А. Зайцев

УСЕЧЕННЫЕ УСЛОВИЯ ПОЛНОЙ ПРОЗРАЧНОСТИ НА ОТКРЫТЫХ ГРАНИЦАХ В ИЗОТРОПНЫХ СРЕДАХ

Москва — 2012

Н. А. Зайцев. *Усеченные условия полной прозрачности на открытых границах в изотропных средах.*

Аннотация. В препринте приведены формулы Усеченных Условий Полной Прозрачности (УУПП) для изотропной упругой среды для всех границ трехмерной области, предложена методика модификации УУПП на ребрах и в вершинах расчетной области, предложена разностная схема для расчета УУПП, проведено сравнение УУПП с характеристическими граничными условиями, исследована зависимость амплитуды отраженной волны от размера расчетной области.

Ключевые слова: искусственные граничные условия, прозрачные граничные условия, изотропная упругая среда.

N. A. Zaitsev. *Truncated Transparent Boundary Conditions on Open Boundaries for Isotropic Elastic Media*

Abstract. Formulas for Truncated Transparent Boundary Conditions (TTBC) for isotropic media are presented for all boundaries of 3D computational domain. A method for modification of the TTBC at edges and vertexes of computational domains and the corresponding finite-difference scheme are suggested. The TTBC are compared to known characteristic boundary condition. Dependency of amplitude of the reflected wave on size of the computational domain is investigated.

Key words: far-field boundary conditions, transparent boundary conditions, isotropic elastic media.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проекты № 11-01-00114 и № 10-01-00567.

Оглавление

1. Вводные замечания

Постановка условий полной прозрачности (УПП) на гладких внешних границах расчётной области разработана достаточно хорошо теоретически и технологически [1 – 4]. Для линейных задач с постоянными коэффициентами и простыми границами (сфера, окружность, прямая) коэффициенты оператора УПП могут зачастую быть вычислены аналитически [5 – 7]. Для задач с переменными коэффициентами или границами более сложной формы для вычисления коэффициентов оператора УПП необходимо решить численно определённое количество вспомогательных задач с очень высокой точностью (порядка 10**(-12) и выше). В результате полученный оператор УПП является полностью эквивалентным решению задачи во внешней отброшенной области. Эффективные методы решения таких задач разработаны в работах [1 – 4].

Тем не менее, такие расчёты являются весьма трудоёмкими. Основные усилия при построении УПП тратятся на отыскание нелокальной части оператора. В то же время, как показано в [8], для широкого класса гиперболических систем дифференциальная, т.е. локальная, часть оператора находится аналитически. В работе [8] предложено также рассматривать получаемые дифференциальные уравнения на границе в качестве приближенных УПП, что позволяет называть их усеченными условиями полной прозрачности (УУПП), которые получаются из УПП отбрасыванием нелокальной части оператора.

В настоящей работе разработан численный алгоритм реализации УУПП в трехмерных задачах для уравнений Навье, описывающих линейную упругую среду, и исследованы его свойства. Исследована зависимость величины отраженного сигнала от границ с УУПП, проведено сравнение с более простыми характеристическими граничными условиями.

2. УУПП для изотропной упругой среды

Предполагается, что в окрестности открытой границы расчетной области и всюду вне её распространение волн описывается уравнениями Ламе

$$\rho \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2} = \left(\lambda + \mu\right) \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{u} + \mu \Delta \vec{u} \qquad (1)$$

с постоянными коэффициентами Ламе λ и μ, где $\vec{u} = \left(u_1, u_2, u_3\right)^T$ — вектор перемещений. Тогда в точке границы $x_1 = x_{\max} = const$ (расчетная область расположена слева от границы) УУПП имеет вид:

$$\frac{\partial u_1}{\partial t}+c_P\frac{\partial u_1}{\partial x_1}+\left(c_P-c_S\right)\frac{\partial u_2}{\partial x_2}+\left(c_P-c_S\right)\frac{\partial u_3}{\partial x_3}=0,$$
$$\frac{\partial u_2}{\partial t}+\left(c_P-c_S\right)\frac{\partial u_1}{\partial x_2}+c_S\frac{\partial u_2}{\partial x_1}=0,$$
$$\frac{\partial u_3}{\partial t}+\left(c_P-c_S\right)\frac{\partial u_1}{\partial x_3}+c_S\frac{\partial u_3}{\partial x_1}=0,$$

где

$$c_P=\sqrt{\frac{\lambda+2\mu}{\rho}},\quad c_S=\sqrt{\frac{\mu}{\rho}},$$

$\left(x_1,x_2,x_3\right)$ — Декартовы координаты.

В матричной форме УУПП для границы $x_n=const$ можно записать в следующем виде:

$$\frac{\partial\vec{u}}{\partial t}+B_{n1}\frac{\partial\vec{u}}{\partial x_1}+B_{n2}\frac{\partial\vec{u}}{\partial x_2}+B_{n3}\frac{\partial\vec{u}}{\partial x_3}=0.$$

Матрицы граничного оператора УУПП для правых границ, т.е. для случая, когда граница проходит через точки расчетной области с максимальным значением x_n, имеют вид:

$$B_{11}=\begin{pmatrix}c_P&0&0\\0&c_S&0\\0&0&c_S\end{pmatrix},\quad B_{12}=\begin{pmatrix}0&c_P-c_S&0\\c_P-c_S&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\quad B_{13}=\begin{pmatrix}0&0&c_P-c_S\\0&0&0\\c_P-c_S&0&0\end{pmatrix}$$

$$B_{21}=\begin{pmatrix}0&c_P-c_S&0\\c_P-c_S&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\quad B_{22}=\begin{pmatrix}c_S&0&0\\0&c_P&0\\0&0&c_S\end{pmatrix},\quad B_{23}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&c_P-c_S\\0&c_P-c_S&0\end{pmatrix}$$

$$B_{31}=\begin{pmatrix}0&0&c_P-c_S\\0&0&0\\c_P-c_S&0&0\end{pmatrix},\quad B_{32}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&c_P-c_S\\0&c_P-c_S&0\end{pmatrix},\quad B_{33}=\begin{pmatrix}c_S&0&0\\0&c_S&0\\0&0&c_P\end{pmatrix}$$

Для левых границ эти матрицы умножаются на -1.

3. Общая идея разностной схемы

Пусть ν — та координата x_n, которая перпендикулярна искусственной границе, а τ_1 и τ_2 — касательные к границе координаты. Тогда около границы $\nu = const$ УУПП могут быть записаны следующим образом:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + B_\nu \frac{\partial u}{\partial \nu} = R_\nu = -B_{\tau 1}\frac{\partial u}{\partial \tau_1} - B_{\tau 2}\frac{\partial u}{\partial \tau_2} \tag{2}$$

— слагаемые с касательными производными перенесены в правую часть (здесь и далее стрелки над векторами опущены).

В плоскости (ν, t) УУПП аппроксимируются в полуцелой по времени и нормали точке (красная точка на рис 1, граница обозначена двойной штриховой линией, M — номер расчетной точки по направлению ν, лежащей за искусственной границей, на рисунках искусственная граница расположена «справа» от расчетной области). Предполагается, что в синих, голубых и желтых точках решение на «новом», n+1ом временном слое уже известны, нужно найти решение в зелёной точке. Производные по времени и нормали (ν) вычисляются по четырём точкам (по квадрату).

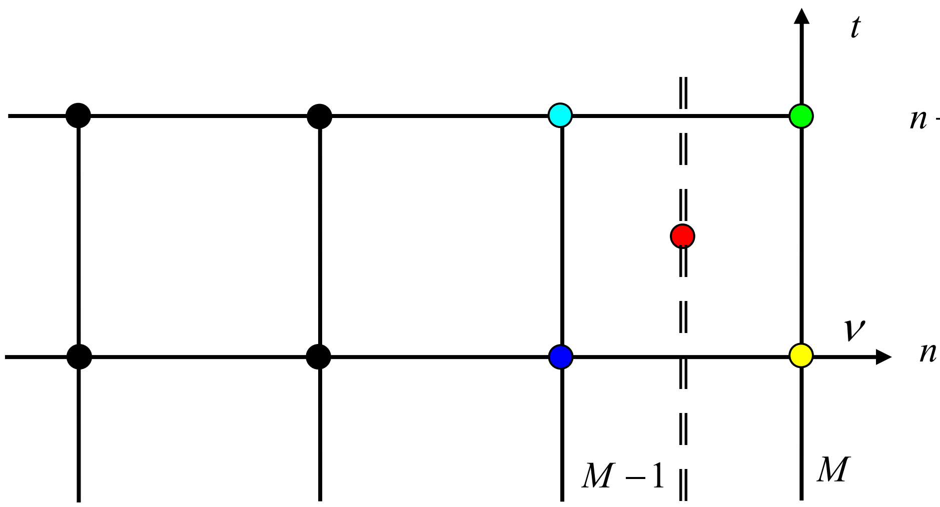

Рис.1. Шаблон разностной схемы в плоскости (ν, t)

Касательные производные аппроксимируются центральными разностями внизу справа (желтые точки, относятся к старому слою по времени) и вверху слева (голубые точки) и взвешиваются с весом w_n для слоя $t = t^n$ (в приведенных в этой работе расчетах использовалось значение $w_n = 0.5$). В плоскости (τ, ν) шаблон показан на рис. 2.

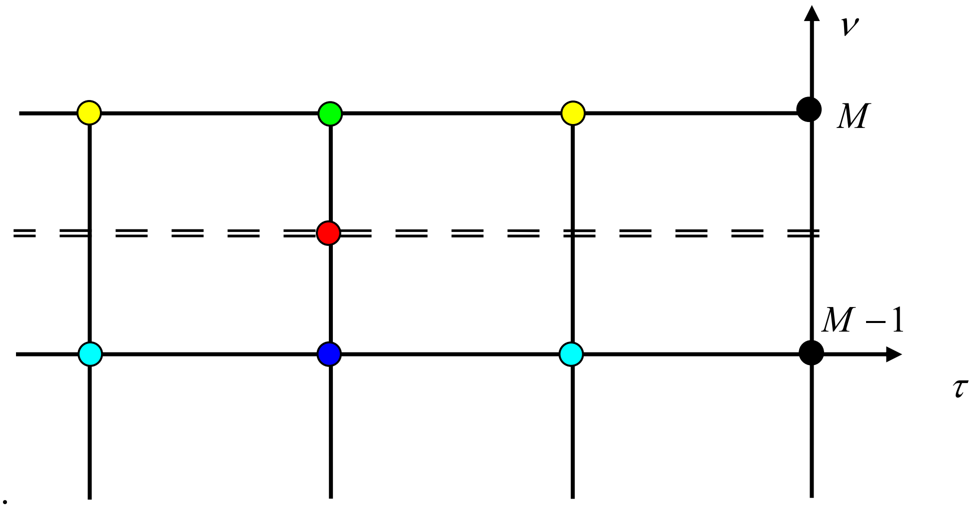

Рис. 2. Шаблон разностной схемы в плоскости (τ, ν)

Вблизи ребра расчетной области аппроксимировать касательные производные центральными разностями нет возможности, т.к. в точках границы на новом временном слое решение еще неизвестно. В этом случае касательная производная на новом временном слое вычисляется по двум точкам, в которых решение известно, а на старом временном слое — по двум примыкающем к границе точкам, и эти значения взвешиваются с весом w_n. На рис. 3 показан шаблон разностной схемы при аппроксимации УУПП на границе $\nu_1 = const$ в соседней с границей $\nu_2 = const$ точке.

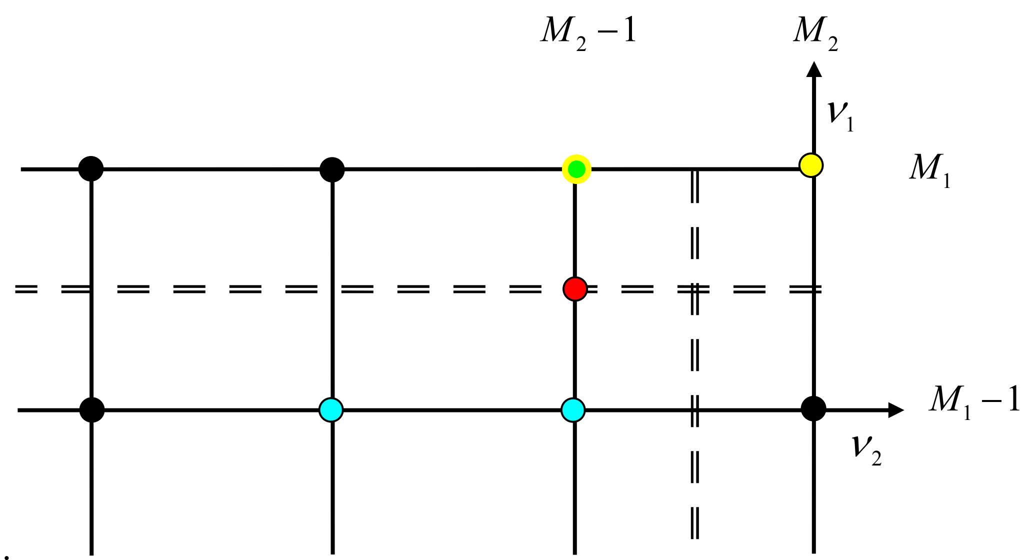

Рис. 3. Шаблон разностной схемы в плоскости (ν_1, ν_2)

Решение в точке на ребре вычисляется после того, как посчитаны все точки вне рёбер. Это позволяет аппроксимировать производные в полуцелой точке по обоим нормальным направлениям, оставаясь в рамках явного алгоритма.

На ребре расчетной области требуют изменения и сами УУПП. Нельзя не делать различий между матрицами при производных по нормали и по касательным: матрицами B_ν и B_τ имеют разные свойства. Разница между ними существенная: матрица при производной по нормали B_ν устроена так, что обеспечивает распространение возмущений вдоль нормали к грани в одном направлении, из расчётной области наружу, и задача поставлена корректно. Матрица B_τ при производной по касательной соответствует распространению возмущений вдоль направления τ в обоих направлениях. Поэтому приписывание точки на ребре к одной из границ и использование касательных матриц неправильно, т.к. нарушает принцип причинности: решение на новом слое рассчитывается без использования направлений распространения информации с той стороны, которые подразумеваются решаемой системой дифференциальных уравнений. На ребре, где оба направления являются нормальными, нужно матрицу B_τ заменить на соответствующую матрицу при производных по нормали к второй из образующих ребро грани.

Таким образом, в УУПП на ребре используются две матрицы при производной по нормали от УУПП на двух гранях расчетной области. Матрица при производной вдоль ребра видимого смысла не имеет, т.к. уравнения УУПП в [8] выводились фактически в предположении бесконечной плоской или бесконечной цилиндрической границы, что в окрестности ребра категорически не выполнено. Поэтому матрица при производной вдоль ребра считается равной нулю.

Вершины расчетной области, соответственно, рассчитываются после расчёта всех точек на рёбрах с использованием трех матриц при нормальных производных от трех УУПП на трёх гранях расчетной области.

4. Разностная схема для УУПП на правой границе $x_1 = const$

Пусть численное решение $u^n_{i,j,k}$ ищется в узлах равномерной сетки с пространственными шагами

$$h_1 = (x_1)_{i+1} - (x_1)_i, \quad h_2 = (x_2)_{j+1} - (x_2)_j, \quad h_3 = (x_3)_{k+1} - (x_3)_k,$$

шагом по времени $\tau = t^{n+1} - t^n$, разностная сетка равномерна по каждому направлению и следующими границами изменения индексов:

$$i = i_{\min}, \dots, i_{\max}; \quad j = j_{\min}, \dots, j_{\max}; \quad k = k_{\min}, \dots, k_{\max}.$$

Тогда на границе $\nu \equiv x_1 = x_{\max} = const$ значение индекса расчетной точки на ней $i = I = i_{\max}$. Разностные формулы для аппроксимации производных в УУПП в точке $\left(t^{n+1/2},(x_1)_{I-1/2},(x_2)_j,(x_3)_k\right)$ выглядят следующим образом:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_{I-1/2,j,k}^{n+1/2} = \frac{u_{I,j,k}^{n+1} + u_{I-1,j,k}^{n+1} - u_{I,j,k}^{n} - u_{I-1,j,k}^{n}}{2\tau},$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)_{I-1/2,j,k}^{n+1/2} = \frac{u_{I,j,k}^{n+1} - u_{I-1,j,k}^{n+1} + u_{I,j,k}^{n} - u_{I-1,j,k}^{n}}{2h_1}$$

при $j = j_{\min}+1,\dots,j_{\max}-1$, $k = k_{\min}+1,\dots,k_{\max}-1$,

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x_2}\right)_{I-1/2,j,k}^{n+1/2} = \frac{(1-w_n)\left(u_{I-1,j+1,k}^{n+1} - u_{I-1,j-1,k}^{n+1}\right) + w_n\left(u_{I,j+1,k}^{n} - u_{I,j-1,k}^{n}\right)}{2h_2}$$

при $j = j_{\min}+2,\dots,j_{\max}-2$, $k = k_{\min}+1,\dots,k_{\max}-1$,

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x_2}\right)_{I-1/2,j,k}^{n+1/2} = \frac{(1-w_n)\left(u_{I-1,j,k}^{n+1} - u_{I-1,j-1,k}^{n+1}\right) + w_n\left(u_{I,j+1,k}^{n} - u_{I,j,k}^{n}\right)}{h_2}$$

при $j = j_{\max}-1$, $k = k_{\min}+1,\dots,k_{\max}-1$,

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x_2}\right)_{I-1/2,j,k}^{n+1/2} = \frac{(1-w_n)\left(u_{I-1,j+1,k}^{n+1} - u_{I-1,j,k}^{n+1}\right) + w_n\left(u_{I,j,k}^{n} - u_{I,j-1,k}^{n}\right)}{h_2}$$

при $j = j_{\min}+1$, $k = k_{\min}+1,\dots,k_{\max}-1$,

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x_3}\right)_{I-1/2,j,k}^{n+1/2} = \frac{(1-w_n)\left(u_{I-1,j,k}^{n+1} - u_{I-1,j,k-1}^{n+1}\right) + w_n\left(u_{I,j,k+1}^{n} - u_{I,j,k}^{n}\right)}{h_3}$$

при $j = j_{\min}+1,\dots,j_{\max}-1$, $k = k_{\min}+2,\dots,k_{\max}-2$,

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x_3}\right)_{I-1/2,j,k}^{n+1/2} = \frac{(1-w_n)\left(u_{I-1,j,k}^{n+1} - u_{I-1,j,k-1}^{n+1}\right) + w_n\left(u_{I,j,k+1}^{n} - u_{I,j,k}^{n}\right)}{h_3}$$

при $j = j_{\min}+1,\dots,j_{\max}-1$, $k = k_{\max}-1$,

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x_3}\right)_{I-1/2,j,k}^{n+1/2} = \frac{(1-w_n)\left(u_{I-1,j,k+1}^{n+1} - u_{I-1,j,k}^{n+1}\right) + w_n\left(u_{I,j,k}^{n} - u_{I,j,k-1}^{n}\right)}{h_3}$$

при $j = j_{\min}+1,\dots,j_{\max}-1$, $k = k_{\min}+1$.

Подстановка разностных производных в УУПП (2) даёт:

$$\frac{u_{I,j,k}^{n+1}+u_{I-1,j,k}^{n+1}-u_{I,j,k}^{n}-u_{I-1,j,k}^{n}}{2\tau}+B_{\nu}\frac{u_{I,j,k}^{n+1}-u_{I-1,j,k}^{n+1}+u_{I,j,k}^{n}-u_{I-1,j,k}^{n}}{2h_1}=\left(R_1\right)_{I-\frac{1}{2},j,k}^{n+1/2},$$

где

$$\left(R_1\right)_{I-\frac{1}{2},j,k}^{n+1/2}=-B_{1,2}\left(\frac{\partial u}{\partial x_2}\right)_{I-\frac{1}{2},j,k}^{n+1/2}-B_{1,3}\left(\frac{\partial u}{\partial x_3}\right)_{I-\frac{1}{2},j,k}^{n+1/2}.$$

Тогда

$$u_{I,j,k}^{n+1}=\left(\frac{1}{2\tau}E+\frac{1}{2h_1}B_{1,1}\right)^{-1}Q_1,\quad j=j_{\min}+1,\ldots,j_{\max}-1;\quad k=k_{\min}+1,\ldots,k_{\max}-1;$$

$$Q_1=\left[\left(R_1\right)_{I-1/2,j,k}^{n+1/2}-\frac{u_{I-1,j,k}^{n+1}-u_{I,j,k}^{n}-u_{I-1,j,k}^{n}}{2\tau}-B_{1,1}\frac{-u_{I-1,j,k}^{n+1}+u_{I,j,k}^{n}-u_{I-1,j,k}^{n}}{2h_1}\right].$$

Разностные формулы на остальных гранях расчетной области имеют аналогичный вид.

5. Разностная схема для УУПП на ребре

На всех гранях расчетной области УУПП имеют вид:

$$\frac{\partial u}{\partial t}+B_{n,1}\frac{\partial u}{\partial x_1}+B_{n,2}\frac{\partial u}{\partial x_2}+B_{n,3}\frac{\partial u}{\partial x_3}=0,$$

где n — номер координаты, которая пересекает границу.

На грани $i=I$ УУПП имеют вид:

$$\frac{\partial u}{\partial t}+B_{1,1}\frac{\partial u}{\partial x_1}+B_{1,2}\frac{\partial u}{\partial x_2}+B_{1,3}\frac{\partial u}{\partial x_3}=0,$$

на грани $j=J$ уравнения имеют вид:

$$\frac{\partial u}{\partial t}+B_{2,1}\frac{\partial u}{\partial x_1}+B_{2,2}\frac{\partial u}{\partial x_2}+B_{2,3}\frac{\partial u}{\partial x_3}=0.$$

Поэтому на ребре $i=I, j=J$ УУПП имеют вид:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + B_{1,1}\frac{\partial u}{\partial x_1} + B_{2,2}\frac{\partial u}{\partial x_2} = 0. \tag{3}$$

Производные для $k = k_{\min}+1,\dots,k_{\max}-1$ аппроксимируются следующим образом:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^{n+1/2}_{I-\frac{1}{2},J-\frac{1}{2},k} = \frac{u^{n+1}_{I,J,k}+u^{n+1}_{I-1,J,k}+u^{n+1}_{I,J-1,k}+u^{n+1}_{I-1,J-1,k}}{4\tau} - \frac{u^{n}_{I,J,k}+u^{n}_{I-1,J,k}+u^{n}_{I,J-1,k}+u^{n}_{I-1,J-1,k}}{4\tau},$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)^{n+1/2}_{I-\frac{1}{2},J-\frac{1}{2},k} = \frac{u^{n+1}_{I,J,k}+u^{n+1}_{I,J-1,k}+u^{n}_{I,J,k}+u^{n}_{I,J-1,k}}{4h_1} - \frac{u^{n+1}_{I-1,J,k}+u^{n+1}_{I-1,J-1,k}+u^{n}_{I-1,J,k}+u^{n}_{I-1,J-1,k}}{4h_1},$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x_2}\right)^{n+1/2}_{I-\frac{1}{2},J-\frac{1}{2},k} = \frac{u^{n+1}_{I,J,k}+u^{n+1}_{I-1,J,k}+u^{n}_{I,J,k}+u^{n}_{I-1,J,k}}{4h_2} - \frac{u^{n+1}_{I,J-1,k}+u^{n+1}_{I-1,J-1,k}+u^{n}_{I,J-1,k}+u^{n}_{I-1,J-1,k}}{4h_2}.$$

Подстановка разностных производных в УУПП (3) даёт:

$$u^{n+1}_{I,J,k} = \left(\frac{1}{\tau}E + \frac{1}{h_1}B_{1,1} + \frac{1}{h_2}B_{2,2}\right)^{-1} Q_{1,2},$$

где $k = k_{\min}+1,\dots,k_{\max}-1$,

$$Q_{1,2} = -\frac{u^{n+1}_{I-1,J,k}+u^{n+1}_{I,J-1,k}+u^{n+1}_{I-1,J-1,k}-u^{n}_{I,J,k}-u^{n}_{I-1,J,k}-u^{n}_{I,J-1,k}-u^{n}_{I-1,J-1,k}}{\tau}$$
$$-B_{1,1}\frac{u^{n+1}_{I,J-1,k}+u^{n}_{I,J,k}+u^{n}_{I,J-1,k}-u^{n+1}_{I-1,J,k}-u^{n+1}_{I-1,J-1,k}-u^{n}_{I-1,J,k}-u^{n}_{I-1,J-1,k}}{h_1}$$
$$-B_{2,2}\frac{u^{n+1}_{I-1,J,k}+u^{n}_{I,J,k}+u^{n}_{I-1,J,k}-u^{n+1}_{I,J-1,k}-u^{n+1}_{I-1,J-1,k}-u^{n}_{I,J-1,k}-u^{n}_{I-1,J-1,k}}{h_2}.$$

Решение на остальных рёбрах расчётной области вычисляется аналогично.

6. Разностная схема для УУПП в углах расчётной области

В углах (вершинах) расчетной области используются три матрицы при нормальных производных от УУПП на трёх гранях расчетной области. В вершине $(i=I, j=J, k=K)$ УУПП имеют вид:

$$\frac{\partial u}{\partial t}+B_{1,1}\frac{\partial u}{\partial x_1}+B_{2,2}\frac{\partial u}{\partial x_2}+B_{3,3}\frac{\partial u}{\partial x_3}=0\,. \tag{4}$$

Производные в уравнении (4) для вершины $(i=I, j=J, k=K)$ аппроксимируются следующим образом:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^{n+1/2}_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2},k-\frac{1}{2}}=\frac{u^{n+1}_{i,j,k}+u^{n+1}_{i-1,j,k}+u^{n+1}_{i,j-1,k}+u^{n+1}_{i,j,k-1}+u^{n+1}_{i,j-1,k-1}+u^{n+1}_{i-1,j,k-1}+u^{n+1}_{i-1,j-1,k}+u^{n+1}_{i-1,j-1,k-1}}{8\tau}$$
$$-\frac{u^{n}_{i,j,k}+u^{n}_{i-1,j,k}+u^{n}_{i,j-1,k}+u^{n}_{i,j,k-1}+u^{n}_{i,j-1,k-1}+u^{n}_{i-1,j,k-1}+u^{n}_{i-1,j-1,k}+u^{n}_{i-1,j-1,k-1}}{8\tau},$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)^{n+1/2}_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2},k-\frac{1}{2}}=\frac{u^{n+1}_{i,j,k}+u^{n+1}_{i,j-1,k}+u^{n+1}_{i,j,k-1}+u^{n+1}_{i,j-1,k-1}+u^{n}_{i,j,k}+u^{n}_{i,j-1,k}+u^{n}_{i,j,k-1}+u^{n}_{i,j-1,k-1}}{8h_1}$$
$$-\frac{u^{n+1}_{i-1,j,k}+u^{n+1}_{i-1,j-1,k}+u^{n+1}_{i-1,j,k-1}+u^{n+1}_{i-1,j-1,k-1}+u^{n}_{i-1,j,k}+u^{n}_{i-1,j-1,k}+u^{n}_{i-1,j,k-1}+u^{n}_{i-1,j-1,k-1}}{8h_1},$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x_2}\right)^{n+1/2}_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2},k-\frac{1}{2}}=\frac{u^{n+1}_{i,j,k}+u^{n+1}_{i-1,j,k}+u^{n+1}_{i,j,k-1}+u^{n+1}_{i-1,j,k-1}+u^{n}_{i,j,k}+u^{n}_{i-1,j,k}+u^{n}_{i,j,k-1}+u^{n}_{i-1,j,k-1}}{8h_2}$$
$$-\frac{u^{n+1}_{i,j-1,k}+u^{n+1}_{i-1,j-1,k}+u^{n+1}_{i,j-1,k-1}+u^{n+1}_{i-1,j-1,k-1}+u^{n}_{i,j-1,k}+u^{n}_{i-1,j-1,k}+u^{n}_{i,j-1,k-1}+u^{n}_{i-1,j-1,k-1}}{8h_2},$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x_3}\right)^{n+1/2}_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2},k-\frac{1}{2}}=\frac{u^{n+1}_{i,j,k}+u^{n+1}_{i-1,j,k}+u^{n+1}_{i,j-1,k}+u^{n+1}_{i-1,j-1,k}+u^{n}_{i,j,k}+u^{n}_{i-1,j,k}+u^{n}_{i,j-1,k}+u^{n}_{i-1,j-1,k}}{8h_3}$$
$$-\frac{u^{n+1}_{i,j,k-1}+u^{n+1}_{i-1,j,k-1}+u^{n+1}_{i,j-1,k-1}+u^{n+1}_{i-1,j-1,k-1}+u^{n}_{i,j,k-1}+u^{n}_{i-1,j,k-1}+u^{n}_{i,j-1,k-1}+u^{n}_{i-1,j-1,k-1}}{8h_3}.$$

Решение в вершине $(i=I, j=J, k=K)$ рассчитывается по следующей формуле:

$$u^{n+1}_{i,j,k}=\left(\frac{1}{\tau}E+\frac{B_{1,1}}{h_1}+\frac{B_{2,2}}{h_2}+\frac{B_{3,3}}{h_3}\right)^{-1}\left(\frac{1}{\tau}d_{0,0}-\frac{B_{1,1}}{h_1}d_{1,1}-\frac{B_{2,2}}{h_2}d_{2,2}-\frac{B_{3,3}}{h_3}d_{3,3}\right),$$

где

$$d_{0,0}=u^{n}_{i,j,k}+u^{n}_{i-1,j,k}+u^{n}_{i,j-1,k}+u^{n}_{i,j,k-1}+u^{n}_{i,j-1,k-1}+u^{n}_{i-1,j,k-1}+u^{n}_{i-1,j-1,k}+u^{n}_{i-1,j-1,k-1}$$
$$-u^{n+1}_{i-1,j,k}-u^{n+1}_{i,j-1,k}-u^{n+1}_{i,j,k-1}-u^{n+1}_{i,j-1,k-1}-u^{n+1}_{i-1,j,k-1}-u^{n+1}_{i-1,j-1,k}-u^{n+1}_{i-1,j-1,k-1};$$

$$d_{1,1}=u^{n+1}_{i,j-1,k}+u^{n+1}_{i,j,k-1}+u^{n+1}_{i,j-1,k-1}+u^{n}_{i,j,k}+u^{n}_{i,j-1,k}+u^{n}_{i,j,k-1}+u^{n}_{i,j-1,k-1}-u^{n+1}_{i-1,j,k}$$
$$-u^{n+1}_{i-1,j-1,k}-u^{n+1}_{i-1,j,k-1}-u^{n+1}_{i-1,j-1,k-1}-u^{n}_{i-1,j,k}-u^{n}_{i-1,j-1,k}-u^{n}_{i-1,j,k-1}-u^{n}_{i-1,j-1,k-1};$$

$$d_{2,2}=u^{n+1}_{i-1,j,k}+u^{n+1}_{i,j,k-1}+u^{n+1}_{i-1,j,k-1}+u^{n}_{i,j,k}+u^{n}_{i-1,j,k}+u^{n}_{i,j,k-1}+u^{n}_{i-1,j,k-1}-u^{n+1}_{i,j-1,k}$$
$$-u^{n+1}_{i-1,j-1,k}-u^{n+1}_{i,j-1,k-1}-u^{n+1}_{i-1,j-1,k-1}-u^{n}_{i,j-1,k}-u^{n}_{i-1,j-1,k}-u^{n}_{i,j-1,k-1}-u^{n}_{i-1,j-1,k-1};$$

$$d_{3,3}=u^{n+1}_{i-1,j,k}+u^{n+1}_{i,j-1,k}+u^{n+1}_{i-1,j-1,k}+u^{n}_{i,j,k}+u^{n}_{i-1,j,k}+u^{n}_{i,j-1,k}+u^{n}_{i-1,j-1,k}-u^{n+1}_{i,j,k-1}$$
$$-u^{n+1}_{i-1,j,k-1}-u^{n+1}_{i,j-1,k-1}-u^{n+1}_{i-1,j-1,k-1}-u^{n}_{i,j,k-1}-u^{n}_{i-1,j,k-1}-u^{n}_{i,j-1,k-1}-u^{n}_{i-1,j-1,k-1}.$$

Решение в остальных вершинах вычисляется аналогично.

7. Сравнение УУПП с характеристическим ГУ

Для выяснения качества УУПП было проведено сравнение граничного условия (2) с граничным условием

$$\frac{\partial u}{\partial t}+B_\nu\frac{\partial u}{\partial \nu}=0, \tag{5}$$

которое отличается от условия (2) отбрасыванием слагаемых с касательными к границе производными. Это граничное условие известно в литературе как условие Клейтона-Энквиста первого рода (см., например, [9]).

Решалась следующая задача: упругая среда с параметрами $\lambda=14$, $\mu=2$, $\rho=2$, $c_P=3$, $c_S=1$, заполняющая куб со стороной ребра 2, в начальный момент времени находилась в покое. В начальный момент времени включается источник в правой части уравнения Ламе (1) следующего вида:

$$S=\frac{10^5}{2}\nabla\exp\left(-\left(\vec r-\vec r_0\right)^2/0.32-\left(t-t_0\right)^2/0.0032\right),$$

где $\vec r=\left(x,y,z\right)$, $\vec r_0=\left(1,1,1\right)/2$, $t_0=0.05$. Всюду на границах расчетной области ставились УУПП за исключением границы $x\equiv x_1=x_{\max}$, на которой ставилось условие (5).

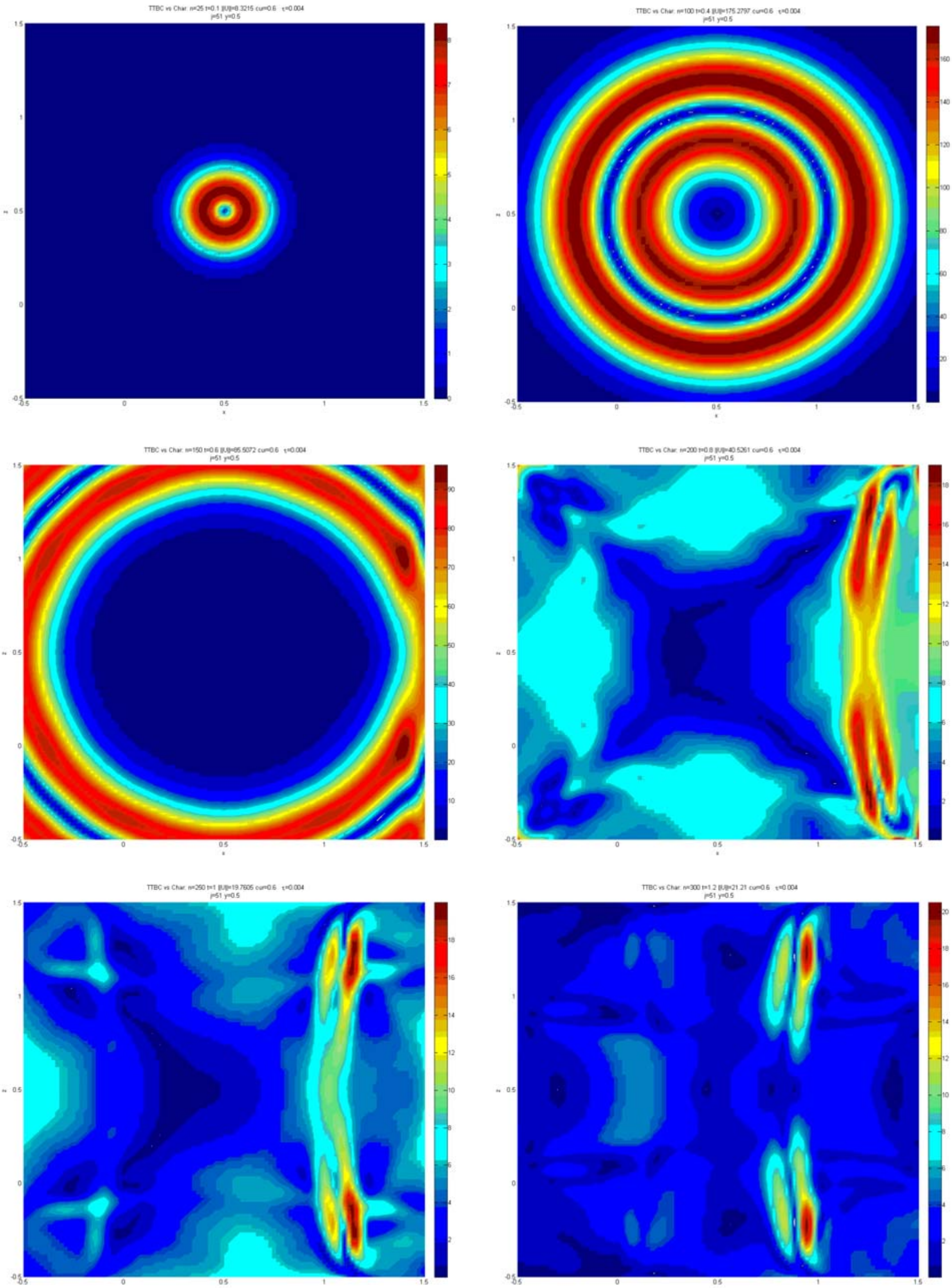

Рис. 4. Поле модуля вектора u в срединном сечении расчетной области в различные моменты времени: $t=0.1$, $t=0.4$, $t=0.6$, $t=0.8$, $t=1.0$, $t=1.2$

На рис. 4 показано поле модуля вектора u в срединном сечении расчетной области в различные моменты времени: $t=0.1$, $t=0.4$, $t=0.6$, $t=0.8$, $t=1.0$, $t=1.2$. Видно, что решение, которое в начальные моменты времени было симметричным, после взаимодействия с границей $x=x_{max}$, на котором поставлено условие (5), теряет свою симметрию, разбегающаяся от центра расчетной области сферическая волна отражается от правой границы видимым образом. Отражение от границ с УУПП тоже есть (должно быть), но оно практически незаметно в сравнении с отражением от границы с характеристическим граничным условием.

8. Зависимость отражения от размера расчетной области

Для выяснения зависимости амплитуды отраженной волны от границы с УУПП, приходящей в фиксированную точку расчетной области, от размеров расчетной области была проведена серия расчетов с фиксированным шагом расчетной сетки в областях различного размера.

Расчеты проводились на сетке с постоянным шагом $h_x=h_y=h_z=10$, центр источника находился в центре расчётной области, ресивер (приёмник) находился в самом сложном для искусственных ГУ направлении, на диагонали расчётной области: $x_R=y_R=z_R=500$. Расчеты проводились в кубических областях с расстоянием от центра до грани куба 1000, 2000 и 4000.

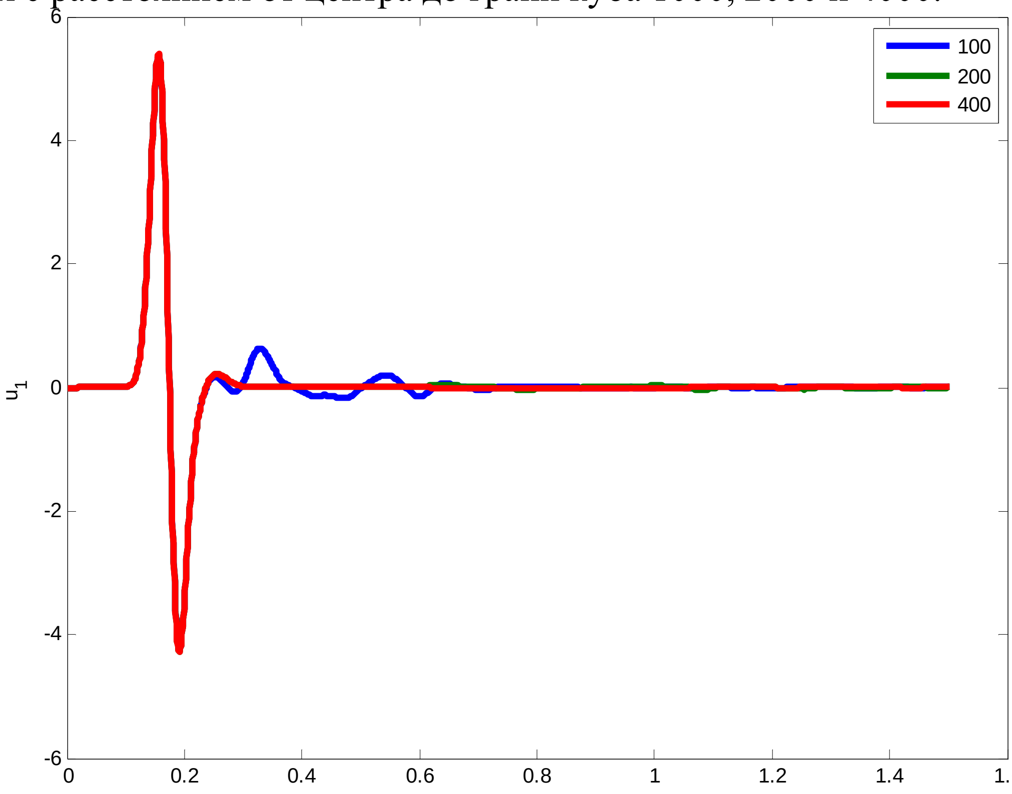

Рис. 5. Зависимость решения в ресивере от времени для различных областей: 100, 200 и 400 ячеек от центра до границы расчетной области.

На рис. 5 показана зависимость $u_1(t)$ в ресивере для различных областей. Т.к. сетки в расчетных областях совпадают, то отличие решений может быть обусловлено только различием отражения от границы. Вычитание из решения в меньшей области решение в большей области дает ошибку вызванную отражением от границы (пока в решении в большей области тоже не скажется отражение, но оно приходит позже). Графики из рис. 5 показаны в увеличенном масштабе на рис. 6, где отчетливо видна амплитуда отраженного сигнала.

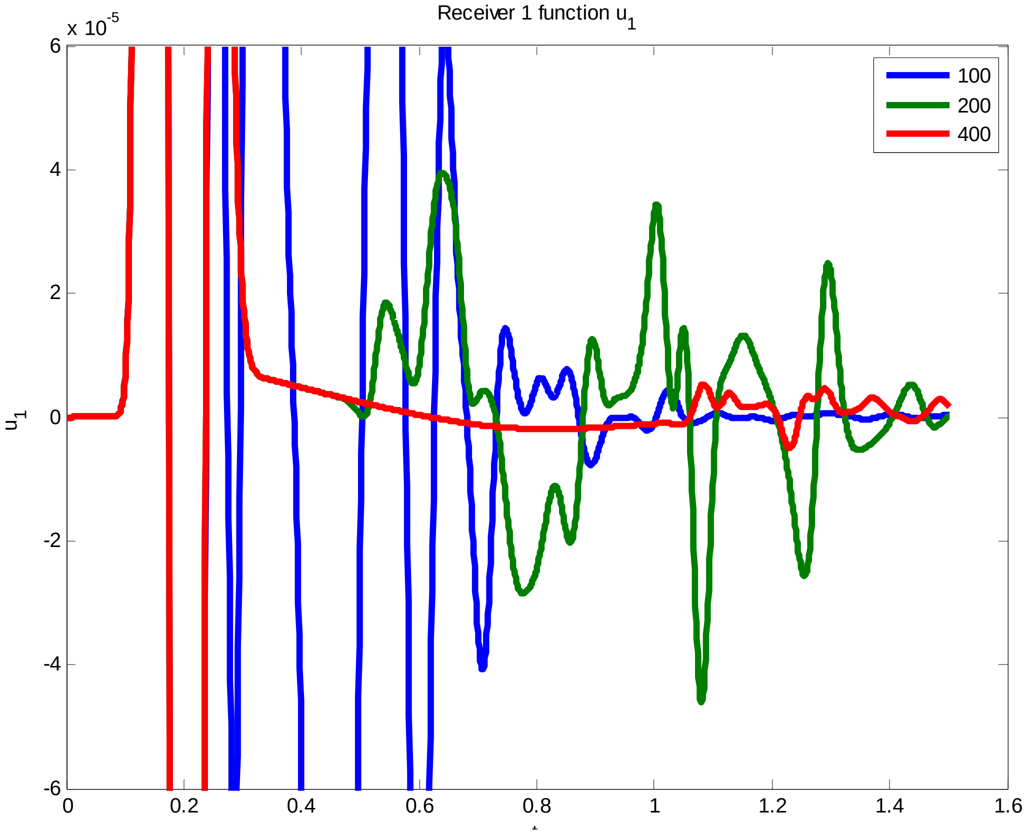

Рис. 6. Зависимость решения в ресивере от времени для различных областей: 100, 200 и 400 ячеек от центра до границы расчетной области (в увеличенном масштабе)

Полученные таким образом амплитуды отражения от границ приведены в Таблице 1. Из полученных результатов следует, что при увеличении области в 2 раза, амплитуда отраженной от границы с УУПП волны убывает примерно в 10 раз.

Таблица 1

Расстояние от центра до границы расчетной области	Максимальная относительная величина u_1 в отраженной волне
1000	1.1e-01
2000	9.3e-03
4000	9.8e-04

Список литературы

1. Sofronov, I. L., N. A. Zaitsev, Non-reflecting boundary conditions for 2D anisotropic elastodynamics, PAMM, v. 6, Iss. 1, 611 – 612 (2007)
2. Зайцев Н. А., Софронов И. Л., Применение прозрачных граничных условий для решения двумерных задач упругости с азимутальной анизотропией, Матем. моделирование, т. 19, №8, 49 – 54 (2007)
3. Sofronov I.L., Zaitsev N.A., Transparent boundary conditions for the elastic waves in anisotropic media, Hyperbolic Problems: Theory, Numerics, Applications. Eds. Benzoni-Gavage, Serre. Springer Verlag, pp. 997–1004 (2008)
4. Sofronov I.L., Zaitsev N.A., Numerical generation of transparent boundary conditions on the side surface of a vertical transverse isotropic layer, Journal of Computational and Applied Mathematics, Online publication: 21-AUG-2009; V. 234, Issue 6 ,1732 – 1738 (2010)
5. Софронов И.Л., Условия полной прозрачности на сфере для трехмерного волнового уравнения, ДАН, 1992, т. 326, № 6, стр. 453 – 457
6. Sofronov, I. L. Non-reflecting inflow and outflow in wind tunnel for transonic time-accurate simulation, J. Math. Anal. Appl., V. 221, (1998) 92 – 115.
7. Sofronov, I. L. Artificial boundary conditions of absolute transparency for two- and three-dimensional external time-dependent scattering problems, Euro. J. Appl. Math., V.9, No.6 (1998) 561 – 588.
8. Софронов И.Л. Дифференциальная часть прозрачных граничных условий для некоторых гиперболических систем уравнений второго порядка. — ДАН, 2009, том 426, № 5, с. 602 – 604.
9. Higdon R. L. Absorbing boundary conditions for elastic waves, Geophysics, vol. 56, № 2, c. 231 – 241.