

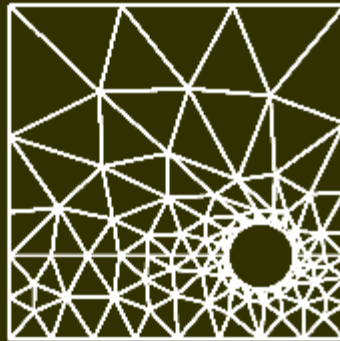


ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Универсальная многосеточная технология

С.И. Мартыненко

Универсальная многосеточная технология



Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Мартыненко С.И. Универсальная многосеточная технология. М.: ИПМ им. М.В.Келдыша. 2013. 244 с. URL: http://library.keldysh.ru/prep_vw.asp?pid=3715

С.И. Мартыненко

Универсальная
многосеточная
ТЕХНОЛОГИЯ

Под редакцией М.П. Галанина

Москва
ИПМ им. М.В. Келдыша
2013

УДК 519.6
ББК 22.193
М 294

С.И. Мартыненко

Универсальная многосеточная технология. – М.: ИПМ им. М.В. Келдыша, 2013. – 243 с.

ISBN 978-5-98354-011-8

В монографии изложены теоретические основы и прикладные аспекты геометрических многосеточных методов. Основное внимание уделено построению эффективного многосеточного алгоритма с минимальным количеством проблемно-зависимых компонент для численного решения (не)линейных краевых задач математической физики на регулярных сетках. Дано подробное описание основных компонент, доказана сходимость, выполнен анализ трудоёмкости и возможности распараллеливания вычислений. Приведены примеры построения многосеточных алгоритмов для решения уравнений Навье-Стокса. Показана возможность решения широкого класса прикладных задач унифицированным многосеточным методом.

Для студентов старших курсов технических университетов, аспирантов и инженеров. Материал книги будет полезен разработчикам программного обеспечения для моделирования физических процессов в области авиационной и ракетно-космической техники, энергомашиностроения, химической технологии и других отраслей машиностроения.

Под редакцией М.П. Галанина

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (проект №12-01-00109).

УДК 519.6
ББК 22.193

ISBN 978-5-98354-011-8

© Мартыненко С.И., 2013
© ИПМ им. М.В. Келдыша, 2013

ОБОЗНАЧЕНИЯ

- A – матрица коэффициентов СЛАУ (с. 13)
- \mathcal{E} – ошибка численного решения (с. 36)
- E_p – эффективность параллельного алгоритма (с. 139)
- G^v – множество точек сетки (с. 73)
- G^f – множество точек сетки (с. 73)
- G_k^l – k -ая сетка уровня l
- I – единичная матрица
- L^+ – номер уровня с самыми грубыми сетками (с. 77)
- M – матрица многосеточных итераций (с. 111)
- \mathcal{N} – нелинейный оператор
- \mathcal{P} – оператор продолжения (с. 39)
- \mathcal{R} – оператор сужения (с. 39)
- Re – число Рейнольдса (с. 165)
- S – матрица итераций (с. 21)
- S_p – ускорение параллельного алгоритма (с. 139)
- T – температура
- W – предобуславливатель (с. 20)
- Δ – оператор Лапласа (с. 166)
- ∇ – оператор Гамильтона (с. 167)

- Ω – область
- $\partial\Omega$ – граница области
- a_{ij} – элементы матрицы A
- c – поправка
- d – размерность задачи: $d = 2, 3$
- $\det A$ – определитель матрицы A
- h – шаг сетки
- κ – глубина распараллеливания (с. 141)
- p – давление
- q – номер многосеточной итерации
- t – время
- u, v – компоненты скорости
- \mathbf{x} – вектор неизвестных (с. 13)
- ε – малый параметр
- λ – коэффициент теплопроводности
- $\check{\lambda}$ – собственное значение матрицы (с. 18)
- ν – номер (сглаживающей) итерации
- ρ – плотность
- $\check{\rho}(A)$ – спектральный радиус матрицы A (с. 18)

-
- $\sigma(A)$ – спектр матрицы A (с. 18)
- τ – параметр итерационного метода (с. 20)
- ϖ – параметр релаксации
- ω – параметр
- φ_{ij} – сеточная функция (с. 23)
- $\|A\|$ – норма матрицы A (с. 19)
- $\langle r \rangle$ – среднее значение r
- $\|\mathbf{x}\|$ – норма вектора \mathbf{x} (с. 18)
- $:=$ – равенство в смысле присвоения

СОКРАЩЕНИЯ

- ВСС – вспомогательная структурированная сетка (с. 131)
- ИНС – исходная неструктурированная сетка (с. 131)
- МКЭ – метод конечных элементов (с. 131)
- МКР – метод конечных разностей (с. 33)
- КММ – классические многосеточные методы
- УМТ – универсальная многосеточная технология
- СЛАУ – система линейных алгебраических уравнений
- FAS – Full Approximation Storage (с. 63)

Нижние индексы

$\{\cdot\}$ – отображение индексов (с. 78)

x, y, z – относящийся к направлениям x, y, z

Верхние индексы

T – транспонирование

(n) – относящийся к временному слою n

(q) – относящийся к q -ой многосеточной итерации

(ν) – относящийся к ν -ой (сглаживающей) итерации

(0) – начальное приближение

x, y, z – относящийся к направлениям x, y, z

Civilization advances by extending the number of important operations which we can perform without thinking about them.

A.N. Whitehead

An Introduction to Mathematics, 1911

ВВЕДЕНИЕ

В первой половине прошлого века преобладали экспериментальные методы научных исследований. Однако уже с 50-х годов развитие авиационной, космической и атомной промышленности привело к необходимости математического моделирования теплообмена, гидродинамики, горения и других физических процессов, протекающих в элементах конструкций проектируемой техники. Весьма ограниченные возможности вычислительных машин того времени послужили причиной бурного развития вычислительной математики. Особый интерес представляли численные методы решения краевых задач.

Численное решение краевых задач приводит к необходимости решения систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) высокого порядка. Долгое время решение подобных СЛАУ составляло наиболее трудоёмкую часть вычислительных алгоритмов. Известные способы решения СЛАУ требовали чересчур большого объёма вычислительной ра-

боты и оставался открытым вопрос о возможности построения самого быстрого метода.

Эпохальным событием в вычислительной математике явилась публикация статьи Р.П. Федоренко [31], в которой автор сформулировал оригинальный итерационный метод решения разностных краевых задач, основанный на привлечении дополнительной сетки для уменьшения объёма вычислений. Позднее Р.П. Федоренко получил простейшую оценку скорости сходимости многосеточного метода при решении задачи Дирихле для уравнения Пуассона [32]. В 1966 г. Н.С. Бахвалов исследовал сходимость многосеточного метода для общего эллиптического уравнения с гладкими коэффициентами [3]. Позднее Г.П. Астраханцев получил аналогичный результат для разностной аппроксимации третьей краевой задачи для самосопряжённого эллиптического уравнения в произвольной двумерной области с гладкой границей [2]. Цикл работ [2, 3, 31, 32] в иностранной литературе называют советским периодом в многосеточных методах.

Первоначально многосеточный метод Р.П. Федоренко не получил широкого распространения. Весьма ограниченные средства отладки компьютерных программ в то время не позволили разработать соответствующие пакеты прикладных программ.

Позднее о многосеточном методе стало известно зарубежом, но только в начале 80-х годов метод получил признание и количество публикаций по данной тематике стало стремительно расти. Важным событием в истории многосеточных методов явилась монография Хакбуша [45] с изложением теоретических основ и приложений.

Основополагающая идея Р.П. Федоренко оказалась очень плодот-

творной. За прошедшие полвека многосеточные методы так и не достигли апогея своего развития: постоянно появляются новые области применения многосеточных методов, в которых они продолжают демонстрировать свою удивительную вычислительную эффективность [33].

Однако уже в 80-х годах Хакбуш заметил, что многосеточные методы не могут быть представлены в виде фиксированного алгоритма [46]. Отдельные компоненты нужно адаптировать к решаемой задаче для достижения высокой скорости сходимости. Именно адаптация компонент и послужила причиной взрывного роста количества публикаций по многосеточной тематике. Перспектива решать краевые задачи с оптимальными вычислительными усилиями выглядела очень заманчиво, но развитие многосеточных методов пошло по традиционному для 80-х годов пути адаптации отдельных компонент алгоритма к решаемой задаче. Достаточно быстро удалось разработать высокоэффективные многосеточные алгоритмы для решения уравнения Пуассона на равномерных сетках, однако усложнение решаемых краевых задач (нелинейность, анизотропия, разрывность коэффициентов и т.д.) быстро превратили классические многосеточные методы (КММ) в труднообозримое семейство алгоритмов, практически не поддающееся формализации. Из-за отсутствия четких критериев оптимальности адаптации компонент КММ к конкретной задаче трудно судить о достижимости оптимальной скорости сходимости.

Начиная с 90-х годов широкое распространение получили комплексы программ, устроенных по принципу «чёрного ящика», для решения определённых классов прикладных задач. Пользователь данного обеспечения не имеет доступа к вычислительному алгоритму, а только форму-

лирует задачу и анализирует результаты расчётов. Применение численных методов с проблемно-зависимыми компонентами в таких программах выглядит проблематично.

Сразу были предприняты многочисленные попытки разработать некий универсальный вариант КММ для решения широкого класса прикладных задач путем последовательного улучшения отдельных компонент. В настоящее время стала очевидной необходимость поиска иной формы алгоритмизации основополагающей идеи Р.П. Федоренко для последующей реализации в программах, устроенных по принципу «чёрного ящика». Такой метод для структурированных сеток разработан в начале 90-х годов и получил название «Универсальная Многосеточная Технология» (УМТ), хотя первые результаты опубликованы в 2000 г. [16]. Все компоненты УМТ, за исключением сглаживателя, не имеют аналогов в КММ. Достаточно сказать, что в УМТ фактически не используются дополнительные сетки, поэтому данный метод трудно назвать многосеточным в общепринятом смысле этого термина.

К настоящему времени опубликовано несколько монографий по многосеточным методам, которые носят справочно-обзорный характер из-за огромного количества вариантов КММ [21, 35, 45, 54, 56]. Однако существует потребность в книге, в которой основополагающая идея Р.П. Федоренко и способы её применения к решению разностных краевых задач изложены на элементарном уровне, доступном широкому кругу читателей, включая студентов старших курсов технических ВУЗов. Поэтому основные положения КММ и УМТ показаны на примере одномерных задач в “пошаговом режиме”, т.е. каждое вычислительное действие сопровождается иллюстрацией. К сожалению, для наглядности в отдельных

местах пришлось пожертвовать строгостью. Другая цель книги состоит в описании опыта применения УМТ к решению разнообразных двух- и трёхмерных задач. Иллюстративные примеры направлены на демонстрацию высокой скорости сходимости УМТ, которая достигнута без внесения каких-либо изменений в вычислительную часть технологии. Ранее опубликованные результаты систематизированы и дополнены новыми примерами.

Основное содержание книги составили основы многосеточных методов, элементарное описание КММ и УМТ, результаты вычислительных экспериментов с двух- и трёхмерными краевыми задачами и некоторые аспекты вычислительной гидродинамики.

В первой главе представлены основы многосеточных методов, приведены необходимые сведения из алгебры, дано описание классических многосеточных методов и путей их развития.

Во второй главе дано детальное описание УМТ, представлены результаты анализа сходимости, возможности распараллеливания вычислений и вычислительных экспериментов. Кратко изложены особенности компьютерной реализации.

В третьей главе показано применение УМТ к численному решению уравнений Навье-Стокса. Дано описание основных компонент многосеточного алгоритма и оригинального вычислительного приёма, связанного с декомпозицией давления.

Формулы, таблицы и рисунки имеют сквозную двузначную нумерацию, где первая цифра означает номер главы, а вторая является порядковым номером. Векторы выделены полужирным курсивом. Представление результатов вычислительных экспериментов соответствует форме,

принятой в иностранной литературе.

Данная работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект №12-01-00109). Автор выражает искреннюю признательность Михаилу Павловичу Галанину за поддержку исследований, критическое обсуждение полученных результатов и редактирование рукописи.

Верстка выполнена при помощи издательской системы \LaTeX 2 ϵ , поэтому вся ответственность за допущенные опечатки лежит исключительно на авторе.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

Сейчас мы не будем интересоваться природой задачи, которая привела к СЛАУ (1.2), однако для дальнейших построений ограничимся случаем, когда СЛАУ (1.2) имеет единственное решение, т.е. $\det A \neq 0$.

Многочисленные методы решения СЛАУ, предложенные к настоящему времени, можно подразделить на *прямые* и *итерационные*. Далее ограничимся рассмотрением только прямого метода Гаусса и итерационных методов Якоби и Зейделя, которые понадобятся для построения многосеточных алгоритмов.

Прямые методы позволяют отыскать точное решение $\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}$ за конечное количество арифметических операций при отсутствии погрешностей округления. Сначала рассмотрим важный частный случай – СЛАУ с треугольными матрицами коэффициентов. Пусть A является нижней треугольной матрицей ($a_{ij} = 0, i < j$), т.е. СЛАУ (1.1) имеет вид

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{11}x_1 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3, \\ \dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \dots + a_{nn}x_n = b_n. \end{array} \right. \quad (1.3)$$

СЛАУ (1.3) решают следующим образом: из первого уравнения находят x_1 , из второго – x_2 , и так далее:

$$x_1 = \frac{b_1}{a_{11}}, \quad x_i = \frac{1}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j \right), \quad i = 2, \dots, n.$$

Решение СЛАУ с треугольной матрицей потребует выполнения $O(n^2)$ арифметических операций. Аналогично решают СЛАУ с верхней треугольной матрицей ($a_{ij} = 0, i > j$).

Основная идея *метода Гаусса* состоит в приведении исходной СЛАУ (1.1) к треугольному виду путем последовательного исключения неизвестных. Для решения прикладных задач часто применяют метод Гаусса с выбором главного элемента с целью избежания накопления погрешностей [4, 8, 26, 30]. Компьютерная программа для реализации метода Гаусса с выбором главного элемента приведена в [19].

Следует учитывать следующие особенности метода Гаусса при использовании в многосеточных методах:

- объём вычислительной работы, необходимый для решения СЛАУ (1.1), составляет $O(n^3)$ арифметических операций. Поэтому метод Гаусса следует применять только для решения СЛАУ малого порядка;
- в методе Гаусса не используется структура матрицы коэффициентов, поэтому данный метод можно применять для матриц произвольного типа.

Итерационные методы (или методы последовательных приближений) состоят в том, что решение СЛАУ (1.1) отыскивается как предел при $\nu \rightarrow \infty$ последовательных приближений $\mathbf{x}^{(\nu)}$ к решению $\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}$, где ν – номер итерации. Как правило, за конечное число итераций этот предел не достигается, и вычисления прекращают по мере достижения некоторого условия (критерий останова итераций).

Рассмотрим следующее разложение матрицы коэффициентов A

$$A = L + D + R,$$

где матрицы L , D и R имеют вид

$$L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & 0 \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} a_{11} & & & & \\ & a_{22} & & & \\ & & a_{33} & & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ & & & & a_{nn} \end{pmatrix},$$

$$R = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & 0 & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix},$$

т.е. $L(R)$ получены заменой в матрице A всех элементов главной диагонали и над (под) ней на нули, а D образована диагональными элементами матрицы A .

Итерации *метода Якоби* определяют соотношением

$$D\mathbf{x}^{(\nu+1)} = \mathbf{b} - (L + R)\mathbf{x}^{(\nu)}, \quad \nu = 0, 1, 2, \dots$$

Поскольку матрица D является диагональной, то новое приближение к решению вычисляют следующим образом:

$$x_i^{(\nu+1)} = \frac{1}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n a_{ij} x_j^{(\nu)} \right), \quad i = 1, \dots, n.$$

В многосеточных алгоритмах метод Якоби практически не используют, однако в силу исключительной простоты его часто применяют для теоретического анализа сходимости (§ 3 гл. 1).

Итерации *метода Зейделя* определяют соотношением

$$(D + L)\mathbf{x}^{(\nu+1)} = \mathbf{b} - R\mathbf{x}^{(\nu)}, \quad \nu = 0, 1, 2, \dots \quad (1.4)$$

Поскольку матрица $D + L$ является нижней треугольной, то новое приближение к решению можно отыскать по аналогии с решением (1.3)

$$x_i^{(\nu+1)} = \frac{1}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(\nu+1)} - \sum_{j=i+1}^n a_{ij} x_j^{(\nu)} \right), \quad i = 1, \dots, n. \quad (1.5)$$

В приложениях часто используют *симметричный вариант метода Зейделя*, состоящий в последовательном выполнении итераций Зейделя с прямой и обратной нумерацией неизвестных

$$\begin{aligned} (D + L)\tilde{\mathbf{x}} &= \mathbf{b} - R\mathbf{x}^{(\nu)}, \\ (D + R)\mathbf{x}^{(\nu+1)} &= \mathbf{b} - L\tilde{\mathbf{x}}, \end{aligned}$$

т.е. сначала вычисляют промежуточное приближение к решению $\tilde{\mathbf{x}}$, затем – новое приближение $\mathbf{x}^{(\nu+1)}$.

Реализация методов Якоби и Зейделя требует задания некоторого *начального приближения* $\mathbf{x}^{(0)}$. Кроме того, диагональные элементы матрицы коэффициентов A должны быть отличны от нуля ($a_{ii} \neq 0$).

Приведём некоторые теоретические результаты, полученные для метода Зейделя. Предварительно дадим ряд определений для действительного случая. Пусть \mathbb{R}^n является векторным пространством размерности n . Каждый элемент $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ есть вектор-столбец с координатами

x_1, x_2, \dots, x_n . Матрица $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ имеет размер $n \times n$. Обозначим: A^{-1} – обратная матрица, A^T – транспонированная матрица, $\det A$ – определитель матрицы A , I – единичная матрица размера $n \times n$.

Определение. Матрица A с элементами a_{ij} называется:

- 1) диагональной, если $a_{ij} = 0, i \neq j$;
- 2) нижней (левой) треугольной, если $a_{ij} = 0, i < j$;
- 3) верхней (правой) треугольной, если $a_{ij} = 0, i > j$;
- 4) невырожденной, если $\det A \neq 0$;
- 5) матрицей со строгим диагональным преобладанием, если

$$|a_{ij}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}|, \quad i = 1, \dots, n.$$

Определение. Число $\check{\lambda}$ называется *собственным значением матрицы* A , если существует такой вектор $\check{\vartheta} \neq 0$, что $A\check{\vartheta} = \check{\lambda}\check{\vartheta}$. Этот вектор называется *собственным вектором матрицы* A , соответствующим собственному значению $\check{\lambda}$.

Определение. *Спектр матрицы* A есть совокупность её собственных значений:

$$\sigma(A) = \{\check{\lambda}_i(A), i = 1, \dots, n\}.$$

Определение. *Спектральный радиус* есть максимальный модуль собственных значений:

$$\check{\rho}(A) = \max_{1 \leq i \leq n} |\check{\lambda}_i(A)|.$$

Для $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ введём семейство норм Гельдера с показателем $p \geq 1$:

$$\|\mathbf{x}\|_p = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{1/p},$$

наиболее часто используемыми из которых являются:

1) октаэдрическая норма

$$\|\mathbf{x}\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|,$$

2) сферическая (Евклидова)

$$\|\mathbf{x}\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2},$$

3) кубическая (Чебышёвская)

$$\|\mathbf{x}\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|.$$

Введём понятие *нормы матрицы*, которое в дальнейшем понадобится для исследования сходимости итерационных методов. Пусть $\mathbb{R}^{n \times n}$ – множество матриц размера $n \times n$.

Определение. Функция $\|\cdot\| : \mathbb{R}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{R}_+$ называется нормой матрицы, если для всех матриц $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ выполнены следующие аксиомы:

- 1) $\|A\| \geq 0$, $\|A\| = 0 \Leftrightarrow A = 0$,
- 2) $\|\alpha A\| = |\alpha| \|A\|$ для любого числа α ,
- 3) $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$,
- 4) $\|AB\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$.

Приведём наиболее употребительные матричные нормы:

1) максимальная столбцовая норма

$$\|A\|_1 = \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^n |a_{ij}|,$$

2) спектральная норма

$$\|A\|_2 = \max_{1 \leq i \leq n} \sqrt{\tilde{\lambda}_i(A^T A)},$$

3) максимальная строчная норма

$$\|A\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}|,$$

4) норма Фробениуса

$$\|A\|_F = \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}^2}.$$

Установим связь между матричными и векторными нормами.

Определение. Норма матрицы $\|A\|$ называется *согласованной* с векторной нормой $\|\mathbf{x}\|$, если для любого вектора $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ справедливо

$$\|A\mathbf{x}\| \leq \|A\| \cdot \|\mathbf{x}\|.$$

Определение. Матричная норма $\|A\|$ называется *подчинённой* (операторной, индуцированной) векторной нормой $\|\mathbf{x}\|$, если

$$\|A\| = \sup_{\mathbf{x} \neq 0} \frac{\|A\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|}.$$

Далее будут использованы только матричные нормы, подчинённые каким-либо векторным нормам.

Определение. Две нормы $\|\cdot\|_\alpha$ и $\|\cdot\|_\beta$, определённые на \mathbb{R}^n , называются эквивалентными, если существуют положительные константы m и M , не зависящие от \mathbf{x} , такие, что для любого $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ выполняются неравенства

$$m\|\mathbf{x}\|_\alpha \leq \|\mathbf{x}\|_\beta \leq M\|\mathbf{x}\|_\alpha.$$

В конечномерных пространствах любые две нормы являются эквивалентными, из сходимости элементов в одной норме следует сходимость в другой.

Определение. Одношаговый (или двухслойный) итерационный метод называется стационарным, если он может быть записан в виде

$$W \frac{\mathbf{x}^{(\nu+1)} - \mathbf{x}^{(\nu)}}{\tau} + A\mathbf{x}^{(\nu)} = \mathbf{b}, \quad (1.6)$$

где матрица W называется *предобуславливателем*, а τ есть некоторый параметр.

Метод Зейделя (1.4) является одношаговым стационарным итерационным методом с $W = L + D$ и $\tau = 1$:

$$(L + D)(\mathbf{x}^{(\nu+1)} - \mathbf{x}^{(\nu)}) = \mathbf{b} - A\mathbf{x}^{(\nu)}.$$

Нетрудно получить следующую форму записи метода Зейделя

$$\mathbf{x}^{(\nu+1)} = (I - (L + D)^{-1}A) \mathbf{x}^{(\nu)} + (L + D)^{-1}\mathbf{b}.$$

Матрица $S = I - (L + D)^{-1}A$ называется *матрицей итераций* метода Зейделя. Сходимость итераций означает, что $\|\mathbf{x} - \mathbf{x}^{(\nu+1)}\| \rightarrow 0$ при $\nu \rightarrow \infty$, где $\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}$ есть точное решение.

Рассмотрим итерационные методы вида

$$\mathbf{x}^{(\nu+1)} = S\mathbf{x}^{(\nu)} + \tilde{\mathbf{b}},$$

где S есть матрица итераций, а $\tilde{\mathbf{b}}$ – известный вектор. Положим, что существует неподвижная точка \mathbf{x} такая, что

$$\mathbf{x} = S\mathbf{x} + \tilde{\mathbf{b}}.$$

Определение. Последовательность $\mathbf{x}^{(\nu)}$ сходится к \mathbf{x} с линейной скоростью, если

$$\|\mathbf{x}^{(\nu+1)} - \mathbf{x}\| \leq \omega \|\mathbf{x}^{(\nu)} - \mathbf{x}\|, \quad \nu = 0, 1, 2, \dots$$

при условии $\omega \in (0, 1)$.

Справедливы следующие теоремы:

Теорема 1.1. (*достаточное условие сходимости*) Предположим, что для матрицы итераций S справедлива оценка $\|S\| \leq \omega < 1$, тогда итерационный метод

$$\mathbf{x}^{(\nu+1)} = S\mathbf{x}^{(\nu)} + \tilde{\mathbf{b}} \tag{1.7}$$

сходится с линейной скоростью к решению \mathbf{x} при произвольном начальном приближении $\mathbf{x}^{(0)}$ и правой части $\tilde{\mathbf{b}}$ и

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{x}^{(\nu+1)}\| \leq \omega^{\nu+1} \|\mathbf{x} - \mathbf{x}^{(0)}\|$$

в соответствующей векторной норме.

Доказательство теоремы приведено в [21].

Теорема 1.2. (необходимое и достаточное условие сходимости) Итерационный метод $\mathbf{x}^{(\nu+1)} = S\mathbf{x}^{(\nu)} + \tilde{\mathbf{b}}$ сходится тогда и только тогда, когда $\rho(S) < 1$.

Доказательство теоремы приведено в [26].

Теорема 1.3. Пусть A – матрица со строгим диагональным преобладанием

$$|a_{ij}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}|, \quad i = 1, \dots, n,$$

тогда метод Зейделя сходится.

Доказательство. Из (1.5) непосредственно следует

$$y_i = -\frac{1}{a_{ii}} \left(\sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} y_j + \sum_{j=i+1}^n a_{ij} x_j \right),$$

где векторы \mathbf{y} и \mathbf{x} связаны соотношением $\mathbf{y} = S\mathbf{x}$. Рассмотрим k -ую строку системы в предположении, что $\max_{1 \leq i \leq n} |y_i| = |y_k| = \|\mathbf{y}\|_\infty$. Тогда

$$\|\mathbf{y}\|_\infty \leq \sum_{j=1}^{k-1} \left| \frac{a_{kj}}{a_{kk}} \right| |y_j| + \sum_{j=k+1}^n \left| \frac{a_{kj}}{a_{kk}} \right| |x_j| \leq \alpha_k \|\mathbf{y}\|_\infty + \beta_k \|\mathbf{x}\|_\infty,$$

где

$$\alpha_k = \sum_{j=1}^{k-1} \left| \frac{a_{kj}}{a_{kk}} \right| \quad \text{и} \quad \beta_k = \sum_{j=k+1}^n \left| \frac{a_{kj}}{a_{kk}} \right|.$$

Тогда

$$\|\mathbf{y}\|_\infty \leq \frac{\beta_k}{1 - \alpha_k} \|\mathbf{x}\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} \frac{\beta_i}{1 - \alpha_i} \|\mathbf{x}\|_\infty.$$

В силу строгого диагонального преобладания $\alpha_i + \beta_i < 1$, поэтому

$$\|S\|_\infty \leq \max_{1 \leq i \leq n} \frac{\beta_i}{1 - \alpha_i} < 1. \quad \blacksquare$$

§ 2. Модельная задача

Покажем некоторые возможные варианты применения метода Зейделя к решению задачи Дирихле для уравнения Пуассона

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= -f(x, y), & (x, y) \in \Omega, \\ u \Big|_{\partial\Omega} &= 0, \end{aligned} \quad (1.8)$$

где Ω – прямоугольник $\{(x, y) \mid 0 < x < \ell_x, 0 < y < \ell_y\}$, а $\partial\Omega$ – его граница.

Построим в области Ω равномерную вычислительную сетку Ω_h

$$\Omega_h = \{(x_i^y, y_j^y) \mid x_i^y = ih_x, i = 0, 1, \dots, N_x; y_j^y = jh_y, j = 0, 1, \dots, N_y\},$$

где $h_x = \ell_x/N_x$ и $h_y = \ell_y/N_y$ суть шаги сетки в направлениях x и y соответственно. Множество точек (x_i^y, y_j^y) называют узлами сетки. Целочисленные параметры N_x и N_y определяют величины шагов сетки (расстояния между узлами) в направлениях x и y .

Определение. Совокупность узлов сетки, которые используют для аппроксимации краевой задачи в некотором узле, называется шаблоном.

На рис. 1.1 показан пятиточечный шаблон, наиболее часто используемый для аппроксимации двумерных краевых задач. Аппроксимация исходной задачи Дирихле на выбранном пятиточечном шаблоне приводит к следующей разностной схеме:

$$\frac{\varphi_{i-1j} - 2\varphi_{ij} + \varphi_{i+1j}}{h_x^2} + \frac{\varphi_{ij-1} - 2\varphi_{ij} + \varphi_{ij+1}}{h_y^2} = -f(ih_x, jh_y). \quad (1.9)$$

Данная разностная схема сходится со вторым порядком по обеим переменным [8, 25, 26]. Сеточная функция φ_{ij} есть аналог функции $u(x, y)$.

В иностранной литературе, особенно по вычислительной гидродинамике, часто используют географические обозначения для нумерации

узлов шаблона. Перепишем схему (1.9) в общем виде

$$a_{ij}^w \varphi_{i-1j} + a_{ij}^e \varphi_{i+1j} + a_{ij}^s \varphi_{ij-1} + a_{ij}^n \varphi_{ij+1} + a_{ij}^p \varphi_{ij} = b_{ij}, \quad (1.10)$$

где верхние индексы w, e, s, n и p обозначают западный (west), восточный (east), южный (south), северный (north) и центральный (pole) узел шаблона соответственно (рис. 1.1). Заметим, что к виду (1.10) может быть сведена любая разностная краевая задача, если для её аппроксимации используют пятиточечный шаблон.

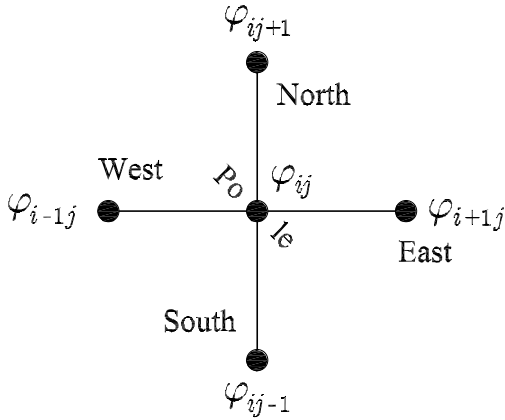


Рис. 1.1. Пятиточечный шаблон

Вычислительная сетка при $N_x = 7$ и $N_y = 5$ показана на рис. 1.2. В граничных узлах, обозначенных как \circ , значение сеточной функции φ_{ij} является известным. Задача состоит в отыскании значений φ_{ij} , $i = 1, 2, \dots, N_x - 1, j = 1, 2, \dots, N_y - 1$ во внутренних узлах сетки, обозначенных как \bullet .

Запись разностных уравнений в виде СЛАУ $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ предполагает, что неизвестные и уравнения некоторым образом упорядочены. Под упорядочиванием неизвестных будем подразумевать порядок, в котором производится уточнение компонент приближённого решения в итерационном процессе.

Рассмотрим точечное упорядочивание неизвестных вдоль линий $i = const$, показанное на рис. 1.3. Пронумеруем (упорядочим) неизвестные, как показано на рис. 1.3, и введём подвекторы $\tilde{\varphi}_i$ и $\tilde{\mathbf{b}}_i$:

$$\tilde{\varphi}_i = (\varphi_{i1}, \varphi_{i2}, \dots, \varphi_{iN_y-1})^T, \quad i = 1, 2, \dots, N_x - 1,$$

$$\tilde{\mathbf{b}}_i = (b_{i1}, b_{i2}, \dots, b_{iN_y-1})^T, \quad i = 1, 2, \dots, N_x - 1.$$

Тогда результирующая СЛАУ принимает вид

$$\begin{pmatrix} D_1 & R_1 & & & & \\ L_2 & D_2 & R_2 & & & \\ & L_3 & D_3 & R_3 & & \\ & & L_4 & D_4 & R_4 & \\ & & & L_5 & D_5 & R_5 \\ & & & & L_6 & D_6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{\varphi}_1 \\ \tilde{\varphi}_2 \\ \tilde{\varphi}_3 \\ \tilde{\varphi}_4 \\ \tilde{\varphi}_5 \\ \tilde{\varphi}_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{b}}_1 \\ \tilde{\mathbf{b}}_2 \\ \tilde{\mathbf{b}}_3 \\ \tilde{\mathbf{b}}_4 \\ \tilde{\mathbf{b}}_5 \\ \tilde{\mathbf{b}}_6 \end{pmatrix}, \quad (1.11)$$

где поддиагональ, диагональ и наддиагональ матрицы коэффициентов образованы подматрицами (блоками) следующего вида:

$$L_i = \begin{pmatrix} a_{i1}^w & & & & \\ & a_{i2}^w & & & \\ & & \dots & & \\ & & & & a_{iN_y-1}^w \end{pmatrix},$$

$$D_i = \begin{pmatrix} a_{i1}^p & a_{i1}^n & & & \\ a_{i2}^s & a_{i2}^p & a_{i2}^n & & \\ & \dots & \dots & \dots & \\ & & a_{iN_y-1}^s & a_{iN_y-1}^p & \end{pmatrix},$$

$$R_i = \begin{pmatrix} a_{i1}^e & & & & \\ & a_{i2}^e & & & \\ & & \dots & & \\ & & & & a_{iN_y-1}^e \end{pmatrix}.$$

Количество диагональных блоков D_i в данной матрице коэффициентов СЛАУ (1.11) соответствует количеству линий $i = const$ (в данном случае 6), а размеры блоков L_i , D_i и R_i – количеству неизвестных вдоль линии $i = const$ (в данном случае 4×4).

Матрица коэффициентов СЛАУ (1.11) имеет выраженную блочную структуру, причём большинство её элементов равны нулю. Поэтому для хранения данных для задачи, записанной в форме (1.10), необходимо только шесть массивов размера $(N_x - 1) \times (N_y - 1)$.

Метод Зейделя в случае, соответствующему точечному упорядочиванию, показанному на рис. 1.3, можно условно записать в виде:

```
do i = 1, N_x - 1
  do j = 1, N_y - 1
    
$$\varphi_{ij}^{(\nu+1)} = \frac{1}{a_{ij}^p} \left( b_{ij} - a_{ij}^w \varphi_{i-1j}^{(\nu+1)} - a_{ij}^e \varphi_{i+1j}^{(\nu)} - a_{ij}^s \varphi_{ij-1}^{(\nu+1)} - a_{ij}^n \varphi_{ij+1}^{(\nu)} \right)$$

  end do
end do
```

Аналогичным образом можно упорядочить неизвестные φ_{ij} вдоль линий $j = const$.

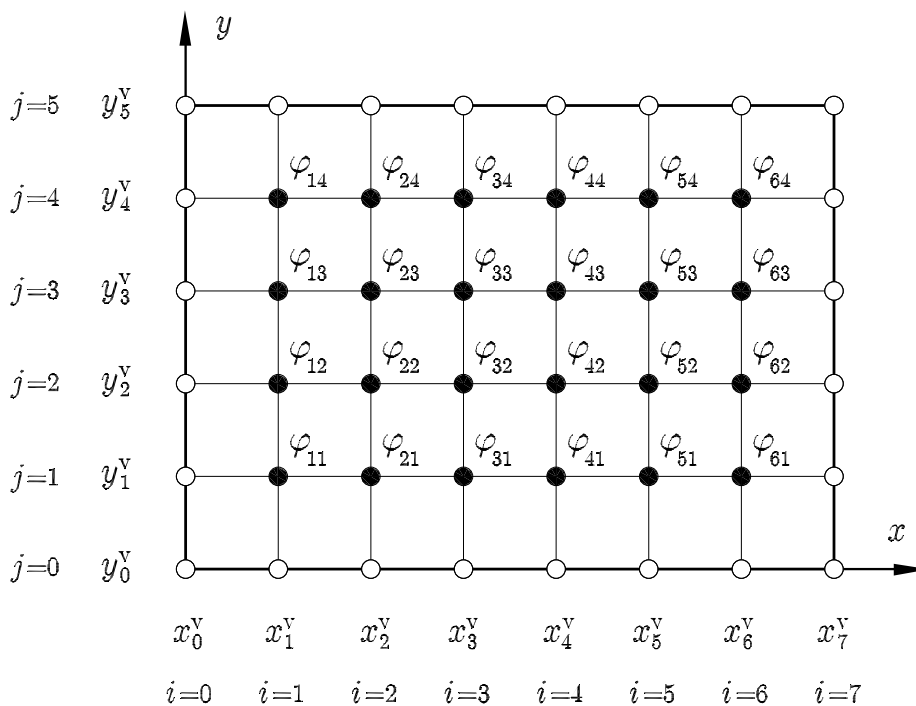


Рис. 1.2. Вычислительная сетка при $N_x = 7$ и $N_y = 5$

Блочное упорядочивание неизвестных позволяет одновременно вычислять уточнённые значения группы (блока) неизвестных. На рис. 1.4 показан пример блочного упорядочивания неизвестных вдоль линий $i = const$. Для реализации блочного варианта метода Зейделя необходимо учитывать блочную структуру матрицы коэффициентов СЛАУ (1.11). В данном случае итерации метода Зейделя определяются соотношением

$$D_i \tilde{\varphi}_i^{(\nu+1)} = \tilde{\mathbf{b}}_i - L_i \tilde{\varphi}_{i-1}^{(\nu+1)} - R_i \tilde{\varphi}_{i+1}^{(\nu)}, \quad i = 1, 2, \dots, N_x - 1,$$

т.е. итерации сводят к решению $(N_x - 1)$ -ой СЛАУ с трёхдиагональной матрицей коэффициентов D_i . Для решения подобных СЛАУ разработан эффективный прямой метод, называемый в отечественной литературе *методом прогонки* [4, 8, 13, 26]. Реализация метода прогонки требует выполнения $O(N_y)$ арифметических операций. В результате одновременно

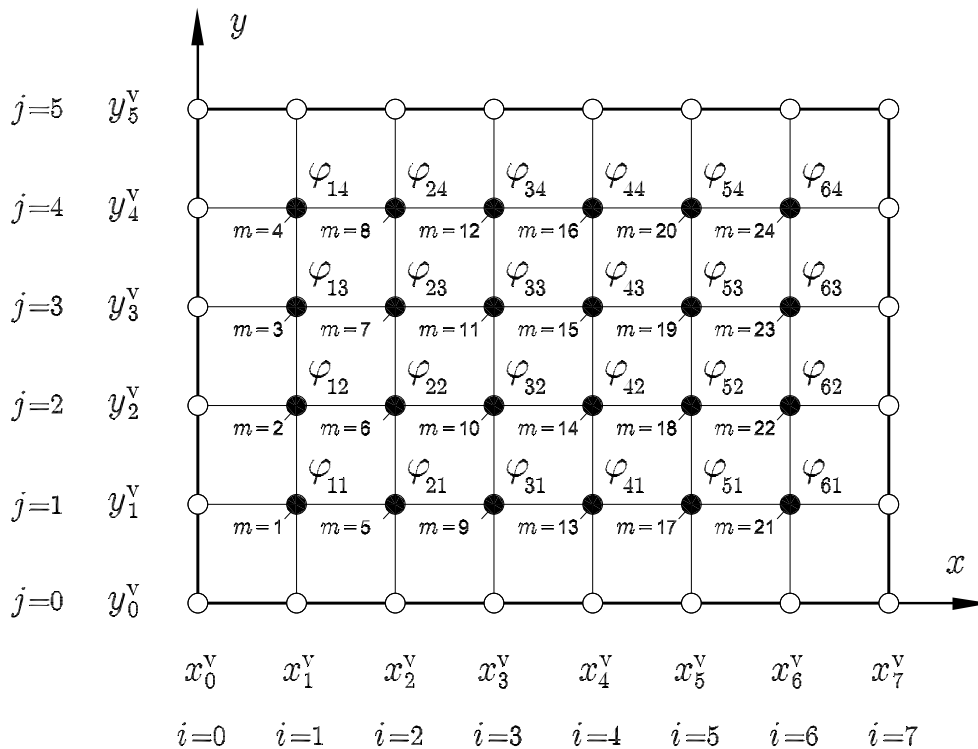


Рис. 1.3. Точечное упорядочивание неизвестных вдоль линий $i = const$

получены уточнённые значения неизвестных $\varphi_{i1}, \varphi_{i2}, \dots, \varphi_{iN_y-1}$, образующих блок неизвестных (подвектор) $\tilde{\varphi}_i$:

$$\tilde{\varphi}_i^{(\nu+1)} = D_i^{-1} \left(\tilde{b}_i - L_i \tilde{\varphi}_{i-1}^{(\nu+1)} - R_i \tilde{\varphi}_{i+1}^{(\nu)} \right).$$

В частных случаях метод Зейделя с блочным упорядочиванием неизвестных вдоль линий $i = const$ может быть очень эффективным алгоритмом для численного решения краевых задач. Рассмотрим разностную схему (1.9) в предположении, что $h_x \gg h_y$. Тогда (1.9) можно переписать в виде

$$\varepsilon \frac{\varphi_{i-1j} - 2\varphi_{ij} + \varphi_{i+1j}}{h_y^2} + \frac{\varphi_{ij-1} - 2\varphi_{ij} + \varphi_{ij+1}}{h_x^2} = -f(ih_x, jh_y), \quad \varepsilon = \left(\frac{h_y}{h_x} \right)^2.$$

Нетрудно видеть, что рассмотренный блочный вариант метода Зейделя в

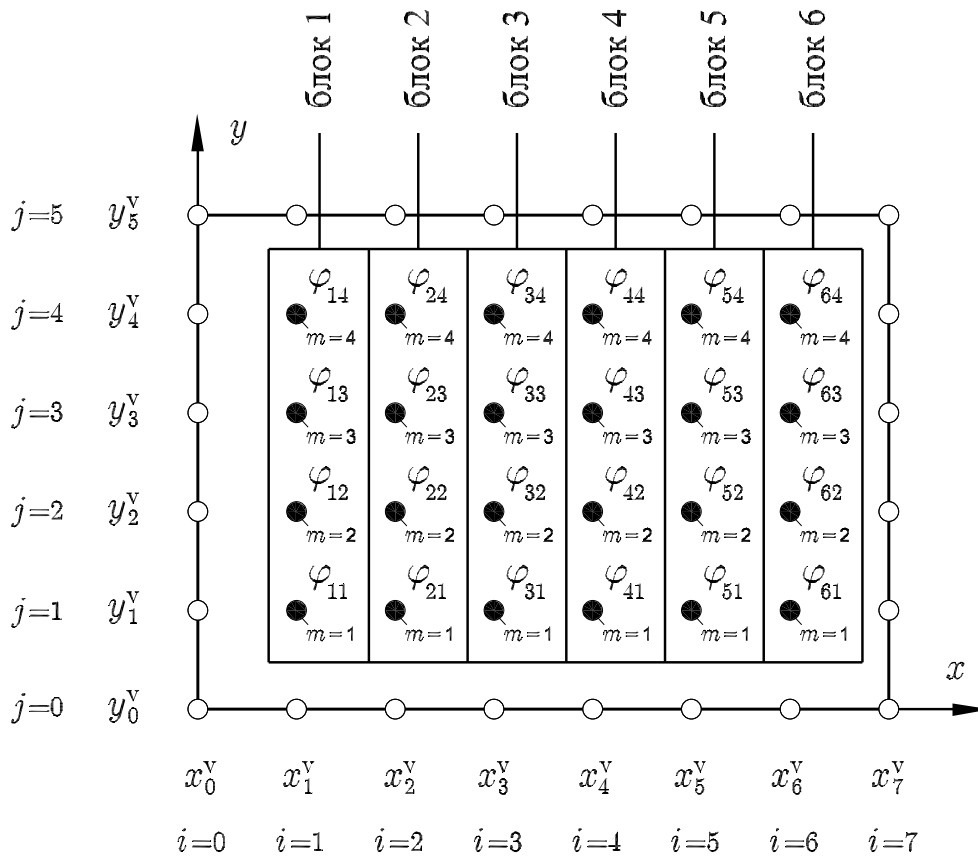


Рис. 1.4. Блочное упорядочивание неизвестных вдоль линий $i = const$

пределе при $\varepsilon \rightarrow 0$ становится прямым методом решения данной задачи, при этом объём вычислительной работы составит $O((N_x - 1) \times (N_y - 1))$ арифметических операций, т.е. количество арифметических операций, необходимых для получения численного решения, пропорционально количеству узлов сетки.

Аналогично можно упорядочить неизвестные в блоки вдоль линий $j = \text{const}$. В этом случае количество блоков на главной диагонали матрицы коэффициентов составит $N_y - 1$ (для рассматриваемого примера 4), а размеры блоков — $(N_x - 1) \times (N_x - 1)$ (для рассматриваемого примера 6×6).

Более общий вариант блочного упорядочивания неизвестных показан на рис. 1.5: неизвестные группируют в квадратные или прямоугольные блоки размера $n \times m$, где $n \sim m$. Нетрудно видеть, что блочное упорядочивание $1 \times (N_y - 1)$, показанное на рис. 1.4, является частным случаем.

Предположим, что блок неизвестных 2×2 образован неизвестными

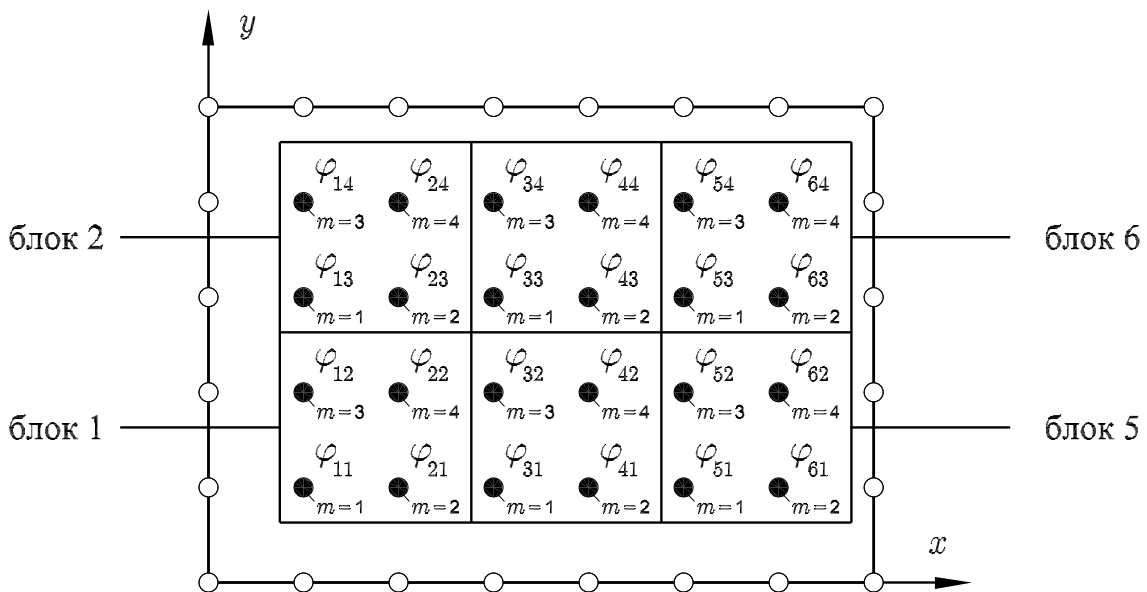


Рис. 1.5. Упорядочивание неизвестных в блоки 2×2

φ_{ij} , φ_{i+1j} , φ_{ij+1} и φ_{i+1j+1} , как показано на рис. 1.6. Записывая разностную схему (1.10) при $i := i; i+1$ и $j := j; j+1$ (равенство в смысле присвоения) и учитывая нумерацию блоков, получим:

$$\begin{aligned} a_{ij}^w \varphi_{i-1j}^{(\nu+1)} + a_{ij}^e \varphi_{i+1j}^{(\nu+1)} + a_{ij}^s \varphi_{ij-1}^{(\nu+1)} + a_{ij}^n \varphi_{ij+1}^{(\nu+1)} + a_{ij}^p \varphi_{ij}^{(\nu+1)} &= b_{ij}, \\ a_{i+1j}^w \varphi_{ij}^{(\nu+1)} + a_{i+1j}^e \varphi_{i+2j}^{(\nu)} + a_{i+1j}^s \varphi_{i+1j-1}^{(\nu+1)} + a_{i+1j}^n \varphi_{i+1j+1}^{(\nu+1)} + a_{i+1j}^p \varphi_{i+1j}^{(\nu+1)} &= b_{i+1j}, \\ a_{ij+1}^w \varphi_{i-1j+1}^{(\nu+1)} + a_{ij+1}^e \varphi_{i+1j+1}^{(\nu+1)} + a_{ij+1}^s \varphi_{ij}^{(\nu+1)} + a_{ij+1}^n \varphi_{ij+2}^{(\nu)} + a_{ij+1}^p \varphi_{ij+1}^{(\nu+1)} &= b_{ij+1}, \\ a_{i+1j+1}^w \varphi_{ij+1}^{(\nu+1)} + a_{i+1j+1}^e \varphi_{i+2j+1}^{(\nu)} + a_{i+1j+1}^s \varphi_{i+1j}^{(\nu+1)} + & \\ + a_{i+1j+1}^n \varphi_{i+1j+2}^{(\nu)} + a_{i+1j+1}^p \varphi_{i+1j+1}^{(\nu+1)} &= b_{i+1j+1}. \end{aligned}$$

Оставим в левой части члены с $\varphi_{ij}^{(\nu+1)}$, $\varphi_{i+1j}^{(\nu+1)}$, $\varphi_{ij+1}^{(\nu+1)}$ и $\varphi_{i+1j+1}^{(\nu+1)}$, образующих блок неизвестных, а остальные (не входящие в блок) перенесём в правую часть:

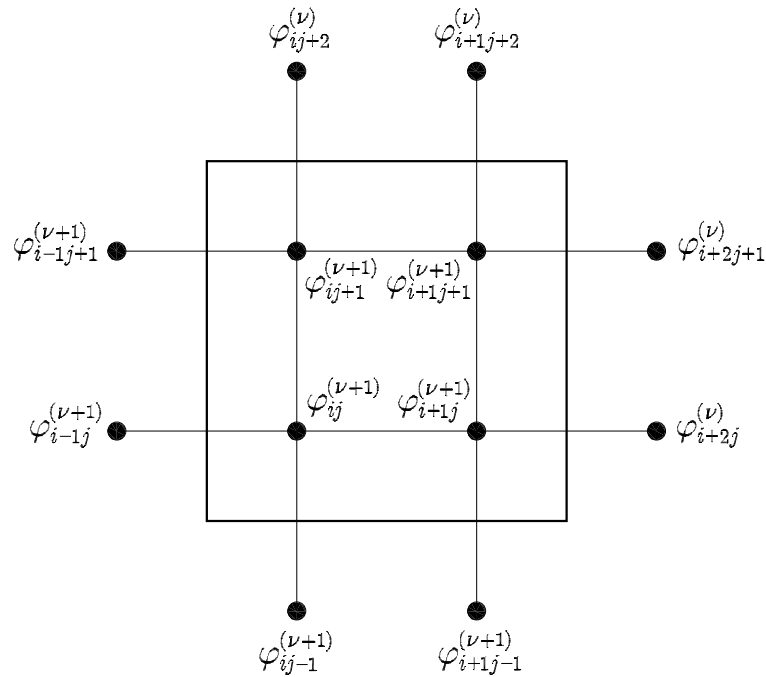
$$\begin{aligned} a_{ij}^e \varphi_{i+1j}^{(\nu+1)} + a_{ij}^n \varphi_{ij+1}^{(\nu+1)} + a_{ij}^p \varphi_{ij}^{(\nu+1)} &= \bar{b}_1, \\ a_{i+1j}^w \varphi_{ij}^{(\nu+1)} + a_{i+1j}^n \varphi_{i+1j+1}^{(\nu+1)} + a_{i+1j}^p \varphi_{i+1j}^{(\nu+1)} &= \bar{b}_2, \\ a_{ij+1}^e \varphi_{i+1j+1}^{(\nu+1)} + a_{ij+1}^s \varphi_{ij}^{(\nu+1)} + a_{ij+1}^p \varphi_{ij+1}^{(\nu+1)} &= \bar{b}_3, \\ a_{i+1j+1}^w \varphi_{ij+1}^{(\nu+1)} + a_{i+1j+1}^s \varphi_{i+1j}^{(\nu+1)} + a_{i+1j+1}^p \varphi_{i+1j+1}^{(\nu+1)} &= \bar{b}_4, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \bar{b}_1 &= b_{ij} - a_{ij}^w \varphi_{i-1j}^{(\nu+1)} - a_{ij}^s \varphi_{ij-1}^{(\nu+1)}, \\ \bar{b}_2 &= b_{i+1j} - a_{i+1j}^e \varphi_{i+2j}^{(\nu)} - a_{i+1j}^s \varphi_{i+1j-1}^{(\nu+1)}, \\ \bar{b}_3 &= b_{ij+1} - a_{ij+1}^w \varphi_{i-1j+1}^{(\nu+1)} - a_{ij+1}^n \varphi_{ij+2}^{(\nu)}, \\ \bar{b}_4 &= b_{i+1j+1} - a_{i+1j+1}^e \varphi_{i+2j+1}^{(\nu)} - a_{i+1j+1}^n \varphi_{i+1j+2}^{(\nu)}. \end{aligned}$$

Перепишем полученную СЛАУ в матричной форме

$$\begin{pmatrix} a_{ij}^p & a_{ij}^e & a_{ij}^n & 0 \\ a_{i+1j}^w & a_{i+1j}^p & 0 & a_{i+1j}^n \\ a_{ij+1}^s & 0 & a_{ij+1}^p & a_{ij+1}^e \\ 0 & a_{i+1j+1}^s & a_{i+1j+1}^w & a_{i+1j+1}^p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_{ij}^{(\nu+1)} \\ \varphi_{i+1j}^{(\nu+1)} \\ \varphi_{ij+1}^{(\nu+1)} \\ \varphi_{i+1j+1}^{(\nu+1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{b}_1 \\ \bar{b}_2 \\ \bar{b}_3 \\ \bar{b}_4 \end{pmatrix}.$$

Рис. 1.6. Блок неизвестных 2×2

Решая данную СЛАУ при помощи метода Гаусса с выбором главного элемента, получим уточнённые значения $\varphi_{ij}^{(\nu+1)}$, $\varphi_{i+1j}^{(\nu+1)}$, $\varphi_{ij+1}^{(\nu+1)}$ и $\varphi_{i+1j+1}^{(\nu+1)}$, образующие блок неизвестных. Данный блочный вариант метода Зейделя слабо зависит от шаблона, используемого для аппроксимации дифференциальной задачи.

Остановимся на наиболее привлекательных свойствах рассмотренного выше варианта метода Зейделя с блочным упорядочиванием неизвестных:

- в приложениях часто возникает необходимость численного решения систем дифференциальных уравнений в частных производных. Часто матрица коэффициентов результирующей СЛАУ, полученной в результате аппроксимации исходной системы, имеет особый вид, затрудняющий построение эффективных итерационных методов. Наиболее ярким примером подобного рода задач являются уравнения

Навье-Стокса (гл. 3). Применение в итерациях Зейделя метода Гаусса с выбором главного элемента, не использующего структуру матрицы, позволяет решать широкий класс задач унифицированным образом;

- особую гибкость методу придаёт возможность использования блоков неизвестных различных размеров, как показано на рис. 1.7. Однако, объединяя неизвестные в блоки, следует помнить, что реализация метода Гаусса с выбором главного элемента потребует выполнения $O(N^3)$ арифметических операций, где N – число неизвестных. Данное обстоятельство ограничивает максимальные размеры блоков неизвестных.

Единственным недостатком метода Зейделя является очень медленная сходимость. В [4, 18, 25, 26] и др. показано, что в общем случае для уменьшения начальной погрешности в ϵ^{-1} раз при решении двумерной задачи Дирихле на равномерной сетке ($h_x = h_y$) методом Зейделя необходимо выполнить $O(\ln \epsilon^{-1} N^2)$ арифметических операций.

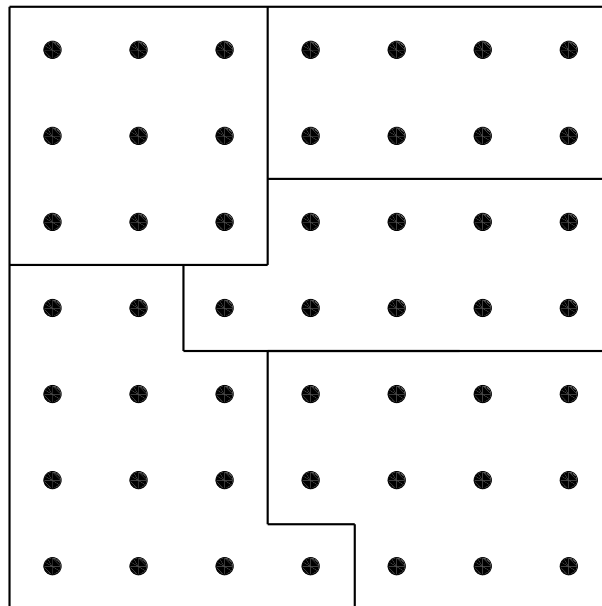


Рис. 1.7. Пример упорядочивания неизвестных в разновеликие блоки

Поэтому неоднократно предпринимались попытки ускорить сходимость итераций Зейделя, наиболее известной из них является метод последовательной верхней релаксации (SOR). Итерации метода SOR записывают в виде

$$(D + \varpi L) \frac{\mathbf{x}^{(\nu+1)} - \mathbf{x}^{(\nu)}}{\varpi} = \mathbf{b} - A\mathbf{x}^{(\nu)},$$

где $\varpi \in (0, 2)$ есть параметр верхней релаксации. Выбирая значение параметра ϖ оптимальным образом, можно уменьшить объём вычислений до $O(\ln \epsilon^{-1} N^{3/2})$ арифметических операций [18]. Достигнутая скорость сходимости является недостаточной для решения прикладных задач. Кроме того, возникает дополнительная проблема выбора оптимального значения ϖ .

§ 3. Основополагающая идея Р.П. Федоренко

Рассмотрим одномерную задачу Дирихле для уравнения Пуассона

$$\begin{aligned} u'' &= -f(x), & x \in (0, 1), \\ u(0) &= u(1) = 0. \end{aligned}$$

для иллюстрации основополагающей идеи Р.П. Федоренко. Основные положения многосеточных методов традиционно излагаются на примере одномерных задач из соображений наглядности.

Воспользуемся методом конечных разностей (МКР) для аппроксимации на равномерной сетке $h = 1/N$ и в результате получим следующую СЛАУ:

$$A\varphi = \mathbf{b} \tag{1.12}$$

с матрицей коэффициентов

$$A = \frac{1}{h^2} \begin{pmatrix} 2 & -1 & & & \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & \dots & \dots & \dots & \\ & & -1 & 2 & -1 \\ & & & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Для решения данной СЛАУ применим метод Якоби (т.е. метод (1.6) с $W = D$, где D является диагональной матрицей, составленной из элементов главной диагонали матрицы A)

$$\varphi^{(\nu+1)} = \varphi^{(\nu)} + \tau D^{-1}(\mathbf{b} - A\varphi^{(\nu)}).$$

Поскольку $D = 2/h^2 I$, то $D^{-1} = h^2/2 I$. Сходимость метода Якоби зависит от спектра матрицы A . Нетрудно убедиться, что решением спектральной задачи

$$A\psi_k = \check{\lambda}_k \psi_k$$

являются

$$\psi_k = \sin(\pi k i h), \quad \check{\lambda}_k = 4h^{-2} \sin^2\left(\pi k \frac{h}{2}\right), \quad k = 1, 2, \dots, N-1.$$

Отсюда следует, что $\check{\lambda}_{\min} \leq \pi^2$ и $\check{\lambda}_{\max} = O(h^{-2})$. Тогда количество итераций метода Якоби, необходимых для решения СЛАУ с точностью ϵ , составит $O(\ln \epsilon^{-1} N^2)$, а общее количество арифметических операций – $O(\ln \epsilon^{-1} N^3)$, где N есть количество узлов сетки. Аналогичные оценки можно получить и для метода Зейделя.

Условно разделим собственные функции ψ_k матрицы A на «высоко-частотные», для которых $k \geq N/2 = (2h)^{-1}$, и «низкочастотные», для

которых $k < N/2 = (2h)^{-1}$. Тогда справедливы оценки

$$\begin{aligned} \frac{2}{h^2} &\leq \check{\lambda}_k \leq \frac{4}{h^2} && \text{при } k \geq N/2, \\ \check{\lambda}_k &\leq \pi^2 && \text{при } k < N/2, \end{aligned}$$

и для матрицы итераций метода Якоби $S = I - D^{-1}A$ при $\tau = 1/2$ получим

$$\begin{aligned} |\check{\lambda}_k(S)| &= \left| 1 - \frac{h^2}{4} \check{\lambda}_k(A) \right| \leq \frac{1}{2} && \text{при } k \geq N/2, \\ \check{\lambda}_k(S) &\approx 1 - \frac{\pi^2 h^2}{4} && \text{при } k < N/2. \end{aligned}$$

Разложим вектор ошибки $\varphi - \varphi^{(\nu+1)}$ по базису из собственных функций ψ_k . Коэффициенты при высокочастотных собственных функциях ($k \geq N/2$) будут уменьшаться приблизительно в два раза ($|\check{\lambda}_k(S)| \leq 1/2$), и вскоре после нескольких итераций их вклад в вектор ошибки будет незначительным. Коэффициенты при низкочастотных собственных функциях ($k < N/2$) будут уменьшаться гораздо медленнее в силу $\check{\lambda}_k(S) \approx 1 - \pi^2 h^2/4$, особенно при достаточно малых h .

Поэтому итоговая скорость сходимости метода Якоби зависит от количества выполненных итераций. На первых итерациях уменьшение вектора ошибки происходит независимо от величины шага сетки h , а на последующих – зависит от h^2 . Итерационные методы, обладающие данным свойством, называются *сглаживателями* (smoothers). Основная идея многосеточных методов состоит в использовании быстрой и не зависящей от шага сетки сходимости сглаживателей на первых итерациях. При этом ожидается, что количество многосеточных итераций не будет зависеть от параметра дискретизации, а объём вычислительной работы будет пропорционален количеству узлов сетки. Такую скорость сходимости называют *оптимальной* или *неулучшаемой*. Впервые на возмож-

ность использования особенности сходимости некоторых итерационных методов для численного решения краевых задач с оптимальными вычислительными усилиями обратил внимание Р.П. Федоренко в статье [31], которая в мировой литературе получила название «первой истинно многосеточной публикации». В настоящее время многосеточные методы стали доминирующими алгоритмами во многих областях, причём сфера их применения постоянно расширяется.

В качестве иллюстративного примера рассмотрим следующую задачу Дирихле

$$u'' = 8, \quad u(0) = u(1) = 1,$$

в области $\Omega = (0, 1)$, которая имеет точное решение $u(x) = 1 - 4x + 4x^2$. Построим равномерную сетку с шагом $h = 1/N$ и воспользуемся симметричным вариантом метода Зейделя

$$\begin{aligned} \bar{\varphi}_i &= (\bar{\varphi}_{i-1} + \varphi_{i+1}^{(\nu)} - 8h^2)/2, & i &= 1, 2, \dots, N-1, \\ \varphi_i^{(\nu+1)} &= (\bar{\varphi}_{i-1} + \varphi_{i+1}^{(\nu+1)} - 8h^2)/2, & i &= N-1, N-2, \dots, 1. \end{aligned}$$

для решения СЛАУ (1.12) с $\mathbf{b} = 8$.

Погрешность аппроксимации на точном решении $u(x)$ равна нулю, поэтому в качестве критерия останова итераций выберем нарушение условия монотонного убывания ошибки

$$\max_i |\varphi_i^{(\nu+1)} - u(ih)| < \max_i |\varphi_i^{(\nu)} - u(ih)|,$$

которое неизбежно возникнет из-за влияния погрешностей округления.

Уменьшение ошибки $\mathcal{E}^{(\nu)} = \max_i |\varphi_i^{(\nu)} - u(ih)|$ в процессе сходимости итераций Зейделя показано на рис. 1.8. Заметно, что на первых итерациях ошибка убывает быстрее и независимо от величины шага сетки h , хотя количество итераций ν_Σ , необходимых для получения численного решения, зависит квадратично от h (рис. 1.9).

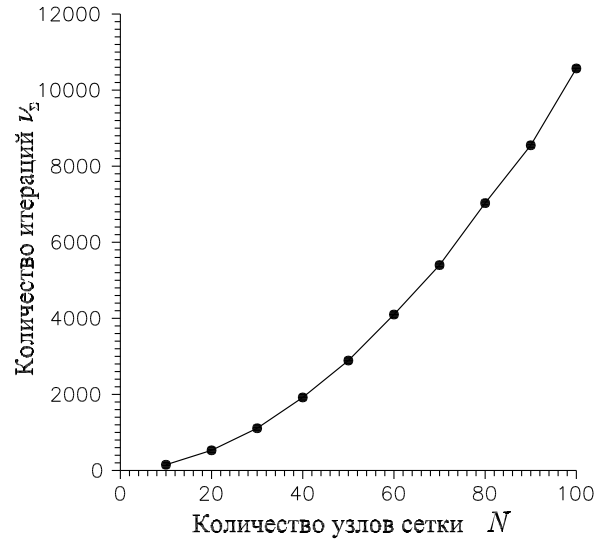
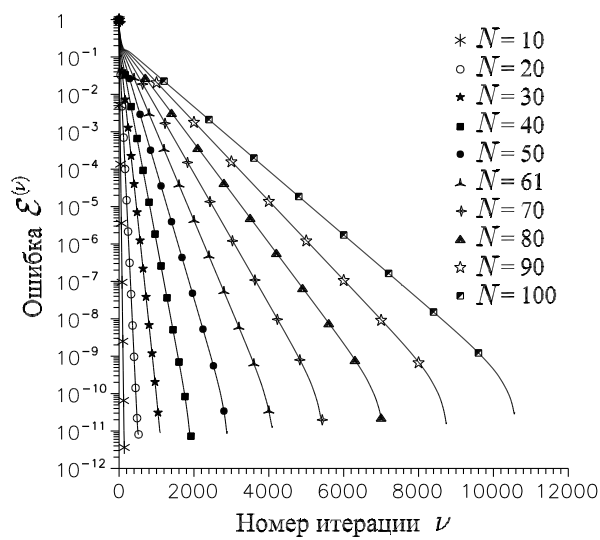


Рис. 1.8. Изменение ошибки приближений к численному решению

Рис. 1.9. Зависимость количества итераций от количества узлов сетки

§ 4. Простейший многосеточный метод

Рассмотрим способы реализации основополагающей идеи Р.П. Федоренко на примере простейшего многосеточного алгоритма, использующего две сетки. Положим, что для численного решения некоторой линейной краевой задачи построена вычислительная сетка и в результате аппроксимации получена СЛАУ типа (1.12), т.е.

$$A_0 \varphi_0 = \mathbf{b}_0. \quad (1.13)$$

Далее всё, что связано с построенной сеткой, будет иметь нижний индекс «0». Построим ещё одну сетку с меньшим количеством узлов, и всё, что связано с этой сеткой, будет иметь нижний индекс «1». Сетку с большим количеством узлов будем называть *мелкой*¹, а с меньшим – *грубой*: $h_0 < h_1$.

В качестве сглаживателя выберем итерационный метод (1.6) с $\tau = 1$,

¹В классических многосеточных методах принята обратная нумерация сеток, т.е. нулевой считается самая грубая сетка.

т.е. новое приближение к решению вычислим следующим образом

$$\varphi_0^{(\nu+1)} = (I - W_0^{-1}A_0) \varphi_0^{(\nu)} + W_0^{-1}\mathbf{b}_0. \quad (1.14)$$

Предполагается, что сглаживающие итерации сходятся, т.е. норма матрицы сглаживающих итераций $S_0 = I - W_0^{-1}A_0$ удовлетворяет ограничению (Теорема 1.1)

$$\|S_0\| = \|I - W_0^{-1}A_0\| \leq \omega_0 < 1, \quad (1.15)$$

где ω_0 , как правило, зависит от величины шага сетки h_0 . Если точное решение $\varphi_0 = A_0^{-1}\mathbf{b}_0$ СЛАУ (1.13) является неподвижной точкой итераций, то справедливо соотношение

$$\varphi_0^{(\nu)} - \varphi_0 = S_0^\nu (\varphi_0^{(0)} - \varphi_0), \quad (1.16)$$

где $\varphi_0^{(0)}$ есть начальное приближение, а φ_0 – точное решение.

Рассмотрим два многосеточных метода, которые схематично показаны на рис. 1.10. В первом из них (а) сглаживание (сглаживающие итерации) осуществляют до использования грубой сетки. Такое сглаживание называют *предварительным* (presmoothing), итерации предварительного сглаживания будем обозначать как $\acute{\nu}$. Во втором методе (б) сглаживание осуществляют после использования грубой сетки. Такое сглаживание называют *последующим* (postsmoothing), эти итерации будем обозначать как $\grave{\nu}$.

Выберем некоторое начальное приближение к решению $\varphi_0^{(0)}$. Тогда для метода, показанного на рис. 1.10а, полученное после сглаживания на мелкой сетке приближение к решению $\varphi_0^{(\acute{\nu})}$ удовлетворяет соотношению

$$A_0\varphi_0^{(\acute{\nu})} = \mathbf{b}_0 + \mathbf{r}_0,$$

где \mathbf{r}_0 есть невязка. Добавим к приближению $\varphi_0^{(\acute{\nu})}$ некоторую поправку \mathbf{c}_0 , чтобы уничтожить невязку \mathbf{r}_0 , т.е.

$$A_0(\varphi_0^{(\acute{\nu})} + \mathbf{c}_0) = \mathbf{b}_0 \Rightarrow A_0\mathbf{c}_0 = \mathbf{b}_0 - A_0\varphi_0^{(\acute{\nu})} = \mathbf{r}_0. \quad (1.17)$$

Полученную СЛАУ (1.17) иногда называют записью исходной СЛАУ (1.13) в терминах «поправка–невязка».

Решение СЛАУ (1.17) потребует тех же вычислительных усилий, что и решение исходной СЛАУ (1.13), поскольку приходится численно обращать одну и ту же матрицу A_0 . Поэтому для уменьшения объёма вычислительной работы воспользуемся вспомогательной СЛАУ меньшего размера

$$A_1 \mathbf{c}_1 = \mathcal{R}_{0 \rightarrow 1}(\mathbf{b}_0 - A_0 \varphi_0^{(\hat{v})}), \quad (1.18)$$

которая получена в результате проецирования (1.17) на грубую сетку. *Оператор сужения* $\mathcal{R}_{0 \rightarrow 1}$ (restriction operator), проецирующий невязку с мелкой сетки на грубую сетку, и матрица коэффициентов A_1 могут быть построены разными способами [21].

Предположим, что на грубой сетке СЛАУ (1.18) решена точно и её решение имеет вид

$$\mathbf{c}_1 = A_1^{-1} \mathcal{R}_{0 \rightarrow 1}(\mathbf{b}_0 - A_0 \varphi_0^{(\hat{v})}).$$

Полученную поправку \mathbf{c}_1 спроецируем с грубой сетки на мелкую

$$\mathbf{c}_0 = \mathcal{P}_{1 \rightarrow 0} \mathbf{c}_1 = \mathcal{P}_{1 \rightarrow 0} A_1^{-1} \mathcal{R}_{0 \rightarrow 1}(\mathbf{b}_0 - A_0 \varphi_0^{(\hat{v})}),$$

где $\mathcal{P}_{1 \rightarrow 0}$ есть *оператор продолжения* (пролонгации) (prolongation operator), проецирующий поправку с грубой сетки на мелкую.

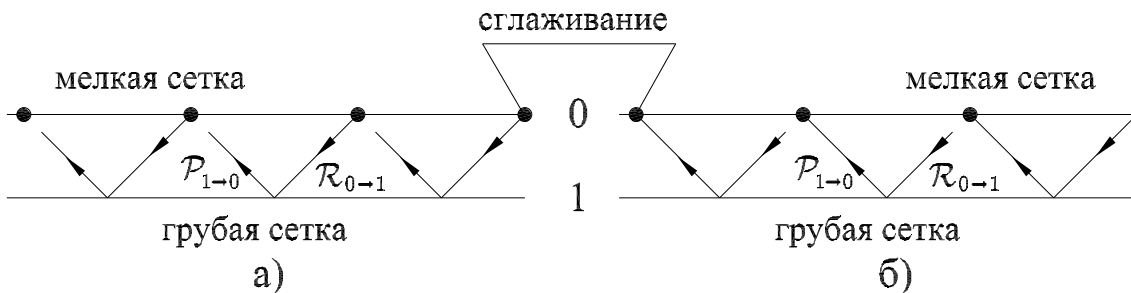


Рис. 1.10. Двухсеточные алгоритмы

В литературе по многосеточным методам операторы сужения и продолжения иногда называют *операторами переходов* (transfer operators).

Согласно рис. 1.10а, новое приближение к решению $\varphi_0^{(1)}$ есть приближение после выполнения $\acute{\nu}$ итераций предварительного сглаживания $\varphi_0^{(\acute{\nu})}$ плюс спролонгированная поправка $\mathcal{P}_{1 \rightarrow 0} \mathbf{c}_1$:

$$\varphi_0^{(1)} = \mathcal{P}_{1 \rightarrow 0} \mathbf{c}_1 + \varphi_0^{(\acute{\nu})} = \mathcal{P}_{1 \rightarrow 0} A_1^{-1} \mathcal{R}_{0 \rightarrow 1} (\mathbf{b}_0 - A_0 \varphi_0^{(\acute{\nu})}) + \varphi_0^{(\acute{\nu})}.$$

Выражая $\varphi_0^{(\acute{\nu})}$ из (1.16)

$$\varphi_0^{(\acute{\nu})} = S_0^{\acute{\nu}} \varphi_0^{(0)} + (1 - S_0^{\acute{\nu}}) \varphi_0 = S_0^{\acute{\nu}} \varphi_0^{(0)} + (1 - S_0^{\acute{\nu}}) A_0^{-1} \mathbf{b}_0$$

и полагая, что $\varphi_0^{(1)} = \varphi_0^{(q+1)}$ есть новое значение после многосеточной итерации, а $\varphi_0^{(0)} = \varphi_0^{(q)}$ – предыдущее значение, получим следующую форму записи многосеточного метода:

$$\varphi_0^{(q+1)} = M_a \varphi_0^{(q)} + (I - d_0 A_0 S_0^{\acute{\nu}}) A_0^{-1} \mathbf{b}_0, \quad (1.19)$$

где q – номер многосеточной итерации, а матрица многосеточных итераций M_a имеет вид

$$M_a = d_0 A_0 S_0^{\acute{\nu}}$$

и

$$d_0 = A_0^{-1} - \mathcal{P}_{1 \rightarrow 0} A_1^{-1} \mathcal{R}_{0 \rightarrow 1}. \quad (1.20)$$

Разностные уравнения на самой грубой сетке, состоящей из наименьшего количества узлов, решают прямым методом и в многомерном случае.

Доказательство сходимости многосеточных методов является трудной задачей из-за сложной структуры матрицы многосеточных итераций и трудностей учёта сглаживающих свойств используемого итерационного метода.

Классический подход к доказательству сходимости многосеточных методов основан на следующих утверждениях [45]:

1. Свойство сглаживания: существует функция $\eta(\nu_l) : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ такая, что $\eta(\nu_l) \rightarrow 0$ при $\nu_l \rightarrow \infty$ и

$$\|A_l S_l^{\nu_l}\| \leq \eta(\nu_l) \|A_l\|, \quad l = 0, 1, \dots, L^+. \quad (1.21)$$

2. Свойство аппроксимации: для некоторой константы $C_A > 0$

$$\|A_l^{-1} - \mathcal{P}_{l+1 \rightarrow l} A_{l+1}^{-1} \mathcal{R}_{l \rightarrow l+1}\| \leq C_A \|A_l\|^{-1}, \quad l = 0, 1, \dots, L^+ - 1. \quad (1.22)$$

Свойство сглаживания указывает на способность выбранного итерационного метода эффективно удалять высокочастотные компоненты ошибки, а свойство аппроксимации – на близость решений, полученных на мелкой и грубых сетках. Свойства сглаживания и аппроксимации необходимо доказывать для каждого конкретного случая [21].

Утверждения (1.21) и (1.22) приведены для произвольного количества грубых сеток ($l \leq L^+$) и при различном количестве выполняемых сглаживающих итераций ν_l . В данном параграфе рассмотрен простейший случай $L^+ = 1$, где L^+ есть номер самой грубой сетки.

Если свойства сглаживания и аппроксимации справедливы, то многосеточный метод (1.19) сходится, причём независимо от величины шага сетки

$$\|M_a\| = \|d_0 A_0 S_0^{\nu}\| \leq \|d_0\| \cdot \|A_0 S_0^{\nu}\| \leq C_A \eta(\nu).$$

В этом случае справедлива следующая оценка:

$$\|\varphi - \varphi_0^{(q+1)}\| \leq C_A \eta(\nu) \|\varphi - \varphi_0^{(q)}\|,$$

где $\varphi = A_0^{-1} \mathbf{b}_0$ есть точное решение СЛАУ (1.13).

Несколько иначе записывается многосеточной метод, схематично показанный на рис. 1.10б. В этом случае отсутствует предварительное сглаживание и выполняют только итерации $\dot{\nu}$ последующего сглаживания, т.е. многосеточные итерации имеют вид

$$\varphi_0^{(q+1)} = M_{\dot{\nu}} \varphi_0^{(q)} + A_0^{-1} (I - A_0 S_0^{\dot{\nu}} d_0) \mathbf{b}_0, \quad (1.23)$$

где $M_{\bar{c}}$ есть матрица многосеточных итераций

$$M_{\bar{c}} = S_0^{\bar{v}} d_0 A_0,$$

а матрицу d_0 определяют как (1.20). Очевидно, что в данном случае нельзя непосредственно показать независимость скорости сходимости данного многосеточного метода (1.23) от величины шага сетки при помощи свойств сглаживания (1.21) и аппроксимации (1.22).

Для доказательства сходимости многосеточного метода (1.23) воспользуемся вспомогательной СЛАУ вида

$$A_0 \mathbf{v}_0 = A_0^{-1} \mathbf{b}_0, \quad \text{где } \mathbf{v}_0 = A_0^{-1} \boldsymbol{\varphi}_0, \quad (1.24)$$

которая понадобится исключительно для доказательства сходимости.

Применим многосеточный метод (1.23) к решению СЛАУ (1.24)

$$\mathbf{v}_0^{(q+1)} = M_{\bar{c}} \mathbf{v}_0^{(q)} + A_0^{-1} (I - A_0 S_0^{\bar{v}} d_0) A_0^{-1} \mathbf{b}_0,$$

или, с учётом подстановки $\mathbf{v}_0 = A_0^{-1} \boldsymbol{\varphi}_0$, получим

$$\boldsymbol{\varphi}_0^{(q+1)} = A_0 M_{\bar{c}} A_0^{-1} \boldsymbol{\varphi}_0^{(q)} + (I - A_0 S_0^{\bar{v}} d_0) A_0^{-1} \mathbf{b}_0.$$

Матрицы $M_{\bar{c}}$ и $A_0 M_{\bar{c}} A_0^{-1}$ являются подобными и имеют одинаковый спектр, поэтому в спектральной норме

$$\|M_{\bar{c}}\| = \|A_0 M_{\bar{c}} A_0^{-1}\| = \|A_0 S_0^{\bar{v}} d_0\| \leq \|A_0 S_0^{\bar{v}}\| \cdot \|d_0\| \leq C_A \eta(\bar{v}),$$

т.е. многосеточные методы, показанные на рис. 1.10, сходятся, если выполнены свойства сглаживания и аппроксимации. В обоих случаях скорость сходимости многосеточных итераций не зависит от величины шага сетки h .

Положим, что для решения вспомогательной СЛАУ (1.24) использован тот же итерационный метод (1.6):

$$\mathbf{v}_0^{(\bar{v}+1)} = (I - W_0^{-1} A_0) \mathbf{v}_0^{(\bar{v})} + W_0^{-1} A_0^{-1} \mathbf{b}_0,$$

или с учётом того, что $\mathbf{v}_0 = A_0^{-1}\boldsymbol{\varphi}_0$,

$$\boldsymbol{\varphi}_0^{(\bar{\nu}+1)} = A_0 (I - W_0^{-1}A_0) A_0^{-1}\boldsymbol{\varphi}_0^{(\bar{\nu})} + A_0 W_0^{-1} A_0^{-1}\mathbf{b}_0, \quad (1.25)$$

Матрица сглаживающих итераций в данном случае имеет вид

$$\bar{S}_0 = A_0 (I - W_0^{-1}A_0) A_0^{-1} = A_0 S_0 A_0^{-1} = I - A_0 W_0^{-1}, \quad (1.26)$$

где $S_0 = I - W_0^{-1}A_0$ есть матрица итераций метода (1.14). Поскольку матрицы S_0 и \bar{S}_0 имеют одинаковый спектр, то в силу Теоремы 1.2 итерационные методы (1.14) и (1.25) либо одновременно расходятся, либо одновременно сходятся, причём с одинаковой скоростью. Поэтому в дальнейшем будем полагать, что норма матрицы сглаживающих итераций метода (1.25), как и (1.15), удовлетворяет ограничению

$$\|\bar{S}_0\| = \|I - A_0 W_0^{-1}\| \leq \bar{\omega}_0 < 1. \quad (1.27)$$

В дальнейшем понадобится следующая теорема:

Теорема 1.4. Предположим, что в некоторой норме выполнено

$$\|I - 2A_l W_l^{-1}\| \leq 1, \quad l = 0, 1, \dots, L^+,$$

тогда справедливо свойство сглаживания

$$\|A_l S_l^{\nu_l}\| \leq C_w \sqrt{\frac{2}{\pi \nu_l}} \|A_l\|. \quad (1.28)$$

Доказательство. Согласно определению матрицы сглаживающих итераций

$$S_l^{\nu_l} = (I - W_l^{-1}A_l)^{\nu_l} = [A_l^{-1}(I - A_l W_l^{-1})A_l]^{\nu_l} = A_l^{-1}(I - A_l W_l^{-1})^{\nu_l} A_l.$$

Откуда следует

$$A_l S_l^{\nu_l} = (I - A_l W_l^{-1})^{\nu_l} A_l. \quad (1.29)$$

Обозначим $B = I - 2A_l W_l^{-1}$, тогда

$$I - B = 2A_l W_l^{-1} \quad \text{и} \quad I + B = 2(I - A_l W_l^{-1}),$$

и с учётом введённой матрицы B получим

$$A_l S_l^{\nu_l} = \frac{1}{2^{\nu_l+1}} W_l A_l^{-1} (I - B)(I + B)^{\nu_l} A_l.$$

Отсюда следует следующая оценка:

$$\|A_l S_l^{\nu_l}\| \leq \frac{1}{2^{\nu_l+1}} \|W_l A_l^{-1}\| \cdot \|(I - B)(I + B)^{\nu_l}\| \cdot \|A_l\|. \quad (1.30)$$

Норму $\|W_l A_l^{-1}\|$ можно оценить следующим образом:

$$S_l = I - W_l^{-1} A_l \Rightarrow I = W_l (I - S_l) A_l^{-1} = W_l A_l^{-1} \cdot A_l (I - S_l) A_l^{-1}.$$

Поскольку

$$A_l (I - S_l) A_l^{-1} = I - A_l S_l A_l^{-1} = I - \bar{S}_l.$$

(последнее равенство следует из (1.26)), то

$$W_l A_l^{-1} = (I - \bar{S}_l)^{-1}.$$

Отсюда в силу (1.27) следует необходимая оценка

$$\|W_l A_l^{-1}\| = \|(I - \bar{S}_l)^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - \|\bar{S}_l\|} \leq \frac{1}{1 - \max_l \bar{\omega}_l} < C_w, \quad (1.31)$$

где C_w есть некоторая константа.

Для оценки $\|(I - B)(I + B)^{\nu_l}\|$ воспользуемся следующей леммой:

Лемма (A. Reusken). Пусть для матрицы $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ выполнено $\|B\| \leq 1$ в некоторой операторной норме. Тогда в той же норме справедливо

$$\|(I - B)(I + B)^{\nu_l}\| \leq 2^{\nu_l+1} \sqrt{\frac{2}{\pi \nu_l}}, \quad \nu_l = 1, 2, 3, \dots \quad (1.32)$$

Доказательство леммы приведено в [45].

Тогда оценка (1.30) с учётом (1.31) и (1.32) приводит к (1.28). ■

Следствие. Из (1.29) следует, что

$$A_l S_l^{\nu_l} A_l^{-1} = (I - A_l W_l^{-1})^{\nu_l} \Rightarrow \|A_l S_l^{\nu_l} A_l^{-1}\| \leq \begin{cases} 1, & \nu_l = 0 \\ C_w \sqrt{\frac{2}{\pi \nu_l}}, & \nu_l \geq 1 \end{cases}. \quad (1.33)$$

Замечание. Если $\|W_l^{-1}A_l\mathbf{x}\|_2^2 \leq (W_l^{-1}A_l\mathbf{x}, \mathbf{x})$, тогда $\|I - \alpha W_l^{-1}A_l\| \leq 1$ для всех $\alpha \in [0, 2]$.

В общем случае возможно применение как предварительного, так и последующего сглаживаний. Такой многосеточный метод применительно к решению СЛАУ (1.24) принимает вид

$$\varphi_0^{(q+1)} = A_0 S_0^{\dot{\nu}} d_0 A_0 S_0^{\dot{\nu}'} A_0^{-1} \varphi_0^{(q)} + (I - A_0 S_0^{\dot{\nu}} d_0 A_0 S_0^{\dot{\nu}'} A_0^{-1}) A_0^{-1} \mathbf{b}_0.$$

Откуда, с учётом (1.22), (1.28) и (1.33), получим следующую оценку матрицы многосеточных итераций:

$$\|M\| = \|A_0 S_0^{\dot{\nu}} d_0 A_0 S_0^{\dot{\nu}'} A_0^{-1}\| \leq \|A_0 S_0^{\dot{\nu}}\| \cdot \|d_0\| \cdot \|A_0 S_0^{\dot{\nu}'} A_0^{-1}\|,$$

или

$$\|M\| \leq \begin{cases} C_A C_w \sqrt{\frac{2}{\pi \dot{\nu}'_l}}, & \dot{\nu} = 0 \text{ и } \dot{\nu}' \geq 1, \\ C_A C_w \sqrt{\frac{2}{\pi \dot{\nu}_l}}, & \dot{\nu} \geq 1 \text{ и } \dot{\nu}' = 0, \\ C_A C_w^2 \frac{2}{\pi} \frac{1}{\sqrt{\dot{\nu} \dot{\nu}'}}, & \dot{\nu} \geq 1 \text{ и } \dot{\nu}' \geq 1. \end{cases}$$

Нетрудно видеть, что во всех случаях (только предварительное сглаживание $\dot{\nu} = 0$ и $\dot{\nu}' \geq 1$, только последующее сглаживание $\dot{\nu} \geq 1$ и $\dot{\nu}' = 0$, предварительное и последующее сглаживание $\dot{\nu} \geq 1$ и $\dot{\nu}' \geq 1$) скорость сходимости двухсеточного метода не зависит от величины шага сетки, если выполнены свойства сглаживания (1.21) и аппроксимации (1.22).

Однако даже в простейшем случае (двухсеточный алгоритм) очевидно, что для построения многосеточного метода необходимо некоторым образом построить грубую сетку, определить матрицу A_1 на ней, построить оператор сужения $\mathcal{R}_{0 \rightarrow 1}$ и продолжения $\mathcal{P}_{1 \rightarrow 0}$ и выбрать сглаживающую процедуру. Кроме того, в силу (1.17), приведённые выше рассуждения справедливы только для линейных задач.

Данные компоненты (W_0 , A_1 , $\mathcal{R}_{0 \rightarrow 1}$ и $\mathcal{P}_{1 \rightarrow 0}$) не зависят друг от друга, что порождает огромное количество вариантов построения многосеточных методов. При решении прикладных задач часто очень трудно, а порой и невозможно заранее предсказать, какие именно компоненты позволят достичь наивысшей скорости сходимости. Чаще всего выбор компонент основан на результатах вычислительных экспериментов.

Свойства сглаживания и аппроксимации, а также другие теоретические аспекты многосеточных методов подробно изложены в [21].

§ 5. Многосеточная итерация

Рассмотрим подробнее некоторые компоненты классических многосеточных методов (КММ) на примере решения одномерной задачи Дирихле

$$u'' = -f(x), \quad u(0) = \mu_0, \quad u(1) = \mu_1. \quad (1.34)$$

Построим вычислительную сетку G^0 для конечно-разностной аппроксимации краевой задачи (1.34) посредством разбиения единичного отрезка на $N^0 = 2^m$ частей. Узлы x_i^0 сетки G^0 заданы соотношениями

$$x_i^0 = (i-1)h^0, \quad i = 1, 2, \dots, N^0 + 1, \quad \text{где } h^0 = 1/N^0 = 2^{-m}.$$

Вычислительная сетка для $m = 3$ показана на рис. 1.11. Как и в § 4 гл. 1, всё, что связано с сеткой G^0 , будет иметь верхний индекс «0».

Сеточный аналог краевой задачи (1.34) на сетке G^0 принимает вид

$$\varphi_1^0 = \mu_0, \quad (1.35a)$$

$$\frac{\varphi_{i-1}^0 - 2\varphi_i^0 + \varphi_{i+1}^0}{(h^0)^2} = -f(x_i^0), \quad i = 2, 3, \dots, N^0, \quad (1.35b)$$

$$\varphi_{N^0+1}^0 = \mu_1. \quad (1.35c)$$

Предположим, что выбраны некоторое начальное приближение к решению СЛАУ (1.35) и симметричный вариант метода Зейделя в качестве

сглаживателя. Многосеточная итерация, которая условно показана на рис. 1.12, может быть представлена как следующая последовательность действий:

1. Сглаживание на сетке G^0 состоит в выполнении нескольких итераций симметричного варианта метода Зейделя

$$\tilde{\varphi}_i^0 = \frac{1}{2} \left(\tilde{\varphi}_{i-1}^0 + (\varphi_{i+1}^0)^{(\nu-1)} + (h^0)^2 f(x_i^0) \right), \quad i = 2, 3, \dots, N^0, \quad (1.36a)$$

$$(\varphi_i^0)^{(\nu)} = \frac{1}{2} \left(\tilde{\varphi}_{i-1}^0 + (\varphi_{i+1}^0)^{(\nu)} + (h^0)^2 f(x_i^0) \right), \quad i = N^0, \dots, 3, 2, \quad (1.36b)$$

в процессе которых эффективно удаляются высокочастотные компоненты ошибки.

2. Сужение $G^0 \rightarrow G^1$. Обозначим через $\hat{\varphi}_i^0$, $i = 1, \dots, N^0 + 1$ приближение к решению системы (1.35), полученное после выполнения нескольких итераций симметричного варианта метода Зейделя (1.36) на сетке G^0 . Подставляя $\hat{\varphi}_i^0$, $i = 1, \dots, N^0 + 1$ в (1.35), получим

$$\hat{\varphi}_1^0 = \mu_0, \quad (1.37a)$$

$$\frac{\hat{\varphi}_{i-1}^0 - 2\hat{\varphi}_i^0 + \hat{\varphi}_{i+1}^0}{(h^0)^2} = -f(x_i^0) - r_i^0, \quad i = 2, 3, \dots, N^0, \quad (1.37b)$$

$$\hat{\varphi}_{N^0+1}^0 = \mu_1, \quad (1.37c)$$

где r_i^0 , $i = 1, \dots, N^0 + 1$ суть компоненты вектора невязки. Согласно § 4 гл. 1, перепишем (1.37) в терминах «поправка-невязка». Для этого

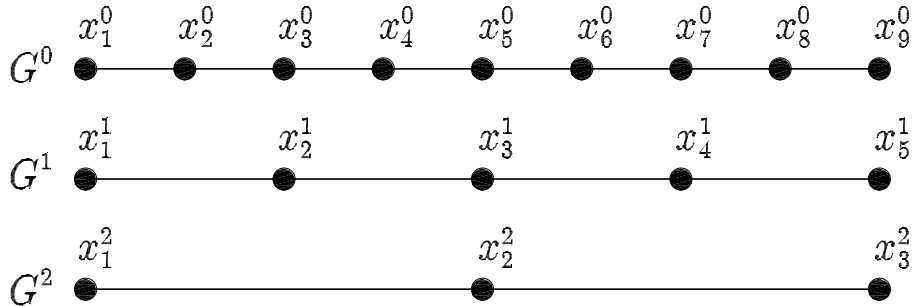


Рис. 1.11. Мелкая (G^0) и грубые сетки (G^1 и G^2)

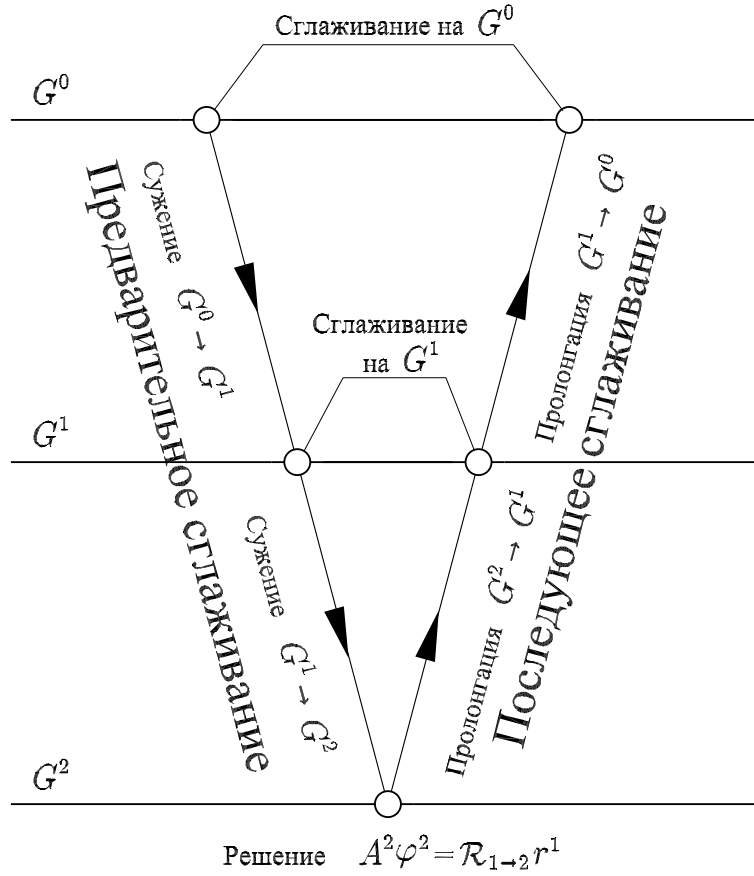


Рис. 1.12. Схема многосеточной итерации

представим искомое решение разностной краевой задачи (1.37) в виде суммы полученного приближения $\hat{\varphi}_i^0$, $i = 1, \dots, N^0 + 1$ и поправки c_i^0 , $i = 1, \dots, N^0 + 1$, т.е.

$$\varphi_i^0 = \hat{\varphi}_i^0 + c_i^0, \quad i = 1, 2, \dots, N^0 + 1. \quad (1.38)$$

Поправку c_i^0 в (1.38) выберем из условия $r_i^0 = 0$, т.е. уничтожим невязку r_i^0 в (1.37). Подстановка (1.38) в (1.37) приводит к следующей системе

$$c_1^0 + \hat{\varphi}_1^0 = \mu_0, \quad (1.39a)$$

$$\frac{(c_{i-1}^0 + \hat{\varphi}_{i-1}^0) - 2(c_i^0 + \hat{\varphi}_i^0) + (c_{i+1}^0 + \hat{\varphi}_{i+1}^0)}{(h^0)^2} = -f(x_i^0), \quad (1.39b)$$

$$c_{N^0+1}^0 + \hat{\varphi}_{N^0+1}^0 = \mu_1. \quad (1.39c)$$

Из сравнения уравнений (1.37а) и (1.39а) нетрудно получить, что $c_1^0 = 0$. Аналогично из уравнений (1.37с) и (1.39с) следует, что $c_{N^0+1}^0 = 0$. Тогда разностная краевая задача (1.37) в терминах «поправка-невязка» принимает следующий вид:

$$c_1^0 = 0, \quad (1.40а)$$

$$\frac{c_{i-1}^0 - 2c_i^0 + c_{i+1}^0}{(h^0)^2} = r_i^0 = -f(x_i^0) - \frac{\hat{\varphi}_{i-1}^0 - 2\hat{\varphi}_i^0 + \hat{\varphi}_{i+1}^0}{(h^0)^2}, \quad (1.40б)$$

$$c_{N^0+1}^0 = 0. \quad (1.40с)$$

Как уже упоминалось ранее в § 4 гл. 1, решение СЛАУ (1.40) требует того же объема вычислений, что и решение исходной системы (1.35). Чтобы использовать быструю сходимость метода Зейделя на первых итерациях, построим вспомогательную грубую сетку G^1 с шагом $h^1 = 2h^0 \Rightarrow N^1 = N^0/2 = 2^{m-1}$. В КММ возможны два варианта построения вспомогательных сеток, одним из которых является удаление узлов с чётными номерами из сетки G^0 . Сетка G^1 с $N^1 = 4$ показана на рис. 1.11. Как и в § 4 гл. 1, всё, что связано с сеткой G^1 , будет иметь верхний индекс «1». Выбор N^0 в виде 2^m гарантирует, что граничные узлы сетки G^1 будут расположены на границах единичного отрезка, т.е. $x_1^1 = 0$ и $x_{N^1+1}^1 = 1$. Поэтому аппроксимация граничных условий Дирихле будет точной не только на самой мелкой сетке G^0 , но и на грубой сетке G^1 .

Теперь сформируем при помощи грубой сетки G^1 СЛАУ, решение φ_i^1 , $i = 1, \dots, N^1 + 1$ которой будет аппроксимировать поправку c_i^0 , $i = 1, \dots, N^0 + 1$, являющейся решением (1.40). Поскольку левая часть (1.40) получена в результате конечно-разностной аппроксимации одномерного оператора Лапласа на сетке G^0 , то возможно предложить следующий вид СЛАУ, связанной с сеткой G^1 :

$$\text{узел } x_1^1 \text{ сетки } G^1: \quad \varphi_1^1 = 0, \quad (1.41a)$$

$$\text{узел } x_2^1 \text{ сетки } G^1: \quad \frac{\varphi_1^1 - 2\varphi_2^1 + \varphi_3^1}{(h^1)^2} = b_2^1, \quad (1.41b)$$

$$\text{узел } x_3^1 \text{ сетки } G^1: \quad \frac{\varphi_2^1 - 2\varphi_3^1 + \varphi_4^1}{(h^1)^2} = b_3^1, \quad (1.41c)$$

$$\text{узел } x_4^1 \text{ сетки } G^1: \quad \frac{\varphi_3^1 - 2\varphi_4^1 + \varphi_5^1}{(h^1)^2} = b_4^1, \quad (1.41d)$$

$$\text{узел } x_5^1 \text{ сетки } G^1: \quad \varphi_5^1 = 0, \quad (1.41e)$$

т.е. левая часть уравнений (1.41b), (1.41c) и (1.41d) получена в результате конечно-разностной аппроксимации одномерного оператора Лапласа во внутренних узлах x_2^1 , x_3^1 и x_4^1 сетки G^1 . Система (1.41) содержит только три неизвестные φ_2^1 , φ_3^1 и φ_4^1 , в то время как исходная система (1.35) содержит семь неизвестных $c_2^0, c_3^0, \dots, c_8^0$.

Теперь необходимо определить правую часть в уравнениях (1.41b), (1.41c) и (1.41d), т.е. некоторым образом выразить b_2^1 , b_3^1 и b_4^1 через компоненты вектора невязки $r_2^0, r_3^0, \dots, r_8^0$ (правая часть (1.40)). Простейшим способом задания b_2^1 , b_3^1 и b_4^1 является присвоение значений r_i^0 в совпадающих узлах сеток G^0 и G^1 , т.е.

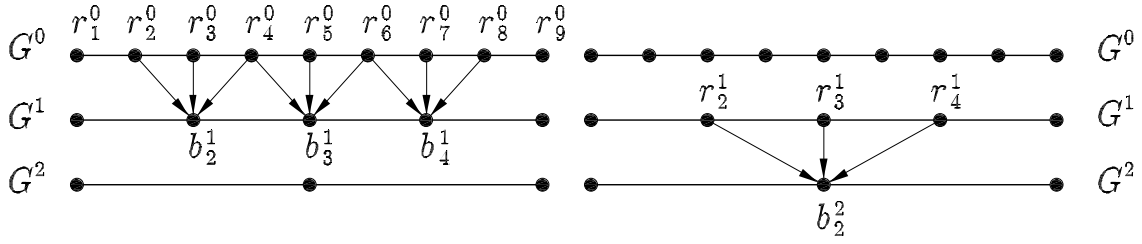
$$b_2^1 = r_3^0, \quad b_3^1 = r_5^0, \quad b_4^1 = r_7^0.$$

Однако в [45] показано, что подобное задание правой части в (1.41) не обеспечивает требуемой точности, если сеточная функция r_i^0 , $i = 1, \dots, N^0 + 1$ сильно изменяется на первых многосеточных итерациях.

Поэтому обычно используют осреднение типа

$$b_2^1 = \frac{r_2^0 + 2r_3^0 + r_4^0}{4}, \quad b_3^1 = \frac{r_4^0 + 2r_5^0 + r_6^0}{4}, \quad b_4^1 = \frac{r_6^0 + 2r_7^0 + r_8^0}{4}, \quad (1.42)$$

как показано на рис. 1.13. Подобное осреднение в КММ является результатом действия оператора сужения \mathcal{R} , и уравнения (1.42) условно

Рис. 1.13. Одномерные операторы сужения $\mathcal{R}_{0 \rightarrow 1}$ и $\mathcal{R}_{1 \rightarrow 2}$

записывают в виде

$$\mathbf{b}^1 = \mathcal{R}_{0 \rightarrow 1} \mathbf{r}^0.$$

3. Сглаживание на сетке G^1 состоит в выполнении нескольких итераций симметричного варианта метода Зейделя, которые, применительно к системе (1.41) с правой частью (1.42), определяют как

$$\tilde{\varphi}_i^1 = \frac{1}{2} \left(\tilde{\varphi}_{i-1}^1 + (\varphi_{i+1}^1)^{(\nu-1)} - (h^1)^2 b_i^1 \right), \quad i = 2, \dots, N^1, \quad (1.43a)$$

$$(\varphi_i^1)^{(\nu)} = \frac{1}{2} \left(\tilde{\varphi}_{i-1}^1 + (\varphi_{i+1}^1)^{(\nu)} - (h^1)^2 b_i^1 \right), \quad i = N^1, \dots, 2. \quad (1.43b)$$

По мере сходимости многосеточного алгоритма $\varphi_i^1 \rightarrow 0$, $i = 1, \dots, N^1 + 1$, поэтому итерации (1.43) следует начинать с нулевого начального приближения. В процессе итераций (1.43) также удаляются высокочастотные компоненты ошибки.

4. Сужение $G^1 \rightarrow G^2$. Может оказаться, что сетка G^1 окажется слишком мелкой, и на ней не удастся получить достаточно точную аппроксимацию поправки \mathbf{c}^0 за несколько итераций метода Зейделя. Поэтому необходимо построить еще одну грубую сетку G^2 с шагом $h^2 = 2h^1 = 4h^0$ посредством удаления узлов с чётными номерами из сетки G^1 , как показано на рис. 1.11.

Обозначим через $\hat{\varphi}_i^1$, $i = 1, \dots, N^1 + 1$ приближение к решению системы (1.41) с правой частью (1.42), полученное после выполнения нескольких итераций симметричного варианта метода Зейделя (1.43) на сетке

G^1 . Подставляя $\hat{\varphi}_i^1$ в (1.41), получим следующую СЛАУ:

$$\hat{\varphi}_1^1 = 0, \quad (1.44a)$$

$$\frac{\hat{\varphi}_{i-1}^1 - 2\hat{\varphi}_i^1 + \hat{\varphi}_{i+1}^1}{(h^1)^2} = b_i^1 - r_i^1, \quad i = 2, 3, \dots, N^1, \quad (1.44b)$$

$$\hat{\varphi}_5^1 = 0. \quad (1.44c)$$

По аналогии с сужением $G^0 \rightarrow G^1$ перепишем (1.44) в терминах «поправка-невязка». Для этого представим искомое решение задачи (1.44) в виде суммы полученного приближения $\hat{\varphi}_i^1$ и поправки c_i^1 , т.е.

$$\varphi_i^1 = \hat{\varphi}_i^1 + c_i^1, \quad i = 1, 2, \dots, N^1 + 1. \quad (1.45)$$

Сеточная функция c_i^1 , $i = 1, \dots, N^1 + 1$ является поправкой к приближению $\hat{\varphi}_i^1$, $i = 1, \dots, N^1 + 1$, которое аппроксимирует поправку c_i^0 , $i = 1, \dots, N^0 + 1$ на самой мелкой сетке G^0 . Подстановка (1.45) в (1.44) приводит к следующей системе:

$$c_1^1 = 0, \quad (1.46a)$$

$$\frac{c_{i-1}^1 - 2c_i^1 + c_{i+1}^1}{(h^1)^2} = r_i^1 = b_i^1 - \frac{\hat{\varphi}_{i-1}^1 - 2\hat{\varphi}_i^1 + \hat{\varphi}_{i+1}^1}{(h^1)^2}, \quad i = 2, \dots, N^1, \quad (1.46b)$$

$$c_5^1 = 0, \quad (1.46c)$$

По аналогии с переходом от (1.40) к (1.41) можно сформировать на сетке G^2 следующую СЛАУ:

$$\text{узел } x_1^2 \text{ сетки } G^2: \quad \varphi_1^2 = 0, \quad (1.47a)$$

$$\text{узел } x_2^2 \text{ сетки } G^2: \quad \frac{\varphi_1^2 - 2\varphi_2^2 + \varphi_3^2}{(h^2)^2} = b_2^2, \quad (1.47b)$$

$$\text{узел } x_3^2 \text{ сетки } G^2: \quad \varphi_3^2 = 0, \quad (1.47c)$$

решение которой φ_i^2 , $i = 1, \dots, N^2 + 1$ будет аппроксимировать поправку c_i^1 , $i = 1, \dots, N^1 + 1$, которая является решением (1.46). В соответствии

с рис. 1.13, правая часть b_2^2 уравнения (1.47b) может быть задана в виде

$$b_2^2 = \frac{r_2^1 + 2r_3^1 + r_4^1}{4}. \quad (1.48)$$

Решение СЛАУ (1.47) с правой частью (1.48) легко получить аналитически

$$\varphi_1^2 = 0, \quad \varphi_2^2 = -\frac{(h^2)^2}{2} b_2^2 = -\frac{(h^2)^2}{2} \frac{r_2^1 + 2r_3^1 + r_4^1}{4}, \quad \varphi_3^2 = 0. \quad (1.49)$$

На этом завершается первая половина многосеточной итерации, которая называется *предварительным сглаживанием* (pre-smoothing) (рис. 1.12).

Вторая половина многосеточной итерации называется *последующим сглаживанием* (post-smoothing) (рис. 1.12).

5. Пролонгация $G^2 \rightarrow G^1$. Сеточная функция φ_i^2 , $i = 1, \dots, N^2 + 1$ (1.49), которая определена на сетке G^2 , аппроксимирует поправку c_i^1 , $i = 1, \dots, N^1 + 1$ на сетке G^1 . Поскольку сетка G^2 состоит из меньшего количества узлов, чем сетка G^1 , то необходимо доопределить значения сеточной функции φ_i^2 в недостающих узлах посредством интерполяции. Простейшая (линейная) интерполяция позволяет получить следующую поправку c_i^1 на сетке G^1 :

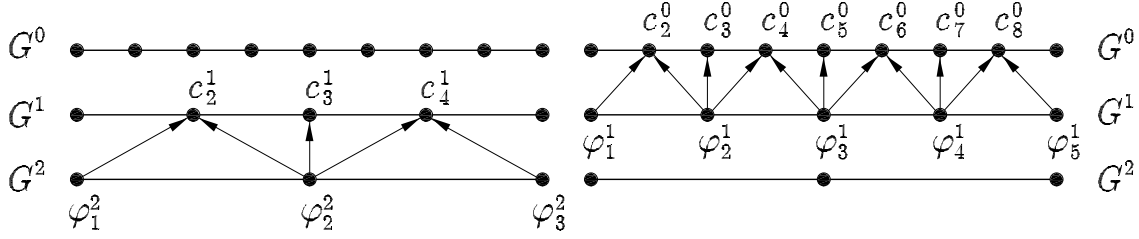
$$c_1^1 = 0, \quad c_2^1 = \frac{1}{2}(\varphi_1^2 + \varphi_2^2), \quad c_3^1 = \varphi_2^2, \quad c_4^1 = \frac{1}{2}(\varphi_2^2 + \varphi_3^2), \quad c_5^1 = 0. \quad (1.50)$$

Подобное доопределение поправки в КММ является результатом действия *оператора пролонгации* \mathcal{P} и уравнения (1.50) условно записывают в виде

$$\mathbf{c}^1 = \mathcal{P}_{2 \rightarrow 1} \boldsymbol{\varphi}^2.$$

Одномерный оператор продолжения \mathcal{P} схематично показан на рис. 1.14.

6. Сглаживание на сетке G^1 . Пролонгация неизбежно вносит вычислительную погрешность в поправку c_i^1 , $i = 1, \dots, N^1 + 1$. Чтобы уменьшить влияние погрешности интерполяции, необходимо выполнить

Рис. 1.14. Одномерные операторы пролонгации $\mathcal{P}_{2 \rightarrow 1}$ и $\mathcal{P}_{1 \rightarrow 0}$

несколько итераций метода Зейделя (1.43). Начальное приближение задают в виде

$$\hat{\varphi}_i^1 := \hat{\varphi}_i^1 + c_i^1, \quad i = 1, 2, \dots, N^1 + 1 \quad (\text{равенство в смысле присвоения}),$$

где $\hat{\varphi}_i^1$ есть ранее полученное приближение к решению (1.41) на этапе предварительного сглаживания, а c_i^1 — функция φ_i^2 , пролонгированная с сетки G^2 на сетку G^1 (1.50).

7. Пролонгация $G^1 \rightarrow G^0$. Сеточная функция $\hat{\varphi}_i^1$, $i = 1, \dots, N^1 + 1$ пролонгируется на сетку G^0 аналогично тому, как функция φ_i^2 , $i = 1, \dots, N^2 + 1$ пролонгируется на сетку G^1 . Схематично этот процесс показан на рис. 1.14.

8. Сглаживание на сетке G^0 . Чтобы уменьшить влияние погрешности интерполяции, внесенной в поправку c_i^0 , $i = 1, \dots, N^0 + 1$, выполним несколько итераций метода Зейделя (1.36). Начальное приближение задано в виде

$$\hat{\varphi}_i^0 := \hat{\varphi}_i^0 + c_i^0, \quad i = 1, 2, \dots, N^0 + 1 \quad (\text{равенство в смысле присвоения}),$$

где $\hat{\varphi}_i^0$ есть ранее полученное приближение к решению (1.35) на этапе предварительного сглаживания, а $c^0 = \mathcal{P}_{1 \rightarrow 0} \hat{\varphi}^1$ — поправка $\hat{\varphi}^1$, пролонгированная с сетки G^1 на сетку G^0 .

Как видно из рис. 1.12, приведенная выше последовательность вычислений напоминает букву V, поэтому она получила название V-цикла.

В общем случае, если $N^0 = 2^m$, то в КММ используются $m - 1$ грубых сеток.

Для иллюстрации многосеточной итерации положим, что точное решение задачи (1.34) есть $u(x) = 10(e^x + (1 - e)x - 1)$, тогда правая часть $f(x) = 10e^x$. Сетки G^0 ($N^0 = 8$), G^1 ($N^1 = 4$) и G^2 ($N^2 = 2$) показаны на рис. 1.11.

Сначала решим разностную краевую задачу (1.35) методом прогонки. Полученное точное решение, которое обозначим как χ_i , будет служить для демонстрации сходимости многосеточных итераций. Благодаря решению χ можно для наглядности точно вычислить искомые поправки c^0 и c^1 , которые обозначим как (c^0) и (c^1) . Численное решение задачи (1.35) начнем с нулевого начального приближения. Рис. 1.15 иллюстрирует основные этапы многосеточной итерации:

Сглаживание на сетке G^0 . На рис. 1.15а показаны приближение $\hat{\varphi}^0$ (●) к точному решению χ (★) и поправка $(c^0) = \chi - \hat{\varphi}^0$ (○) после трех итераций метода Зейделя (1.36).

Сглаживание на сетке G^1 . На рис. 1.15б показаны поправка (c^0) (★), приближение $\hat{\varphi}^1$ (●) к решению системы (1.41) с правой частью (1.42), полученное после трех итераций метода Зейделя (1.43), и поправка $(c^1) = (c^0) - \hat{\varphi}^1$ (○), которая вычислена в совпадающих узлах сеток G^0 и G^1 . На рисунке заметно, что полученная сеточная функция $\hat{\varphi}^1$ (●) достаточно хорошо аппроксимирует искомую поправку (c^0) (★) в совпадающих узлах сеток G^1 и G^0 .

Пролонгация $G^2 \rightarrow G^1$. На рис. 1.15в показаны искомая поправка (c^1) (★) и функция φ^2 (●), пролонгированная на сетку G^1 при помощи линейной интерполяции в соответствии с (1.50). На рис. 1.15г заметно, что добавление поправки φ^2 , пролонгированной с сетки G^2 на G^1 , к полу-

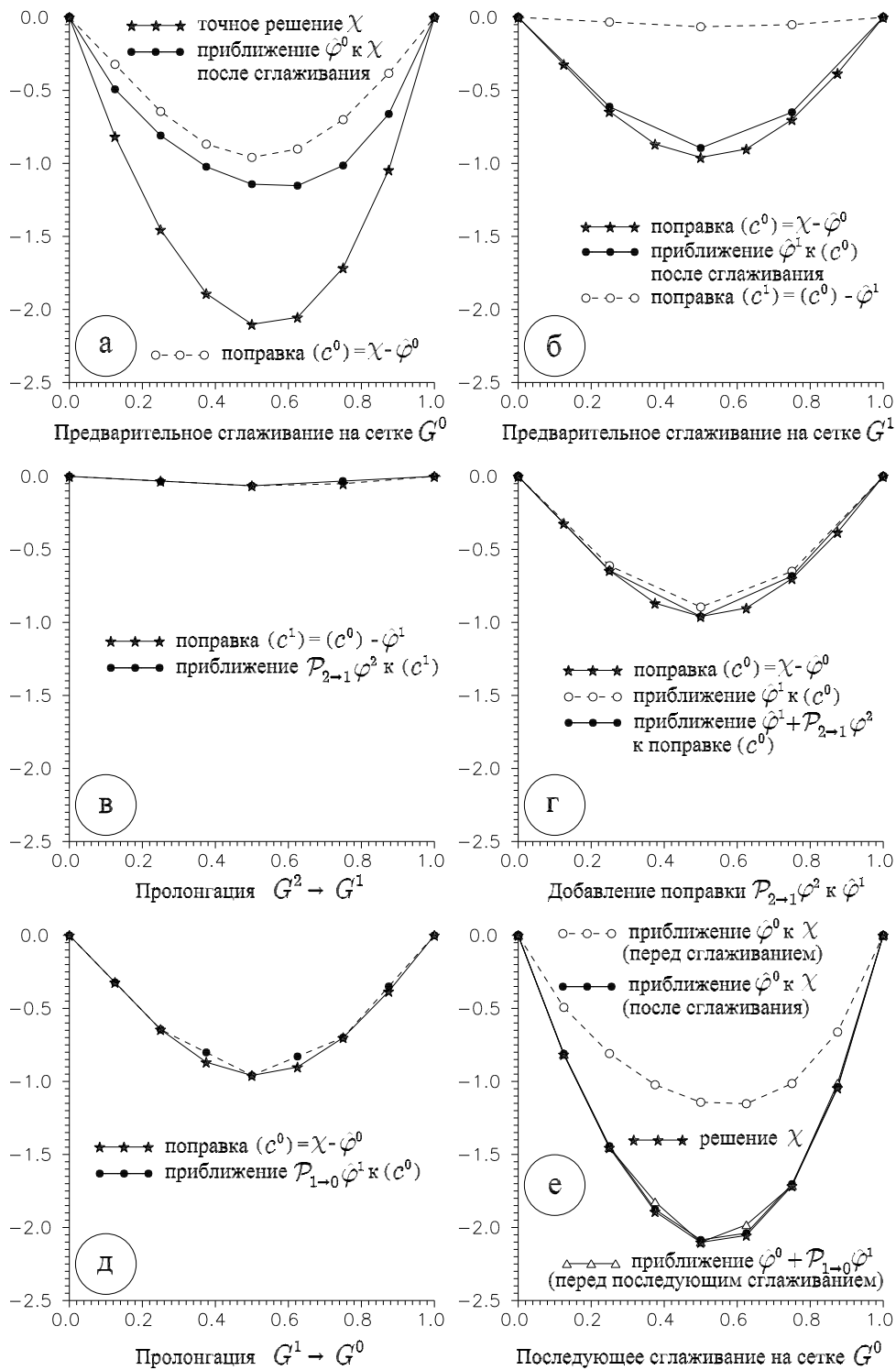


Рис. 1.15. Сходимость многосеточной итерации

ченному ранее приближению $\hat{\varphi}^1$ (○) позволило улучшить аппроксимацию искомой поправки (c^0) (★) на самой мелкой сетке G^0 .

Пролонгация $G^1 \rightarrow G^0$. На рис. 1.15д показаны искомая поправка (c^0) (★) и функция $\hat{\varphi}^1$ (●), пролонгированная с сетки G^1 на сетку G^0 при помощи линейной интерполяции (рис. 1.14).

Сглаживание на сетке G^0 . На рис. 1.15е показаны решение χ (★), полученное методом прогонки, приближение $\hat{\varphi}^0$ к решению СЛАУ (1.35) после предварительного сглаживания (○), приближение $\hat{\varphi}^0 + \mathcal{P}_{1 \rightarrow 0} \hat{\varphi}^1$ (Δ) и приближение $\hat{\varphi}^0$ к решению СЛАУ (1.35) после последующего сглаживания (●).

В КММ сглаживающие итерации на самой мелкой сетке требуют наибольших вычислительных усилий. Сравнивая приближения к решению, полученные после выполнения сглаживающих итераций на самой мелкой сетке до (● на рис. 1.15а) и после (● на рис. 1.15е) вычисления поправки на грубых сетках, нетрудно убедиться в высокой скорости сходимости рассмотренного варианта КММ для данной модельной задачи.

§ 6. Классические многосеточные методы

Воспользуемся краевой задачей Дирихле для уравнения Пуассона (1.8) для иллюстрации сходимости КММ в двухмерном случае. Пусть область Ω является прямоугольником

$$\Omega = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq \ell_x, 0 \leq y \leq \ell_y\}.$$

Положим, что точное решение выбрано в виде $u(x, y) = X(x)Y(y)$, где

$$X(x) = 10 \left(e^x + (1 - e^{\ell_x}) \frac{x}{\ell_x} - 1 \right), \quad Y(y) = 10 \left(e^y + (1 - e^{\ell_y}) \frac{y}{\ell_y} - 1 \right).$$

Сначала рассмотрим случай, когда область Ω является единичным квадратом ($\ell_x = \ell_y = 1$). Выполним два вычислительных эксперимента, в которых самая мелкая сетка состоит из 128×128 и 2048×2048

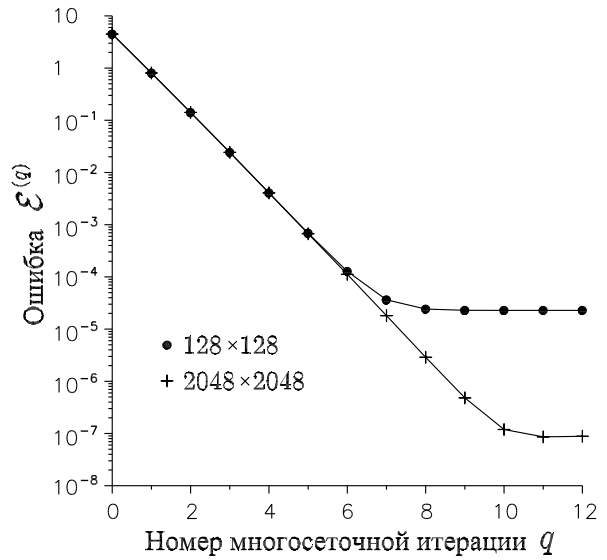
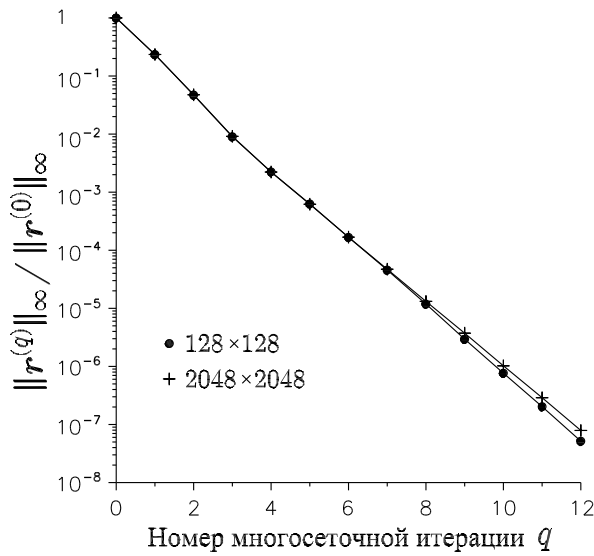


Рис. 1.16. Уменьшение нормы вектора невязки

Рис. 1.17. Уменьшение ошибки численного решения

узлов. Тогда количество грубых сеток составит 5 и 9 соответственно, причём самая грубая сетка имеет размер 4×4 . Для аппроксимации задачи Дирихле воспользуемся пятиточечным шаблоном (рис. 1.1), при этом разностная схема имеет вид (1.9). В качестве сглаживающей процедуры выберем метод Зейделя с точечным упорядочиванием неизвестных. На каждой сетке выполним одну сглаживающую итерацию ($\nu = 1$), всего выполним двенадцать многосеточных итераций ($q_{\max} = 12$). Сходимость V-цикла оценим по убыванию нормы вектора невязки приближения $\varphi^{(q)}$, отнесённой к норме вектора невязки начального (нулевого) приближения $\varphi^{(0)} = 0$

$$\frac{\|\mathbf{r}^{(q)}\|_{\infty}}{\|\mathbf{r}^{(0)}\|_{\infty}} = \frac{\|A\varphi^{(q)} - \mathbf{b}\|_{\infty}}{\|A\varphi^{(0)} - \mathbf{b}\|_{\infty}} = \frac{\|A\varphi^{(q)} - \mathbf{b}\|_{\infty}}{\|\mathbf{b}\|_{\infty}},$$

и ошибки численного решения

$$\mathcal{E}^{(q)} = \max_{ij} |\varphi_{ij}^{(q)} - X(x_i)Y(y_j)|,$$

где q есть номер многосеточной итерации.

Результаты вычислительного эксперимента, показанные на рис. 1.16

и 1.17, иллюстрируют независимость скорости сходимости V-цикла от величины шага сетки. Напомним, что в односеточном варианте скорость уменьшения ошибки существенно зависит от h (рис. 1.8).

Оценим объём вычислительной работы для получения численного решения. Положим, что на каждой сетке выполнено ν сглаживающих итераций. Пусть \mathcal{W}_0 – количество арифметических операций, необходимых для выполнения каждой сглаживающей итерации на самой мелкой сетке G^0 с N^0 узлами. Поскольку количество узлов грубой сетки G^l , $l = 0, 1, \dots, L^+$ составит $N^l 2^{-dl}$ ($d = 2, 3$), то для выполнения сглаживания на сетке G^l нужно выполнить $\nu \mathcal{W}_0 2^{-dl}$ арифметических операций, где L^+ есть номер самой грубой сетки и N^l – количество узлов на сетке G^l . Тогда, если пренебречь усилиями для операторов сужения и продолжения, вычислительная стоимость q_{\max} многосеточных итераций составит

$$q_{\max} \sum_{l=0}^{L^+} \nu \mathcal{W}_0 2^{-dl} = q_{\max} \nu \mathcal{W}_0 \frac{1 - 2^{-d(L^++1)}}{1 - 2^{-d}} \approx \frac{\nu q_{\max}}{1 - 2^{-d}} \mathcal{W}_0$$

арифметических операций. Поскольку $\mathcal{W}_0 = O(N^0)$, то в данном случае V-цикл обладает оптимальной скоростью сходимости. В рассмотренном примере ($\nu = 1 + 1 = 2$, $d = 2$, $q_{\max} = 12$) общий объём вычислительной работы эквивалентен усилиям для выполнения тридцати двух сглаживающих итераций на самой мелкой сетке G^0 .

Однако столь высокая скорость сходимости достигается не всегда. В § 4 гл. 1 получена оценка нормы матрицы многосеточных итераций

$$\|M_a\| \leq \|A_0 S_0^\nu\| \cdot \|A_0^{-1} - \mathcal{P}_{1 \rightarrow 0} A_1^{-1} \mathcal{R}_{0 \rightarrow 1}\|,$$

согласно которой на скорость сходимости многосеточных методов влияет выбор сглаживателя (S) и формулировка дискретных задач на грубых стеках ($\mathcal{P}_{1 \rightarrow 0}$, A_1^{-1} , $\mathcal{R}_{0 \rightarrow 1}$). Рассмотрим влияние отдельных факторов на

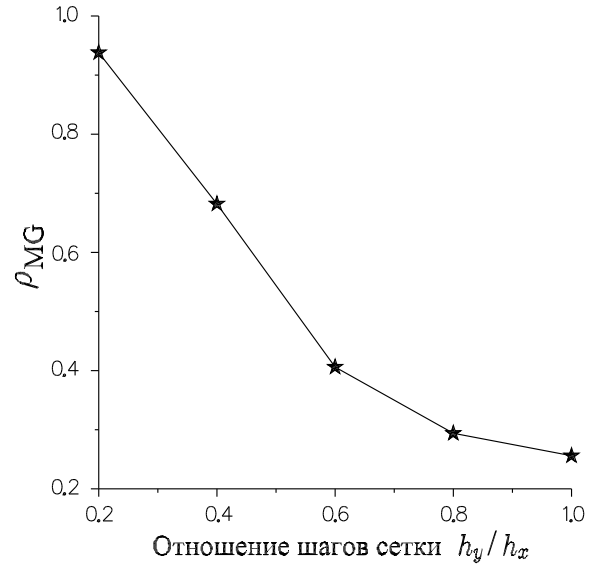
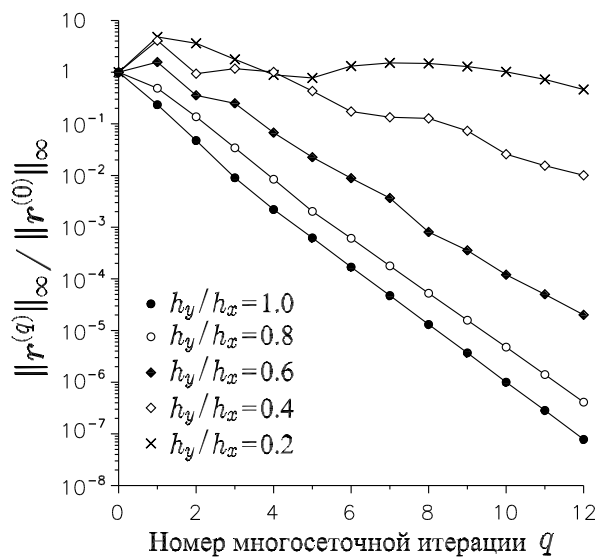


Рис. 1.18. Изменение нормы вектора невязки в зависимости от h_y/h_x

Рис. 1.19. Зависимость коэффициента ρ_{MG} от h_y/h_x

эффективность КММ.

Сглаживатель. Вернёмся к задаче (1.8), где область Ω является прямоугольником: $\ell_x = 1$ и $0 < \ell_y \leq \ell_x$. Положим, что для самой мелкой сетки справедливо $N_x = N_y$, тогда шаги сетки соотносятся как

$$\frac{h_y}{h_x} = \frac{\ell_y}{\ell_x} \leq 1.$$

На примере задачи (1.8) с $N_x = N_y = 1024$ покажем зависимость скорости сходимости V-цикла от отношения шагов сетки h_y/h_x . Согласно рис. 1.18, скорость сходимости V-цикла с точечным методом Зейделя в качестве сглаживателя существенно уменьшается при $h_y/h_x \rightarrow 0$.

В КММ для количественной меры скорости сходимости используют следующий коэффициент осреднённого уменьшения нормы вектора невязки

$$\rho_{MG} = \left(\frac{\|A\varphi^{(q)} - \mathbf{b}\|}{\|A\varphi^{(0)} - \mathbf{b}\|} \right)^{1/q} \quad (1.51)$$

при выполнении q многосеточных итераций.

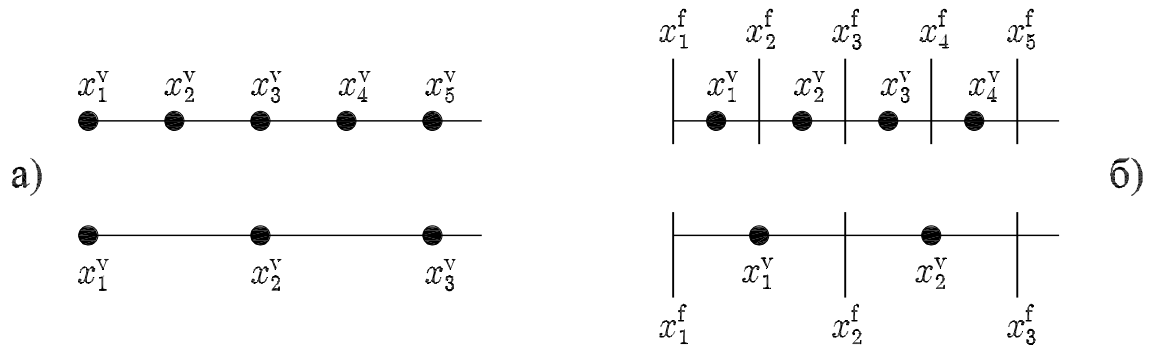


Рис. 1.20. Способы построения грубых сеток в КММ

Согласно рис. 1.19, норма вектора невязки уменьшается в $\approx 1/0.95$ раз после каждой многосеточной итерации при $h_y/h_x = 0.2$, что свидетельствует о медленной скорости сходимости. Очевидно, что в случае $h_y/h_x \rightarrow 0$ лучшим сглаживателем является метод Зейделя с блочным упорядочиванием неизвестных вдоль линий $i = const$ (§ 2 гл. 1).

В общем случае, когда используют адаптивную сетку, отношение шагов изменяется по мере сходимости многосеточных итераций в зависимости от решения и способа адаптации сетки. Поэтому нельзя заранее выбрать оптимальное упорядочивание неизвестных, обеспечивающее наивысшую скорость сходимости многосеточного алгоритма.

В настоящее время в КММ в качестве сглаживателей используют метод Зейделя с различными упорядочиваниями неизвестных, методы неполной факторизации и различные варианты метода сопряженных градиентов. Теоретический анализ сглаживающих свойств итерационных методов для модельных задач с постоянными коэффициентами приведён в [56]. При решении прикладных задач выбор наиболее подходящего сглаживателя чаще всего осуществляют на основании анализа результатов вычислительных экспериментов.

Построение грубых сеток. В КММ наиболее часто применяют два способа построения грубых сеток, которые показаны на рис. 1.20. Пер-

вый их них основан на удалении узлов с чётными индексами (рис. 1.20а). Данный способ лучше всего подходит для задач с постоянными коэффициентами. Если коэффициенты в исходной дифференциальной задаче являются переменными, то наиболее подходящим является второй способ (рис. 1.20б). В этом случае самая мелкая сетка состоит из узлов x^v и граней контрольных объёмов x^f , а для аппроксимации используют интегро-интерполяционный метод [8, 13, 18, 26]. Грубую сетку строят посредством объединения контрольных объёмов мелкой сетки, а узел грубой сетки располагают в центре контрольного объёма. Аппроксимация переменных коэффициентов на грубой сетке основана на использовании свойства аддитивности определенного интеграла относительно подобластей. Отсутствие совпадающих узлов на мелкой и грубой сетках несколько усложняет построение оператора продолжения и аппроксимацию граничных условий.

Операторы сужения и продолжения. В настоящее время предложено несколько вариантов построения операторов сужения и продолжения в зависимости от способа построения грубых сеток (рис. 1.20). В КММ, выбирая данные операторы, обычно придерживаются следующего правила:

$$m_{\mathcal{R}} + m_{\mathcal{P}} > 2m,$$

где $m_{\mathcal{R}}$ и $m_{\mathcal{P}}$ есть наивысший порядок плюс один интерполяционного многочлена, который интерполируется точно операторами \mathcal{R} и \mathcal{P} , а $2m$ – порядок дифференциального уравнения [56].

Однако при построении оператора продолжения следует помнить, что полиномиальная интерполяция через линии или поверхности разрыва коэффициентов не точна, поэтому для подобных задач используют специальный оператор.

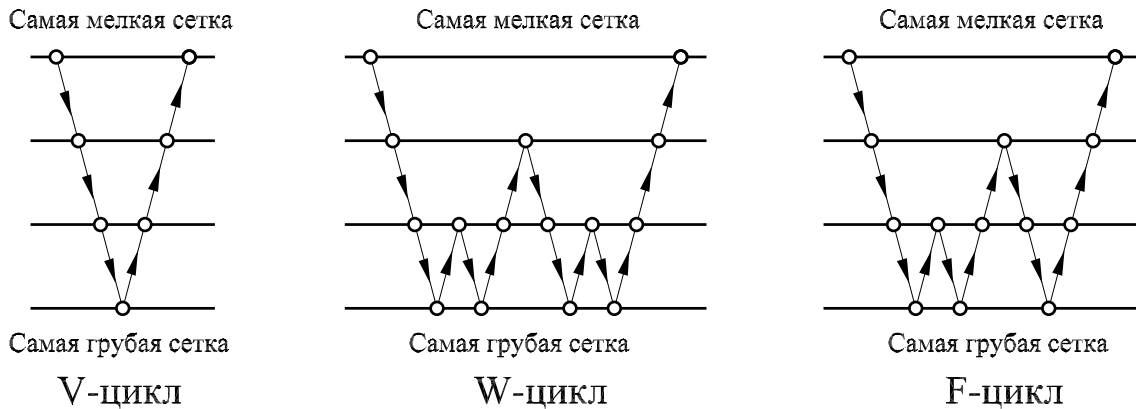


Рис. 1.21. Многосеточные циклы КММ

Дискретная задача на грубых сетках. В § 5 гл. 1 матрица коэффициентов СЛАУ $A_l \varphi_l = \mathbf{b}_l$ сформирована путём аппроксимации исходного дифференциального оператора на сетке G^l . В КММ часто используют альтернативный метод, который получил название подхода Галёркина [21]. В общем случае оба метода приводят к разным матрицам A_l .

Необходимо также упомянуть о следующих особенностях КММ:

Многосеточные циклы. Помимо V-цикла, рассмотренного в § 5 гл. 1, в КММ применяют и другие многосеточные циклы (рис. 1.21), которые для отдельных задач могут существенно отличаться по достигаемой скорости сходимости. Заметим, что применение данных циклов предполагает отсутствие у решения дифференциальной задачи особенностей типа пограничного слоя.

Нелинейные задачи. Как правило, в КММ для решения нелинейных задач применяют схему полной аппроксимации FAS (Full Approximation Storage). Основная идея данного подхода состоит в следующем: пусть \mathcal{N}_l есть нелинейный оператор, а $\hat{\varphi}_l$ – приближение к решению нелинейной задачи

$$\mathcal{N}_l(\hat{\varphi}_l) = \mathbf{b}_l + \mathbf{r}_l$$

на сетке G^l . Как и в линейном случае, добавим к $\hat{\varphi}_l$ поправку \mathbf{c}_l , чтобы

уничтожить невязку \mathbf{r}_l

$$\mathcal{N}_l(\hat{\varphi}_l + \mathbf{c}_l) = \mathbf{b}_l.$$

В силу нелинейности \mathcal{N}_l нельзя ожидать, что $\mathcal{N}_l(\hat{\varphi}_l + \mathbf{c}_l) = \mathcal{N}_l(\hat{\varphi}_l) + \mathcal{N}_l(\mathbf{c}_l)$. Поэтому вычтем из обеих частей уравнения $\mathcal{N}_l(\hat{\varphi}_l)$:

$$\mathcal{N}_l(\hat{\varphi}_l + \mathbf{c}_l) - \mathcal{N}_l(\hat{\varphi}_l) = \mathbf{b}_l - \mathcal{N}_l(\hat{\varphi}_l).$$

Построим некоторым образом нелинейный оператор \mathcal{N}_{l+1} на более грубой сетке G^{l+1} и спроецируем на неё невязку $\mathbf{b}_l - \mathcal{N}_l(\hat{\varphi}_l)$ и приближение $\hat{\varphi}_l$. Тогда уравнение для поправки \mathbf{c}_l на грубой сетке G^{l+1} принимает вид

$$\mathcal{N}_{l+1}(\mathcal{R}_{l \rightarrow l+1}^1 \hat{\varphi}_l + \mathbf{c}_{l+1}) - \mathcal{N}_{l+1}(\mathcal{R}_{l \rightarrow l+1}^1 \hat{\varphi}_l) = \mathcal{R}_{l \rightarrow l+1}^2 (\mathbf{b}_l - \mathcal{N}_l(\hat{\varphi}_l)),$$

т.е. на грубую сетку G^{l+1} в нелинейном случае проецируется не только невязка $\mathbf{b}_l - \mathcal{N}_l(\hat{\varphi}_l)$, но и приближение к решению $\hat{\varphi}_l$, причём операторы проецирования могут быть различными: $\mathcal{R}_{l \rightarrow l+1}^1 \neq \mathcal{R}_{l \rightarrow l+1}^2$. Полученное уравнение в сочетании с некоторым способом его линеаризации служит для отыскания поправки \mathbf{c}_{l+1} .

Различные варианты FAS изложены в [28]. Отметим только, что применение FAS подразумевает, что нелинейный оператор должен быть определён в нуле, но так бывает не всегда. Например, для нелинейного уравнения теплопроводности

$$\nabla(\lambda(T)\nabla T) = -f$$

применение FAS выглядит проблематичным из-за возможной неопределённости коэффициента теплопроводности $\lambda(\mathcal{R}_{l \rightarrow l+1}^1 \hat{\varphi}_l)$ при $\hat{\varphi}_l \rightarrow 0$. Очевидно, что в общем случае приближение к решению необходимо проецировать с самой мелкой сетки.

Распараллеливание вычислений. Параллельное исполнение многосеточных итераций КММ подразумевает распараллеливание операторов

сужения и продолжения, а также сглаживающих итераций. Последнее не является тривиальным действием, поскольку используемые в качестве сглаживателей итерационные методы сильно различаются по возможности распараллеливания вычислений. Укажем на принципиальную трудность распараллеливания различных вариантов КММ. Пусть самая мелкая сетка G^0 состоит из N^0 узлов. Стандартное построение грубых сеток посредством удвоения шага может привести к тому, что количество узлов на сетке G^l будет меньше, чем количество используемых процессоров (p)

$$N^0 2^{-dl} < p, \quad d = 2, 3.$$

Очевидно, что параллельный алгоритм решения СЛАУ, состоящей из $N^0 2^{-dl}$ уравнений, не может использовать p процессоров при $N^0 2^{-dl} < p$, т.е. часть процессоров будет простаивать. Даже в случае $N^0 2^{-dl} = p$ основные усилия будут связаны с обменами данными между процессорами, а не со сглаживающими итерациями. Поэтому часто самой грубой считается сетка с $N^0 2^{-dl} \gg p$, т.е. на которой возможно эффективное распараллеливание сглаживающих итераций. Однако при этом сразу возникает проблема выбора сглаживателя, который обладает высокой скоростью сходимости на достаточно мелкой сетке ($N^0 2^{-dl} \gg p$) и который можно эффективно распараллелить. Одним из возможных вариантов построения такого сглаживателя является использование явных итерационных методов с чебышёвским набором параметров [11].

В рассмотренных многосеточных алгоритмах информация о вычислительной сетке использована для построения серии вспомогательных СЛАУ меньшей размерности. Такие многосеточные методы называют *геометрическими*. Оптимальная скорость сходимости геометрических методов достигается за счёт оптимальной адаптации их компонент, или,

другими словами, за счёт максимального использования априорной информации о решаемой краевой задаче. Такие методы трудно использовать в программном обеспечении, устроенном по принципу «чёрного ящика». Другой трудностью является использование геометрических методов в областях со сложной геометрией из-за проблем, связанных с построением регулярной сетки.

В качестве альтернативы активно разрабатывают *алгебраические* многосеточные методы, в которых построение серии вспомогательных СЛАУ меньшей размерности осуществляется без привлечения информации об исходной дифференциальной задаче и вычислительной сетке. Алгебраические методы применяют для решения линейных задач и они уступают по эффективности геометрическим методам при прочих равных условиях.

Наиболее полный обзор и описание главных направлений развития КММ приведены в [54], а теоретические основы лучше всего изложены в [21]. Весьма обширным источником информации является сайт www.mgnet.org.

ГЛАВА 2

УНИВЕРСАЛЬНАЯ МНОГОСЕТОЧНАЯ ТЕХНОЛОГИЯ

Представлена Универсальная Многосеточная Технология (УМТ) – вариант геометрических многосеточных методов с проблемно-независимыми операторами переходов. Дано описание аналитической и вычислительной частей УМТ. Выполнен анализ сходимости, доказана независимость количества многосеточных итераций от величины шага сетки. Приведены результаты вычислительных экспериментов по решению модельных краевых задач. Описано применение УМТ к решению краевых задач на неструктурированных сетках. Получены оценки эффективности распараллеливания вычислений. Дано краткое описание программного обеспечения для УМТ.

§ 1. Мотивация и терминология

Бурное развитие вычислительной техники привело к появлению нового теоретического метода исследования – вычислительного эксперимента [25]. Его основу составляет триада «модель-алгоритм-программа». *Математическая модель*, как правило, состоит из систем нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных, интегральных или интегро-дифференциальных уравнений в совокупности с граничными и начальными условиями. Эти уравнения обычно выражают фундаментальные законы сохранения основных физических величин (энергии, количества движения, массы и т.д.). Под *вычислительным алгоритмом* обычно подразумевают последовательность операций, посредством которых отыскивается численное решение уравнений математической модели.

Написание и отладка компьютерных программ является одной из наиболее трудоёмких стадий вычислительного эксперимента. В современных условиях инженеру приходится рассматривать десятки возможных вариантов конструкции для поиска некоторого оптимума, поэтому издержки, связанные с программированием, снижают практическую ценность вычислительного эксперимента. Кроме того, написание оригинальных программ подразумевает наличие целого штата высококвалифицированных специалистов.

Поэтому в настоящее время широкое распространение получили комплексы программ, устроенные по принципу «чёрного ящика» и предназначенные для решения широкого класса прикладных задач в области теплопроводности, гидродинамики, прочности и т.д. Пользователи подобных программ задают только исходные данные (геометрию, материалы, условия на границах и т.д.), а детали вычислительного алгоритма для них недоступны. К сожалению, современные программные комплексы (типа ANSYS) весьма далеки от совершенства: пользователю предлагается не оптимальный алгоритм, а возможность его построения из имеющегося набора проблемно-зависимых компонент. Строго говоря, такие программы не являются устроенными по принципу «чёрного ящика», и их применение для решения прикладных задач подразумевает проведение серии дополнительных вычислительных экспериментов для подбора оптимальных компонент алгоритма с целью уменьшения времени счёта. В отдельных случаях, если необходимо решить одну или несколько однотипных краевых задач, подобный подход совершенно неприемлем.

Наилучшим решением данной проблемы является многосеточный метод, который не содержит проблемно-зависимых компонент. Такой метод не надо подгонять к конкретной задаче, чтобы достичь высокую скорость сходимости. Геометрический многосеточный метод с указанными

ми свойствами был разработан в начале 90-х годов и получил название «Универсальная Многосеточная Технология» (УМТ) [20].

В иностранной литературе многосеточные методы, которые эффективны при решении широкого класса задач, называют термином «robust» [54, 56]. Такое определение представляется неудачным, поскольку не оговаривается за счёт чего достигается эффективность. Кроме того, в русском языке отсутствует аналог термина «robust», хотя и предпринимаются попытки его русификации (робастный).

В данной книге каждый вычислительный алгоритм характеризуется свойством *универсальности*, которое определяется количеством проблемно-зависимых компонент алгоритма. Чем меньше таких компонент, тем универсальнее алгоритм. Среди алгоритмов одного класса универсальным будет называться тот, который содержит минимальное количество проблемно-зависимых компонент. Из универсальности не следует эффективность: например, метод Гаусса с выбором главного элемента является универсальным, но не является эффективным. Основная трудность построения *универсального алгоритма* состоит не только в исключении проблемно-зависимых компонент, а в достижении максимально высокой скорости сходимости при минимальном использовании априорной информации о решаемой задаче.

УМТ содержит ряд компонент, которые не имеют аналогов в КММ. В частности, решение краевых задач начинают с их адаптации к многосеточному алгоритму, т.е. с дифференциального уровня. Поэтому УМТ состоит из двух частей: аналитической и вычислительной. Данное обстоятельство отражено в названии, и термин «технология» подразумевается в традиционном смысле как совокупность приёмов обработки. На английском языке пришлось сохранить общепринятую терминологию, несмотря на её неудачность, и название УМТ переводится как Robust

Multigrid Technique [47].

Таким образом, суммарная эффективность КММ может быть невелика, если учитывать не только затраты на решение сеточных уравнений, но и усилия на оптимальный выбор проблемно-зависимых компонент. УМТ не обладает оптимальной скоростью сходимости, но и не содержит проблемно-зависимых компонент. Поэтому ожидается, что УМТ по своим затратам будет предпочтительнее КММ при решении сложных прикладных задач. Безусловно, КММ являются лучшими методами решения большой серии однотипных краевых задач, когда затраты на адаптацию компонент будут компенсированы оптимальной скоростью сходимости.

Хотя в основе КММ и УМТ лежит одна и та же основополагающая идея Р.П. Федоренко, их компоненты (операторы переходов, сглаживатели и т.д.) различаются существенным образом.

§ 2. Аналитическая часть технологии

Различные физические процессы (теплопроводности, гидродинамики, диффузии и т.д.) характеризуются фундаментальными законами сохранения (тепла, массы, количества движения и т.д.). Задачи математической физики формулируются в виде дифференциального уравнения и дополнительных (начальных, граничных) условий, обеспечивающих существование и единственность решения. Аппроксимация исходной задачи означает переход от непрерывной среды к её дискретной модели.

Ранее был рассмотрен простейший способ аппроксимации, основанный на формальной замене производных их разностными аналогами. Для аппроксимации дифференциальных уравнений более общего вида часто применяют интегро-интерполяционный метод, один из вариантов которого называется *методом баланса* [6, 8, 13, 25, 26].

Построение разностных схем методом баланса обычно иллюстрируют на примере следующей задачи:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left(\lambda(x) \frac{du}{dx} \right) - g(x) u(x) &= -f(x), & 0 < x < 1, & \quad (2.1) \\ u(0) = \mu_0, \quad u(1) = \mu_1, \quad \lambda(x) \geq \alpha > 0, & \quad g(x) \geq 0, \end{aligned}$$

которую можно трактовать как уравнение установившегося распределения температуры $u(x)$ в стержне единичной длины с коэффициентом теплопроводности $\lambda(x)$, на концах которого поддерживается заданная температура. Существование и единственность решения задачи (2.1) доказаны в [25, 26].

Аналитическая часть УМТ для краевых задач типа (2.1) состоит в представлении искомого решения $u(x)$ в виде суммы двух функций $c(x)$ и $\hat{u}(x)$

$$u(x) = c(x) + \hat{u}(x). \quad (2.2)$$

В последующих многосеточных итерациях¹ сеточный аналог функции $\hat{u}(x)$ будет служить приближением к решению разностной краевой задачи, а сеточный аналог функции $c(x)$ – поправкой, вычисляемой на грубых сетках. Представление (2.2), называемое Σ -модификацией решения, является одной из форм адаптации решаемых краевых задач к УМТ.

Подстановка представления (2.2) в (2.1) приводит к следующей Σ -модифицированной форме исходной краевой задачи

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left(\lambda(x) \frac{dc}{dx} \right) - g(x) c(x) &= r(x), & \quad (2.3a) \\ c(0) = \mu_0 - \hat{u}(0), \quad c(1) = \mu_1 - \hat{u}(1), \end{aligned}$$

¹Данные наименования функций \hat{u} (approximation to the solution) и c (coarse grid correction) пришлось позаимствовать из КММ для сохранения устоявшейся терминологии.

где правая часть $r(x)$

$$r(x) = -\frac{d}{dx} \left(\lambda(x) \frac{d\hat{u}}{dx} \right) + g(x) \hat{u}(x) - f(x) \quad (2.3b)$$

совпадает с исходным дифференциальным уравнением. В (2.3) члены с поправкой $c(x)$ переносятся в левую часть, а остальные – в правую.

На первый взгляд Σ -модификация решения (2.2), используемая в УМТ, похожа на представление (1.38), которое применяется в КММ, но между (2.2) и (1.38) существует два принципиальных отличия:

- Σ -модификация в УМТ осуществляется *перед* дискретизацией исходной краевой задачи для более точной формулировки разностных краевых задач на грубых сетках и возможности гибкого изменения типа и/или порядка аппроксимации;
- Σ -модификация не является единственным способом адаптации краевых задач к УМТ. Представление искомого решения в виде произведения двух функций (т.н. Π -модификация) может оказаться более предпочтительным для ряда нелинейных задач.

Σ - и Π -модификации краевых задач являются частными случаями аддитивного и мультипликативного выделения особенностей [8]. В общем случае для Σ -модификации искомое решение представимо в виде

$$u(x) = c(x) + \hat{u}(x) + \phi(x),$$

где функция ϕ подбирается таким образом, чтобы $c + \hat{u}$ не имела особенностей. Выбор функции ϕ зависит от решаемой задачи. Далее выделение особенностей рассматриваться не будет, т.е. положим, что $\phi = 0$.

В КММ численное решение краевой задачи начинается с дифференциальной формулировки, в то время как в алгебраических многосеточных методах – с решения результирующей СЛАУ.

§ 3. Вычислительная часть технологии

Вычислительная часть УМТ состоит из построения мелкой и грубых сеток, аппроксимации модифицированной краевой задачи интегро-интерполяционным методом и решения полученных сеточных уравнений при помощи унифицированного многосеточного метода.

3.1 Построение самой мелкой сетки. Первый этап вычислительной части УМТ состоит в построении самой мелкой сетки G_1^0 в области $\Omega = [0, 1]$ для последующей аппроксимации модифицированной краевой задачи интегро-интерполяционным методом.

Определение. Сетка называется *равномерной*, если расстояние между точками сетки является постоянным

$$x_i^v - x_{i-1}^v = x_{i+1}^v - x_i^v = x_i^f - x_{i-1}^f = h = \text{const}, \quad i = 2, \dots, N^0,$$

где $h = 1/N^0$ есть шаг сетки. В противном случае сетка называется *неравномерной*.

Самая мелкая сетка G_1^0 состоит из двух множеств точек $G^v(0;1)$ и $G^f(0;1)$, которые, если G_1^0 является равномерной, заданы соотношениями

$$\begin{aligned} G^v(0;1) &= \{x_i^v \mid x_i^v = h(i-1), \quad i = 1, 2, \dots, N^0 + 1, \quad h = 1/N^0\}, \\ G^f(0;1) &= \{x_i^f \mid x_i^f = (x_i^v + x_{i+1}^v)/2, \quad i = 1, 2, \dots, N^0\}. \end{aligned}$$

Сетка G_1^0 , построенная при $N^0 = 8$, показана на рис. 2.1.

В общем случае до получения разностного аналога Σ -модифицированной краевой задачи будем называть x_i^v и x_i^f *точками сетки*. В КММ построение грубых сеток зависит от способа аппроксимации и/или расположения контрольных объёмов на самой мелкой сетке (рис. 1.20). В УМТ такой зависимости нет, поэтому конфигурация контрольных объёмов может быть задана после построения грубых сеток, но перед аппроксимацией модифицированной краевой задачи. Другими словами, иско-

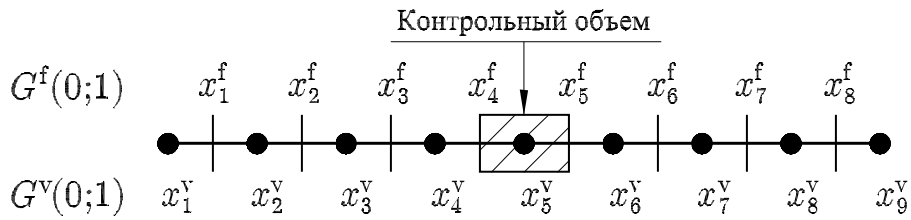


Рис. 2.1. Вычислительная сетка для метода баланса

мая сеточная функция, которая является решением разностной краевой задачи, может быть определена как в точках x_i^v (x_i^v – узлы, x_i^f – грани контрольных объёмов), так и в точках x_i^f (x_i^f – узлы, x_i^v – грани контрольных объёмов), но на построение грубых сеток это не влияет.

Далее, в основном из соображений наглядности, будут рассмотрены равномерные сетки (рис. 2.1). Однако все построения естественным образом можно обобщить на неравномерные сетки.

3.2 Построение грубых сеток (coarsening). Построение грубых се-

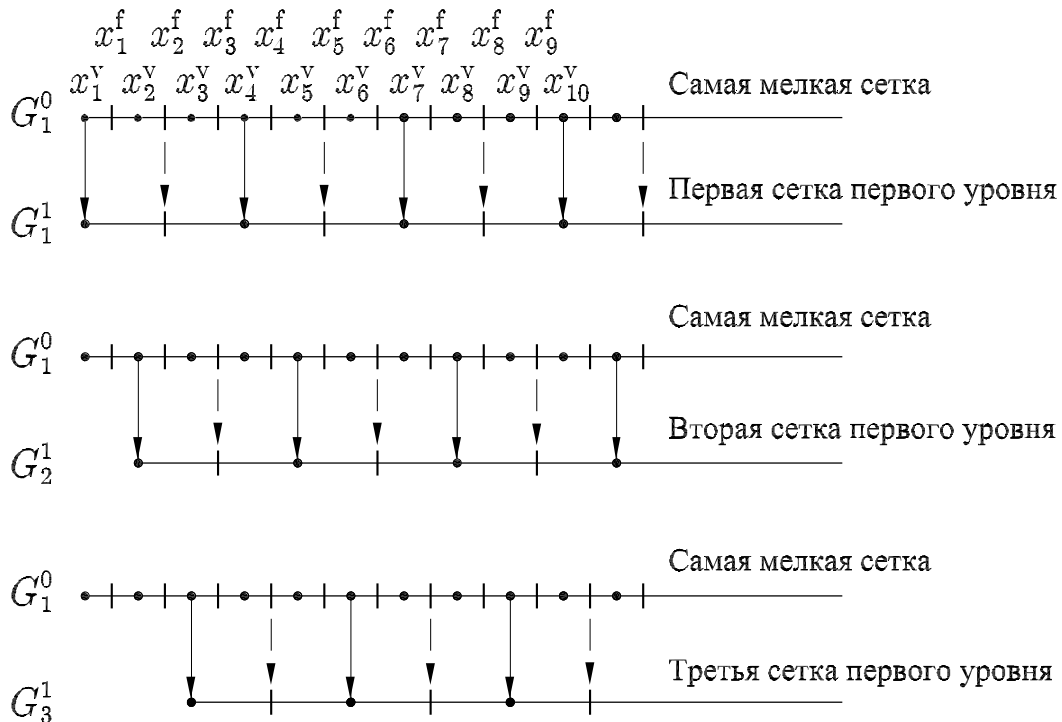


Рис. 2.2. Построение грубых сеток в универсальной многосеточной технологии

ток в УМТ осуществим посредством удаления двух точек из множеств $G^v(0;1)$ и $G^f(0;1)$ самой мелкой сетки G_1^0 , как показано на рис. 2.2. Выделим первую точку x_1^v из множества $G^v(0;1)$, которая будет первой точкой x^v более грубой сетки G_1^1 . Далее пропустим две точки x_2^v и x_3^v из множества $G^v(0;1)$. Четвертая точка x_4^v будет второй точкой x^v более грубой сетки G_1^1 , седьмая точка x_7^v будет третьей точкой x^v более грубой сетки G_1^1 и т.д. Точка x_2^f из множества $G^f(0;1)$, расположенная посередине между точками x_1^v и x_4^v из множества $G^v(0;1)$, будет первой точкой x^f более грубой сетки G_1^1 . Удаляя по две точки из множества $G^f(0;1)$, нетрудно получить остальные точки x^f сетки G_1^1 .

Далее аналогично построим еще одну грубую сетку G_2^1 , но построение начнём с точек x_2^v и x_3^f самой мелкой сетки G_1^0 , т.е. со сдвигом на одну точку (рис. 2.2). Наконец, третью грубую сетку G_3^1 построим тем же самым образом, но начиная с точек x_3^v и x_4^f самой мелкой сетки G_1^0 .

Непосредственно из рис. 2.2 следуют основные свойства грубых сеток в УМТ:

1. грубые сетки G_1^1 , G_2^1 и G_3^1 не имеют общих точек:

$$G_n^1 \cap G_m^1 = \emptyset, \quad n \neq m.$$

2. мелкая сетка G_1^0 представима в виде объединения грубых сеток G_1^1 , G_2^1 и G_3^1 :

$$G_1^0 = \bigcup_{k=1}^3 G_k^1.$$

3. все сетки геометрически подобны, однако шаг грубых сеток G_1^1 , G_2^1 и G_3^1 в три раза больше, чем шаг сетки G_1^0 .
4. вне зависимости от способа определения сеточных функций на самой мелкой сетке каждый контрольный объём на сетках G_1^1 , G_2^1 и

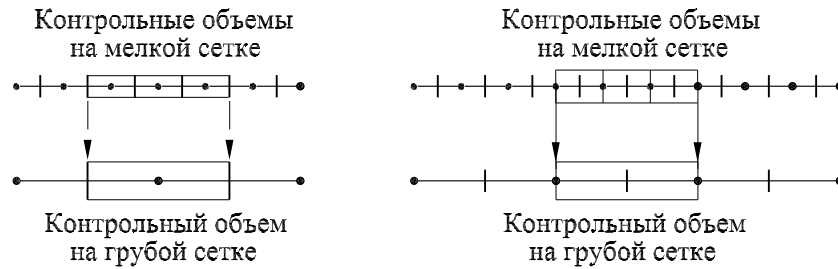


Рис. 2.3. Контрольные объёмы на мелкой и грубой сетках

G_3^1 является объединением трёх контрольных объёмов на сетке G_1^0 (рис. 2.3).

Самая мелкая сетка G_1^0 образует *нулевой сеточный уровень*, а три грубые сетки G_1^1 , G_2^1 и G_3^1 образуют *первый сеточный уровень*. Далее построение еще более грубых сеток осуществляется рекуррентным образом: каждая сетка G_i^l , $i = 1, \dots, 3^l$ уровня l рассматривается как самая мелкая сетка для трёх грубых сеток G_j^{l+1} , $j = 1, \dots, 3^{l+1}$ следующего уровня $l + 1$. Девять еще более грубых сеток, полученных из трёх сеток первого уровня, образуют второй сеточный уровень, и так далее, как показано на рис. 2.4. Построение грубых сеток завершается, когда на грубых сетках останется всего несколько точек x^v и x^f . В дальнейшем совокупность самой мелкой и всех грубых сеток будет называться *многосеточной структурой*.

Определение. Регулярная сетка называется *структурированной*, если она порождает многосеточную структуру.

В качестве примера на рис. 2.5 показаны самая мелкая сетка G_1^0 с $N^0 = 30$ для задачи типа (2.1) и грубые сетки первого и второго уровней. Каждая сетка имеет *фиктивные точки*, которые необходимы для быстрого вычисления интегралов на многосеточной структуре (§ 10 гл. 2). Число точек на сетках одного уровня может быть различным. Например, сетка G_2^2 имеет четыре точки x^v и три x^f в области $\Omega = [0, 1]$, а

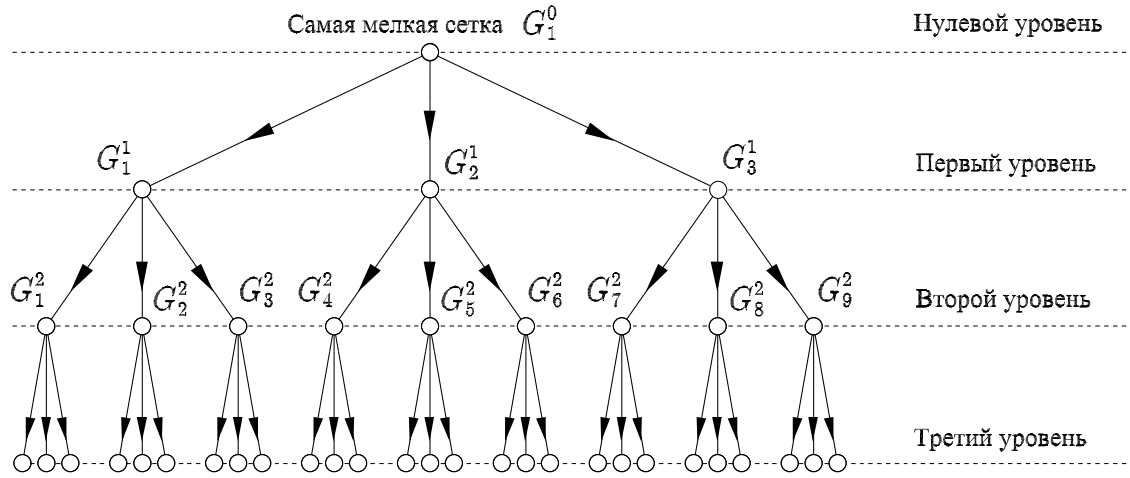


Рис. 2.4. Многосеточная структура

сетка G_9^2 – три точки x^v и четыре x^f .

Номер сеточного уровня с самыми грубыми сетками, обозначаемый как L^+ , вычисляют перед построением грубых сеток. Положим, что большинство самых грубых сеток имеют три точки x^v или x^f (рис. 2.5). Тогда число точек самой мелкой сетки G_1^0 есть $N^0 + 1$ или $\approx 3^{L^+ + 1}$. Отсюда L^+ определяют как

$$N^0 + 1 \approx 3^{L^+ + 1} \Rightarrow L^+ = \left[\frac{\lg(N^0 + 1)}{\lg 3} - 1 \right], \quad (2.4)$$

где квадратные скобки означают целую часть.

Контрольный объём на более грубой сетке построен путём присоединения соседних объёмов к соответствующему объёму на более мелкой сетке, как показано на рис. 2.3. Поэтому геометрически подобные грубые сетки с указанными свойствами возможно построить посредством утроения шага, а не удвоения – как в КММ.

Сеточный уровень l ($l = 0, 1, \dots, L^+$) состоит из сеток G_k^l , $k = 1, \dots, 3^l$. Если самая мелкая сетка G_1^0 является равномерной, то шаг грубых сеток G_k^l составит $h3^l$, где h есть шаг самой мелкой сетки G_1^0 . Сетки G_k^l состоят из двух множеств точек $G^v(l; k)$ и $G^f(l; k)$, которые могут

быть как узлами, так и гранями контрольных объёмов. Для удобства работы с многосеточной структурой обозначим *отображение индексов* точек данной сетки G_k^l на индексы точек самой мелкой сетки G_1^0 как $x_{\{i\}}^v[G_k^l]$ и $x_{\{i\}}^f[G_k^l]$ (или кратко $x_{\{i\}}^v$ и $x_{\{i\}}^f$), где $\{i\}$ и i суть индексы точек самой мелкой G_1^0 и данной сетки G_k^l соответственно. Например, отображение точек из множества $G^v(1;1)$ сетки G_1^1 , показанной на рис. 2.5, есть $x_{\{1\}}^v = x_3^v$, $x_{\{2\}}^v = x_6^v$, $x_{\{3\}}^v = x_9^v, \dots$. Отображение индексов позволяет формулировать разностные краевые задачи на многосеточной структуре практически так же, как и в односеточных алгоритмах. В частности, вторую производную аппроксимируют на многосеточной структуре конечными разностями как

$$\left. \frac{d^2 \alpha}{dx^2} \right|_{x_{\{i\}}^v} = \frac{\beta_{\{i-1\}} - 2\beta_{\{i\}} + \beta_{\{i+1\}}}{h^2 3^{2l}} + O(h^2 3^{2l}).$$

Аппроксимация данной производной в узле $x_{\{2\}}^v \in G^v(1;1)$, который на рис. 2.5 выделен окружностью, принимает вид

$$\left. \frac{d^2 \alpha}{dx^2} \right|_{x_{\{2\}}^v} \approx \frac{\beta_{\{1\}} - 2\beta_{\{2\}} + \beta_{\{3\}}}{h^2 3^2}, \quad \text{что означает} \quad \frac{\beta_3 - 2\beta_6 + \beta_9}{9h^2}.$$

Обратим внимание, что вторую производную фактически аппроксимируют на самой мелкой сетке. Для самой мелкой сетки G_1^0 характерно тривиальное отображение индексов $\{i\} \equiv i$.

Чтобы построить грубые сетки в УМТ, необходимо знать только количество точек самой мелкой сетки, а их положение в пространстве не имеет никакого значения. Поэтому процесс построения грубых сеток и вычисления отображения индексов может быть реализован в виде специализированного программного обеспечения, входными данными для которого является самая мелкая сетка G_1^0 . Если сетка G_1^0 является рав-

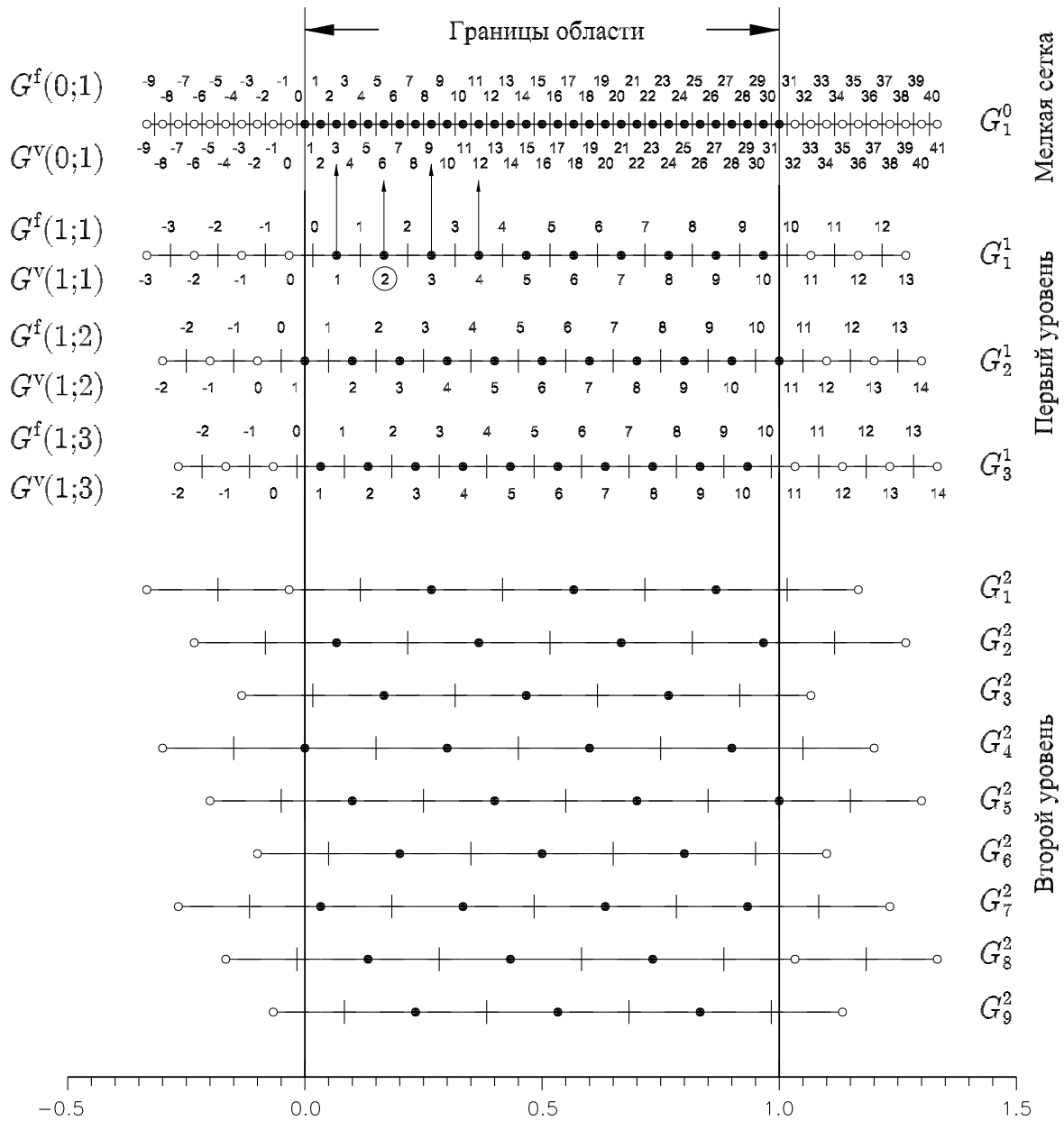


Рис. 2.5. Самая мелкая и грубые сетки первого и второго уровней

номерной, то многосеточная структура однозначно определяется одним параметром N^0 .

Напомним, что точки самой мелкой сетки (равномерной) G_1^0 для задачи типа (2.1) заданы соотношением

$$x_i^v = h(i - 1), \quad i = 1, 2, \dots, N^0 + 1, \quad (2.5)$$

где шаг сетки h однозначно определён количеством участков N^0 , на которые разбивается единичный отрезок: $h = 1/N^0$. Сетки G_k^l , $k = 1, 2, \dots, 3^l$ уровня l образованы точками x_i^y , $i = 1, 2, \dots, N_k^l + 1$. На самой мелкой сетке $N_1^0 = N^0$ в силу $l = 0 \Rightarrow k = 1$. Однако между параметрами N^0 и N_k^l существует одно различие при $l \neq 0$: шаг сеток G_k^l есть $h3^l$, причем $h3^l \neq 1/N_k^l$. Например, шаг сеток второго уровня ($l = 2$), показанных на рис. 2.5, есть $9h$, в то время как $N_1^2 = 2$, $N_2^2 = 3$, $N_3^2 = 2$, $N_4^2 = 3, \dots$. Параметры N_k^l и отображение индексов вычисляются в процессе построения грубых сеток (§ 10 гл. 2).

В трёхмерном случае грубые сетки строят независимо по каждому пространственному направлению. Пусть самая мелкая сетка G_1^0 имеет размер $(N_x^0 + 1) \times (N_y^0 + 1) \times (N_z^0 + 1)$. Тогда номера уровней с самыми грубыми сетками по пространственным направлениям определены как

$$L_x^+ = \left[\frac{\lg(N_x^0 + 1)}{\lg 3} - 1 \right], \quad L_y^+ = \left[\frac{\lg(N_y^0 + 1)}{\lg 3} - 1 \right], \quad L_z^+ = \left[\frac{\lg(N_z^0 + 1)}{\lg 3} - 1 \right],$$

где квадратные скобки означают целую часть. В общем случае количество сеточных уровней по различным пространственным направлениям может быть различным:

$$N_x^0 \neq N_y^0 \neq N_z^0 \Rightarrow L_x^+ \neq L_y^+ \neq L_z^+.$$

Определим номер уровня с самыми грубыми сетками как

$$L^+ = \max(L_x^+, L_y^+, L_z^+),$$

и номера уровней по каждому пространственному направлению

$$l_x = \min(l, L_x^+), \quad l_y = \min(l, L_y^+), \quad l_z = \min(l, L_z^+).$$

Тогда каждый сеточный уровень l ($l = 0, 1, \dots, L^+$) образован множеством сеток G_k^l , $k = 1, 2, \dots, 3^{l_x+l_y+l_z}$. Контрольный объём на сетках G_k^l

образован $\mathfrak{Z}^{l_x+l_y+l_z}$ объёмами на самой мелкой сетке G_1^0 . Если G_1^0 является равномерной ($h_x = 1/N_x^0$, $h_y = 1/N_y^0$ и $h_z = 1/N_z^0$), то шаги сеток G_k^l составят $h_x \mathfrak{Z}^{l_x}$, $h_y \mathfrak{Z}^{l_y}$ и $h_z \mathfrak{Z}^{l_z}$ соответственно.

Перечислим основные свойства грубых сеток УМТ, которые будут использованы для численного решения краевых задач:

Свойство 1: каждый контрольный объём на сетках G_k^l представим в виде объединения $\mathfrak{Z}^{l_x+l_y+l_z}$ контрольных объёмов на самой мелкой сетке G_1^0 . В сочетании со свойством аддитивности определенного интеграла¹ относительно подобластей это позволит существенно расширить класс краевых задач, решаемых унифицированным образом, посредством аппроксимации коэффициентов и правой части на самой мелкой сетке G_1^0 .

Свойство 2: каждая сетка G_k^l ($l \neq L^+$) представима в виде объединения \mathfrak{Z}^d ($d = 2, 3$) соответствующих ей грубых сеток, что позволит исключить интерполяцию из УМТ. Как следствие, самая мелкая сетка G_1^0 представима в виде объединения всех сеток одного уровня

$$G_1^0 = \bigcup_{k=1}^{\mathfrak{Z}^{l_x+l_y+l_z}} G_k^l, \quad l = 0, \dots, L^+.$$

Свойство 3: сетки одного уровня не имеют общих точек, т.е.

$$G_n^l \cap G_m^l = \emptyset, \quad n \neq m, \quad l = 1, \dots, L^+,$$

что позволит эффективно распараллеливать вычисления и экономно использовать память компьютера.

¹Аддитивность относительно подобластей: если S_1 и S_2 – две области без внутренних точек, то

$$\int_{S_1 \cup S_2} f ds = \int_{S_1} f ds + \int_{S_2} f ds.$$

3.3 Аппроксимация на многосеточной структуре. Аппроксимация модифицированных краевых задач на многосеточной структуре интегроинтерполяционным методом мало отличается от «односеточной» аппроксимации, изложенной в [8, 13, 25, 26] и др. Для наглядности повторим эти выкладки для задачи (2.1), акцентируя внимание на те особенности, которые вносит «многосеточность».

Поскольку на границах области $\Omega = [0, 1]$ заданы условия Дирихле, то точки сетки $x_{\{i\}}^v$ будут узлами, $x_{\{i\}}^f$ – гранями контрольных объёмов, а сам объём определён как

$$V_i = \{x \mid x_{\{i-1\}}^f \leq x \leq x_{\{i\}}^f\}. \quad (2.6)$$

В этом случае граничные условия Дирихле аппроксимируют точно на самой мелкой сетке G_1^0 и $x_{\{i+1\}}^v - x_{\{i\}}^v = x_{\{i+1\}}^f - x_{\{i\}}^f = h3^l$, $h = 1/N^0$ (рис. 2.1).

Положим, что в области Ω с границей $\partial\Omega$ поставлена некоторая краевая задача для операторного уравнения

$$\mathfrak{L}(u) = f \text{ в } \Omega, \quad \mathfrak{I}(u) = s \text{ на } \partial\Omega,$$

где \mathfrak{L} есть линейный эллиптический дифференциальный оператор, \mathfrak{I} – линейный (дифференциальный) оператор. Аппроксимация Σ -модифицированной краевой задачи на сетке Ω_h

$$\mathfrak{L}(c) = f - \mathfrak{L}(\hat{u}) \text{ в } \Omega, \quad \mathfrak{I}(c) = s - \mathfrak{I}(\hat{u}) \text{ на } \partial\Omega,$$

сводится к её замене СЛАУ вида

$$Ac^\varphi = f_h - A\hat{\varphi},$$

где сеточные функции c^φ и $\hat{\varphi}$ суть аналоги непрерывных функций c и \hat{u} , а матрица A – аналог дифференциального оператора \mathfrak{L} . Здесь предполагается, что матрица A включает в себя аппроксимацию граничных условий.

Интегрирование уравнения (2.3а) по контрольному объёму V_i (2.6) приводит к следующему соотношению

$$-\frac{w(x_{\{i\}}^f) - w(x_{\{i-1\}}^f)}{h3^l} - \frac{1}{h3^l} \int_{x_{\{i-1\}}^f}^{x_{\{i\}}^f} g(x) c(x) dx = \frac{1}{h3^l} \int_{x_{\{i-1\}}^f}^{x_{\{i\}}^f} r(x) dx, \quad (2.7)$$

где $w = -\lambda c'$.

Чтобы получить из (2.7) разностное уравнение, заменим w и интеграл, содержащий c , линейными комбинациями значений c в узлах x^v . Для этого воспользуемся интерполяциями в окрестности узла $x_{\{i\}}^v$. Простейшая интерполяция $c(x) = \text{const} = c_{\{i\}}^\varphi$ при $x_{\{i-1\}}^f \leq x \leq x_{\{i\}}^f$ позволяет получить

$$\frac{1}{h3^l} \int_{x_{\{i-1\}}^f}^{x_{\{i\}}^f} g(x) c(x) dx \approx c_{\{i\}}^\varphi \cdot \frac{1}{h3^l} \int_{x_{\{i-1\}}^f}^{x_{\{i\}}^f} g(x) dx = \langle g \rangle_{\{i\}} c_{\{i\}}^\varphi, \quad (2.8)$$

где

$$\langle g \rangle_{\{i\}} = \frac{1}{h3^l} \int_{x_{\{i-1\}}^f}^{x_{\{i\}}^f} g(x) dx \quad (2.9)$$

есть среднее значение функции $g(x)$ на контрольном объёме V_i (2.6).

Аналогично

$$\langle r \rangle_{\{i\}} = \frac{1}{h3^l} \int_{x_{\{i-1\}}^f}^{x_{\{i\}}^f} r(x) dx \quad (2.10)$$

есть среднее значение функции $r(x)$ (2.3b) на контрольном объёме V_i (2.6). Интегрируя равенство $c' = -w/\lambda$ на отрезке $x_{\{i-1\}}^v \leq x \leq x_{\{i\}}^v$, получим

$$c_{\{i\}}^\varphi - c_{\{i-1\}}^\varphi = - \int_{x_{\{i-1\}}^v}^{x_{\{i\}}^v} \frac{w(x)}{\lambda(x)} dx.$$

Предполагая, что $w(x) = w(x_{\{i-1\}}^f) = \text{const}$ при $x_{\{i-1\}}^v \leq x \leq x_{\{i\}}^v$, имеем

$$c_{\{i\}}^\varphi - c_{\{i-1\}}^\varphi = -w(x_{\{i-1\}}^f) \int_{x_{\{i-1\}}^v}^{x_{\{i\}}^v} \frac{dx}{\lambda(x)}.$$

Введём обозначение

$$\frac{1}{\langle \lambda \rangle_{\{i\}}} = \frac{1}{h3^l} \int_{x_{\{i-1\}}^v}^{x_{\{i\}}^v} \frac{dx}{\lambda(x)} \Rightarrow \langle \lambda \rangle_{\{i\}} = \left(\frac{1}{h3^l} \int_{x_{\{i-1\}}^v}^{x_{\{i\}}^v} \frac{dx}{\lambda(x)} \right)^{-1}, \quad (2.11)$$

где выражение $\langle \lambda \rangle_{\{i\}}$ есть среднее значение коэффициента $\lambda(x)$ на отрезке $x_{\{i-1\}}^v \leq x \leq x_{\{i\}}^v$ длиной $h3^l$. Тогда приближённое значение $w(x_{\{i-1\}}^f)$ определяют как

$$-w(x_{\{i-1\}}^f) = \langle \lambda \rangle_{\{i\}} \frac{c_{\{i\}}^\varphi - c_{\{i-1\}}^\varphi}{h3^l}. \quad (2.12)$$

Подстановка (2.12) в (2.7), с учётом (2.9) – (2.11), приводит к следующей разностной схеме

$$\langle \lambda \rangle_{\{i+1\}} \frac{c_{\{i+1\}}^\varphi - c_{\{i\}}^\varphi}{h^2 3^{2l}} - \langle \lambda \rangle_{\{i\}} \frac{c_{\{i\}}^\varphi - c_{\{i-1\}}^\varphi}{h^2 3^{2l}} - \langle g \rangle_{\{i\}} c_{\{i\}}^\varphi = \langle r \rangle_{\{i\}}. \quad (2.13)$$

Очевидно, что при $\hat{u}(x) = 0$ и $\{i\} = i$ данная разностная схема совпадёт с традиционной (односеточной).

Метод баланса определяет семейство разностных схем в зависимости от способа вычисления интегралов в выражениях (2.9), (2.10) и (2.11) (т.н. шаблонных функционалов).

В прикладном аспекте большой интерес представляют разностные схемы, пригодные для решения уравнений теплопроводности (диффузии) без явного выделения линий или поверхностей разрыва коэффициентов. В этом случае возможно проведение вычислений по одним и тем же формулам независимо от гладкости коэффициента теплопроводности (диффузии). Интегро-интерполяционный метод особенно полезен

для уравнений с разрывными коэффициентами, поскольку именно интегральная запись законов сохранения выделяет из всех математически допустимых решений таких уравнений физически правильное решение [13]. Исследование аппроксимации и сходимости разностной задачи (2.13) для случая гладких и разрывных коэффициентов дано в [25].

Теперь предположим, что краевая задача (2.1) описывает стационарное распределение температуры $u(x)$ в стержне, состоящем из разнородных материалов: теплоизоляции с коэффициентом теплопроводности λ_1 и металла с коэффициентом теплопроводности λ_2 . Пусть часть стержня, состоящая из теплоизоляции, имеет длину x_{i-1}^f . Тогда длина металлической части составит $1 - x_{i-1}^f$, коэффициент теплопроводности $\lambda(x)$ в (2.1) задан в виде

$$\lambda(x) = \begin{cases} \lambda_1, & \text{при } 0 \leq x \leq x_{i-1}^f \\ \lambda_2, & \text{при } x_{i-1}^f < x \leq 1 \end{cases},$$

т.е. грань x_{i-1}^f является точкой разрыва коэффициента теплопроводности $\lambda(x)$. Используя свойство аддитивности определенного интеграла относительно подобластей, запишем выражение (2.11) на самой мелкой сетке в виде

$$\frac{1}{\langle \lambda \rangle_i} = \frac{1}{h} \int_{x_{i-1}^y}^{x_i^y} \frac{dx}{\lambda(x)} = \frac{1}{h} \left(\int_{x_{i-1}^y}^{x_{i-1}^f} \frac{dx}{\lambda(x)} + \int_{x_{i-1}^f}^{x_i^y} \frac{dx}{\lambda(x)} \right).$$

Вычисляя интегралы в правой части

$$\frac{1}{h} \int_{x_{i-1}^y}^{x_{i-1}^f} \frac{dx}{\lambda(x)} = \frac{1}{h} \cdot \frac{h}{2} \frac{1}{\lambda_1} = \frac{1}{2\lambda_1} \quad \text{и} \quad \frac{1}{h} \int_{x_{i-1}^f}^{x_i^y} \frac{dx}{\lambda(x)} = \frac{1}{h} \cdot \frac{h}{2} \frac{1}{\lambda_2} = \frac{1}{2\lambda_2},$$

получаем следующее выражение для $\langle \lambda \rangle_i$

$$\frac{1}{\langle \lambda \rangle_i} = \frac{1}{2\lambda_1} + \frac{1}{2\lambda_2} \Rightarrow \langle \lambda \rangle_i = \frac{2\lambda_1\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2}.$$

Естественно, что полученное выражение для $\langle \lambda \rangle_i$ останется верным и для однородного стержня ($\lambda_1 = \lambda_2$). Построение разностных схем, сходящихся в случае разрывных $g(x)$ и $f(x)$, приводится в [25].

Первое отличие аппроксимации модифицированных краевых задач на многосеточной структуре от односеточной аппроксимации состоит в вычислении коэффициентов $\langle g \rangle_{\{i\}}$ (2.9) и $\langle \lambda \rangle_{\{i\}}$ (2.11). Самый простой способ вычисления коэффициента $\langle g \rangle_{\{i\}}$ (2.9) состоит в использовании формулы средних значений

$$\langle g \rangle_{\{i\}} = \frac{1}{h3^l} \int_{x_{\{i-1\}}^f}^{x_{\{i\}}^f} g(x) dx \approx g(x_{\{i\}}^v),$$

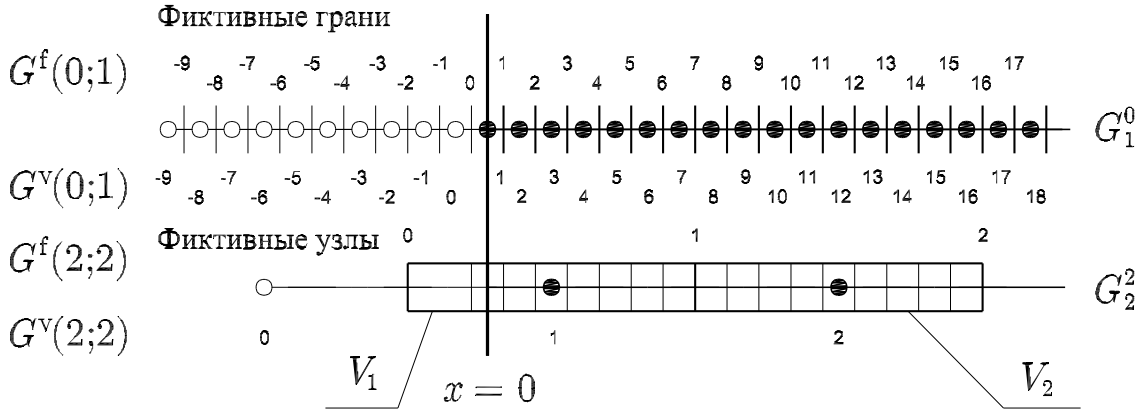
т.е. вычислить коэффициент $\langle g \rangle$ непосредственно на данной сетке G_k^l . Однако погрешность подобного вычисления коэффициента $\langle g \rangle$ в ряде случаев может оказаться слишком велика на грубых сетках. Например, если функция $g(x)$ имеет вид $a_1(x - a_2)^2$ и ноль функции $g(x)$ совпадает с узлом $x_{\{i\}}^v$ (т.е. $a_2 = x_{\{i\}}^v$), то использование формулы средних значений приводит к следующему результату:

$$\langle g \rangle_{\{i\}} = \frac{1}{h3^l} \int_{x_{\{i-1\}}^f}^{x_{\{i\}}^f} a_1(x - x_{\{i\}}^v)^2 dx \approx a_1(x_{\{i\}}^v - x_{\{i\}}^v)^2 = 0.$$

С другой стороны, точное значение коэффициента $\langle g \rangle_{\{i\}}$ составит

$$\langle g \rangle_{\{i\}} = \frac{1}{h3^l} \int_{x_{\{i-1\}}^f}^{x_{\{i\}}^f} a_1(x - x_{\{i\}}^v)^2 dx = \frac{h^2 3^{2l}}{12} a_1.$$

Поэтому в общем случае необходимо вычислять коэффициенты типа $\langle g \rangle_{\{i\}}$ (2.9) и $\langle \lambda \rangle_{\{i\}}$ (2.11) с высокой точностью. Для этого воспользуемся свойствами определённого интеграла и грубых сеток (Свойство 1, с. 81).

Рис. 2.6. Контрольные объёмы на сетке G_2^2

В качестве примера рассмотрим первые два контрольных объёма сетки G_2^2 (рис. 2.6), которые укрупнённо показаны на рис. 2.6. Отображение индексов узлов и граней сетки G_2^2 выражается как

$$\begin{aligned} x_{\{0\}}^v &= x_{-6}^v, & x_{\{1\}}^v &= x_3^v, & x_{\{2\}}^v &= x_{12}^v, & \dots, \\ x_{\{0\}}^f &= x_{-2}^f, & x_{\{1\}}^f &= x_7^f, & x_{\{2\}}^f &= x_{16}^f, & \dots \end{aligned}$$

Как следует из рис. 2.6, объём V_2 на сетке G_2^2 второго уровня ($l = 2$) представим в виде объединения следующих девяти контрольных объёмов на самой мелкой сетке G_1^0

$$[x_{\{1\}}^f, x_{\{2\}}^f] = [x_7^f, x_{16}^f] = [x_7^f, x_8^f] \cup [x_8^f, x_9^f] \cup \dots \cup [x_{15}^f, x_{16}^f].$$

Тогда в силу свойства аддитивности определённого интеграла относительно подобластей получим

$$\begin{aligned} \langle g \rangle_{\{2\}} &= \frac{1}{h 3^2} \int_{x_{\{1\}}^f}^{x_{\{2\}}^f} g(x) dx = \frac{1}{9h} \int_{x_7^f}^{x_{16}^f} g(x) dx = \\ &= \frac{1}{9} \left(\frac{1}{h} \int_{x_7^f}^{x_8^f} g(x) dx + \frac{1}{h} \int_{x_8^f}^{x_9^f} g(x) dx + \dots + \frac{1}{h} \int_{x_{15}^f}^{x_{16}^f} g(x) dx \right) \end{aligned}$$

или

$$\langle g \rangle_{\{2\}} = \frac{1}{9} \left(\langle g \rangle_8 + \langle g \rangle_9 + \dots + \langle g \rangle_{16} \right), \quad \text{где} \quad \langle g \rangle_m = \frac{1}{h} \int_{x_{m-1}^f}^{x_m^f} g(x) dx.$$

Коэффициенты $\langle g \rangle_{\{i\}}$ (2.9) на грубых сетках определяют как среднеарифметические значения соответствующих коэффициентов $\langle g \rangle_m$, вычисленных в тех узлах x_m^v самой мелкой сетки G_1^0 , которые расположены внутри данного контрольного объёма V_i ($x_m^v \in V_i$). Численное значение коэффициентов $\langle g \rangle_{\{i\}}$ (2.9) зависит только от способа вычисления коэффициентов $\langle g \rangle_m$ на самой мелкой сетке. Например, если $\langle g \rangle_m$ вычисляют при помощи формулы средних значений

$$\langle g \rangle_m = \frac{1}{h} \int_{x_{m-1}^f}^{x_m^f} g(x) dx \approx g(x_m^v),$$

то выражение для коэффициента $\langle g \rangle_{\{2\}}$ принимает вид

$$\langle g \rangle_{\{2\}} = \frac{1}{h 3^2} \int_{x_{\{1\}}^f}^{x_{\{2\}}^f} g(x) dx \approx \frac{1}{9} \left(g(x_8^v) + g(x_9^v) + \dots + g(x_{16}^v) \right).$$

Если часть контрольного объёма расположена вне области $\Omega = [0, 1]$, то усреднение производят по реальной части объёма, т.е. по $V_i \cap \Omega$. Согласно рис. 2.6 значение $\langle g \rangle_{\{1\}}$ определяют как

$$\langle g \rangle_{\{1\}} = \frac{1}{7} \left(\langle g \rangle_1 + \langle g \rangle_2 + \langle g \rangle_3 + \dots + \langle g \rangle_7 \right).$$

Фактически это означает, что коэффициент $\langle g \rangle_{\{i\}}$ (2.9) определён как

$$\langle g \rangle_{\{i\}} = \frac{1}{\min(x_{N^0+1}^f, x_{\{i\}}^f) - \max(x_0^f, x_{\{i-1\}}^f)} \int_{\max(x_0^f, x_{\{i-1\}}^f)}^{\min(x_{N^0+1}^f, x_{\{i\}}^f)} g(x) dx. \quad (2.14)$$

Выражение (2.14) с учётом свойства аддитивности определённого интеграла можно записать в более компактном виде

$$\langle g \rangle_{\{i\}} = \frac{1}{b-a+1} \sum_{m=a}^b \langle g \rangle_m, \quad (2.15)$$

где

$$\begin{aligned} a &= \max(1, \{i\} - \epsilon) \\ b &= \min(N^0 + 1, \{i\} + \epsilon) \end{aligned}, \quad \epsilon = \frac{3^l - 1}{2}, \quad \langle g \rangle_m = \frac{1}{h} \int_{x_{m-1}^f}^{x_m^f} g(x) dx.$$

Соотношение (2.15) является лишь другой формой записи выражения (2.14). Другими словами, коэффициент $\langle g \rangle_m$ аппроксимируют на самой мелкой сетке при помощи составной квадратурной формулы. Экономичный алгоритм аппроксимации приведен в § 10 гл. 2. Коэффициент $\langle \lambda \rangle_{\{i\}}$ (2.11) аппроксимируют аналогичным образом.

Второе отличие состоит в виде правой части $\langle r \rangle_{\{i\}}$ (2.10). Аналогия с аппроксимацией коэффициента $\langle g \rangle_{\{2\}}$ приводит к

$$\langle r \rangle_{\{2\}} = \frac{1}{9} (\langle r \rangle_8 + \langle r \rangle_9 + \dots + \langle r \rangle_{16}), \quad (2.16)$$

где

$$\langle r \rangle_m = \frac{1}{h} \int_{x_{m-1}^f}^{x_m^f} r(x) dx = \frac{1}{h} \int_{x_{m-1}^f}^{x_m^f} \left(-\frac{d}{dx} \left(\lambda(x) \frac{d\hat{u}}{dx} \right) + g(x) \hat{u}(x) - f(x) \right) dx.$$

Повторяя выкладки, получим

$$\langle r \rangle_m \approx -\langle \lambda \rangle_{m+1} \frac{\hat{\varphi}_{m+1} - \hat{\varphi}_m}{h^2} + \langle \lambda \rangle_m \frac{\hat{\varphi}_m - \hat{\varphi}_{m-1}}{h^2} + \langle g \rangle_m \hat{\varphi}_m - \langle f \rangle_m.$$

Нетрудно видеть, что правая часть уравнения (2.13) есть среднеарифметическое значение невязок, вычисленных в тех узлах самой мелкой сетки, которые расположены внутри данного контрольного объёма V_i .

Аналогично получим выражение для $\langle r \rangle_{\{1\}}$:

$$\langle r \rangle_{\{1\}} = \frac{1}{7} \left(\langle r \rangle_1 + \langle r \rangle_2 + \langle r \rangle_3 + \dots + \langle r \rangle_7 \right).$$

Если заданы условия Дирихле на границе $x = 0$, то можно положить $\langle r \rangle_1 = 0$. Основное отличие от осреднения типа (1.42), которое используется в КММ, состоит в использовании значений невязки с самой мелкой сетки, которое стало возможным благодаря Σ -модификации. Другими словами, осреднение типа (2.16) определяет оператор сужения УМТ, который в силу своего построения не зависит от решаемой задачи.

Третье отличие аппроксимации модифицированных краевых задач на многосеточной структуре от односеточных алгоритмов состоит в аппроксимации граничных условий. Как видно из рис. 2.5, бóльшая часть граничных узлов сеток одного уровня не совпадает с границей области $\Omega = [0, 1]$, поэтому в УМТ граничные условия для поправки c^φ аппроксимируют приближённо при помощи следующих экстраполяционных формул:

а) условие Дирихле на границе $x = 0$:

$$c_{\{0\}}^\varphi = \frac{2}{\xi(\xi + 1)} c|_{x=0} + 2 \frac{\xi - 1}{\xi} c_{\{1\}}^\varphi - \frac{\xi - 1}{\xi + 1} c_{\{2\}}^\varphi + O(h^3 z^{3l}), \quad (2.17)$$

б) условие Неймана на границе $x = 0$:

$$c_{\{0\}}^\varphi = -\frac{2h3^l}{2\xi + 1} \frac{dc}{dx} \Big|_{x=0} + 4 \frac{\xi}{2\xi + 1} c_{\{1\}}^\varphi - \frac{2\xi - 1}{2\xi + 1} c_{\{2\}}^\varphi + O(h^3 z^{3l}), \quad (2.18)$$

в) условие Дирихле на границе $x = 1$:

$$c_{\{N_k^l+2\}}^\varphi = \frac{2}{\xi(\xi + 1)} c|_{x=1} + 2 \frac{\xi - 1}{\xi} c_{\{N_k^l+1\}}^\varphi - \frac{\xi - 1}{\xi + 1} c_{\{N_k^l\}}^\varphi + O(h^3 z^{3l}), \quad (2.19)$$

г) условие Неймана на границе $x = 1$:

$$c_{\{N_k^l+2\}}^\varphi = \frac{2h3^l}{2\xi + 1} \frac{dc}{dx} \Big|_{x=1} + 4 \frac{\xi}{2\xi + 1} c_{\{N_k^l+1\}}^\varphi - \frac{2\xi - 1}{2\xi + 1} c_{\{N_k^l\}}^\varphi + O(h^3 z^{3l}), \quad (2.20)$$

где

$$\xi = \begin{cases} \frac{x_{\{1\}}^v}{h 3^l}, & x = 0 \\ \frac{1 - x_{\{N_k^l+1\}}^v}{h 3^l}, & x = 1 \end{cases}. \quad (2.21)$$

Граничные условия для приближения к решению $\hat{\varphi}$ аппроксимируют на самой мелкой сетке обычным образом. Более подробно аппроксимация граничных условий для поправки будет рассмотрена в § 4 гл. 2.

3.4 Многосеточные итерации. В КММ на каждой сетке определена поправка и приближение к решению, которое аппроксимирует поправку на более мелкой сетке. В УМТ приближение к решению и поправка определены только на самой мелкой сетке.

Сначала положим, что решение краевой задачи не имеет особенностей. Многосеточная итерация УМТ для решения подобных задач схематично показана на рис. 2.7. В УМТ используют только простейший (пилообразный) цикл (sawtooth cycle), в котором отсутствует предварительное сглаживание.

Многосеточную итерацию начинают с уровня L^+ , состоящего из самых грубых сеток. Сначала на каждой сетке уровня L^+ вычисляют коэффициенты $\langle g \rangle_{\{i\}}$ (2.9), $\langle \lambda \rangle_{\{i\}}$ (2.11) и правую часть $\langle r \rangle_{\{i\}}$ (2.10), а затем выполняют сглаживающие итерации с нулевого начального прибли-

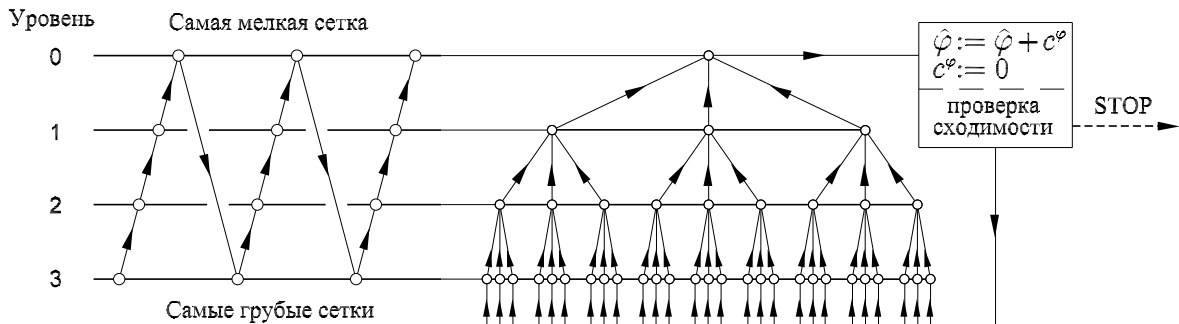


Рис. 2.7. Пилообразный цикл и многосеточная итерация

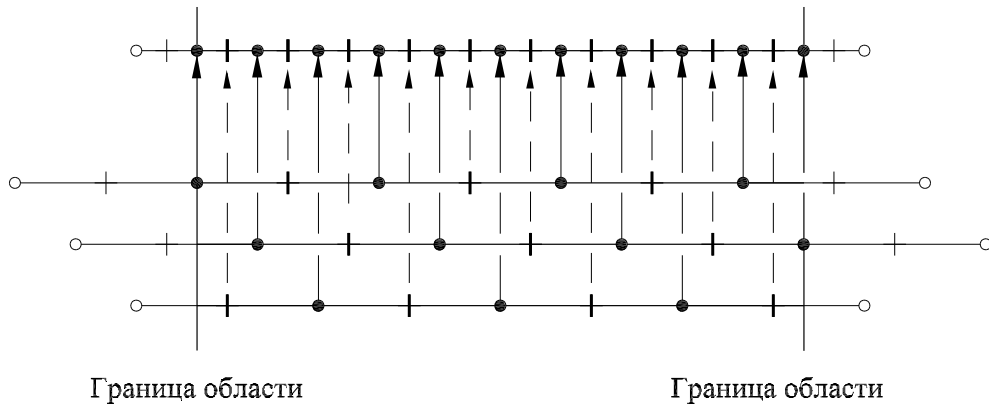


Рис. 2.8. Переход от более грубых сеток к мелкой сетке

жения до достижения критерия останова. Поскольку сетки уровня L^+ содержат лишь несколько узлов, то, как правило, требуется несколько сглаживающих итераций для вычисления поправки на данном уровне. Часто на сетках уровня L^+ применяют прямые методы решения СЛАУ.

Далее осуществляют переход к следующему уровню $L^+ - 1$ с более мелкими сетками. Данный переход представляет собой изменение отображения индексов и не вносит никаких погрешностей в поправку, вычисленную на сетках уровня L^+ . Схематично оператор продолжения УМТ показан на рис. 2.8. На уровне $L^+ - 1$ вычисления проводятся аналогичным образом: сначала определяют коэффициенты $\langle g \rangle_{\{i\}}$ (2.9), $\langle \lambda \rangle_{\{i\}}$ (2.11) и правую часть $\langle r \rangle_{\{i\}}$ (2.10), а затем выполняют сглаживающие итерации. На уровнях $l = 0, \dots, L^+ - 1$ следует выполнять несколько сглаживающих итераций для эффективного удаления высокочастотных гармоник (§ 3 гл. 1). Существенно увеличивать количество итераций не имеет смысла, поскольку сглаживатель неэффективно удаляет низкочастотные гармоники. После выполнения сглаживающих итераций на самой мелкой сетке осуществляют пересчёт приближения к решению ($\hat{\varphi} := \hat{\varphi} + c^\varphi$) и обнуление поправки ($c^\varphi := 0$). На этом многосеточная итерация заканчивается, проверяют критерий останова на самой мелкой

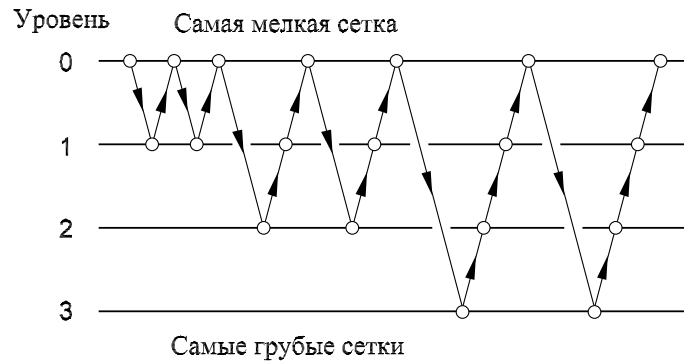


Рис. 2.9. Многосеточный цикл для задач с особенностями

сетке и в случае необходимости выполняют следующую многосеточную итерацию, начиная с уровня L^+ (рис. 2.7). Сходимость многосеточной итерации означает: $\hat{\varphi}^{(q)} \rightarrow \varphi \Rightarrow r^{(q)} \rightarrow 0 \Rightarrow (c^\varphi)^{(q)} \rightarrow 0$, где q есть номер многосеточной итерации.

Если решение задачи имеет особенности типа пограничного слоя, то вычисления лучше начинать с самой мелкой сетки (рис. 2.9). Тогда поправка $(c^\varphi)^{(q)} = \hat{\varphi}^{(q+1)} - \hat{\varphi}^{(q)}$, в отличие от решения, не будет иметь особенности.

§ 4. Аппроксимация граничных условий

В 3.2 было показано, что граничные узлы большинства грубых сеток не совпадают с границами области $\Omega = [0, 1]$ (рис. 2.5), поэтому аппроксимация граничных условий на них является приближённой. Ранее аналогичные аппроксимации¹ были рассмотрены при решении задачи Дирихле в областях сложной формы (рис. 2.10). В [25] показано, что в этом случае разностная схема имеет второй порядок точности и справедлива следующая теорема:

Теорема 2.1. *Если решение задачи Дирихле имеет непрерывные в $\Omega + \partial\Omega$ производные до четвертого порядка включительно, то разностная схема равномерно сходится со скоростью $O(h^2)$.*

¹В иностранной литературе – аппроксимация Шотли-Веллера, предложенная в 1938 г [53]

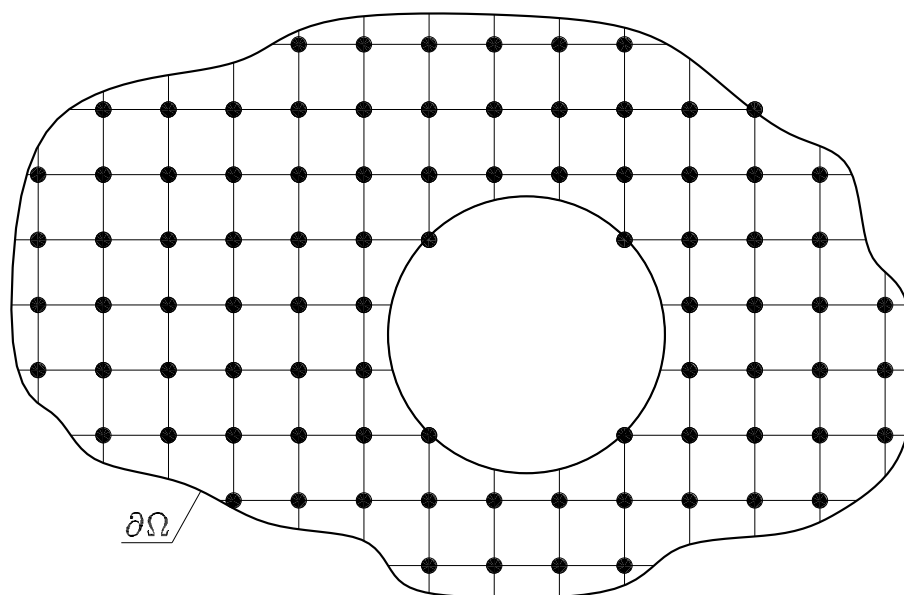


Рис. 2.10. Вычислительная сетка для решения задачи Дирихле в сложной области

Следует обратить внимание, что приближённая аппроксимация граничных условий использована только для поправки c_i^φ , а граничные условия для приближения к решению $\hat{\varphi}_i$ аппроксимируют точно на самой мелкой сетке.

Аналогичная ситуация с аппроксимацией граничных условий может возникнуть даже на прямоугольной сетке, если вычислительная сетка является разнесённой. Подробнее разнесённые сетки будут рассмотрены в § 2 гл. 3.

Рассмотрим подробнее аппроксимацию граничных условий для поправки c_i^φ (аналог $c(x)$ в (2.2)) на грубых сетках. Сначала получим выражение (2.17) для аппроксимации условий Дирихле на границе $x = 0$. Для этого необходимо выразить значение поправки в фиктивном узле x_0^y , расположенном вне области Ω , через известное значение на границе $c|_{x=0}$ и значения сеточной функции в узлах x_1^y и x_2^y (рис. 2.11).

Предположим, что первый узел сетки не совпадает с границей области, т.е. $x_1^y \neq 0$. Построим интерполяционный многочлен Лагранжа $L(x)$,

используя узлы сетки x_0^v , x_1^v и x_2^v в качестве узлов интерполяции

$$\begin{aligned} L(x) = & \frac{(x - x_1^v)(x - x_2^v)}{(x_0^v - x_1^v)(x_0^v - x_2^v)} c_0^\varphi + \frac{(x - x_0^v)(x - x_2^v)}{(x_1^v - x_0^v)(x_1^v - x_2^v)} c_1^\varphi \\ & + \frac{(x - x_0^v)(x - x_1^v)}{(x_2^v - x_0^v)(x_2^v - x_1^v)} c_2^\varphi, \end{aligned}$$

где c_0^φ , c_1^φ , c_2^φ суть значения сеточной функции в узлах x_0^v , x_1^v и x_2^v .

Расположим фиктивный узел x_0^v таким образом, что сетка вблизи границы области $\partial\Omega$ является равномерной $x_1^v - x_0^v = x_2^v - x_1^v = h$. Тогда интерполяционный многочлен Лагранжа $L(x)$ можно переписать в виде

$$\begin{aligned} L(x) = & (x - x_1^v)(x - x_2^v) \frac{c_0^\varphi}{2h^2} - (x - x_0^v)(x - x_2^v) \frac{c_1^\varphi}{h^2} \\ & + (x - x_0^v)(x - x_1^v) \frac{c_2^\varphi}{2h^2}. \end{aligned} \quad (2.22)$$

На границе $x = 0$ значение интерполяционного многочлена Лагранжа должно совпадать с $c|_{x=0}$, поэтому выражение (2.22) при $x = 0$ принимает вид

$$c|_{x=0} = L(0) = x_1^v x_2^v \frac{c_0^\varphi}{2h^2} - x_0^v x_2^v \frac{c_1^\varphi}{h^2} + x_0^v x_1^v \frac{c_2^\varphi}{2h^2}. \quad (2.23)$$

Параметр ξ (2.21), который является отношением расстояния от границы $x = 0$ до ближайшего узла x_1^v к шагу сетки h (рис. 2.11), позволяет записать (2.23) в более удобной форме. С учётом $\xi = x_1^v/h$ нетрудно выразить x_0^v , x_1^v , x_2^v через ξ и h

$$\begin{aligned} x_1^v &= \xi h, \\ x_0^v &= x_1^v - h = (\xi - 1)h, \\ x_2^v &= x_1^v + h = (\xi + 1)h. \end{aligned}$$

Подставляя полученные выражения для x_0^v , x_1^v и x_2^v в (2.23), получим

$$c|_{x=0} = \frac{1}{2}\xi(\xi + 1) c_0^\varphi - (\xi - 1)(\xi + 1) c_1^\varphi + \frac{1}{2}(\xi - 1)\xi c_2^\varphi.$$

Отсюда легко выразить значение поправки c_0^φ в фиктивном узле x_0^y через c_1^φ , c_2^φ и условие на границе $c|_{x=0}$. Формально заменяя h на $h\xi^l$ и i на $\{i\}$, приходим к (2.17).

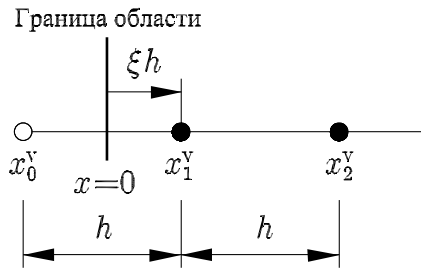


Рис. 2.11. Расположение узлов сетки вблизи границы области

Очевидно, что выражения для аппроксимации граничных условий Дирихле (2.17) и (2.19) не справедливы при $\xi = 0$, поскольку в этом случае $c_1^\varphi = c(0)$ или $c_{N_k^l+1}^\varphi = c(1)$. Поэтому при составлении программ необходимо рассматривать два варианта расположения граничных узлов на данной сетке,

которые приводят к случаям $\xi = 0$ (граничный узел лежит на границе области) и $\xi \neq 0$ (граничный узел не лежит на границе области). Выражения для аппроксимации граничных условий Неймана (2.18) и (2.20) остаются справедливыми при $\xi = 0$.

Нельзя утверждать, что аппроксимация граничных условий для поправки является принципиально новым элементом УМТ. В отдельных случаях к подобным аппроксимациям приходится прибегать и в односеточных алгоритмах (например, при использовании разнесённых сеток).

§ 5. Иллюстративный пример

Следуя традициям, основные компоненты УМТ проиллюстрируем на примере одномерной задачи

$$\frac{d^2u}{dx^2} = 10e^x, \quad u(0) = u(1) = 0, \quad (2.24)$$

которая имеет следующее точное решение:

$$u_a(x) = 10(e^x + (1 - e)x - 1). \quad (2.25)$$

Представление (2.2) позволяет переписать краевую задачу (2.24) в сле-

дующей Σ -модифицированной форме:

$$\frac{d^2 c}{dx^2} = 10 e^x - \frac{d^2 \hat{u}}{dx^2}, \quad c(0) = -\hat{u}(0), \quad c(1) = -\hat{u}(1). \quad (2.26)$$

Построим самую мелкую сетку G_1^0 с $N_1^0 = 10$ ($h = 1/N_1^0$) и три грубые сетки G_1^1 , G_2^1 и G_3^1 . Все вычислительные сетки показаны на рис. 2.12. Контрольный объём определён как (2.6).

Интегрирование уравнения (2.26) по контрольному объёму V_i (2.6) приводит к следующей разностной схеме:

$$\frac{c_{\{i-1\}}^\varphi - 2c_{\{i\}}^\varphi + c_{\{i+1\}}^\varphi}{h^2 3^{2l}} = \frac{1}{h 3^l} \int_{x_{\{i-1\}}^f}^{x_{\{i\}}^f} \left(10 e^x - \frac{d^2 \hat{u}}{dx^2} \right) dx.$$

Выполним только сглаживание на грубых сетках, начиная с нулевого начального приближения, т.е. с $\hat{u} = 0$. Тогда правая часть упрощается, и разностная схема принимает вид

$$\frac{c_{\{i-1\}}^\varphi - 2c_{\{i\}}^\varphi + c_{\{i+1\}}^\varphi}{h^2 3^{2l}} = \frac{1}{h 3^l} \int_{x_{\{i-1\}}^f}^{x_{\{i\}}^f} 10 e^x dx. \quad (2.27)$$

Теперь рассмотрим подробнее аппроксимацию Σ -модифицированной задачи (2.27) на грубых сетках G_1^1 , G_2^1 и G_3^1 , показанных на рис. 2.12: 1) сетка G_1^1 с $N_1^1 = 2$. Согласно рис. 2.27, отображение индексов узлов и граней контрольных объёмов сетки G_1^1 составит

$$\begin{aligned} x_{\{0\}}^v &= x_0^v, & x_{\{1\}}^v &= x_3^v, & x_{\{2\}}^v &= x_6^v, & x_{\{3\}}^v &= x_9^v, & x_{\{4\}}^v &= x_{12}^v, \\ x_{\{0\}}^f &= x_1^f, & x_{\{1\}}^f &= x_4^f, & x_{\{2\}}^f &= x_7^f, & x_{\{3\}}^f &= x_{10}^f. \end{aligned}$$

Узлы $x_{\{0\}}^v$ и $x_{\{4\}}^v$ являются фиктивными, поскольку они расположены вне единичного отрезка.

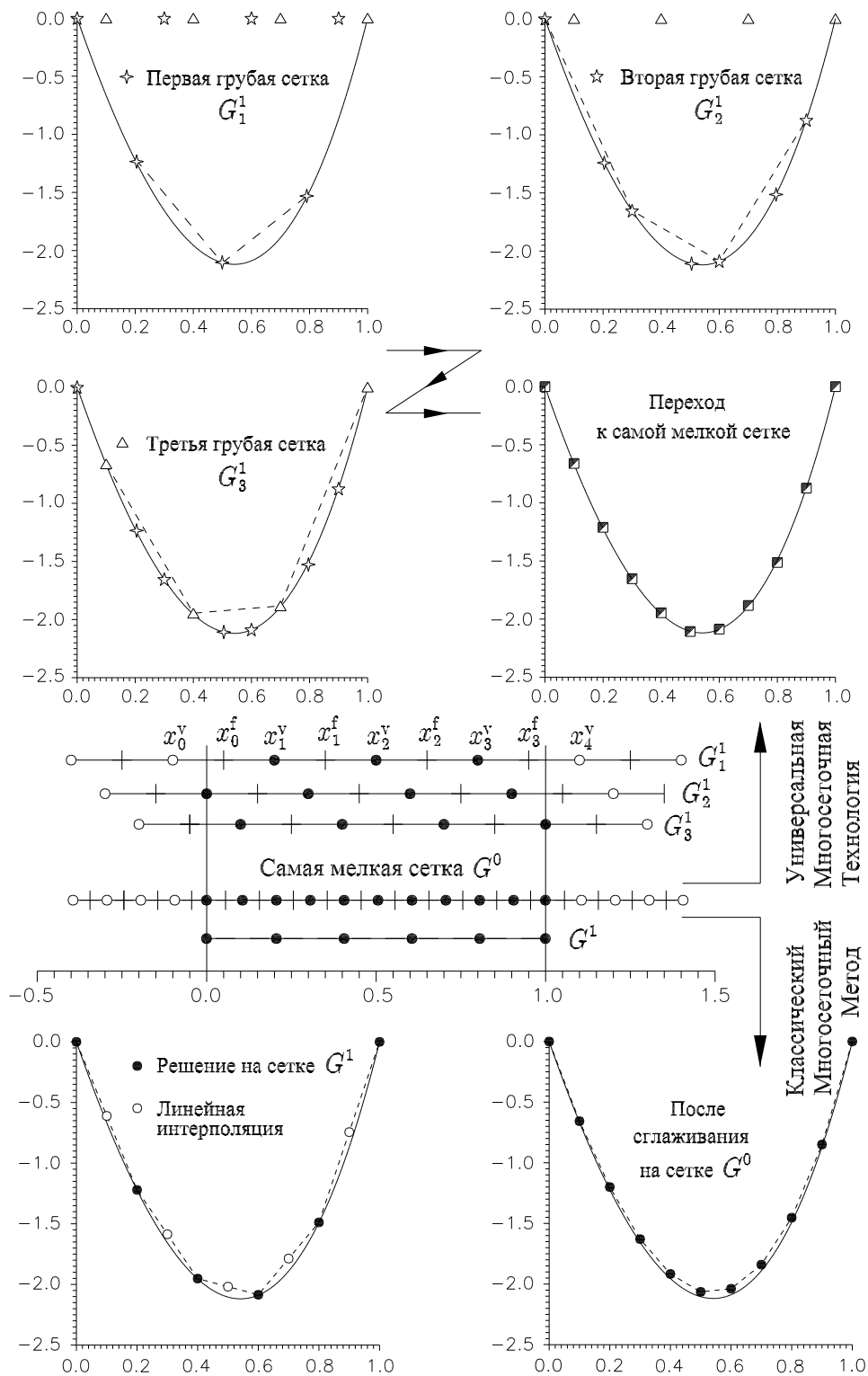


Рис. 2.12. Влияние погрешности интерполяции на точность вычисления поправки

В первом узле $x_{\{1\}}^v$ разностное уравнение (2.27) принимает вид

$$\frac{c_{\{0\}}^\varphi - 2c_{\{1\}}^\varphi + c_{\{2\}}^\varphi}{h^2 3^2} = \frac{1}{h3} \int_{x_{\{0\}}^f}^{x_{\{1\}}^f} 10 e^x dx. \quad (2.28)$$

Чтобы исключить значение поправки $c_{\{0\}}^\varphi$ в фиктивном узле $x_{\{0\}}^v$, воспользуемся уравнением (2.17), которое, с учётом граничного условия $c(0) = 0$, выглядит как

$$c_{\{0\}}^\varphi = 2 \frac{\xi - 1}{\xi} c_{\{1\}}^\varphi - \frac{\xi - 1}{\xi + 1} c_{\{2\}}^\varphi. \quad (2.29)$$

Из (2.5) и $x_{\{1\}}^v = x_3^v$ следует, что $x_{\{1\}}^v = x_3^v = 2h$. Тогда, согласно (2.21), получим

$$\xi = \frac{x_{\{1\}}^v}{h3} = \frac{2h}{3h} = \frac{2}{3}.$$

С учётом полученного значения $\xi = 2/3$ уравнение (2.29) принимает вид

$$c_{\{0\}}^\varphi = -c_{\{1\}}^\varphi + \frac{1}{5} c_{\{2\}}^\varphi. \quad (2.30)$$

Подстановка (2.30) в (2.28) приводит к следующему соотношению:

$$\frac{1}{9h^2} \left(-3c_{\{1\}}^\varphi + \frac{6}{5} c_{\{2\}}^\varphi \right) = \frac{1}{h3} \int_{x_{\{0\}}^f}^{x_{\{1\}}^f} 10 e^x dx. \quad (2.31)$$

Теперь вычислим интеграл в правой части уравнения (2.31). Поскольку

$$[x_{\{0\}}^f, x_{\{1\}}^f] = [x_1^f, x_4^f] = [x_1^f, x_2^f] \cup [x_2^f, x_3^f] \cup [x_3^f, x_4^f],$$

то интеграл представим в виде

$$\frac{1}{h3} \int_{x_{\{0\}}^f}^{x_{\{1\}}^f} 10 e^x dx = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{h} \int_{x_1^f}^{x_2^f} 10 e^x dx + \frac{1}{h} \int_{x_2^f}^{x_3^f} 10 e^x dx + \frac{1}{h} \int_{x_3^f}^{x_4^f} 10 e^x dx \right).$$

Вычисляя интегралы на самой мелкой сетке по формуле средних значений

$$\frac{1}{h} \int_{x_1^f}^{x_2^f} 10 e^x dx \approx 10 e^{x_2^v}, \quad \frac{1}{h} \int_{x_2^f}^{x_3^f} 10 e^x dx \approx 10 e^{x_3^v}, \quad \frac{1}{h} \int_{x_3^f}^{x_4^f} 10 e^x dx \approx 10 e^{x_4^v},$$

получаем следующее приближённое значение интеграла в (2.31):

$$\frac{1}{h3} \int_{x_{\{0\}^f}^{x_{\{1\}^f}} 10 e^x dx \approx \frac{10}{3} (e^{x_2^v} + e^{x_3^v} + e^{x_4^v}).$$

Таким образом, уравнение (2.31) принимает вид

$$\frac{-3 c_{\{1\}^\varphi} + 1.2 c_{\{2\}^\varphi}}{9h^2} = \frac{10}{3} (e^{x_2^v} + e^{x_3^v} + e^{x_4^v}). \quad (2.32)$$

Во втором узле $x_{\{2\}^v}$ разностное уравнение (2.27) выглядит как

$$\frac{c_{\{1\}^\varphi} - 2c_{\{2\}^\varphi} + c_{\{3\}^\varphi}}{h^2 9} = \frac{1}{h3} \int_{x_{\{1\}^f}^{x_{\{2\}^f}} 10 e^x dx. \quad (2.33)$$

Поскольку

$$[x_{\{1\}^f}, x_{\{2\}^f}] = [x_4^f, x_7^f] = [x_4^f, x_5^f] \cup [x_5^f, x_6^f] \cup [x_6^f, x_7^f],$$

то интеграл в правой части уравнения (2.33) представим в виде

$$\frac{1}{h3} \int_{x_{\{1\}^f}^{x_{\{2\}^f}} 10 e^x dx = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{h} \int_{x_4^f}^{x_5^f} 10 e^x dx + \frac{1}{h} \int_{x_5^f}^{x_6^f} 10 e^x dx + \frac{1}{h} \int_{x_6^f}^{x_7^f} 10 e^x dx \right).$$

Вычисляя интегралы на самой мелкой сетке по формуле средних значений, получим

$$\frac{1}{h3} \int_{x_{\{1\}^f}^{x_{\{2\}^f}} 10 e^x dx \approx \frac{10}{3} (e^{x_5^v} + e^{x_6^v} + e^{x_7^v}).$$

Окончательно уравнение (2.33) принимает вид

$$\frac{c_{\{1\}}^{\varphi} - 2c_{\{2\}}^{\varphi} + c_{\{3\}}^{\varphi}}{9h^2} = \frac{10}{3} (e^{x_5^v} + e^{x_6^v} + e^{x_7^v}). \quad (2.34)$$

В третьем узле $x_{\{3\}}^v$ разностное уравнение (2.27) выглядит как

$$\frac{c_{\{2\}}^{\varphi} - 2c_{\{3\}}^{\varphi} + c_{\{4\}}^{\varphi}}{h^2 9} = \frac{1}{h3} \int_{x_{\{2\}}^f}^{x_{\{3\}}^f} 10 e^x dx. \quad (2.35)$$

Исключая из (2.35) значение поправки $c_{\{4\}}^{\varphi}$ в фиктивном узле $x_{\{4\}}^v$ при помощи (2.19) ($\xi = 2/3$) и вычисляя интеграл в правой части, получим

$$\frac{1.2 c_{\{2\}}^{\varphi} - 3c_{\{3\}}^{\varphi}}{9h^2} = \frac{10}{3} (e^{x_8^v} + e^{x_9^v} + e^{x_{10}^v}). \quad (2.36)$$

Применяя прямое естественное упорядочивание неизвестных, перепишем разностные уравнения (2.32), (2.34) и (2.36) в матричной форме

$$\frac{1}{9h^2} \begin{pmatrix} -3 & 1.2 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1.2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{\{1\}}^{\varphi} \\ c_{\{2\}}^{\varphi} \\ c_{\{3\}}^{\varphi} \end{pmatrix} = \frac{10}{3} \begin{pmatrix} e^{x_2^v} + e^{x_3^v} + e^{x_4^v} \\ e^{x_5^v} + e^{x_6^v} + e^{x_7^v} \\ e^{x_8^v} + e^{x_9^v} + e^{x_{10}^v} \end{pmatrix}. \quad (2.37)$$

На рис. 2.12 сплошной линией показано точное решение $u_a(x)$ (2.25) и пунктирной линией – решение СЛАУ (2.37), полученное методом прогонки.

2) сетка G_2^1 с $N_2^1 = 3$. Согласно рис. 2.12, отображение индексов узлов и граней контрольных объёмов сетки G_2^1 составит

$$\begin{aligned} x_{\{1\}}^v &= x_1^v, & x_{\{2\}}^v &= x_4^v, & x_{\{3\}}^v &= x_7^v, & x_{\{4\}}^v &= x_{10}^v, \\ x_{\{1\}}^f &= x_2^f, & x_{\{2\}}^f &= x_5^f, & x_{\{3\}}^f &= x_8^f. \end{aligned}$$

Разностную краевую задачу на сетке G_2^1 запишем в следующей матрич-

ной форме:

$$\frac{1}{9h^2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1.5 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{\{1\}}^\varphi \\ c_{\{2\}}^\varphi \\ c_{\{3\}}^\varphi \\ c_{\{4\}}^\varphi \end{pmatrix} = \frac{10}{3} \begin{pmatrix} 0 \\ e^{x_3^v} + e^{x_4^v} + e^{x_5^v} \\ e^{x_6^v} + e^{x_7^v} + e^{x_8^v} \\ e^{x_9^v} + e^{x_{10}^v} + e^{x_{11}^v} \end{pmatrix}. \quad (2.38)$$

На рис. 2.12 сплошной линией показано точное решение $u_a(x)$ (2.25) и пунктирной линией – решение СЛАУ (2.38), полученное методом прогонки.

3) сетка G_3^1 с $N_3^1 = 3$. Согласно рис. 2.12, отображение индексов узлов и граней сетки G_3^1 составит

$$\begin{aligned} x_{\{1\}}^v &= x_2^v, & x_{\{2\}}^v &= x_5^v, & x_{\{3\}}^v &= x_8^v, & x_{\{4\}}^v &= x_{11}^v, \\ x_{\{1\}}^f &= x_3^f, & x_{\{2\}}^f &= x_6^f, & x_{\{3\}}^f &= x_9^f. \end{aligned}$$

Разностную краевую задачу на сетке G_3^1 запишем в следующей матричной форме:

$$\frac{1}{9h^2} \begin{pmatrix} -6 & 1.5 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{\{1\}}^\varphi \\ c_{\{2\}}^\varphi \\ c_{\{3\}}^\varphi \\ c_{\{4\}}^\varphi \end{pmatrix} = \frac{10}{3} \begin{pmatrix} e^{x_1^v} + e^{x_2^v} + e^{x_3^v} \\ e^{x_4^v} + e^{x_5^v} + e^{x_6^v} \\ e^{x_7^v} + e^{x_8^v} + e^{x_9^v} \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (2.39)$$

На рис. 2.12 сплошной линией показано точное решение $u_a(x)$ (2.25) и пунктирной линией – решение СЛАУ (2.39), полученное методом прогонки.

Переход к самой мелкой сетке G_1^0 . Используя отображение индексов, запишем вектор-столбцы неизвестных в СЛАУ (2.37), (2.38) и (2.39) в

виде

$$\begin{aligned} \text{сетка } G_1^1: & \quad (c_{\{1\}}^\varphi \ c_{\{2\}}^\varphi \ c_{\{3\}}^\varphi)^\top = (c_3^\varphi \ c_6^\varphi \ c_9^\varphi)^\top; \\ \text{сетка } G_2^1: & \quad (c_{\{1\}}^\varphi \ c_{\{2\}}^\varphi \ c_{\{3\}}^\varphi \ c_{\{4\}}^\varphi)^\top = (c_1^\varphi \ c_4^\varphi \ c_7^\varphi \ c_{10}^\varphi)^\top; \\ \text{сетка } G_3^1: & \quad (c_{\{1\}}^\varphi \ c_{\{2\}}^\varphi \ c_{\{3\}}^\varphi \ c_{\{4\}}^\varphi)^\top = (c_2^\varphi \ c_5^\varphi \ c_8^\varphi \ c_{11}^\varphi)^\top. \end{aligned}$$

На первый взгляд может сложиться впечатление, что для хранения поправки c_i^φ на каждой сетке необходимо использовать отдельный массив. Однако это не так: благодаря особенностям построения грубых сеток в УМТ (Свойство 3, с. 81) поправки хранятся в одном массиве данных. Вычисление поправки на сетке G_1^1 означает работу с третьим, шестым и девятым элементами массива данных

$$\frac{1}{9h^2} \begin{pmatrix} -3 & 1.2 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1.2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_3^\varphi \\ c_6^\varphi \\ c_9^\varphi \end{pmatrix} = \frac{10}{3} \begin{pmatrix} e^{x_2^v} + e^{x_3^v} + e^{x_4^v} \\ e^{x_5^v} + e^{x_6^v} + e^{x_7^v} \\ e^{x_8^v} + e^{x_9^v} + e^{x_{10}^v} \end{pmatrix}, \quad \text{см. (2.37)}$$

на сетке G_2^1 – с первым, четвертым, седьмым и десятым элементами

$$\frac{1}{9h^2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1.5 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1^\varphi \\ c_4^\varphi \\ c_7^\varphi \\ c_{10}^\varphi \end{pmatrix} = \frac{10}{3} \begin{pmatrix} 0 \\ e^{x_3^v} + e^{x_4^v} + e^{x_5^v} \\ e^{x_6^v} + e^{x_7^v} + e^{x_8^v} \\ e^{x_9^v} + e^{x_{10}^v} + e^{x_{11}^v} \end{pmatrix}, \quad \text{см. (2.38)}$$

а на сетке G_3^1 – со вторым, пятым, восьмым и одиннадцатыми элементами

$$\frac{1}{9h^2} \begin{pmatrix} -6 & 1.5 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_2^\varphi \\ c_5^\varphi \\ c_8^\varphi \\ c_{11}^\varphi \end{pmatrix} = \frac{10}{3} \begin{pmatrix} e^{x_1^v} + e^{x_2^v} + e^{x_3^v} \\ e^{x_4^v} + e^{x_5^v} + e^{x_6^v} \\ e^{x_7^v} + e^{x_8^v} + e^{x_9^v} \\ 0 \end{pmatrix}. \quad \text{см. (2.39)}$$

На рис. 2.12 видно, что выражение «сетка G_k^l » означает не что иное, как порядок обращения к элементам исходных массивов данных. В УМТ

$$\begin{pmatrix} c_1^\varphi \\ c_2^\varphi \\ c_3^\varphi \\ c_4^\varphi \\ c_5^\varphi \\ c_6^\varphi \\ c_7^\varphi \\ c_8^\varphi \\ c_9^\varphi \\ c_{10}^\varphi \\ c_{11}^\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{\{1\}}^\varphi(G_1^1) \\ c_{\{2\}}^\varphi(G_1^1) \\ c_{\{3\}}^\varphi(G_1^1) \\ c_{\{1\}}^\varphi(G_2^1) \\ c_{\{2\}}^\varphi(G_2^1) \\ c_{\{3\}}^\varphi(G_2^1) \\ c_{\{4\}}^\varphi(G_2^1) \\ c_{\{1\}}^\varphi(G_3^1) \\ c_{\{2\}}^\varphi(G_3^1) \\ c_{\{3\}}^\varphi(G_3^1) \\ c_{\{4\}}^\varphi(G_3^1) \end{pmatrix},$$

т.е. оператор продолжения $\mathcal{P}_{l+1 \rightarrow l}$ переставляет компоненты вектора поправок. Очевидно, что оператор продолжения не зависит от решаемой задачи и его конструкция определяется только количеством узлов самой мелкой сетки. На рис. 2.12 показано действие оператора $\mathcal{P}_{l+1 \rightarrow l}$: сборка начального приближения к решению на самой мелкой сетке G_1^0 из решений, полученных на грубых сетках G_1^1 (2.37), G_2^1 (2.38) и G_3^1 (2.39).

В КММ сглаживание состоит в итерационном решении СЛАУ разного размера, а в УМТ – одного размера. Фактически это означает, что сглаживание в УМТ всегда выполняют на самой мелкой сетке для исключения интерполяции. Поэтому УМТ нельзя назвать многосеточным методом в общепринятом смысле.

УМТ является границей между односеточными и многосеточными методами: с одной стороны, поправку вычисляют только на самой мелкой сетке, но с другой стороны, использована быстрая сходимость некоторых итерационных методов на первых итерациях.

Подытожим основные положения УМТ:

1) операторы переходов являются проблемно-независимыми компонентами УМТ, причём для операторов сужения и продолжения справедливо

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_{0 \rightarrow l} &= \mathcal{R}_{l-1 \rightarrow l} \cdots \mathcal{R}_{1 \rightarrow 2} \mathcal{R}_{0 \rightarrow 1} \quad \text{и} \quad \mathcal{R}_{0 \rightarrow 0} = I, \\ \mathbf{c}_0^\varphi &= \mathcal{P}_{1 \rightarrow 0} \mathbf{c}_1^\varphi = \mathcal{P}_{1 \rightarrow 0} \mathcal{P}_{2 \rightarrow 1} \mathbf{c}_2^\varphi = \mathcal{P}_{1 \rightarrow 0} \mathcal{P}_{2 \rightarrow 1} \mathcal{P}_{3 \rightarrow 2} \mathbf{c}_3^\varphi = \dots; \end{aligned} \quad (2.41)$$

2) матрицу коэффициентов A_l в УМТ формируют на многосеточной структуре унифицированным образом. Сглаживание в УМТ состоит в итерационном решении $(L^+ + 1)$ -ой СЛАУ одного размера

$$A_l \mathbf{c}_l^\varphi = \mathcal{R}_{0 \rightarrow l} (\mathbf{b}_0 - A_0 \hat{\varphi}_0^{(q)}), \quad l = 0, 1, \dots, L^+ + 1. \quad (2.42)$$

Далее выполним одну многосеточную итерацию классического многосеточного метода (решение уравнения для поправки на грубой сетке методом прогонки, пролонгация поправки на мелкую сетку посредством линейной интерполяции и сглаживание на мелкой сетке). Рис. 2.12 иллюстрирует концептуальную разницу между КММ и УМТ: в КММ сглаживание на грубой сетке требует незначительного объёма вычислительной работы, но точность приближения к решению на самой мелкой сетке невелика из-за погрешностей интерполяции. В УМТ необходимо выполнить бóльший объём вычислений, т.к. сглаживание всегда выполняют на самой мелкой сетке, но и точность приближения к решению значительно выше из-за отсутствия интерполяции.

§ 6. Анализ сходимости

Для анализа сходимости сначала необходимо записать многосеточные итерации УМТ в виде

$$\hat{\varphi}_0^{(q+1)} = M \hat{\varphi}_0^{(q)} + \tilde{\mathbf{b}},$$

затем оценить норму матрицы многосеточных итераций M . Далее для удобства будем опускать верхний индекс у поправки \mathbf{c}_l^φ .

Выберем в качестве сглаживателя для СЛАУ (2.42) итерационный метод (1.6) с $\tau = 1$

$$W_l(\mathbf{c}_l^{(\nu_{l+1})} - \mathbf{c}_l^{(\nu_l)}) = \mathcal{R}_{0 \rightarrow l}(\mathbf{b}_0 - A_0 \hat{\boldsymbol{\varphi}}_0^{(q)}) - A_l \mathbf{c}_l^{(\nu_l)}$$

или

$$\mathbf{c}_l^{(\nu_{l+1})} = S_l \mathbf{c}_l^{(\nu_l)} + W_l^{-1} \mathcal{R}_{0 \rightarrow l}(\mathbf{b}_0 - A_0 \hat{\boldsymbol{\varphi}}_0^{(q)}),$$

где матрица сглаживающих итераций имеет вид $S_l = I - W_l^{-1} A_l$. Предположим, что на всех сетках уровня l выполнено одинаковое количество сглаживающих итераций ν_l и сглаживатель является сходящимся итерационным методом (Теорема 1.1)

$$\|S_l\| \leq \omega_l < 1.$$

В § 1 гл. 1 показано, что приближение к решению, после выполнения ν_l сглаживающих итераций, удовлетворяет соотношению

$$\mathbf{c}_l - \mathbf{c}_l^{(\nu_l)} = S_l^{\nu_l} (\mathbf{c}_l - \mathbf{c}_l^{(0)}), \quad (2.43)$$

где $\mathbf{c}_l^{(0)}$ есть начальное приближение, т.е. поправка, пролонгированная с предыдущего уровня $l + 1$ с более грубыми сетками

$$\mathbf{c}_l^{(0)} = \mathcal{P}_{l+1 \rightarrow l} \mathbf{c}_l^{(\nu_{l+1})},$$

а \mathbf{c}_l есть точное решение СЛАУ (2.42)

$$\mathbf{c}_l = A_l^{-1} \mathcal{R}_{0 \rightarrow l}(\mathbf{b}_0 - A_0 \hat{\boldsymbol{\varphi}}_0^{(q)}). \quad (2.44)$$

Преобразуем правую часть уравнения (2.43), добавляя и вычитая слагаемое $\mathcal{P}_{l+1 \rightarrow l} \mathbf{c}_{l+1}$

$$\begin{aligned} \mathbf{c}_l - \mathbf{c}_l^{(0)} &= \mathbf{c}_l - \mathcal{P}_{l+1 \rightarrow l} \mathbf{c}_l^{(\nu_{l+1})} \\ &= \mathbf{c}_l + \mathcal{P}_{l+1 \rightarrow l} (\mathbf{c}_{l+1} - \mathbf{c}_l^{(\nu_{l+1})}) - \mathcal{P}_{l+1 \rightarrow l} \mathbf{c}_{l+1}. \end{aligned} \quad (2.45)$$

Учитывая (2.44), получим

$$\begin{aligned}
\mathbf{c}_l - \mathcal{P}_{l+1 \rightarrow l} \mathbf{c}_{l+1} &= A_l^{-1} \mathcal{R}_{0 \rightarrow l} (\mathbf{b}_0 - A_0 \hat{\varphi}_0^{(q)}) \\
&\quad - \mathcal{P}_{l+1 \rightarrow l} A_{l+1}^{-1} \mathcal{R}_{0 \rightarrow l+1} (\mathbf{b}_0 - A_0 \hat{\varphi}_0^{(q)}) \\
&= \left(A_l^{-1} \mathcal{R}_{0 \rightarrow l} - \mathcal{P}_{l+1 \rightarrow l} A_{l+1}^{-1} \mathcal{R}_{0 \rightarrow l+1} \right) (\mathbf{b}_0 - A_0 \hat{\varphi}_0^{(q)}) \\
&= \left(A_l^{-1} - \mathcal{P}_{l+1 \rightarrow l} A_{l+1}^{-1} \mathcal{R}_{l \rightarrow l+1} \right) \mathcal{R}_{0 \rightarrow l} (\mathbf{b}_0 - A_0 \hat{\varphi}_0^{(q)})
\end{aligned}$$

Последнее равенство справедливо в силу $\mathcal{R}_{0 \rightarrow l+1} = \mathcal{R}_{l \rightarrow l+1} \mathcal{R}_{0 \rightarrow l}$ (2.41).

Введём обозначение

$$d_l = A_l^{-1} - \mathcal{P}_{l+1 \rightarrow l} A_{l+1}^{-1} \mathcal{R}_{l \rightarrow l+1}. \quad (2.46)$$

Заметим, что с учётом (2.46) свойство аппроксимации (1.22) можно переписать в виде $\|d_l\| \leq C_A \|A_l\|^{-1}$. Тогда

$$\mathbf{c}_l - \mathcal{P}_{l+1 \rightarrow l} \mathbf{c}_{l+1} = d_l \mathcal{R}_{0 \rightarrow l} (\mathbf{b}_0 - A_0 \hat{\varphi}_0^{(q)}),$$

и выражение (2.45) принимает вид

$$\mathbf{c}_l - \mathbf{c}_l^{(0)} = \mathcal{P}_{l+1 \rightarrow l} (\mathbf{c}_{l+1} - \mathbf{c}_{l+1}^{(\nu_{l+1})}) + d_l \mathcal{R}_{0 \rightarrow l} (\mathbf{b}_0 - A_0 \hat{\varphi}_0^{(q)}).$$

Полученное соотношение позволяет переписать (2.43) в рекуррентном виде

$$\mathbf{c}_l - \mathbf{c}_l^{(\nu_l)} = S_l^{\nu_l} \mathcal{P}_{l+1 \rightarrow l} (\mathbf{c}_{l+1} - \mathbf{c}_{l+1}^{(\nu_{l+1})}) + S_l^{\nu_l} d_l \mathcal{R}_{0 \rightarrow l} (\mathbf{b}_0 - A_0 \hat{\varphi}_0^{(q)}). \quad (2.47)$$

Далее рассмотрим изменение поправки $\mathbf{c}_l^{(\nu_l)}$ в ходе многосеточной итерации, начиная с уровня с самыми грубыми сетками L^+ , заканчивая самой мелкой сеткой (нулевой уровень):

1. *уровень L^+* . Предположим, что на данном уровне сеточные уравнения решены точно:

$$\mathbf{c}_{L^+} = \mathbf{c}_{L^+}^{(\nu_{L^+})}. \quad (2.48)$$

2. *уровень* $L^+ - 1$. Выражение (2.47) с учётом (2.48) принимает вид

$$\mathbf{c}_{L^+-1} - \mathbf{c}_{L^+-1}^{(\nu_{L^+-1})} = S_{L^+-1}^{\nu_{L^+-1}} d_{L^+-1} \mathcal{R}_{0 \rightarrow L^+-1} (\mathbf{b}_0 - A_0 \hat{\boldsymbol{\varphi}}_0^{(q)}). \quad (2.49)$$

3. *уровень* $L^+ - 2$. Выражение (2.47) с учётом (2.49) принимает вид

$$\begin{aligned} \mathbf{c}_{L^+-2} - \mathbf{c}_{L^+-2}^{(\nu_{L^+-2})} &= S_{L^+-2}^{\nu_{L^+-2}} \mathcal{P}_{L^+-1 \rightarrow L^+-2} (\mathbf{c}_{L^+-1} - \mathbf{c}_{L^+-1}^{(\nu_{L^+-1})}) \\ &\quad + S_{L^+-2}^{\nu_{L^+-2}} d_{L^+-2} \mathcal{R}_{0 \rightarrow L^+-2} (\mathbf{b}_0 - A_0 \hat{\boldsymbol{\varphi}}_0^{(q)}) \\ &= S_{L^+-2}^{\nu_{L^+-2}} \mathcal{P}_{L^+-1 \rightarrow L^+-2} S_{L^+-1}^{\nu_{L^+-1}} d_{L^+-1} \mathcal{R}_{0 \rightarrow L^+-1} (\mathbf{b}_0 - A_0 \hat{\boldsymbol{\varphi}}_0^{(q)}) \\ &\quad + S_{L^+-2}^{\nu_{L^+-2}} d_{L^+-2} \mathcal{R}_{0 \rightarrow L^+-2} (\mathbf{b}_0 - A_0 \hat{\boldsymbol{\varphi}}_0^{(q)}) \\ &= Q_{L^+-2} (\mathbf{b}_0 - A_0 \hat{\boldsymbol{\varphi}}_0^{(q)}), \end{aligned}$$

где

$$Q_{L^+-2} = S_{L^+-2}^{\nu_{L^+-2}} \left(\mathcal{P}_{L^+-1 \rightarrow L^+-2} S_{L^+-1}^{\nu_{L^+-1}} d_{L^+-1} \mathcal{R}_{0 \rightarrow L^+-1} + d_{L^+-2} \mathcal{R}_{0 \rightarrow L^+-2} \right).$$

Продолжая выписывать разность между точным и приближённым значениями поправок на последующих уровнях, получим следующее соотношение

$$\mathbf{c}_l - \mathbf{c}_l^{(\nu_l)} = Q_l (\mathbf{b}_0 - A_0 \hat{\boldsymbol{\varphi}}_0^{(q)}), \quad (2.50)$$

где матрица Q_l определена рекуррентным образом

$$Q_l = \begin{cases} S_l^{\nu_l} \left(d_l \mathcal{R}_{0 \rightarrow l} + \mathcal{P}_{l+1 \rightarrow l} Q_{l+1} \right), & l = 0, 1, 2, \dots, L^+ - 2 \\ S_l^{\nu_l} d_l \mathcal{R}_{0 \rightarrow l}, & l = L^+ - 1 \end{cases}. \quad (2.51)$$

На самой мелкой сетке ($l = 0$) уравнение (2.50) с учётом (2.44) и $\mathcal{R}_{0 \rightarrow 0} = I$ может быть переписано в следующей форме:

$$\mathbf{c}_0^{(\nu_0)} = \mathbf{c}_0 - Q_0 (\mathbf{b}_0 - A_0 \hat{\boldsymbol{\varphi}}_0^{(q)}) = (A_0^{-1} - Q_0) (\mathbf{b}_0 - A_0 \hat{\boldsymbol{\varphi}}_0^{(q)}).$$

Тогда, прибавляя к предыдущему значению $\hat{\boldsymbol{\varphi}}_0^{(q)}$ поправку $\mathbf{c}_0^{(\nu_0)}$, получим новое приближение к решению после выполненной многосеточной

итерации

$$\begin{aligned}\hat{\varphi}_0^{(q+1)} &= \hat{\varphi}_0^{(q)} + \mathbf{c}_0^{(\nu_0)} = \hat{\varphi}_0^{(q)} + (A_0^{-1} - Q_0)(\mathbf{b}_0 - A_0\hat{\varphi}_0^{(q)}) \\ &= Q_0A_0\hat{\varphi}_0^{(q)} + (A_0^{-1} - Q_0)\mathbf{b}_0,\end{aligned}$$

где матрица Q_0 задана как (2.51). Нетрудно видеть, что матрица многосеточных итераций УМТ имеет вид Q_0A_0 .

Чтобы использовать свойства сглаживания и аппроксимации для доказательства сходимости многосеточных итераций, применим УМТ к решению вспомогательной задачи (1.24):

$$\mathbf{v}_0^{(\bar{q}+1)} = Q_0A_0\mathbf{v}_0^{(\bar{q})} + (A_0^{-1} - Q_0)A_0^{-1}\mathbf{b}_0.$$

Тогда с учётом замены переменных $\mathbf{v}_0^{(\bar{q})} = A_0^{-1}\hat{\varphi}_0^{(\bar{q})}$ получим

$$\hat{\varphi}_0^{(\bar{q}+1)} = A_0Q_0\hat{\varphi}_0^{(\bar{q})} + (I - A_0Q_0)A_0^{-1}\mathbf{b}_0.$$

Для последующего анализа матрицу многосеточных итераций $M = A_0Q_0$ удобнее переписать в нерекуррентном виде

$$M = A_0Q_0 = A_0S_0^{\nu_0}d_0 + \sum_{l=1}^{L+1} \prod_{k=0}^{l-1} A_kS_k^{\nu_k}\mathcal{P}_{k+1 \rightarrow k}A_{k+1}^{-1} \cdot A_lS_l^{\nu_l}d_l\mathcal{R}_{0 \rightarrow l}, \quad (2.52)$$

где матрица d_l задана согласно (2.46).

Тогда справедлива следующая теорема о сходимости УМТ:

Теорема 2.2. *Предположим, что выполнены свойства сглаживания (1.21) и аппроксимации (1.22), и $\|\mathcal{R}_{0 \rightarrow l}\| \leq C_{\mathcal{R}}$. Тогда УМТ сходится, причём норма матрицы многосеточных итераций (2.52) удовлетворяет оценке*

$$\|M\| \leq C_A C_w \sqrt{\frac{2}{\pi\nu_0}} + C_A C_w C_{\mathcal{R}} \sum_{l=1}^{L+1} (C C_w)^l \prod_{k=0}^l \sqrt{\frac{2}{\pi\nu_k}}. \quad (2.53)$$

Доказательство. Из (2.52) следует следующая оценка:

$$\|M\| \leq \|A_0 S_0^{\nu_0} d_0\| + \sum_{l=1}^{L^+-1} \|A_l S_l^{\nu_l} d_l\| \cdot \|\mathcal{R}_{0 \rightarrow l}\| \prod_{k=0}^{l-1} \|A_k S_k^{\nu_k} \mathcal{P}_{k+1 \rightarrow k} A_{k+1}^{-1}\|. \quad (2.54)$$

Используя свойства сглаживания (1.21) и аппроксимации (1.22), записанного в виде $\|d_l\| \leq C_A \|A_l\|^{-1}$ (2.46), получим

$$\|A_l S_l^{\nu_l} d_l\| \leq \|A_l S_l^{\nu_l}\| \cdot \|d_l\| \leq C_A C_w \sqrt{\frac{2}{\pi \nu_l}}, \quad l = 0, 1, 2, \dots, L^+ - 1. \quad (2.55)$$

Далее с учётом (1.33) нетрудно получить следующую оценку:

$$\|A_k S_k^{\nu_k} \mathcal{P}_{k+1 \rightarrow k} A_{k+1}^{-1}\| \leq C \|A_k S_k^{\nu_k} A_k^{-1}\| \leq C C_w \sqrt{\frac{2}{\pi \nu_k}}. \quad (2.56)$$

Тогда оценка (2.54), с учётом (2.55) и (2.56), принимает вид (2.53). \blacksquare

Напомним, что все оценки получены в предположении, что на уровне, состоящем из самых грубых сеток $l = L^+$, сеточные уравнения решены точно. Выполняя достаточное количество сглаживающих итераций на каждом уровне, можно добиться сходимости многосеточных итераций ($\nu_l \rightarrow \infty \Rightarrow \|M\| \rightarrow 0$), причём количество многосеточных итераций не зависит от величины шага самой мелкой сетки. Из оценки (2.53) следует, что сглаживание на уровнях с более мелкими сетками сильнее влияет на скорость сходимости УМТ, чем сглаживание на уровнях с более грубыми сетками.

Важным частным случаем является выполнение одинакового количества сглаживающих итераций на каждой сетке каждого уровня: $\nu_l = \nu$, $l = 0, 1, 2, \dots, L^+ - 1$. Тогда оценка (2.53) принимает вид

$$\|M\| \leq C_A C_w \sqrt{\frac{2}{\pi \nu}} + C_A C_w C_{\mathcal{R}} \sum_{l=1}^{L^+-1} (C C_w)^l \left(\sqrt{\frac{2}{\pi \nu}} \right)^{l+1}.$$

Поскольку при достаточно больших ν

$$\begin{aligned} \sum_{l=1}^{L^+-1} (CC_w)^l \left(\sqrt{\frac{2}{\pi\nu}} \right)^{l+1} &= CC_w \frac{2}{\pi\nu} \frac{1 - \left(CC_w \sqrt{\frac{2}{\pi\nu}} \right)^{L^+-1}}{1 - CC_w \sqrt{\frac{2}{\pi\nu}}} \\ &< CC_w \frac{2}{\pi\nu} \frac{1}{1 - CC_w \sqrt{\frac{2}{\pi\nu}}} = CC_w \sqrt{\frac{2}{\pi\nu}} \frac{1}{\sqrt{\frac{\pi\nu}{2}} - CC_w}, \end{aligned}$$

то оценка (2.53) в случае $\nu_l = \nu = \text{const}$ выглядит следующим образом:

$$\|M\| < C_A C_w \sqrt{\frac{2}{\pi\nu}} \left(1 + \frac{CC_w C_{\mathcal{R}}}{\sqrt{\frac{\pi\nu}{2}} - CC_w} \right),$$

откуда нетрудно видеть независимость скорости сходимости УМТ от величины шага сетки и количества сеточных уровней.

Сравним скорость сходимости V-цикла и УМТ на примере решения задачи Дирихле (1.8). Воспроизведём вычислительный эксперимент, представленный в § 6 гл. 1, с самой мелкой сеткой 128×128 и 1024×1024 в области Ω , которая является единичным квадратом ($h_x = h_y$). Выполним три сглаживающие итерации при предварительном и последующем сглаживании для V-цикла и шесть сглаживающих итераций для УМТ. Результаты вычислительного эксперимента, представленные на рис. 2.13 и 2.14, показывают, что скорость сходимости многосеточных итераций V-цикла и УМТ практически одинакова.

Различие существует в необходимом объёме вычислений. Если на всех уровнях выполнено одинаковое количество сглаживающих итераций ν , то стоимость многосеточной итерации УМТ составит $\mathcal{W}_\nu(L^+ + 1)$ арифметических операций, где \mathcal{W}_ν – вычислительная стоимость ν сгла-

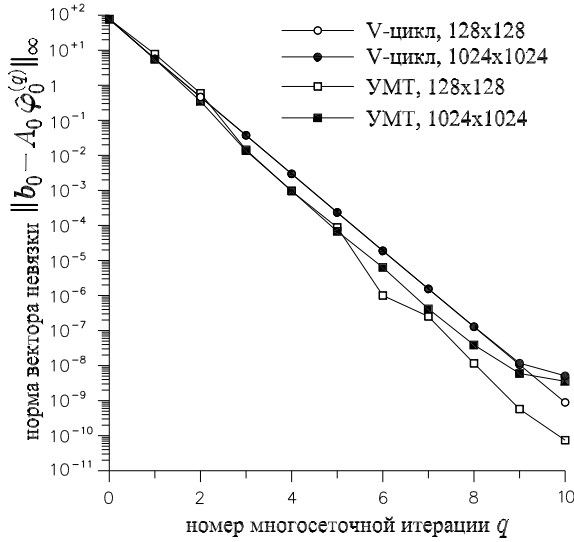


Рис. 2.13. Уменьшение нормы вектора невязки

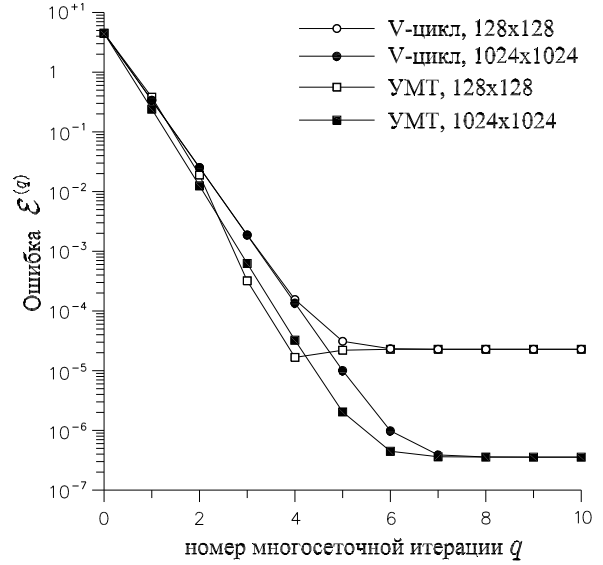


Рис. 2.14. Уменьшение ошибки численного решения

живающих итераций. Поскольку $\mathcal{W}_\nu = O(N)$ и $L^+ + 1 = O(\lg N)$, где N есть количество узлов самой мелкой сетки, то очевидно, что УМТ не обладает оптимальной скоростью сходимости, и общий объём вычислительной работы составит $O(N \lg N)$ арифметических операций. Напомним, что аналогичный показатель для оптимально адаптированного варианта КММ составит $O(N)$ арифметических операций. Проигрыш в эффективности УМТ порядка $\sim \lg N$ является результатом независимости оператора продолжения $\mathcal{P}_{l+1 \rightarrow l}$ от решаемой краевой задачи.

Для оценки проигрыша в эффективности классическим многосеточным методам положим, что самая мелкая сетка состоит из $(2^k + 1)^d$ узлов, где $d = 2, 3$. Тогда, пренебрегая вычислительными усилиями для реализации операторов переходов, получим, что увеличение времени счёта, по сравнению с V-циклом, составит

$$\approx \left[\frac{\lg(2^k + 1)}{\lg 3} \right] \frac{2^d - 1}{2^d + 1} \approx [0.63k] \frac{2^d - 1}{2^d + 1},$$

где квадратные скобки означают целую часть. В частности, при решении

линейных двумерных краевых задач ($d = 2$) на сетке 1024^2 ($k = 10$) и трёхмерных задач ($d = 3$) на сетке 128^3 ($k = 7$) ожидаемое увеличение времени счёта составит 3.6 и 3.1 раза соответственно.

В настоящее время распространена точка зрения, что оптимальная скорость сходимости не может быть достигнута при решении сложных прикладных задач.

§ 7. Вычислительные эксперименты

Экспериментальное исследование численных методов удобно проводить на *модельных* задачах, которые имеют точное решение и обладают характерными особенностями прикладных задач.

Рассмотрим первую краевую задачу для модельного уравнения

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda^x(u) \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda^y(u) \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda^z(u) \frac{\partial u}{\partial z} \right) - \alpha u^2 = -f \quad (2.57)$$

для иллюстрации УМТ в трёхмерном случае. При $\alpha = 0$ получим нелинейное уравнение теплопроводности ($\lambda^x, \lambda^y, \lambda^z$ – коэффициенты теплопроводности, причём $\lambda^x \neq \lambda^y \neq \lambda^z$; u – температура), а член αu^2 сходен с квадратичной нелинейностью в конвективных членах уравнений Навье-Стокса.

Σ -модификация решения

$$u(x, y, z) = c(x, y, z) + \hat{u}(x, y, z)$$

приводит к следующей Σ -модифицированной форме уравнения (2.57):

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda^x(c + \hat{u}) \frac{\partial(c + \hat{u})}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda^y(c + \hat{u}) \frac{\partial(c + \hat{u})}{\partial y} \right) + \\ & + \frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda^z(c + \hat{u}) \frac{\partial(c + \hat{u})}{\partial z} \right) - \alpha(c + \hat{u})^2 = -f(x, y, z). \end{aligned}$$

Воспользуемся тождеством $(c + \hat{u})^2 = c^2 + 2c\hat{u} + \hat{u}^2$ и перепишем Σ -модифицированное уравнение в виде

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda^x(c + \hat{u}) \frac{\partial c}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda^y(c + \hat{u}) \frac{\partial c}{\partial y} \right) + \\ & + \frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda^z(c + \hat{u}) \frac{\partial c}{\partial z} \right) - \alpha(c^2 + 2c\hat{u}) = R(x, y, z), \end{aligned} \quad (2.58a)$$

с правой частью

$$\begin{aligned} R(x, y, z) = & -f(x, y, z) - \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda^x(c + \hat{u}) \frac{\partial \hat{u}}{\partial x} \right) \\ & - \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda^y(c + \hat{u}) \frac{\partial \hat{u}}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda^z(c + \hat{u}) \frac{\partial \hat{u}}{\partial z} \right) + \alpha \hat{u}^2. \end{aligned} \quad (2.58b)$$

В нелинейном случае дифференциальные операторы в левой (2.58a) и правой (2.58b) части Σ -модифицированного уравнения не совпадают, но правая часть $R(x, y, z)$ (2.58b) при $c \rightarrow 0$ совпадает с исходным уравнением (2.57). Сходимость означает, что поправка $c \rightarrow 0 \Rightarrow R \rightarrow 0$ и приближение \hat{u} удовлетворяют уравнению (2.57).

Пусть область Ω является единичным кубом

$$\Omega = \{(x, y, z) \mid 0 < x < 1, 0 < y < 1, 0 < z < 1\},$$

а $\partial\Omega$ – его граница. Построим в области Ω равномерную вычислительную сетку G_1^0 посредством разбивки сторон единичного куба на N_x^0 , N_y^0 и N_z^0 частей

$$\begin{aligned} G_1^0 = \{ & (x_i^v, y_j^v, z_k^v) \mid x_i^v = (i - 1)h_x, \quad i = 1, 2, \dots, N_x^0 + 1; \\ & y_j^v = (j - 1)h_y, \quad j = 1, 2, \dots, N_y^0 + 1; \\ & z_k^v = (k - 1)h_z, \quad k = 1, 2, \dots, N_z^0 + 1\}, \end{aligned}$$

где $h_x = 1/N_x^0$, $h_y = 1/N_y^0$ и $h_z = 1/N_z^0$ суть шаги сетки в направлениях x , y и z соответственно. Множество точек (x_i^v, y_j^v, z_k^v) является узлами

сетки G_1^0 . Контрольный объём V_{ijk}^0 на сетке G_1^0 зададим как

$$V_{ijk}^0 = \{(x, y, z) \mid x_{i-1}^f \leq x \leq x_i^f, y_{j-1}^f \leq y \leq y_j^f, z_{k-1}^f \leq z \leq z_k^f\},$$

а грани контрольного объёма расположены посередине между узлами

$$x_i^f = (x_i^v + x_{i+1}^v)/2, \quad i = 1, 2, \dots, N_x^0,$$

$$y_j^f = (y_j^v + y_{j+1}^v)/2, \quad j = 1, 2, \dots, N_y^0,$$

$$z_k^f = (z_k^v + z_{k+1}^v)/2, \quad k = 1, 2, \dots, N_z^0.$$

Положим, что построена многосеточная структура, т.е. определено отображение индексов узлов и граней на всех сетках всех уровней на узлы и грани самой мелкой сетки G_1^0 . Далее будет рассмотрен общий случай $N_x^0 \neq N_y^0 \neq N_z^0 \Rightarrow h_x \neq h_y \neq h_z$ (см. 3.2 гл. 2). Контрольный объём на некоторой грубой сетке уровня $l = 0, 1, 2, \dots, L^+$ задан в виде

$$V_{\{ijk\}}^l = \{(x, y, z) \mid x_{\{i-1\}}^f \leq x \leq x_{\{i\}}^f, y_{\{j-1\}}^f \leq y \leq y_{\{j\}}^f, z_{\{k-1\}}^f \leq z \leq z_{\{k\}}^f\}.$$

Интегрирование Σ -модифицированного уравнения (2.58) по контрольному объёму $V_{\{ijk\}}^l$ приводит к следующему соотношению:

$$\begin{aligned} & \langle \lambda^x \rangle \Big|_{x_{\{i\}}^f} \frac{c_{\{i+1jk\}}^\varphi - c_{\{ijk\}}^\varphi}{h_x^2 3^{2l_x}} - \langle \lambda^x \rangle \Big|_{x_{\{i-1\}}^f} \frac{c_{\{ijk\}}^\varphi - c_{\{i-1jk\}}^\varphi}{h_x^2 3^{2l_x}} + \\ & + \langle \lambda^y \rangle \Big|_{y_{\{j\}}^f} \frac{c_{\{ij+1k\}}^\varphi - c_{\{ijk\}}^\varphi}{h_y^2 3^{2l_y}} - \langle \lambda^y \rangle \Big|_{y_{\{j-1\}}^f} \frac{c_{\{ijk\}}^\varphi - c_{\{ij-1k\}}^\varphi}{h_y^2 3^{2l_y}} + \\ & + \langle \lambda^z \rangle \Big|_{z_{\{k\}}^f} \frac{c_{\{ijk+1\}}^\varphi - c_{\{ijk\}}^\varphi}{h_z^2 3^{2l_z}} - \langle \lambda^z \rangle \Big|_{z_{\{k-1\}}^f} \frac{c_{\{ijk\}}^\varphi - c_{\{ijk-1\}}^\varphi}{h_z^2 3^{2l_z}} \\ & - \frac{\alpha}{h_x h_y h_z 3^{l_x + l_y + l_z}} \int_{x_{\{i-1\}}^f}^{x_{\{i\}}^f} \int_{y_{\{j-1\}}^f}^{y_{\{j\}}^f} \int_{z_{\{k-1\}}^f}^{z_{\{k\}}^f} (c^2 + 2c\hat{u}) dz dy dx = \langle R \rangle_{\{ijk\}}, \end{aligned}$$

где сеточные функции c_{ijk}^φ и $\hat{\varphi}_{ijk}$ являются аналогами непрерывных функций $c(x, y, z)$ и $\hat{u}(x, y, z)$, а параметры $\langle \lambda^x \rangle$, $\langle \lambda^y \rangle$, $\langle \lambda^z \rangle$ и правая часть

$\langle R \rangle_{\{ijk\}}$ имеют вид

$$\langle \lambda^x \rangle \Big|_{x^*} = \frac{1}{h_y h_z 3^{l_y + l_z}} \int_{y_{\{j-1\}}^f}^{y_{\{j\}}^f} \int_{z_{\{k-1\}}^f}^{z_{\{k\}}^f} \lambda^x (c(x^*, y, z) + \hat{u}(x^*, y, z)) dz dy, \quad x^* = x_{\{i-1\}}^f, x_{\{i\}}^f,$$

$$\langle \lambda^y \rangle \Big|_{y^*} = \frac{1}{h_x h_z 3^{l_x + l_z}} \int_{x_{\{i-1\}}^f}^{x_{\{i\}}^f} \int_{z_{\{k-1\}}^f}^{z_{\{k\}}^f} \lambda^y (c(x, y^*, z) + \hat{u}(x, y^*, z)) dz dx, \quad y^* = y_{\{j-1\}}^f, y_{\{j\}}^f,$$

$$\langle \lambda^z \rangle \Big|_{z^*} = \frac{1}{h_x h_y 3^{l_x + l_y}} \int_{x_{\{i-1\}}^f}^{x_{\{i\}}^f} \int_{y_{\{j-1\}}^f}^{y_{\{j\}}^f} \lambda^z (c(x, y, z^*) + \hat{u}(x, y, z^*)) dy dx, \quad z^* = z_{\{k-1\}}^f, z_{\{k\}}^f.$$

$$\langle R \rangle_{\{ijk\}} = \frac{1}{h_x h_y h_z 3^{l_x + l_y + l_z}} \int_{x_{\{i-1\}}^f}^{x_{\{i\}}^f} \int_{y_{\{j-1\}}^f}^{y_{\{j\}}^f} \int_{z_{\{k-1\}}^f}^{z_{\{k\}}^f} R(x, y, z) dz dy dx.$$

Параметры $\langle \lambda^x \rangle$, $\langle \lambda^y \rangle$ и $\langle \lambda^z \rangle$ являются осреднёнными значениями коэффициентов λ^x , λ^y и λ^z на гранях контрольного объёма $V_{\{ijk\}}^l$, а правая часть $\langle R \rangle_{\{ijk\}}$ – осреднённая по контрольному объёму $V_{\{ijk\}}^l$ невязка.

Положим, что поправка $c_{\{ijk\}}^\varphi$ постоянна внутри выбранного контрольного объёма $V_{\{ijk\}}^l$. Тогда

$$\begin{aligned} & \frac{\alpha}{h_x h_y h_z 3^{l_x + l_y + l_z}} \int_{x_{\{i-1\}}^f}^{x_{\{i\}}^f} \int_{y_{\{j-1\}}^f}^{y_{\{j\}}^f} \int_{z_{\{k-1\}}^f}^{z_{\{k\}}^f} (c^2 + 2c\hat{u}) dz dy dx \approx \\ & \approx \alpha ((c_{\{ijk\}}^\varphi)^2 + 2c_{\{ijk\}}^\varphi \langle \hat{u} \rangle_{\{ijk\}}), \end{aligned}$$

где $\langle \hat{u} \rangle_{\{ijk\}}$ есть осреднённое по контрольному объёму $V_{\{ijk\}}^l$ приближение к решению \hat{u}

$$\langle \hat{u} \rangle_{\{ijk\}} = \frac{1}{h_x h_y h_z 3^{l_x + l_y + l_z}} \int_{x_{\{i-1\}}^f}^{x_{\{i\}}^f} \int_{y_{\{j-1\}}^f}^{y_{\{j\}}^f} \int_{z_{\{k-1\}}^f}^{z_{\{k\}}^f} \hat{u}(x, y, z) dz dy dx.$$

Применим метод Ньютона для линеаризации члена с квадратичной нелинейностью

$$(c_{\{ijk\}}^{\varphi})^2 \approx 2\bar{c}_{\{ijk\}}^{\varphi} c_{\{ijk\}}^{\varphi} - (\bar{c}_{\{ijk\}}^{\varphi})^2,$$

где $\bar{c}_{\{ijk\}}^{\varphi}$ есть известное значение с предыдущей (по нелинейности) итерации. Тогда линеаризованная аппроксимация нелинейного члена принимает вид

$$\begin{aligned} & \frac{\alpha}{h_x h_y h_z 3^{l_x+l_y+l_z}} \int_{x_{\{i-1\}}^f}^{x_{\{i\}}^f} \int_{y_{\{j-1\}}^f}^{y_{\{j\}}^f} \int_{z_{\{k-1\}}^f}^{z_{\{k\}}^f} (c^2 + 2c\hat{u}) dz dy dx \approx \\ & \approx 2\alpha(\bar{c}_{\{ijk\}}^{\varphi} + \langle \hat{u} \rangle_{\{ijk\}}) c_{\{ijk\}}^{\varphi} - \alpha(\bar{c}_{\{ijk\}}^{\varphi})^2. \end{aligned}$$

Члены уравнения (2.57), содержащие вторые производные, тоже являются нелинейными в силу зависимости коэффициентов $\lambda^x(u)$, $\lambda^y(u)$ и $\lambda^z(u)$ от искомой функции u . Прикладные задачи, как правило, характеризуются сложной зависимостью теплофизических свойств среды от температуры (и давления). Часто значения теплофизических свойств вычисляют при помощи программ, устроенных по принципу «чёрного ящика», поскольку составление уравнений состояния является отдельной и сложной научной проблемой. В общем случае будем полагать, что аналитическая зависимость $\lambda^x(u)$, $\lambda^y(u)$ и $\lambda^z(u)$ от u неизвестна. Поэтому наиболее распространённым способом линеаризации данных членов является метод запаздывающих коэффициентов, то есть значения $\lambda^x(u)$, $\lambda^y(u)$ и $\lambda^z(u)$ будем определять по известному значению функции u , взятому с предыдущей итерации.

Перед выполнением сглаживающих итераций необходимо вычислить коэффициенты $\langle \lambda^x \rangle$, $\langle \lambda^y \rangle$ и $\langle \lambda^z \rangle$, $\langle u \rangle_{\{ijk\}}$ и правую часть $\langle R \rangle_{\{ijk\}}$. В 3.3 гл. 2 показано, что значения этих коэффициентов и правой части на грубых сетках однозначно определяются их аппроксимациями на самой мелкой

сетке.

Возможно, что коэффициенты $\lambda^x(u)$, $\lambda^y(u)$ и $\lambda^z(u)$ являются разрывными функциями (3.3 гл. 2, теплопроводность в среде, состоящей из разнородных материалов), поэтому параметры $\langle \lambda^x \rangle$, $\langle \lambda^y \rangle$ и $\langle \lambda^z \rangle$ на самой мелкой сетке аппроксимируют следующим образом:

$$\langle \lambda^x \rangle \Big|_{x_{i-1}^f} = 2 \frac{\lambda^x(c_{i-1jk}^\varphi + \hat{\varphi}_{i-1jk}) \lambda^x(c_{ijk}^\varphi + \hat{\varphi}_{ijk})}{\lambda^x(c_{i-1jk}^\varphi + \hat{\varphi}_{i-1jk}) + \lambda^x(c_{ijk}^\varphi + \hat{\varphi}_{ijk})}, \quad (2.59a)$$

$$\langle \lambda^x \rangle \Big|_{x_i^f} = 2 \frac{\lambda^x(c_{i+1jk}^\varphi + \hat{\varphi}_{i+1jk}) \lambda^x(c_{ijk}^\varphi + \hat{\varphi}_{ijk})}{\lambda^x(c_{i+1jk}^\varphi + \hat{\varphi}_{i+1jk}) + \lambda^x(c_{ijk}^\varphi + \hat{\varphi}_{ijk})}, \quad (2.59b)$$

$$\langle \lambda^y \rangle \Big|_{y_{j-1}^f} = 2 \frac{\lambda^y(c_{ij-1k}^\varphi + \hat{\varphi}_{ij-1k}) \lambda^y(c_{ijk}^\varphi + \hat{\varphi}_{ijk})}{\lambda^y(c_{ij-1k}^\varphi + \hat{\varphi}_{ij-1k}) + \lambda^y(c_{ijk}^\varphi + \hat{\varphi}_{ijk})}, \quad (2.59c)$$

$$\langle \lambda^y \rangle \Big|_{y_j^f} = 2 \frac{\lambda^y(c_{ij+1k}^\varphi + \hat{\varphi}_{ij+1k}) \lambda^y(c_{ijk}^\varphi + \hat{\varphi}_{ijk})}{\lambda^y(c_{ij+1k}^\varphi + \hat{\varphi}_{ij+1k}) + \lambda^y(c_{ijk}^\varphi + \hat{\varphi}_{ijk})}, \quad (2.59d)$$

$$\langle \lambda^z \rangle \Big|_{z_{k-1}^f} = 2 \frac{\lambda^z(c_{ijk-1}^\varphi + \hat{\varphi}_{ijk-1}) \lambda^z(c_{ijk}^\varphi + \hat{\varphi}_{ijk})}{\lambda^z(c_{ijk-1}^\varphi + \hat{\varphi}_{ijk-1}) + \lambda^z(c_{ijk}^\varphi + \hat{\varphi}_{ijk})}, \quad (2.59e)$$

$$\langle \lambda^z \rangle \Big|_{z_k^f} = 2 \frac{\lambda^z(c_{ijk+1}^\varphi + \hat{\varphi}_{ijk+1}) \lambda^z(c_{ijk}^\varphi + \hat{\varphi}_{ijk})}{\lambda^z(c_{ijk+1}^\varphi + \hat{\varphi}_{ijk+1}) + \lambda^z(c_{ijk}^\varphi + \hat{\varphi}_{ijk})}. \quad (2.59f)$$

Осреднённое по контрольному объёму $V_{\{ijk\}}^l$ приближение к решению \hat{u} на самой мелкой сетке аппроксимируют при помощи формулы средних значений

$$\langle \hat{u} \rangle_{ijk} = \frac{1}{h_x h_y h_z} \int_{x_{i-1}^f}^{x_i^f} \int_{y_{j-1}^f}^{y_j^f} \int_{z_{k-1}^f}^{z_k^f} \hat{u}(x, y, z) dz dy dx \approx \hat{\varphi}_{ijk}. \quad (2.60)$$

Заметим, что подобный способ построения грубых сеток, основанный на объединении контрольных объёмов (agglomeration multigrid), часто используется в КММ именно для упрощения построения разностных аналогов краевых задач на грубых сетках.

Аппроксимация правой части $\langle R \rangle_{\{ijk\}}$ на самой мелкой сетке есть

НЕВЯЗКА

$$\begin{aligned}
\langle R \rangle_{ijk} &= \frac{1}{h_x h_y h_z} \int_{x_{i-1}^f}^{x_i^f} \int_{y_{j-1}^f}^{y_j^f} \int_{z_{k-1}^f}^{z_k^f} R(x, y, z) dz dy dx \approx \quad (2.61) \\
&\approx -\langle \lambda^x \rangle \Big|_{x_i^f} \frac{\hat{\varphi}_{i+1jk} - \hat{\varphi}_{ijk}}{h_x^2} + \langle \lambda^x \rangle \Big|_{x_{i+1}^f} \frac{\hat{\varphi}_{ijk} - \hat{\varphi}_{i-1jk}}{h_x^2} \\
&\quad - \langle \lambda^y \rangle \Big|_{y_j^f} \frac{\hat{\varphi}_{ij+1k} - \hat{\varphi}_{ijk}}{h_y^2} + \langle \lambda^y \rangle \Big|_{y_{j+1}^f} \frac{\hat{\varphi}_{ijk} - \hat{\varphi}_{ij-1k}}{h_y^2} \\
&\quad - \langle \lambda^z \rangle \Big|_{z_k^f} \frac{\hat{\varphi}_{ijk+1} - \hat{\varphi}_{ijk}}{h_z^2} + \langle \lambda^z \rangle \Big|_{z_{k+1}^f} \frac{\hat{\varphi}_{ijk} - \hat{\varphi}_{ijk-1}}{h_z^2} \\
&\quad - f(x_i^v, y_j^v, z_k^v) + \alpha \hat{\varphi}_{ijk}^2.
\end{aligned}$$

Порядок вычислений при выполнении $(q+1)$ -ой многосеточной итерации следующий: положим, что выполнено сглаживание на всех сетках уровня $l+1$ (т.е. известна поправка $c_{ijk}^\varphi|_{l+1}$) и известно приближение к решению $\hat{\varphi}_{ijk}^{(q)}$ после предыдущей многосеточной итерации. Перед сглаживанием на сетках уровня l вычислим на самой мелкой сетке коэффициенты (2.59), (2.60) и правую часть (2.61), используя известные значения $c_{ijk}^\varphi|_{l+1}$ и $\hat{\varphi}_{ijk}^{(q)}$. Далее, по полученным на самой мелкой сетке значениям, вычислим $\langle \lambda^x \rangle$, $\langle \lambda^y \rangle$, $\langle \lambda^z \rangle$, $\langle \hat{u} \rangle$ и $\langle R \rangle$ на всех сетках уровня l . После чего выполним несколько сглаживающих итераций применительно к линеаризованной разностной схеме

$$\begin{aligned}
&\langle \lambda^x \rangle \Big|_{x_{\{i\}}^f} \frac{c_{\{i+1jk\}}^\varphi - c_{\{ijk\}}^\varphi}{h_x^2 3^{2l_x}} - \langle \lambda^x \rangle \Big|_{x_{\{i-1\}}^f} \frac{c_{\{ijk\}}^\varphi - c_{\{i-1jk\}}^\varphi}{h_x^2 3^{2l_x}} + \quad (2.62) \\
&+ \langle \lambda^y \rangle \Big|_{y_{\{j\}}^f} \frac{c_{\{ij+1k\}}^\varphi - c_{\{ijk\}}^\varphi}{h_y^2 3^{2l_y}} - \langle \lambda^y \rangle \Big|_{y_{\{j-1\}}^f} \frac{c_{\{ijk\}}^\varphi - c_{\{ij-1k\}}^\varphi}{h_y^2 3^{2l_y}} + \\
&+ \langle \lambda^z \rangle \Big|_{z_{\{k\}}^f} \frac{c_{\{ijk+1\}}^\varphi - c_{\{ijk\}}^\varphi}{h_z^2 3^{2l_z}} - \langle \lambda^z \rangle \Big|_{z_{\{k-1\}}^f} \frac{c_{\{ijk\}}^\varphi - c_{\{ijk-1\}}^\varphi}{h_z^2 3^{2l_z}} + \\
&- 2\alpha (\bar{c}_{\{ijk\}}^\varphi + \langle \hat{u} \rangle_{\{ijk\}}) c_{\{ijk\}}^\varphi + \alpha (\bar{c}_{\{ijk\}}^\varphi)^2 = \langle R \rangle_{\{ijk\}}
\end{aligned}$$

на всех сетках уровня l .

При вычислении коэффициентов $\langle \lambda^x \rangle$, $\langle \lambda^y \rangle$ и $\langle \lambda^z \rangle$ на уровне с самыми грубыми сетками (L^+) будем полагать, что поправка равна нулю: $c_{ijk}^\varphi|_{L^+} = 0$. Линеаризация при помощи метода запаздывающих коэффициентов подразумевает, что изначально (перед первой многосеточной итерацией) необходимо задать два начальных приближения для приближения $\hat{\varphi}_{ijk}^{(0)}$ и коэффициентов $\langle \lambda^x \rangle$, $\langle \lambda^y \rangle$, $\langle \lambda^z \rangle$ (например, $\hat{\varphi}_{ijk}^{(0)} = 0$ и $\langle \lambda^x \rangle = \langle \lambda^y \rangle = \langle \lambda^z \rangle = 1$).

Следует заметить, что в общем случае необходимо добиться сходимости итераций по нелинейности. В частности, метод Ньютона сходится с квадратичной скоростью, если начальное приближение достаточно близко к искомому решению. Поэтому при решении нелинейных уравнений часто используют метод нижней релаксации

$$c_{\{ijk\}}^\varphi := \bar{c}_{\{ijk\}}^\varphi + \varpi(c_{\{ijk\}}^\varphi - \bar{c}_{\{ijk\}}^\varphi),$$

где $c_{\{ijk\}}^\varphi$ есть обновлённое значение поправки после сглаживающей итерации, $\bar{c}_{\{ijk\}}^\varphi$ – предыдущее значение, $\varpi \in (0, 1]$ – параметр релаксации, $:=$ означает равенство в смысле присвоения.

Вычисления проводят следующим образом: пусть $(c_{\{ijk\}}^\varphi)^{(0)}$ есть начальное приближение и получено первое приближение $(c_{\{ijk\}}^\varphi)^{(1)}$ к решению СЛАУ $A_l^{(\nu)}(\mathbf{c}^\varphi)^{(\nu)} = \mathbf{b}_l^{(\nu)}$ после выполнения сглаживающей итерации при $\varpi = 1$. Сходимость сглаживающих итераций означает

$$\|A_l^{(1)}(\mathbf{c}^\varphi)^{(1)} - \mathbf{b}_l^{(1)}\| < \|A_l^{(0)}(\mathbf{c}^\varphi)^{(0)} - \mathbf{b}_l^{(0)}\|.$$

Нарушение данного условия (монотонного убывания нормы вектора невязки) означает расходимость итераций по нелинейности. В этом случае необходимо вернуться к начальному приближению $(c_{\{ijk\}}^\varphi)^{(0)}$, повторить сглаживающую итерацию при меньших значениях параметра нижней

релаксации ϖ и проверить условие сходимости. Таким образом можно отыскать значение параметра ϖ , гарантирующего сходимость итераций по нелинейности. Однако вычисления при $\varpi < 1$ следует проводить только до тех пор, пока не будет получено достаточно точное приближение к решению. Тогда вычисления продолжают с $\varpi = 1$, чтобы использовать высокую (квадратичную) скорость сходимости метода Ньютона.

Сглаживание с малыми значениями параметра ϖ приводит к замедлению скорости сходимости, а с большими – чревато расходимостью итераций по нелинейности. Поэтому основной трудностью при решении нелинейных задач является отыскание оптимального значения параметра нижней релаксации ϖ_{opt} на первых итерациях и момента переключения на $\varpi = 1$. Близость решений, полученных на соседних сеточных уровнях УМТ, как правило, гарантирует сходимость итераций Ньютона на уровнях с мелкими сетками ($l < L^+$). Кроме того, сетки одного уровня достаточно идентичны, поэтому можно предположить, что ϖ_{opt} и момент переключения на $\varpi = 1$ будут одинаковы для всех сеток. Поэтому, проведя дополнительные вычислительные эксперименты на одной сетке, можно использовать полученные результаты для остальных сеток того же уровня. С учётом общего количества сеток, образующих данный уровень, увеличение общей вычислительной работы будет пренебрежимо мало.

Метод нижней релаксации в сочетании с методом Ньютона является одним из наиболее распространённых способов решения нелинейных задач. Однако многое зависит от вида нелинейности. В общем случае весьма затруднительно предложить какие-либо рекомендации, и нелинейные уравнения, в отличие от линейных, на определённом этапе численного решения требуют индивидуального рассмотрения.

Воспользуемся блочным упорядочиванием неизвестных, чтобы за-

писать разностные уравнения (2.62) в матричном виде. Ранее блочное упорядочивание неизвестных было рассмотрено в § 2 гл. 1 для двухмерных задач. Объединим неизвестные в блоки $c_{\{i+\tilde{i}j+\tilde{j}k+\tilde{k}\}}^{\varphi}$. В качестве сглаживателя использован метод Зейделя с:

- 1) точечным упорядочиванием неизвестных: блок $1 \times 1 \times 1$ ($\tilde{i} = \tilde{j} = \tilde{k} = 0$);
- 2) блочным упорядочиванием неизвестных:
 - а) блок из 27 неизвестных $3 \times 3 \times 3$: ($\tilde{i} = -1, 0, 1; \tilde{j} = -1, 0, 1; \tilde{k} = -1, 0, 1$);
 - б) блок из 25 неизвестных $5 \times 5 \times 1$: ($\tilde{i} = -2, -1, 0, 1, 2; \tilde{j} = -2, -1, 0, 1, 2$).

Во всех вычислительных экспериментах область Ω является единичным кубом и самая мелкая сетка $101 \times 101 \times 101$ ($h_x = h_y = h_z = 1/100$). Скорость сходимости УМТ оценим при помощи коэффициента осреднённого уменьшения нормы вектора невязки (1.51) после выполнения пяти многосеточных итераций ($q = 5$), начиная с нулевого начального приближения. Основной целью вычислительных экспериментов является иллюстрация влияния количества сглаживающих итераций (ν) и способа упорядочивания неизвестных на скорость сходимости УМТ. Остальные компоненты УМТ являются неизменными во всех расчётах.

Уравнение Пуассона: $\lambda^x = \lambda^y = \lambda^z = 1, \alpha = 0$.

Положим, что точное решение уравнения Пуассона (2.57) имеет вид

$$u(x, y, z) = e^{x+y+z}. \quad (2.63)$$

Подстановка точного решения (2.63) в исходное уравнение (2.57) определяет правую часть $f(x, y, z)$ и граничные условия. Ошибку численного решения $\mathcal{E}^{(q)}$ определим путём его сравнения с аналитическим, т.е.

$$\mathcal{E}^{(q)} = \max_{ijk} |\hat{\varphi}_{ijk}^{(q)} - u(x_i^v, y_j^v, z_k^v)|.$$

Результаты численного решения задачи Дирихле для уравнения Пуассона (2.57) приведены в таблице 2.1. Скорость сходимости УМТ с точечным (блоки $1 \times 1 \times 1$) и блочным (блоки $3 \times 3 \times 3$) упорядочиванием

Таблица 2.1. Сходимость УМТ при решении задачи Дирихле для уравнения Пуассона

блоки	ν	$\mathcal{E}^{(q)}$	$\rho_{\text{MG}}^{(q)}$	WU
$1 \times 1 \times 1$	4	$7.30 \cdot 10^{-6}$	0.084	1.00
$1 \times 1 \times 1$	5	$7.30 \cdot 10^{-6}$	0.033	1.16
$1 \times 1 \times 1$	6	$7.30 \cdot 10^{-6}$	0.023	1.35
$3 \times 3 \times 3$	3	$7.30 \cdot 10^{-6}$	0.055	1.03
$3 \times 3 \times 3$	4	$7.30 \cdot 10^{-6}$	0.033	1.32
$3 \times 3 \times 3$	5	$7.30 \cdot 10^{-6}$	0.021	1.62

неизвестных велика: $\rho_{\text{MG}}^{(q)} < 0.1$ после выполнения пяти многосеточных итераций $q = 5$, т.е. норма вектора невязки ($\|\cdot\|_{\infty}$) убывает более чем на порядок после каждой многосеточной итерации. В качестве единицы вычислительной работы выбрано время счёта при точечном упорядочивании неизвестных и четырёх сглаживающих итерациях на сетках каждого уровня: $\text{WU}=1$ (первая строка в таблице 2.1). Увеличение количества сглаживающих итераций приводит к более быстрому уменьшению нормы вектора невязки, но вычислительная стоимость многосеточной итерации при этом увеличивается: $\nu \uparrow \Rightarrow \rho_{\text{MG}}^{(q)} \downarrow$ и $\text{WU} \uparrow$. Блочное упорядочивание неизвестных (блоки $3 \times 3 \times 3$) требует большего объёма вычислений, чем точечное (блоки $1 \times 1 \times 1$), из-за необходимости решения СЛАУ с плотно заполненной матрицей коэффициентов 27×27 методом Гаусса с выбором главного элемента. Однако метод Зейделя с блочным упорядочиванием неизвестных является более эффективным сглаживателем и требует меньшего количества сглаживающих итераций. Поэтому вычислительные усилия, необходимые для численного решения данной задачи Дирихле при использовании точечного и блочного упорядочиваний, приблизительно равны.

Анизотропное уравнение: $\lambda^x = \lambda^y = 1$, $\lambda^z = 0.1$, $\alpha = 0$.

Для решения анизотропного уравнения с точным решением (2.63) в качестве сглаживателя использован метод Зейделя с точечным и блочным (блоки $3 \times 3 \times 3$ и $5 \times 5 \times 1$) упорядочиваниями неизвестных. Результаты вычислительного эксперимента представлены в таблице 2.2. Очевидно, что метод Зейделя с точечным упорядочиванием неизвестных является неэффективным сглаживателем для данной задачи. Ранее аналогичные результаты получены при решении двумерной задачи Дирихле (§ 6 гл. 1). Использование блочного упорядочивания с блоками $3 \times 3 \times 3$ приводит к лучшим результатам (меньшее значение $\rho_{\text{MG}}^{(q)}$). Но самая высокая скорость сходимости УМТ достигнута при блочном упорядочивании с блоками $5 \times 5 \times 1$, которое учитывает анизотропию ($\lambda^x = \lambda^y \gg \lambda^z$).

Однако в общем случае выбор конфигурации блоков, обеспечивающий наивысшую скорость сходимости, не столь очевиден, как в рассмотренном примере, где $\lambda^x = \lambda^y \gg \lambda^z$ во всей области Ω . Чаше сильное различие коэффициентов λ^x , λ^y и λ^z имеет место в подобластях области Ω , причём это различие может быть вызвано как физической природой моделируемого процесса, так и свойствами вычислительной сетки. В этом случае используют различные блоки неизвестных, как показано на рис. 1.7, в зависимости от локального соотношения величин коэффициентов разностной схемы. Заметим, что алгоритм упорядочивания неизвестных в блоки с учётом анизотропии достаточно сложен.

Уравнение с разрывными коэффициентами: $\alpha = 0$.

Рассмотрим задачу теплопроводности в области, состоящей из разнородных материалов с разными коэффициентами теплопроводности. Пусть в области Ω расположена кубическая вставка (подобласть $\tilde{\Omega}$), как показано на рис. 2.15. Коэффициент теплопроводности в этом случае задан как

Таблица 2.2. Сходимость УМТ при решении задачи Дирихле для анизотропного уравнения

блоки	ν	$\mathcal{E}^{(q)}$	$\rho_{\text{MG}}^{(q)}$	WU
$1 \times 1 \times 1$	4	$3.29 \cdot 10^{-3}$	0.752	1.00
$1 \times 1 \times 1$	5	$1.44 \cdot 10^{-3}$	0.637	1.16
$1 \times 1 \times 1$	6	$6.25 \cdot 10^{-4}$	0.538	1.35
$3 \times 3 \times 3$	3	$1.77 \cdot 10^{-4}$	0.522	1.03
$3 \times 3 \times 3$	4	$2.73 \cdot 10^{-5}$	0.333	1.32
$3 \times 3 \times 3$	5	$9.90 \cdot 10^{-6}$	0.216	1.62
$5 \times 5 \times 1$	3	$1.08 \cdot 10^{-5}$	0.268	0.81
$5 \times 5 \times 1$	4	$7.87 \cdot 10^{-6}$	0.142	1.01
$5 \times 5 \times 1$	5	$7.81 \cdot 10^{-6}$	0.081	1.21

$$\lambda^x(x, y, z) = \lambda^y(x, y, z) = \lambda^z(x, y, z) = \begin{cases} \lambda_i, & (x, y, z) \in \tilde{\Omega} \\ \lambda_e, & (x, y, z) \notin \tilde{\Omega} \end{cases},$$

где λ_i есть коэффициент теплопроводности материала вставки, а λ_e – материала внешней подобласти. Положим, что в случае $\lambda_i = \lambda_e = 1$ задача имеет точное решение (2.63).

Результаты вычислительного эксперимента представлены в таблице 2.3. В данном случае скорость сходимости УМТ со сглаживателем на основе метода Зейделя приблизительно одинакова для точечного и блочного упорядочивания неизвестных. Напомним, что КММ требуют специального оператора продолжения для решения задач с разрывными коэффициентами, поскольку полиномиальная интерполяция поправки через линии или поверхности разрыва коэффициентов не точна. Отсутствие интерполяции в УМТ позволяет избежать подобных затруднений.

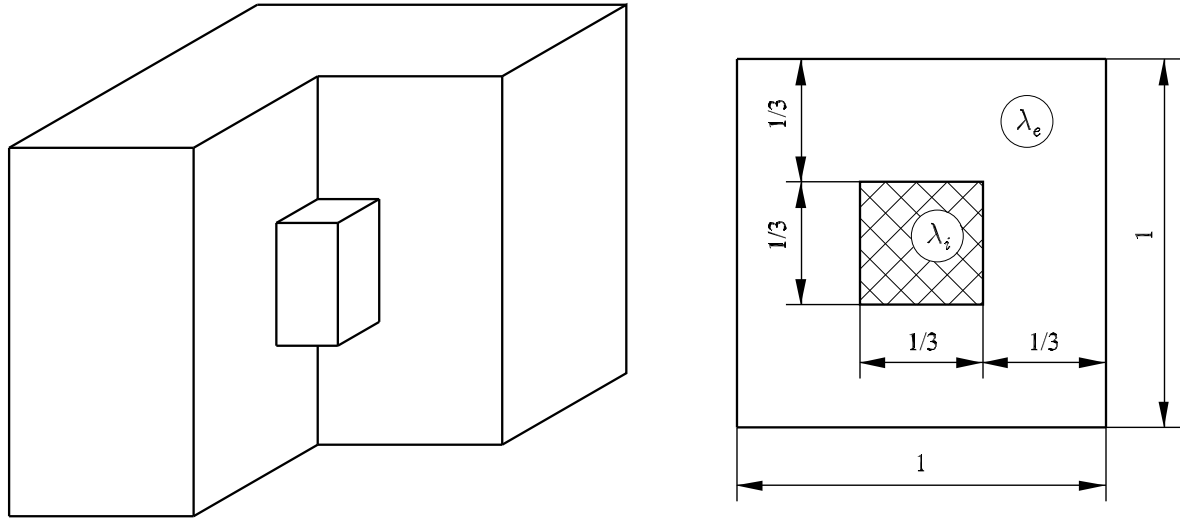


Рис. 2.15. Геометрия задачи для уравнения с разрывными коэффициентами

Нелинейное уравнение: $\alpha = 0$.

Положим, что коэффициенты λ^x , λ^y и λ^z заданы следующим образом:

$$\lambda^x(u) = u^{-a}, \quad \lambda^y(u) = u^{-b}, \quad \lambda^z(u) = u^{-c},$$

где a , b и c суть некоторые положительные константы. Многосеточные итерации УМТ начнём с нулевого начального приближения $\hat{\varphi}^{(0)} = 0$ и единичного для коэффициентов $(\lambda^x)^{(0)} = (\lambda^y)^{(0)} = (\lambda^z)^{(0)} = 1$, поскольку предполагается, что аналитическая зависимость $\lambda^x(u)$, $\lambda^y(u)$ и $\lambda^z(u)$ неизвестна. Результаты вычислительного эксперимента при $a = 0.25$, $b = 0.50$ и $c = 0.75$ представлены в таблице 2.4, при этом точное решение выбрано как (2.63). Использование точечного и блочного упорядочиваний неизвестных приводит приблизительно к одинаковым результатам. При этом не требуется, чтобы исходный нелинейный дифференциальный оператор был определён в нуле, т.е. при $u = 0$.

Результаты вычислительных экспериментов показали, что модельные задачи решены со скоростью сходимости, близкой к оптимальной, без адаптации компонент УМТ. Однако в отдельных случаях необходимо адаптировать конфигурацию блока неизвестных (для анизотропных

Таблица 2.3. Сходимость УМТ при решении задачи Дирихле для уравнения с разрывными коэффициентами

блоки	λ_e	λ_i	ν	$\rho^{(q)}$	WU
$1 \times 1 \times 1$	1	10^{+0}	6	0.023	1.92
$1 \times 1 \times 1$	1	10^{-1}	6	0.228	1.92
$1 \times 1 \times 1$	1	10^{-2}	6	0.198	1.92
$1 \times 1 \times 1$	1	10^{-3}	6	0.227	1.92
$1 \times 1 \times 1$	1	10^{-4}	6	0.273	1.92
$1 \times 1 \times 1$	1	10^{-5}	6	0.410	1.92
$3 \times 3 \times 3$	1	10^{+0}	5	0.021	2.05
$3 \times 3 \times 3$	1	10^{-1}	5	0.193	2.05
$3 \times 3 \times 3$	1	10^{-2}	5	0.170	2.05
$3 \times 3 \times 3$	1	10^{-3}	5	0.150	2.05
$3 \times 3 \times 3$	1	10^{-4}	5	0.149	2.05
$3 \times 3 \times 3$	1	10^{-5}	5	0.149	2.05

задач) и обеспечить сходимость итераций по нелинейности (для нелинейных задач). От решаемых задач может зависеть и количество сглаживающих итераций.

§ 8. Неструктурированные сетки

В настоящее время неструктурированные сетки получили широкое распространение для аппроксимации краевых задач в областях со сложной геометрией. Такую сетку построить проще, чем структурированную, однако разработать эффективный и универсальный алгоритм для численного решения краевых задач на неструктурированных сетках гораздо сложнее.

Таблица 2.4. Сходимость УМТ при решении задачи Дирихле для нелинейного уравнения

блоки	a	b	c	ν	$e^{(q)}$	$\rho^{(q)}$	WU
$1 \times 1 \times 1$	0.25	0.50	0.75	4	$9.00 \cdot 10^{-6}$	0.317	1.44
$1 \times 1 \times 1$	0.25	0.50	0.75	5	$2.83 \cdot 10^{-6}$	0.169	1.77
$1 \times 1 \times 1$	0.25	0.50	0.75	6	$2.40 \cdot 10^{-6}$	0.115	2.01
$3 \times 3 \times 3$	0.25	0.50	0.75	3	$6.01 \cdot 10^{-6}$	0.256	1.55
$3 \times 3 \times 3$	0.25	0.50	0.75	4	$2.27 \cdot 10^{-6}$	0.110	1.80
$3 \times 3 \times 3$	0.25	0.50	0.75	5	$2.14 \cdot 10^{-6}$	0.075	2.06

Рассмотрим краевую задачу для дифференциального уравнения

$$\mathfrak{L}(u) = -f,$$

где \mathfrak{L} есть линейный эллиптический дифференциальный оператор. Перепишем данное уравнение в Σ -модифицированной форме

$$\mathfrak{L}(c) = -f - \mathfrak{L}(\hat{u}).$$

Построим структурированную сетку для аппроксимации Σ -модифицированного уравнения и осуществим аппроксимацию правой части с более высоким порядком

$$\tilde{A}c^\varphi = -f_h - A\varphi^{(q)}.$$

Различие в порядке аппроксимации левой и правой частей Σ -модифицированного уравнения приводит к тому, что $\tilde{A} \neq A$. Положим, что данная СЛАУ решена точно

$$c^\varphi = -\tilde{A}^{-1}f_h - \tilde{A}^{-1}A\varphi^{(q)}.$$

Поскольку

$$c^\varphi = \varphi^{(q+1)} - \varphi^{(q)},$$

то в результате получим следующий итерационный метод:

$$\varphi^{(q+1)} = (I - \tilde{A}^{-1}A)\varphi^{(q)} - \tilde{A}^{-1}f_h,$$

который сходится при $\|I - \tilde{A}^{-1}A\| < 1$.

В многосеточных методах практически не используют аппроксимации высокого порядка (более второго) на грубых сетках, поскольку в этом случае вычислительный алгоритм существенно усложняется. Кроме того, по мере сходимости многосеточных итераций поправка, вычисляемая на грубых сетках, стремится к нулю, и к нулю стремится погрешность её аппроксимации. Поэтому отдельная аппроксимация левой и правой части Σ -модифицированного уравнения представляется естественным обобщением УМТ для разностных схем высокого порядка аппроксимации. Единственным изменением, которое необходимо внести в компьютерную программу, является способ вычисления невязки на самой мелкой сетке $-f_h - A\varphi^{(q)}$. Критерий останова многосеточных итераций должен быть согласован с порядком аппроксимации правой части Σ -модифицированного решения.

В общем случае левую и правую части Σ -модифицированного уравнения можно аппроксимировать не только с разными порядками, но и разными методами на разных сетках. Положим, что для аппроксимации исходной краевой задачи использована неструктурированная сетка. Построим *вспомогательную структурированную сетку* (ВСС) для отыскания поправки.

Для наглядности рассмотрим конкретный пример. Предположим, что построена неструктурированная сетка в единичном квадрате для аппроксимации правой части Σ -модифицированной задачи методом конечных элементов (МКЭ). Пусть исходная неструктурированная сетка (ИНС) состоит из треугольников с вершинами $\Upsilon_k(x_k, y_k)$, $k = 1, 2, \dots, K$

(здесь $K = 409$), как показано на рис. 2.16.

Теперь построим ВСС для аппроксимации левой части Σ -модифицированной задачи интегро-интерполяционным методом. Для этого составим упорядоченное по возрастанию множество абсцисс вершин треугольников, из которого удалены совпадающие элементы

$$\tilde{\Upsilon}^x = \{x_i \mid 0 = x_1 < x_2 < \dots < x_i < x_{i+1} < \dots < x_{\tilde{K}} = 1\}, \quad \tilde{K} \leq K.$$

В рассматриваемом примере $\tilde{K} = 368$. Далее построим на единичном отрезке равномерную сетку

$$\hat{\Upsilon}^x = \{\hat{x}_i \mid \hat{x}_i = \frac{i-1}{\tilde{K}-1}, i = 1, 2, \dots, \tilde{K}\}.$$

Функция $\mathcal{F} : \hat{x}_i \rightarrow x_i$, обычно называемая управляющей, отображает равномерную сетку $\hat{\Upsilon}^x$ на упорядоченное множество абсцисс вершин $\tilde{\Upsilon}^x$ (рис. 2.17). Потребуем, чтобы число узлов ВСС было приблизительно равным числу вершин ИНС. Для этого построим ещё одну равномерную сетку

$$\bar{\Upsilon}^x = \{\bar{x}_i \mid \bar{x}_i = \frac{i-1}{\bar{K}-1}, i = 1, 2, \dots, \bar{K}\}, \quad \bar{K} = \left[\sqrt{\tilde{K}} \right] + 1,$$

где квадратные скобки означают целую часть. В рассматриваемом примере $\bar{K} = 21$. Для отыскания положения узлов ВСС можно воспользоваться сплайн-интерполянтom управляющей функции \mathcal{F} . На рис. 2.18 показана полученная равномерная сетка $\bar{\Upsilon}^x$, соответствующая ей неравномерная сетка $\bar{\Upsilon}_{\text{ВСС}}^x$ и сплайн-интерполянт $\bar{\mathcal{F}}$ управляющей функции \mathcal{F} . Аналогичным образом строят сетку по каждому пространственному направлению. В данном примере число узлов ВСС составит $\bar{K}^2 = 441$, что несколько больше числа вершин ИНС ($K = 409$). Построенная по данной методике ВСС показана на рис. 2.19.

Аппроксимацию правой части Σ -модифицированной задачи осущес-

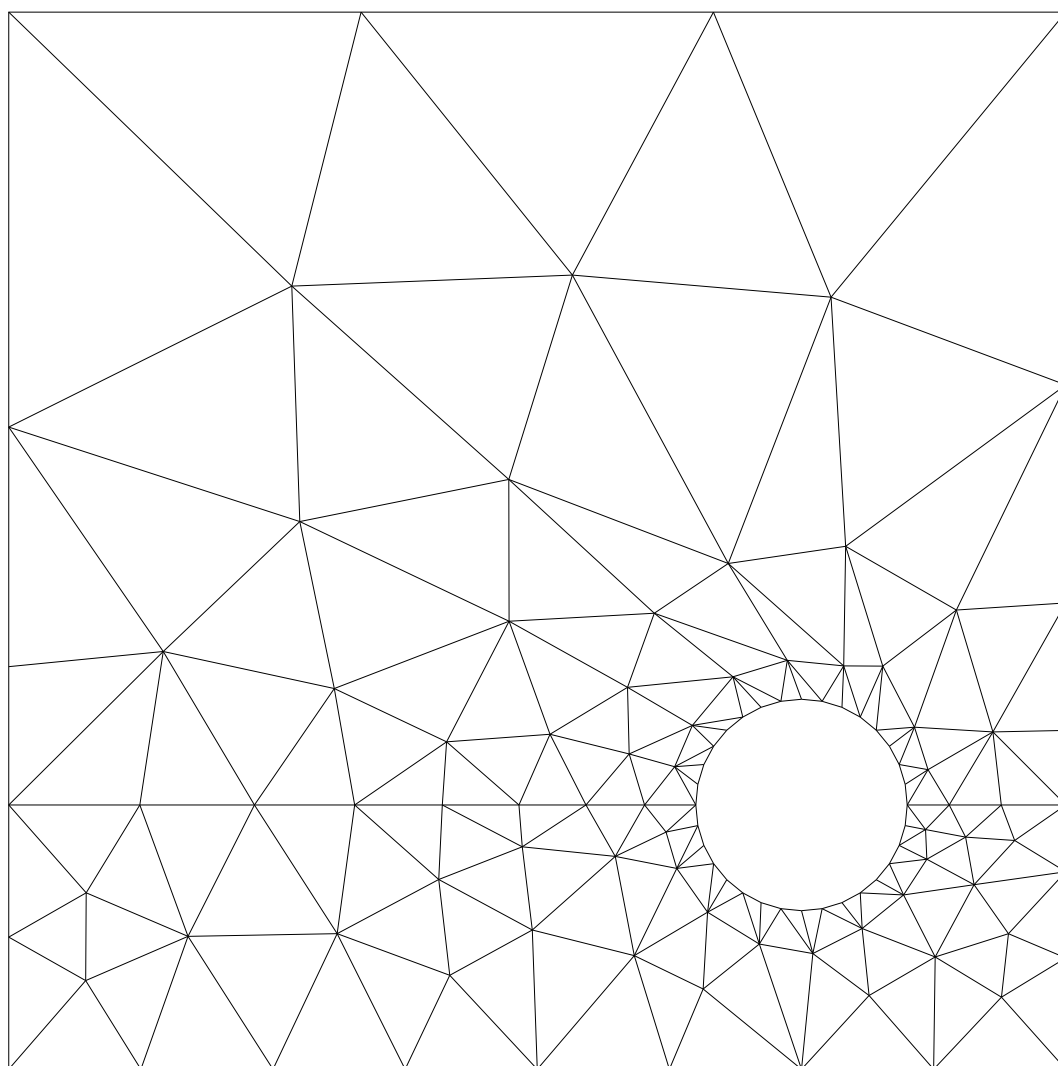


Рис. 2.16. Неструктурированная сетка в единичном квадрате

твляют на ИНС при помощи МКЭ, а левой части – на ВСС при помощи интегро-интерполяционного метода. Поправку на построенной ВСС отыскивают посредством УМТ. Концептуально отыскание поправки на ВСС идентично разработанным ранее методам решения краевых задач в областях со сложной геометрией (рис. 2.10).

Вычислительный алгоритм, основанный на использовании ВСС для отыскания поправки, представим в виде следующей последовательности действий:

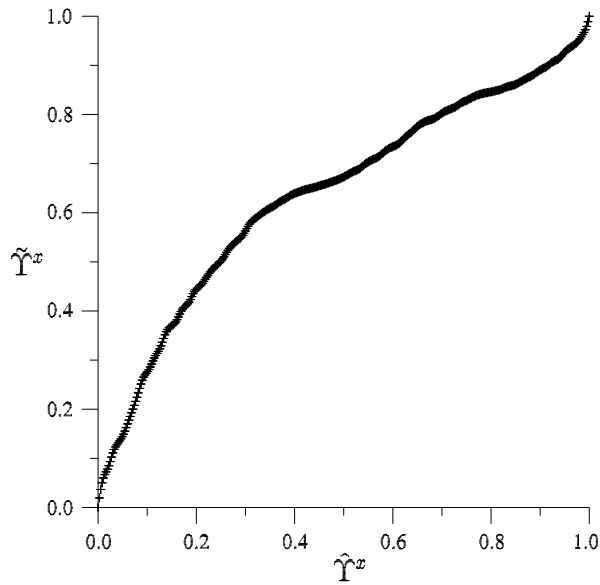
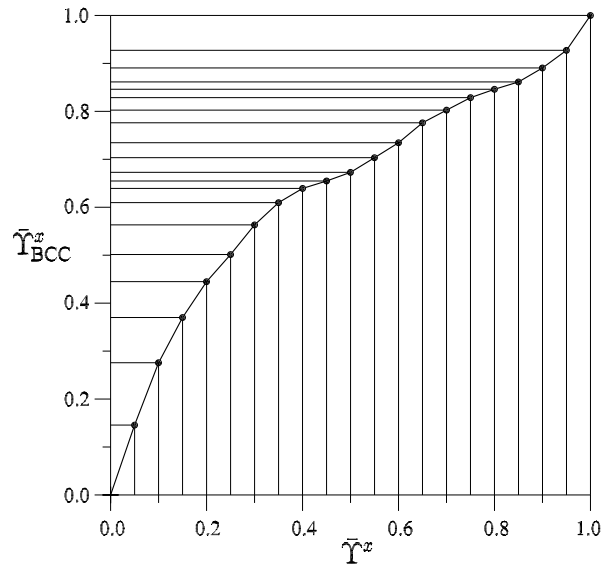
Рис. 2.17. Управляющая функция \mathcal{F} 

Рис. 2.18. Абсциссы узлов ВСС

1. вычисление невязки на ИНС;
2. интерполяция невязки с ИНС на ВСС;
3. отыскание поправки на ВСС;
4. интерполяция поправки с ВСС на ИНС;
5. сглаживание на ИНС;
6. проверка критерия останова, возврат к п. 1 (если необходимо).

Запишем данный итерационный алгоритм в стандартной форме. Все, что связано с ИНС и ВСС, будет иметь нижний индекс Δ и \square соответственно. Тогда невязка, вычисленная на ИНС, имеет вид

$$\mathbf{b}_{\Delta} - A_{\Delta} \hat{\varphi}_{\Delta}^{(q)},$$

где матрица A_{Δ} и вектор \mathbf{b}_{Δ} получены в результате аппроксимации линейного оператора \mathcal{L} и правой части $-f$ на ИНС посредством МКЭ, $\hat{\varphi}_{\Delta}^{(q)}$ есть приближение к решению после q -ой итерации.

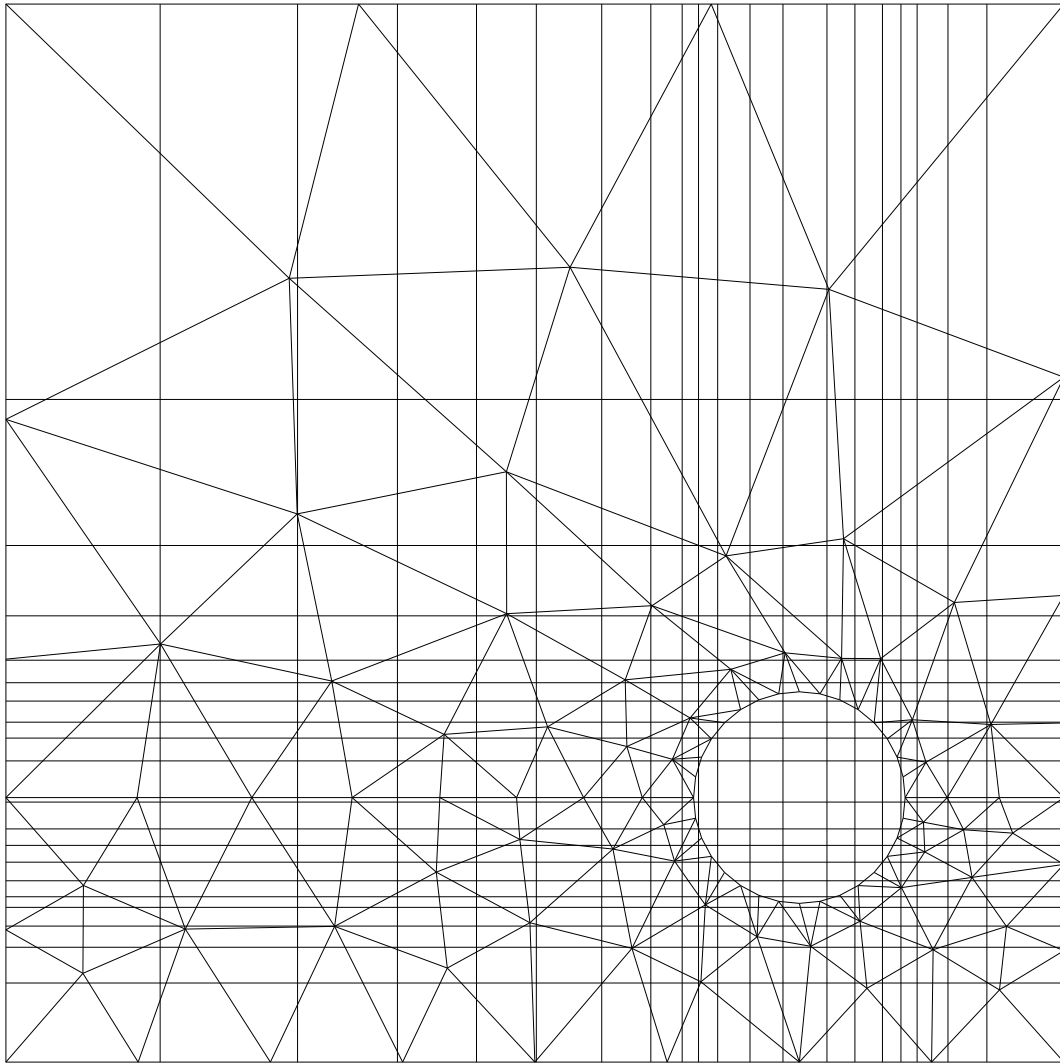


Рис. 2.19. Исходная неструктурированная и вспомогательная структурированная сетки

Соответственно, невязка, проинтерполированная с ИНС на ВСС, выглядит как

$$\prod_{\Delta \rightarrow \square} (\mathbf{b}_{\Delta} - A_{\Delta} \hat{\varphi}_{\Delta}^{(q)}),$$

где $\prod_{\Delta \rightarrow \square}$ есть оператор интерполяции с ИНС на ВСС.

Тогда на ВСС получаем следующую СЛАУ:

$$A_{\square} \mathbf{c}_{\square}^{\varphi} = \prod_{\Delta \rightarrow \square} (\mathbf{b}_{\Delta} - A_{\Delta} \hat{\varphi}_{\Delta}^{(q)}),$$

где матрица A_{\square} получена в результате аппроксимации линейного опера-

тора \mathcal{L} интегро-интерполяционным методом на ВСС, а $\mathbf{c}_\square^\varphi$ – поправка. Решение данной СЛАУ, полученное при помощи УМТ, есть

$$\mathbf{c}_\square^\varphi = A_\square^{-1} \prod_{\Delta \rightarrow \square} (\mathbf{b}_\Delta - A_\Delta \hat{\varphi}_\Delta^{(q)}).$$

Проинтерполируем поправку $\mathbf{c}_\square^\varphi$ с ВСС на ИНС

$$\mathbf{c}_\Delta^\varphi = \prod_{\square \rightarrow \Delta} \mathbf{c}_\square^\varphi = \prod_{\square \rightarrow \Delta} A_\square^{-1} \prod_{\Delta \rightarrow \square} (\mathbf{b}_\Delta - A_\Delta \hat{\varphi}_\Delta^{(q)}),$$

где $\prod_{\square \rightarrow \Delta}$ есть оператор интерполяции с ВСС на ИНС. Прибавляя к $\hat{\varphi}_\Delta^{(q)}$ поправку $\mathbf{c}_\Delta^\varphi$, получим приближение к решению на ИНС перед сглаживанием

$$\tilde{\varphi}_\Delta^{(q)} = \hat{\varphi}_\Delta^{(q)} + \mathbf{c}_\Delta^\varphi = \hat{\varphi}_\Delta^{(q)} + \prod_{\square \rightarrow \Delta} \mathbf{c}_\square^\varphi = \hat{\varphi}_\Delta^{(q)} + \prod_{\square \rightarrow \Delta} A_\square^{-1} \prod_{\Delta \rightarrow \square} (\mathbf{b}_\Delta - A_\Delta \hat{\varphi}_\Delta^{(q)}). \quad (2.64)$$

Положим, что в качестве сглаживателя на ИНС выбран некоторый итерационный метод с матрицей итераций S_Δ :

$$\hat{\varphi}_\Delta^{(q+1)} - \varphi_\Delta = S_\Delta^\nu (\tilde{\varphi}_\Delta^{(q)} - \varphi_\Delta).$$

где ν есть количество выполненных сглаживающих итераций, а φ_Δ – точное решение $\varphi_\Delta = A_\Delta^{-1} \mathbf{b}_\Delta$. Тогда нетрудно получить

$$\hat{\varphi}_\Delta^{(q+1)} = S_\Delta^\nu \tilde{\varphi}_\Delta^{(q)} + (I - S_\Delta^\nu) A_\Delta^{-1} \mathbf{b}_\Delta,$$

где $\tilde{\varphi}_\Delta^{(q)}$ есть приближение к решению перед сглаживанием (2.64). В итоге данный итерационный метод может быть записан в канонической форме

$$\hat{\varphi}_\Delta^{(q+1)} = S_\Delta^\nu d_\Delta A_\Delta \hat{\varphi}_\Delta^{(q)} + A_\Delta^{-1} (I - A_\Delta S_\Delta^\nu d_\Delta) \mathbf{b}_\Delta, \quad (2.65)$$

где матрица d_Δ имеет вид

$$d_\Delta = A_\Delta^{-1} - \prod_{\square \rightarrow \Delta} A_\square^{-1} \prod_{\Delta \rightarrow \square}.$$

Нетрудно видеть, что итерационный метод (2.65) с точностью до вида матрицы d_Δ совпадает с двухуровневым методом (1.23).

Сформулируем свойство аппроксимации (1.22) для итерационного метода (2.65): для некоторой константы $C_{A_\Delta} > 0$ справедливо

$$\left\| A_\Delta^{-1} - \prod_{\square \rightarrow \Delta} A_\square^{-1} \prod_{\Delta \rightarrow \square} \right\| \leq C_{A_\Delta} \|A_\Delta\|^{-1}. \quad (2.66)$$

В данном случае свойство аппроксимации имеет тот же смысл, что и в виде (1.22): поправка $\mathbf{c}_\square^\varphi$, вычисленная на ВСС, хорошо аппроксимирует поправку $\mathbf{c}_\Delta^\varphi$ на ИНС.

По аналогии с (1.23) нетрудно показать, что если справедливы свойства сглаживания (1.21) и аппроксимации (2.66), и скорость сходимости УМТ при отыскании поправки $\mathbf{c}_\square^\varphi$ на ВСС не зависит от параметра дискретизации, то скорость сходимости итерационного метода (2.65) также не будет зависеть от параметра дискретизации, причём для нормы матрицы итераций справедлива следующая оценка в спектральной норме:

$$\|S_\Delta^\nu d_\Delta A_\Delta\| \leq C_{A_\Delta} \eta(\nu).$$

Нелинейные краевые задачи решают аналогичным образом.

На самом деле скорость сходимости итерационного метода (2.65) существенно зависит от проблемно-зависимых операторов интерполяции поправки и невязки, поэтому такой метод нельзя назвать универсальным. Более перспективным представляется развитие алгоритмов построения блочных неортогональных структурированных сеток в областях со сложной геометрией с целью исключения проблемно-зависимых операторов интерполяции для построения универсального алгоритма. Однако и в этом случае существует ряд проблем, связанных с построением схем высокого порядка аппроксимации, а также исследованием точности аппроксимации.

§ 9. Оценка эффективности распараллеливания

В различных проблемных областях существует ряд задач, решение которых требует чрезмерного времени даже с привлечением самых совершенных процессоров и численных методов. Поэтому неуклонно возрастает интерес к возможности распараллеливания вычислений. В настоящее время еще не утвердился доминирующий алгоритм, предназначенный для параллельного численного решения краевых задач, и доминирующая параллельная архитектура. Возможно, что такого явного доминирования не будет никогда [22].

Наиболее распространенными подходами к распараллеливанию вычислений и обработки данных являются подходы, основанные на параллелизме данных и параллелизме задач [20]. В основе каждого подхода лежит распределение вычислительной работы между процессорами параллельного компьютера. Метод программирования, основанный на параллелизме задач, предусматривает разбиение вычислительной задачи на несколько относительно независимых подзадач, которые выполняются на отдельном процессоре. Для каждой задачи пишется своя программа на некотором языке программирования. При этом необходимо решить ряд проблем, наиболее значимыми из которых являются обеспечение равномерной и сбалансированной загрузки процессоров и минимизация обменов данными между процессорами.

С точки зрения распараллеливания вычислений УМТ обладает следующими привлекательными свойствами:

1. грубые сетки каждого уровня не имеют общих точек (рис. 2.5)

$$G_n^l \cap G_m^l = \emptyset, \quad n \neq m, \quad l = 1, \dots, L^+,$$

поэтому сглаживающие итерации на этих сетках могут проводиться

параллельно вне зависимости от используемой сглаживающей процедуры,

2. отсутствие общих узлов и граней уменьшает обмен данными между процессорами,
3. фиксированное число сеток на каждом уровне позволяет заранее предсказать необходимое число процессоров для распараллеливания УМТ,
4. почти одинаковое число точек на каждой сетке уровня l позволяет добиться равномерной загрузки процессоров.

Далее основное внимание будет уделяться структуре передаваемых данных, а решение проблемы эффективной организации обменов данными, синхронизации и разрешения конфликтных ситуаций, зависящих от конкретных аппаратных и программных средств, останется за рамками данной книги. Напомним основные меры параллелизма, которые будут использованы в дальнейшем:

Определение. Ускорением \mathbf{S}_p параллельного алгоритма называется отношение

$$\mathbf{S}_p = \frac{T(1)}{T(p)}, \quad (2.67)$$

где $T(1)$ есть время, необходимое для выполнения программы на однопроцессорном компьютере, и $T(p)$ есть время счета на p процессорах. Ускорение \mathbf{S}_p позволяет сравнить поведение данного алгоритма для одного и p процессоров.

Определение. Эффективностью параллельного алгоритма \mathbf{E}_p называется величина

$$\mathbf{E}_p = \frac{\mathbf{S}_p}{p}. \quad (2.68)$$

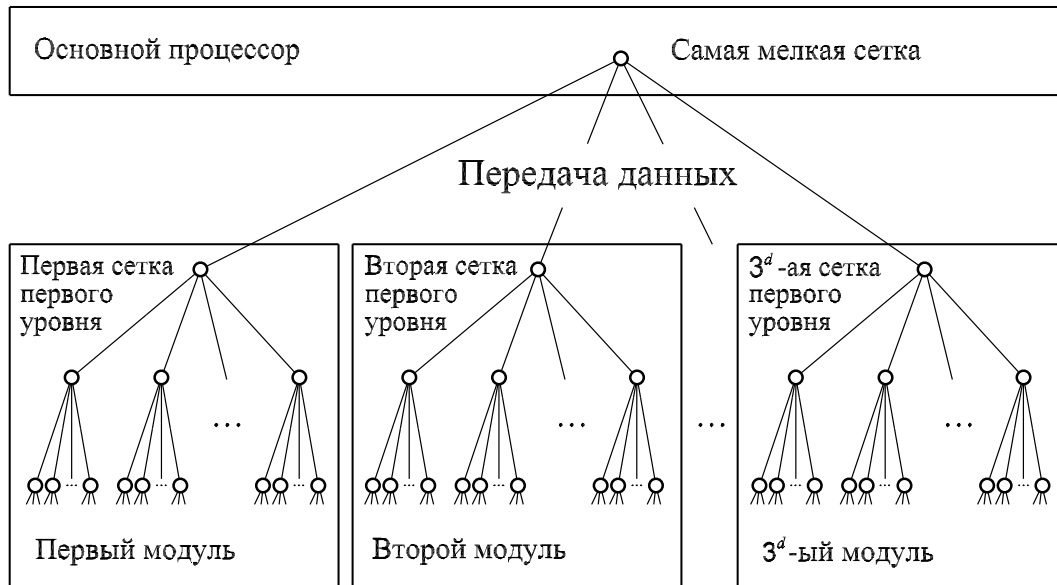


Рис. 2.20. Распределение грубых сеток среди процессорных модулей

Определение. *Крупнозернистость* задачи означает наличие в ней больших независимых подзадач, которые можно обрабатывать параллельно. *Мелкозернистость* соответствует возможности параллельного выполнения малых подзадач [22].

Распараллеливание УМТ подразделяется на *частичное* (распараллеливаются только сглаживающие итерации на грубых сетках) и *полное* (распараллеливаются сглаживающие итерации на всех сетках). Для наглядности получения оценки эффективности частичного распараллеливания УМТ спроектируем гипотетический многопроцессорный компьютер, который состоит из основного процессора и процессорных модулей. Процессорные модули связаны только с основным процессором, и любое общение между основным процессором и процессорными модулями осуществляется посредством передачи сообщений. Поскольку уровень l состоит из 3^{dl} сеток ($d = 2, 3$), то число процессорных модулей должно составить $3^{d\kappa}$, где $\kappa = 1, \dots, L^+$. В дальнейшем величина κ будет называться *глубиной распараллеливания* УМТ. Значение $\kappa = 0$ соответствует

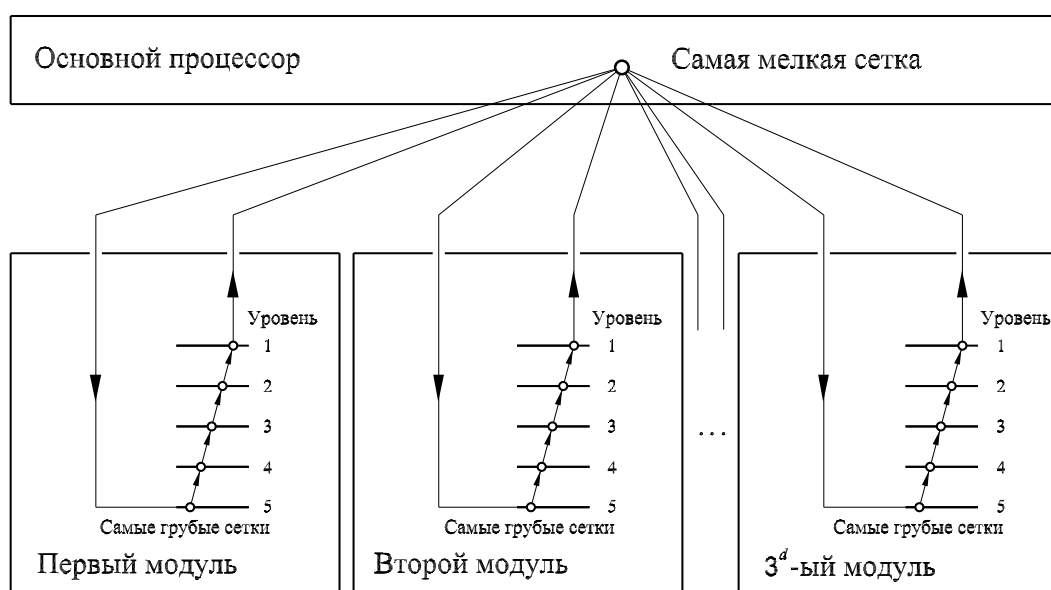


Рис. 2.21. Частичное распараллеливание многосеточной технологии

однопроцессорному исполнению.

Основной процессор в схеме, показанной на рис. 2.20, используется только для наглядности построений. Очевидно, что его функции может выполнять любой процессорный модуль, поэтому основной процессор не будет учитываться при оценке минимального ускорения параллельной УМТ.

Рассмотрим простейший случай, когда $\kappa = 1$. Тогда количество процессорных модулей (p), необходимых для распараллеливания УМТ, составит $p = 3^d$ ($d = 2, 3$), т.е. девять модулей для двухмерных задач ($p = 9$) и двадцать семь ($p = 27$) – для трёхмерных. Распределение вычислительных сеток между процессорными модулями показано на рис. 2.21. Вычисление поправки на каждой сетке первого уровня и ее подсетках осуществляется независимо на отдельном процессорном модуле. Нетрудно видеть, что УМТ на уровнях с грубыми сетками ($l > 0$) обладает полным параллелизмом.

Схема распараллеливания вычислений показана на рис. 2.21: сгла-

живание на сетках первого уровня и их подсетках проводится независимо на процессорных модулях. После сглаживания на сетках первого уровня поправки передаются в основной процессор, на котором выполняется сглаживание на самой мелкой сетке, пересчитывается приближение к решению и проверяется критерий останова. Если полученное приближение не удовлетворяет критерию останова, то вычисление поправки начинается на грубых сетках на каждом процессорном модуле.

Минимальное ускорение достигается при частичном распараллеливании УМТ, т.е. сглаживание на самой мелкой сетке проводится на одном процессоре, а $p-1$ процессоров простаивают. При получении соответствующих оценок предположим, что время пересылки данных пренебрежимо мало и на всех сетках выполняется одинаковое число итераций одной и той же сглаживающей процедуры.

С учётом принятых допущений и определений (2.67) и (2.68) минимальное ускорение и эффективность составят

$$\mathbf{S}_p^d \Big|_{\min} = \frac{\sum_{l=0}^{L^+} T_l}{T_0 + \frac{1}{p} \sum_{l=1}^{L^+} T_l}, \quad \mathbf{E}_p^d \Big|_{\min} = \frac{1}{p} \frac{\sum_{l=0}^{L^+} T_l}{T_0 + \frac{1}{p} \sum_{l=1}^{L^+} T_l}, \quad (2.69)$$

где T_l есть время решения задачи на l -ом уровне.

Поскольку общее количество узлов на сетках одного уровня равно количеству узлов на самой мелкой сетке, то выполнение сглаживающих итераций потребует приблизительно одинакового объёма вычислений на каждом уровне, если пренебречь стоимостью операторов переходов. Полагая $T_l = \text{const}$, получим следующие оценки минимального ускорения и эффективности при распараллеливании первой глубины ($p = 3^d$)

$$\mathbf{S}_{3^d}^d \Big|_{\min} = 3^d \mathbf{E}_{3^d}^d \Big|_{\min} = 3^d \frac{L^+ + 1}{L^+ + 3^d}. \quad (2.70)$$

Таблица 2.5. Минимальное ускорение и эффективность параллелизма ($p = 3^d$)

L^+	$\mathbf{S}_9^2 \Big _{\min}$	$\mathbf{E}_9^2 \Big _{\min}$	$\mathbf{S}_{27}^3 \Big _{\min}$	$\mathbf{E}_{27}^3 \Big _{\min}$
3	3.00	0.33	3.60	0.13
4	3.46	0.38	4.35	0.16
5	3.86	0.43	5.06	0.19
6	4.20	0.47	5.73	0.21

Значения минимального ускорения и эффективности при распараллеливании двух- ($d = 2$) и трёхмерных ($d = 3$) задач в зависимости от количества сеточных уровней приведены в таблице 2.5.

В двухмерном случае при выполнении сглаживающих итераций на самой мелкой сетке простаивает меньшее число процессоров, поэтому эффективность частичного распараллеливания УМТ в этом случае выше, чем при решении трёхмерных задач. Из оценки (2.70) следует, что эффективность параллельной УМТ сильно зависит от распараллеливания сглаживающих итераций на самой мелкой сетке.

Очевидно, что УМТ обладает полным параллелизмом на уровнях с грубыми сетками в силу особенностей построения грубых сеток (отсутствие общих узлов). Поэтому дальнейшее повышение эффективности распараллеливания УМТ возможно путём перераспределения вычислительных усилий в пользу уровней с грубыми сетками.

Многосеточный цикл УМТ с фиксированным положением самой мелкой сетки называется *статическим*. В *динамическом* цикле каждая сетка на определённом этапе решения задачи может рассматриваться как самая мелкая. На рис. 2.22 показана схема распараллеливания динамического цикла, в котором сетки первого уровня рассматриваются как

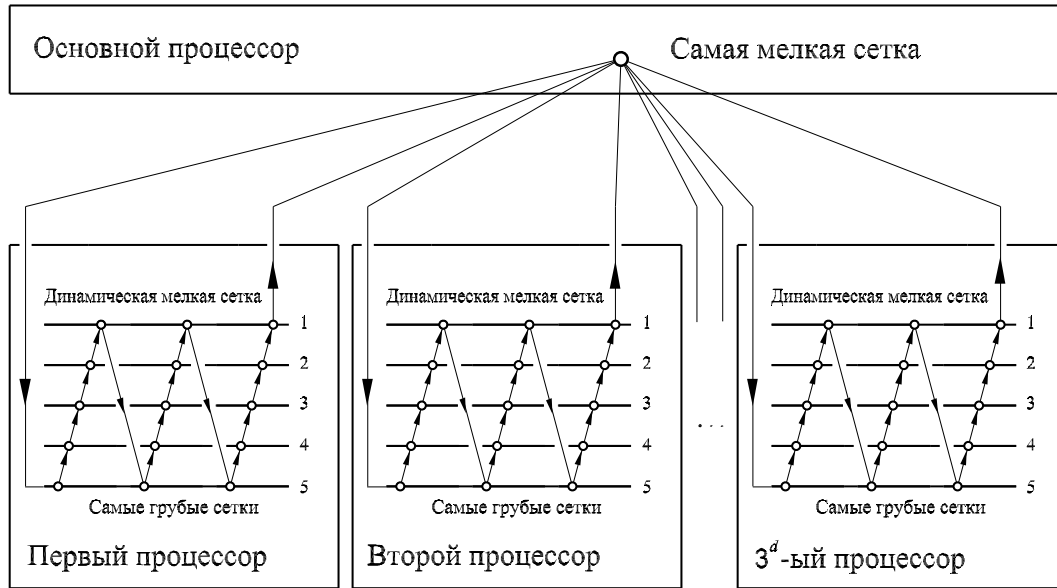


Рис. 2.22. Частичное распараллеливание УМТ (динамический цикл с $q^* = 3$)

самые мелкие в многосеточной итерации на уровнях 5–1. Только после достижения критерия останова на сетках первого уровня осуществляется сглаживание на самой мелкой сетке ($L^+ = 0$).

Пусть q^* есть число многосеточных итераций, выполняемых на каждом процессорном модуле в динамическом цикле ($q^* = 3$ на рис. 2.22). Тогда оценка (2.70) принимает вид

$$\mathbf{S}_{3^d}^d \Big|_{\min} = 3^d \frac{q^* L^+ + 1}{q^* L^+ + 3^d} = 3^d \mathbf{E}_{3^d}^d \Big|_{\min}. \quad (2.71)$$

Значения минимального ускорения и эффективности параллелизма при решении двух- ($d = 2$) и трёхмерных ($d = 3$) задач представлены в таблице 2.6. Очевидно, что эффективность распараллеливания динамического цикла ($q^* > 1$) выше, чем статического ($q^* = 1$), из-за перераспределения вычислительных усилий в пользу уровней с грубыми сетками, где УМТ обладает полным параллелизмом.

Теперь рассмотрим полное распараллеливание первой глубины ($p = 3^d$). Предположим, что на самой мелкой сетке (нулевой сеточный уро-

Таблица 2.6. Минимальное ускорение и эффективность параллелизма ($p = 3^d$, динамический цикл)

$d = 2 (p = 9)$				$d = 3 (p = 27)$			
L^+	q^*	$\mathbf{S}_9^2 _{\min}$	$\mathbf{E}_9^2 _{\min}$	L^+	q^*	$\mathbf{S}_{27}^3 _{\min}$	$\mathbf{E}_{27}^3 _{\min}$
4	1	3.46	0.38	4	1	4.35	0.16
4	2	4.76	0.53	4	2	6.94	0.26
4	3	5.57	0.62	4	3	9.00	0.33
4	4	6.12	0.68	4	4	10.67	0.39
5	1	3.86	0.43	5	1	5.06	0.19
5	2	5.21	0.58	5	2	8.03	0.30
5	3	6.00	0.67	5	3	10.29	0.38
5	4	6.52	0.72	5	4	12.06	0.45
6	1	4.20	0.47	6	1	5.73	0.21
6	2	5.57	0.62	6	2	9.00	0.33
6	3	6.33	0.70	6	3	11.40	0.42
6	4	6.82	0.76	6	4	13.24	0.49
7	1	4.50	0.50	7	1	6.35	0.23
7	2	5.87	0.66	7	2	9.88	0.37
7	3	6.60	0.74	7	3	12.38	0.46
7	4	7.05	0.78	7	4	14.24	0.53

вень $l = 0$) удалось некоторым образом распараллелить сглаживающие итерации с ускорением S_0 и эффективностью E_0 . Тогда, согласно определению (2.67), время выполнения сглаживающих итераций на самой мелкой сетке составит T_0/S_0 . В данном случае выражения (2.69) принимают вид

$$\mathbf{S}_p^d = \frac{T_0 + q^* \sum_{l=1}^{L^+} T_l}{\frac{T_0}{S_0} + \frac{q^*}{p} \sum_{l=1}^{L^+} T_l}, \quad \mathbf{E}_p^d = \frac{1}{p} \frac{T_0 + q^* \sum_{l=1}^{L^+} T_l}{\frac{T_0}{S_0} + \frac{q^*}{p} \sum_{l=1}^{L^+} T_l}, \quad (2.72)$$

где \mathbf{S}_p^d и \mathbf{E}_p^d суть ускорение и эффективность параллельного исполнения УМТ на p процессорах.

Тогда в силу допущения $T_l = const$ выражения (2.72) при $p = 3^d$ принимают вид

$$\mathbf{S}_{3^d}^d \Big|_{\max} = 3^d \mathbf{E}_{3^d}^d \Big|_{\max} = 3^d \frac{q^* L^+ + 1}{q^* L^+ + \frac{3^d}{S_0}} = 3^d \frac{q^* L^+ + 1}{q^* L^+ + \frac{1}{E_0}}. \quad (2.73)$$

В таблице 2.7 приведены значения ускорения и эффективности параллелизма при решении трёхмерных задач ($d = 3, p = 3^d = 27$). Заметим, что из (2.73) следует

$$\frac{\mathbf{E}_{3^d}^d \Big|_{\max}}{E_0} = \frac{q^* L^+ + 1}{E_0 q^* L^+ + 1} > 1,$$

т.е. итоговая эффективность распараллеливания УМТ оказывается выше, чем эффективность распараллеливания сглаживающих итераций на самой мелкой сетке. Столь необычный вывод следует из полного параллелизма УМТ на уровнях с грубыми сетками ($l \geq 2$).

Современная многопроцессорная техника позволяет использовать сотни и даже тысячи процессоров для распараллеливания вычислений. Рассмотрим распараллеливание второй глубины при решении трёхмерных задач ($d = 3$), т.е. число используемых процессоров составит $p = 3^{2d} = 729$. Предположим, что на самой мелкой сетке (нулевой сеточный уровень $l = 0$) и сетках первого уровня ($l = 1$) удалось некоторым образом распараллелить сглаживающие итерации с ускорениями S_0 и S_1

Таблица 2.7. Максимальное ускорение и эффективность параллелизма при решении трёхмерных задач на 27 процессорах ($d = 3$, $p = 3^d = 27$)

E_0	L^+	q^*	$\mathbf{S}_{27}^3 \Big _{\max}$	$\mathbf{E}_{27}^3 \Big _{\max}$	E_0	L^+	q^*	$\mathbf{S}_{27}^3 \Big _{\max}$	$\mathbf{E}_{27}^3 \Big _{\max}$
0.60	5	1	24.3	0.90	0.70	5	1	25.2	0.93
0.60	5	2	25.5	0.94	0.70	5	2	26.0	0.96
0.60	5	3	25.9	0.96	0.70	5	3	26.3	0.97
0.60	5	4	26.2	0.97	0.70	5	4	26.5	0.98
0.60	6	1	24.7	0.91	0.70	6	1	25.4	0.94
0.60	6	2	25.7	0.95	0.70	6	2	26.1	0.97
0.60	6	3	26.1	0.96	0.70	6	3	26.4	0.98
0.60	6	4	26.3	0.97	0.70	6	4	26.5	0.98
0.60	7	1	24.9	0.92	0.70	7	1	25.6	0.95
0.60	7	2	25.9	0.96	0.70	7	2	26.2	0.97
0.60	7	3	26.2	0.97	0.70	7	3	26.5	0.98
0.60	7	4	26.4	0.98	0.70	7	4	26.6	0.98
0.80	5	1	25.9	0.96	0.90	5	1	26.5	0.98
0.80	5	2	26.4	0.98	0.90	5	2	26.7	0.99
0.80	5	3	26.6	0.98	0.90	5	3	26.8	0.99
0.80	5	4	26.7	0.99	0.90	5	4	26.9	0.99
0.80	6	1	26.1	0.96	0.90	6	1	26.6	0.98
0.80	6	2	26.5	0.98	0.90	6	2	26.8	0.99
0.80	6	3	26.6	0.99	0.90	6	3	26.8	0.99
0.80	6	4	26.7	0.99	0.90	6	4	26.9	0.99
0.80	7	1	26.2	0.97	0.90	7	1	26.6	0.98
0.80	7	2	26.6	0.98	0.90	7	2	26.8	0.99
0.80	7	3	26.7	0.99	0.90	7	3	26.9	0.99
0.80	7	4	26.8	0.99	0.90	7	4	26.9	0.99

и эффективностью E_0 и E_1 . В случае выполнения на каждом уровне одинакового количества сглаживающих итераций итоговые ускорение и эффективность составят

$$\begin{aligned}
\mathbf{S}_{3^{2d}}^3 \Big|_{\max} &= 3^{2d} \mathbf{E}_{3^{2d}}^3 \Big|_{\max} = \frac{q^*(L^+ - 1) + 2}{\frac{q^*}{3^{2d}}(L^+ - 1) + \frac{1}{S_0} + \frac{1}{S_1}} \\
&= 3^{2d} \frac{q^*(L^+ - 1) + 2}{q^*(L^+ - 1) + \frac{1}{E_0} + \frac{1}{E_1}}.
\end{aligned} \tag{2.74}$$

Значения ускорения и эффективности параллелизма сведены в таблицу 2.8.

Кроме того, из полученной оценки следует, что при $L^+ \gg 1$

$$S_{\Sigma} = pE_{\Sigma} \rightarrow p \left[1 - \frac{1}{q^*L^+} \left(\frac{1}{E_0} + \frac{1}{E_1} \right) \right],$$

т.е. при сгущении самой мелкой сетки ($L^+ \uparrow$), и/или увеличении числа многосеточных итераций на уровнях с грубыми сетками (q^*, \uparrow) и/или повышении эффективности распараллеливания сглаживающих итераций на уровнях с мелкими сетками ($E_0 \uparrow$ и/или $E_1 \uparrow$) ускорение и эффективность параллелизма будут увеличиваться.

Обобщая полученные теоретические результаты, можно утверждать, что УМТ позволяет эффективно распараллеливать вычисления при численном решении краевых задач. На уровнях с грубыми сетками ($l \geq \kappa$) УМТ обладает полным параллелизмом вне зависимости от выбора сглаживающей процедуры. Сглаживание на уровнях с мелкими сетками ($l < \kappa$) требует распараллеливания сглаживающих итераций, достигаемая при этом эффективность распараллеливания достаточно невелика из-за интенсивных обменов данными между процессорами. Однако итоговая эффективность распараллеливания УМТ оказывается выше, чем эффективность распараллеливания сглаживающих итераций.

В настоящее время остаётся малоизученной возможность эффективного обмена данными на уровнях с мелкими сетками (обмен «каждый–каждому»). Существует разнообразное количество вариантов организации такого обмена в зависимости от архитектуры многопроцессорного компьютера. Представляется перспективным распараллеливание УМТ на многопроцессорных компьютерах с общей памятью. Оценки (2.74) полезны тем, что они позволяют определить потери эффективности, связанные с данным обменом.

Таблица 2.8. Максимальное ускорение и эффективность параллелизма при решении трёхмерных задач на 729 процессорах ($d = 3$, $p = 3^{2d} = 729$)

E_0	E_1	L^+	q^*	\mathbf{S}_{729}^3	\mathbf{E}_{729}^3	E_0	E_1	L^+	q^*	\mathbf{S}_{729}^3	\mathbf{E}_{729}^3
0.60	0.60	5	1	596.5	0.82	0.70	0.60	5	1	616.5	0.85
0.60	0.60	5	2	643.2	0.88	0.70	0.60	5	2	657.0	0.90
0.60	0.60	5	3	665.6	0.91	0.70	0.60	5	3	676.1	0.93
0.60	0.60	5	4	678.7	0.93	0.70	0.60	5	4	687.2	0.94
0.60	0.60	6	1	612.4	0.84	0.70	0.60	6	1	630.4	0.86
0.60	0.60	6	2	656.1	0.90	0.70	0.60	6	2	668.0	0.92
0.60	0.60	6	3	676.0	0.93	0.70	0.60	6	3	684.9	0.94
0.60	0.60	6	4	687.3	0.94	0.70	0.60	6	4	694.4	0.95
0.60	0.60	7	1	624.9	0.86	0.70	0.60	7	1	641.2	0.88
0.60	0.60	7	2	665.6	0.91	0.70	0.60	7	2	676.1	0.93
0.60	0.60	7	3	683.4	0.94	0.70	0.60	7	3	691.2	0.95
0.60	0.60	7	4	693.4	0.95	0.70	0.60	7	4	699.5	0.96
0.60	0.70	5	1	616.5	0.85	0.70	0.70	5	1	637.9	0.87
0.60	0.70	5	2	657.0	0.90	0.70	0.70	5	2	671.4	0.92
0.60	0.70	5	3	676.1	0.93	0.70	0.70	5	3	686.9	0.94
0.60	0.70	5	4	687.2	0.94	0.70	0.70	5	4	695.9	0.95
0.60	0.70	6	1	630.4	0.86	0.70	0.70	6	1	649.5	0.89
0.60	0.70	6	2	668.0	0.92	0.70	0.70	6	2	680.4	0.93
0.60	0.70	6	3	684.9	0.94	0.70	0.70	6	3	694.0	0.95
0.60	0.70	6	4	694.4	0.95	0.70	0.70	6	4	701.7	0.96
0.60	0.70	7	1	641.2	0.89	0.70	0.70	7	1	658.5	0.90
0.60	0.70	7	2	676.1	0.93	0.70	0.70	7	2	686.9	0.94
0.60	0.70	7	3	691.2	0.95	0.70	0.70	7	3	699.0	0.96
0.60	0.70	7	4	699.5	0.97	0.70	0.70	7	4	705.7	0.97
0.60	0.80	5	1	632.4	0.87	0.70	0.80	5	1	654.9	0.90
0.60	0.80	5	2	667.8	0.92	0.70	0.80	5	2	682.7	0.94
0.60	0.80	5	3	684.2	0.94	0.70	0.80	5	3	695.3	0.95
0.60	0.80	5	4	693.7	0.95	0.70	0.80	5	4	702.5	0.96
0.60	0.80	6	1	644.6	0.88	0.70	0.80	6	1	664.6	0.91
0.60	0.80	6	2	677.3	0.93	0.70	0.80	6	2	690.0	0.94
0.60	0.80	6	3	691.7	0.95	0.70	0.80	6	3	701.0	0.96
0.60	0.80	6	4	699.8	0.96	0.70	0.80	6	4	707.2	0.97
0.60	0.80	7	1	654.1	0.90	0.70	0.80	7	1	672.0	0.92
0.60	0.80	7	2	684.2	0.94	0.70	0.80	7	2	695.3	0.95
0.60	0.80	7	3	697.1	0.96	0.70	0.80	7	3	705.1	0.97
0.60	0.80	7	4	704.2	0.97	0.70	0.80	7	4	710.5	0.97

§ 10. Замечания о программном обеспечении

Самая мелкая сетка G_1^0 размера $(N_x^0 + 1) \times (N_y^0 + 1) \times (N_z^0 + 1)$ для решения трёхмерных краевых задач представима в виде произведения трёх одномерных сеток G_{1x}^0 , G_{1y}^0 и G_{1z}^0 по направлениям x , y и z соответственно:

$$G_1^0 = \{(x_i^v, x_i^f; y_j^v, y_j^f; z_k^v, z_k^f) \mid (x_i^v, x_i^f) \in G_{1x}^0, (y_j^v, y_j^f) \in G_{1y}^0, (z_k^v, z_k^f) \in G_{1z}^0\},$$

где

$$\begin{aligned} G_{1x}^0 &= \{x_i^v, i = 1, \dots, N_x^0 + 1; x_i^f, i = 1, \dots, N_x^0\}, \\ G_{1y}^0 &= \{y_j^v, j = 1, \dots, N_y^0 + 1; y_j^f, j = 1, \dots, N_y^0\}, \\ G_{1z}^0 &= \{z_k^v, k = 1, \dots, N_z^0 + 1; z_k^f, k = 1, \dots, N_z^0\}. \end{aligned}$$

При построении самой мелкой сетки будем придерживаться следующего правила индексации

$$\begin{aligned} \dots &< x_{i-1}^f < x_i^v < x_i^f < x_{i+1}^v < \dots, \\ \dots &< y_{j-1}^f < y_j^v < y_j^f < y_{j+1}^v < \dots, \\ \dots &< z_{k-1}^f < z_k^v < z_k^f < z_{k+1}^v < \dots \end{aligned}$$

Аналогично потребуем, чтобы это правило соблюдалось и на грубых сетках

$$\begin{aligned} \dots &< x_{\{i-1\}}^f < x_{\{i\}}^v < x_{\{i\}}^f < x_{\{i+1\}}^v < \dots, \\ \dots &< y_{\{j-1\}}^f < y_{\{j\}}^v < y_{\{j\}}^f < y_{\{j+1\}}^v < \dots, \\ \dots &< z_{\{k-1\}}^f < z_{\{k\}}^v < z_{\{k\}}^f < z_{\{k+1\}}^v < \dots \end{aligned}$$

В приложениях при решении систем дифференциальных уравнений в частных производных иногда используют различные контрольные объёмы для аппроксимации уравнений, образующих систему. В этом случае

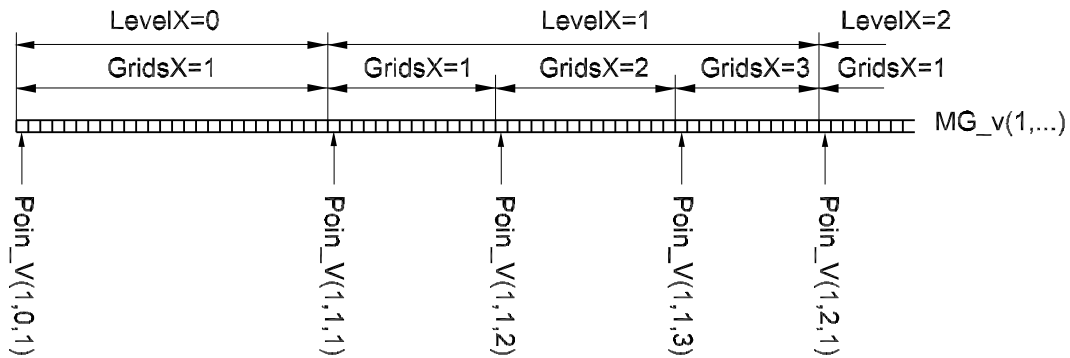
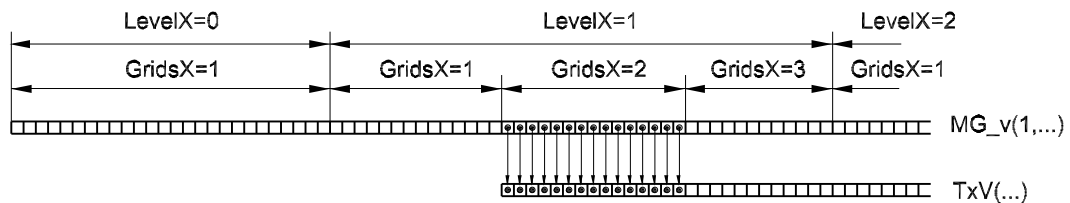
точки x_i^v, y_j^v, z_k^v могут быть узлами сетки, а x_i^f, y_j^f, z_k^f – гранями контрольных объёмов, или наоборот в зависимости от конкретной задачи. Для избежания путаницы потребуем, чтобы правило индексации соблюдалось вне зависимости от конфигурации контрольных объёмов на самой мелкой сетке.

Для хранения многосеточной структуры необходимы шесть одномерных вещественных массивов для самой мелкой сетки ($x_i^v, x_i^f, y_j^v, y_j^f, z_k^v, z_k^f$) и шесть одномерных целочисленных массивов для индексов точек ($x^v, x^f, y^v, y^f, z^v, z^f$). Рассмотрим подробнее структуру массива для хранения индексов точек x^v . Данный массив разбивают на $L_x^+ + 1$ сегмент по количеству сеточных уровней в данном пространственном направлении: L_x^+ уровней с грубыми сетками плюс самая мелкая сетка (нулевой уровень). Номер уровня с самыми грубыми сетками определён согласно (2.4). Далее каждый сегмент разбивают на $3^l, l = 0, \dots, L_x^+$ подсегментов в соответствии с количеством сеток, образующих уровень l . Порядковый номер элемента массива, отсчитанный от начала подсегмента, является индексом точки данной грубой сетки (т.е. i в $x_{\{i\}}^v$). Содержание элемента массива с данным порядковым номером есть индекс соответствующей точки самой мелкой сетки (т.е. $\{i\}$ в $x_{\{i\}}^v$). Для удобства работы с данным одномерным массивом используют целочисленные массивы-указатели, в которых содержится информация о начале каждого подсегмента.

Структура целочисленного массива MG_v показана на рис. 2.23. Для унификации введем целочисленную переменную Dir (Integer):

$$\text{Dir} = \begin{cases} 1, & \text{направление } x, \\ 2, & \text{направление } y, \\ 3, & \text{направление } z. \end{cases}$$

Массив-указатель имеет вид Poin_V(Dir, Level, Grid), где целочислен-

Рис. 2.23. Структура целочисленного массива для хранения индексов точек x^v Рис. 2.24. Вычисление отображения индексов точек x^v второй сетки первого уровня

ный параметр **Grid** есть номер сетки уровня **Level** (**Integer**). Массив $MG_v(Dir, \dots)$ содержит всю информацию об индексах точек x^v ($Dir=1$), y^v ($Dir=2$) и z^v ($Dir=3$). Аналогично выглядит массив $MG_f(Dir, \dots)$ для хранения информации об индексах точек x^f ($Dir=1$), y^f ($Dir=2$) и z^f ($Dir=3$).

Вычисление отображения индексов точек есть копирование содержимого соответствующего подсегмента в отдельные целочисленные массивы типа **TxV** (для точек x^v) и **TxF** (для точек x^f), как показано на рис. 2.24. Тогда запись $x_{\{i\}}^v$ или $x_{\{i\}}^f$ означает в компьютерном исполнении $XV(TxV(i))$ и $XF(TxF(i))$, где вещественные массивы **XV** и **XF** служат для хранения точек самой мелкой сетки.

Несколько сложнее выглядит аппроксимация шаблонных функционалов типа $\langle g \rangle_{\{i\}}$ (2.9), $\langle \lambda \rangle_{\{i\}}$ (2.11) и правой части $\langle r \rangle_{\{i\}}$ (2.10) на многосеточной структуре. В 3.3 гл. 1 показано, что для их аппроксимации использована составная квадратура, т.е. шаблонные функционалы всегда

аппроксимируют на самой мелкой сетке. Поскольку контрольные объёмы на каждой грубой сетке покрывают всю область, то вычислительные усилия для аппроксимации шаблонных функционалов будут одинаковы для всех сеток. Но количество вычислительных сеток увеличивается в геометрической прогрессии со знаменателем 3^d ($d = 2, 3$), поэтому в той же геометрической прогрессии будет расти объём вычислений.

Однако, используя свойство 1 (с. 81) грубых сеток и свойство аддитивности определенного интеграла относительно подобластей, можно предложить экономичный алгоритм аппроксимации шаблонных функционалов на многосеточной структуре. Рассмотрим подробнее аппроксимацию функционала вида (2.9)

$$\langle g \rangle_{\{i\}} = \frac{1}{h3^l} \int_{x_{\{i-1\}}^f}^{x_{\{i\}}^f} g(x) dx.$$

Доопределим функцию $g(x)$, полагая её равной нулю вне области $\Omega = [0, 1]$:

$$\check{g}(x) = \begin{cases} 0, & x \notin \Omega \\ g(x), & x \in \Omega \end{cases}.$$

Далее определим характеристическую функцию $\Upsilon(x)$

$$\Upsilon(x) = \begin{cases} 0, & x \notin \Omega \\ 1, & x \in \Omega \end{cases}.$$

Фиктивные узлы и грани на каждой сетке (показанные на рис. 2.5 и др.) нужны только для данного доопределения подынтегральной функции и для определения характеристической функции $\Upsilon(x)$. Теперь коэффици-

ент $\langle g \rangle_{\{i\}}$ (2.9) можно записать в виде

$$\langle g \rangle_{\{i\}} = \frac{\langle \check{g} \rangle_{\{i\}}^l}{\Lambda_{\{i\}}^l}, \quad (2.75)$$

где коэффициенты $\langle \check{g} \rangle_{\{i\}}^l$ и $\Lambda_{\{i\}}^l$ определены как

$$\langle \check{g} \rangle_{\{i\}}^l = \frac{1}{h} \int_{x_{\{i-1\}}^f}^{x_{\{i\}}^f} \check{g}(x) dx \quad \text{и} \quad \Lambda_{\{i\}}^l = \frac{1}{h} \int_{x_{\{i-1\}}^f}^{x_{\{i\}}^f} \Upsilon(x) dx.$$

По своему смыслу $\Lambda_{\{i\}}^l$ есть количество контрольных объёмов на самой мелкой сетке, которые образуют реальную часть данного контрольного объёма V_i (т.е. $V_i \cap \Omega$). Например, для сетки G_2^2 , показанной на рис. 2.6, получим $\Lambda_{\{1\}}^2 = 7$, $\Lambda_{\{2\}}^2 = 9$ и т.д. Если контрольный объём полностью лежит в области Ω , то коэффициент $\Lambda_{\{i\}}^l$ можно вычислить аналитически: $\Lambda_{\{i\}}^l = 3^l$ при $0 \leq x_{\{i-1\}}^f < x_{\{i\}}^f \leq 1$.

Вычисление $\langle \check{g} \rangle_{\{i\}}^l$ на сетке уровня l^* ($0 < l^* \leq L^+$) начинают с самой мелкой сетки ($l = 0$), на которой необходимо вычислить интеграл

$$\langle \check{g} \rangle_m^0 = \frac{1}{h} \int_{x_{m-1}^f}^{x_m^f} \check{g}(x) dx \quad (2.76)$$

при помощи метода трапеций, средних значений, Симпсона или другого, а Λ_m^0 вычисляют аналитически

$$\Lambda_m^0 = \frac{1}{h} \int_{x_{m-1}^f}^{x_m^f} \Upsilon(x) dx = \begin{cases} 0, & x_m^v \notin \Omega \\ 1, & x_m^v \in \Omega \end{cases}.$$

Поскольку каждый контрольный объём на грубых сетках уровня l является объединением трёх контрольных объёмов на более мелких сетках уровня $l - 1$, то коэффициенты $\langle \check{g} \rangle_{\{i\}}^l$ и $\Lambda_{\{i\}}^l$ отыскивают при помощи

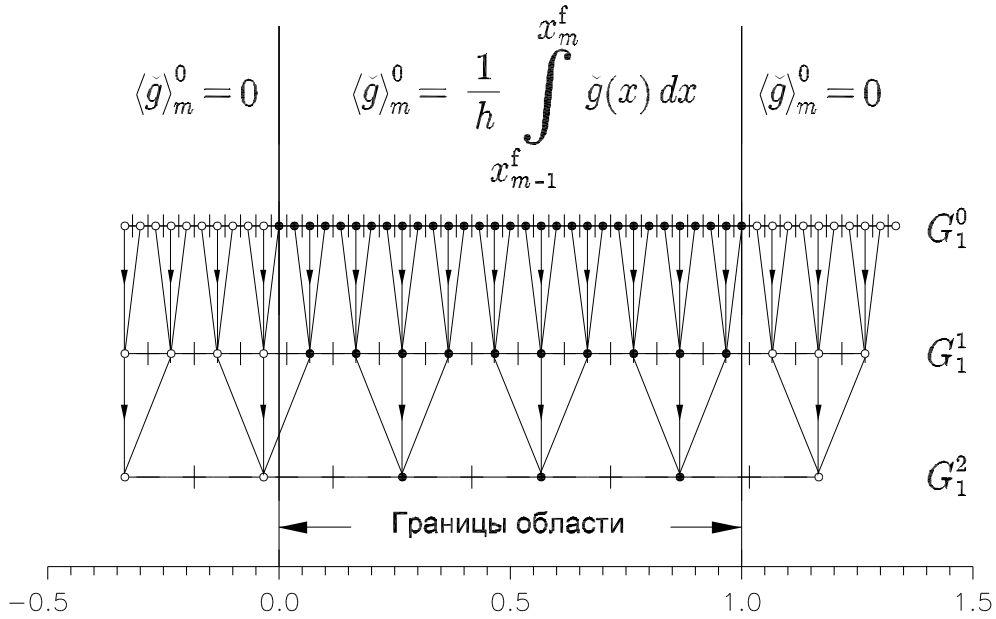


Рис. 2.25. Вычисление коэффициента $\langle \check{g} \rangle_{\{i\}}^l$ на сетке G_1^2

следующих рекуррентных соотношений:

$$\begin{cases} \langle \check{g} \rangle_{\{i\}}^l = \langle \check{g} \rangle_{\{i\}-3^{l-1}}^{l-1} + \langle \check{g} \rangle_{\{i\}}^{l-1} + \langle \check{g} \rangle_{\{i\}+3^{l-1}}^{l-1} \\ \Lambda_{\{i\}}^l = \Lambda_{\{i\}-3^{l-1}}^{l-1} + \Lambda_{\{i\}}^{l-1} + \Lambda_{\{i\}+3^{l-1}}^{l-1} \end{cases}, \quad l = 1, \dots, l^*. \quad (2.77)$$

Вычисление коэффициента $\langle \check{g} \rangle_{\{i\}}^l$ на сетке G_1^2 второго уровня схематично показано на рис. 2.25. Коэффициент $\Lambda_{\{i\}}^l$ вычисляют аналогично. Окончательно коэффициент $\langle g \rangle_{\{i\}}$ на сетке уровня l^* определяют как (2.75). Для упрощения программной реализации коэффициенты типа $\langle g \rangle_{\{i\}}$ удобнее вычислять сразу на всех сетках уровня l^* , а полученные результаты, как и поправку, можно хранить в одном массиве данных благодаря особенностям построения грубых сеток УМТ (свойство 3, с. 81). Кратные интегралы вычисляют последовательным интегрированием. Коэффициенты типа $\langle g \rangle$ можно вычислить один раз на каждом уровне перед многосеточной итерацией и их значения хранить в памяти компьютера.

Для иллюстративного примера в двухмерном случае воспользуемся

функцией $f(x, y) = e^{x-y}$. Положим, что самая мелкая сетка является равномерной и состоит из 2001×201 узлов ($h_x = 1/N_x^0 = 1/2000$ и $h_y = 1/N_y^0 = 1/200$), и рассмотрим четыре характерных случая:

1) $(x_{\{i\}}^v, y_{\{j\}}^v)$ – узлы сетки, $(x_{\{i\}}^f, y_{\{j\}}^f)$ – грани контрольных объёмов, а сам объём задан как

$$V_{\{ij\}} = \{(x, y) \mid x_{\{i-1\}}^f \leq x \leq x_{\{i\}}^f, y_{\{j-1\}}^f \leq y \leq y_{\{j\}}^f\}.$$

Точное значение интеграла

$$J_{\{ij\}} = \frac{1}{h_x h_y 3^{l_x + l_y}} \int_{x_{\{i-1\}}^f}^{x_{\{i\}}^f} \int_{y_{\{j-1\}}^f}^{y_{\{j\}}^f} f(x, y) dy dx$$

определим как

$$J_{\{ij\}}^a = -\frac{e^{x_b} - e^{x_a}}{h_x 3^{l_x}} \frac{e^{-y_b} - e^{-y_a}}{h_y 3^{l_y}},$$

где

$$\begin{aligned} x_a &= \max(x_1^f, x_{\{i-1\}}^f), & x_b &= \min(x_{N_x^0}^f, x_{\{i\}}^f), \\ y_a &= \max(y_1^f, y_{\{j-1\}}^f), & y_b &= \min(y_{N_y^0}^f, y_{\{j\}}^f). \end{aligned}$$

Ошибку вычисления интеграла определим в виде

$$\mathcal{E}^l = \max_{\{ij\}} \left| J_{\{ij\}}^a - J_{\{ij\}}^l \right|,$$

где $J_{\{ij\}}^l$ есть приближённое значение интеграла на всех сетках уровня l .

На самой мелкой сетке интеграл вычислен при помощи формулы средних значений

$$J_{ij} = \frac{1}{h_x h_y} \int_{x_{i-1}^f}^{x_i^f} \int_{y_{j-1}^f}^{y_j^f} f(x, y) dy dx \approx f(x_i^v, y_j^v) = \exp(x_i^v - y_j^v).$$

Результаты вычислений ($\text{ErrMAX} = \mathcal{E}^l$):

LevelX = 5	LevelY = 3	ErrMAX = .2333594E-05
LevelX = 4	LevelY = 3	ErrMAX = .2417141E-05
LevelX = 3	LevelY = 3	ErrMAX = .2583452E-05
LevelX = 2	LevelY = 2	ErrMAX = .2870922E-05
LevelX = 1	LevelY = 1	ErrMAX = .2895241E-05
LevelX = 0	LevelY = 0	ErrMAX = .2946985E-05

2) $(x_{\{i\}}^f, y_{\{j\}}^v)$ – узлы сетки, $(x_{\{i\}}^v, y_{\{j\}}^f)$ – грани контрольных объёмов, а сам объём задан как

$$V_{\{ij\}} = \{(x, y) | x_{\{i\}}^v \leq x \leq x_{\{i+1\}}^v, y_{\{j-1\}}^f \leq y \leq y_{\{j\}}^f\},$$

а пределы интегрирования составят

$$\begin{aligned} x_a &= \max(x_1^v, x_{\{i\}}^v), & x_b &= \min(x_{N_x^v+1}^v, x_{\{i+1\}}^v), \\ y_a &= \max(y_1^f, y_{\{j-1\}}^f), & y_b &= \min(y_{N_y^f}^f, y_{\{j\}}^f). \end{aligned}$$

Результаты вычислений:

LevelX = 5	LevelY = 3	ErrMAX = .2330217E-05
LevelX = 4	LevelY = 3	ErrMAX = .2377266E-05
LevelX = 3	LevelY = 3	ErrMAX = .2534330E-05
LevelX = 2	LevelY = 2	ErrMAX = .2792995E-05
LevelX = 1	LevelY = 1	ErrMAX = .2922191E-05
LevelX = 0	LevelY = 0	ErrMAX = .2949126E-05

3) $(x_{\{i\}}^v, y_{\{j\}}^f)$ – узлы сетки, $(x_{\{i\}}^f, y_{\{j\}}^v)$ – грани контрольных объёмов, а сам объём задан как

$$V_{\{ij\}} = \{(x, y) | x_{\{i-1\}}^f \leq x \leq x_{\{i\}}^f, y_{\{j\}}^v \leq y \leq y_{\{j+1\}}^v\},$$

а пределы интегрирования составят

$$\begin{aligned} x_a &= \max(x_1^f, x_{\{i-1\}}^f), & x_b &= \min(x_{N_x^0}^f, x_{\{i\}}^f), \\ y_a &= \max(y_1^v, y_{\{j\}}^v), & y_b &= \min(y_{N_y^0+1}^v, y_{\{j+1\}}^v). \end{aligned}$$

Результаты вычислений:

LevelX = 5	LevelY = 3	ErrMAX = .2447429E-05
LevelX = 4	LevelY = 3	ErrMAX = .2482297E-05
LevelX = 3	LevelY = 3	ErrMAX = .2546472E-05
LevelX = 2	LevelY = 2	ErrMAX = .2822611E-05
LevelX = 1	LevelY = 1	ErrMAX = .2941816E-05
LevelX = 0	LevelY = 0	ErrMAX = .2946985E-05

4) $(x_{\{i\}}^f, y_{\{j\}}^f)$ – узлы сетки, $(x_{\{i\}}^v, y_{\{j\}}^v)$ – грани контрольных объёмов, а сам объём задан как

$$V_{\{ij\}} = \{(x, y) \mid x_{\{i\}}^v \leq x \leq x_{\{i+1\}}^v, y_{\{j\}}^v \leq y \leq y_{\{j+1\}}^v\}.$$

а пределы интегрирования составят

$$\begin{aligned} x_a &= \max(x_1^v, x_{\{i\}}^v), & x_b &= \min(x_{N_x^0+1}^v, x_{\{i+1\}}^v), \\ y_a &= \max(y_1^v, y_{\{j\}}^v), & y_b &= \min(y_{N_y^0+1}^v, y_{\{j+1\}}^v). \end{aligned}$$

Результаты вычислений:

LevelX = 5	LevelY = 3	ErrMAX = .2465492E-05
LevelX = 4	LevelY = 3	ErrMAX = .2416924E-05
LevelX = 3	LevelY = 3	ErrMAX = .2630778E-05
LevelX = 2	LevelY = 2	ErrMAX = .2782695E-05
LevelX = 1	LevelY = 1	ErrMAX = .2914575E-05
LevelX = 0	LevelY = 0	ErrMAX = .2946355E-05

Получим оценку распределения вычислительных усилий, которые необходимы для вычисления интегралов, по сеточным уровням. Возможны два варианта организации вычислений. В первом варианте все интегралы вычисляются один раз перед многосеточной итерацией и их значения хранятся в оперативной памяти. В этом случае для вычисления интеграла на уровне l ($0 \leq l \leq L^+$) нужно выполнить $\mathcal{W}_l = C_I N$ арифметических операций, где C_I есть некоторая константа, а N – количество узлов самой мелкой сетки. Тогда суммарный объём вычислительной работы составит

$$\mathcal{W}_\Sigma^{(1)} = C_I N (L^+ + 1) = O(N \lg N)$$

арифметических операций. К недостатку данного способа следует отнести необходимость хранения $L^+ N$ вещественных чисел.

Во втором варианте интегралы вычисляются на каждом уровне перед сглаживающими итерациями без хранения промежуточных результатов. В этом случае суммарный объём вычислительной работы составит

$$\mathcal{W}_\Sigma^{(2)} = C_I N \sum_{l=1}^{L^++1} l = C_I N \frac{1}{2} (L^+ + 1)(L^+ + 2)$$

арифметических операций. Отсюда следует, что распределение вычислительных усилий по сеточным уровням составит

$$\frac{\mathcal{W}_l}{\mathcal{W}_\Sigma^{(2)}} = \frac{2l}{(L^+ + 1)(L^+ + 2)}, \quad l = 1, \dots, L^+ + 1.$$

Отметим, что если самая сетка содержит достаточно большое число узлов ($L^+ \gg 1$), то суммарный объём вычислительной работы будет зависеть от количества узлов самой мелкой сетки N следующим образом:

$$\mathcal{W}_\Sigma^{(2)} = C_I N \frac{1}{2} (L^+ + 1)(L^+ + 2) \approx C_I N \frac{1}{2} (L^+)^2 = O(N \lg^2 N).$$

Второй вариант представляется более предпочтительным с точки зрения экономии ресурсов компьютера.

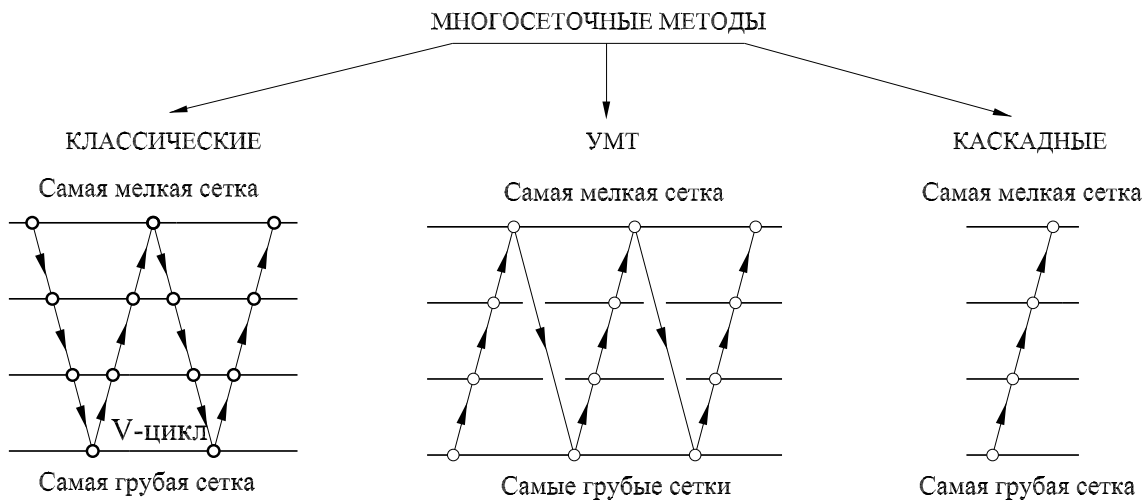


Рис. 2.26. Классификация многосеточных методов

§ 11. Сравнение многосеточных методов

На рис. 2.26 показана классификация многосеточных методов по представлению решения в виде поправки и приближения:

1) *Каскадные многосеточные методы* характеризует отсутствие представления решения в виде суммы и/или произведения поправки и приближения. В основе каскадных многосеточных методов лежит один из простейших способов построения неструктурированной сетки в области со сложной геометрией: сначала строят грубую сетку, далее наибольшие её элементы дробят на более мелкие. Процесс продолжают до тех пор, пока не будет получена сетка с требуемыми параметрами. Подобное дробление порождает иерархию сеток. Вычисления начинают с самой грубой сетки, полученное приближение интерполируют на более мелкую сетку, где выполняют сглаживание до достижения некоторого критерия останова. При этом нет никакой необходимости представлять искомое решение в виде суммы и/или произведения поправки и приближения (рис. 2.26).

Впервые каскадный алгоритм с использованием метода сопряжённых градиентов в качестве сглаживателя для решения эллиптических

уравнений был предложен в [42, 43], где продемонстрирована высокая скорость сходимости этого алгоритма. В работах В.В. Шайдурова доказана оптимальная вычислительная сложность этого алгоритма для двухмерной задачи Дирихле для эллиптического уравнения второго порядка с гладким решением [51, 52]. Установлены оценки скорости сходимости других итерационных сглаживателей в двух- и трёхмерных краевых задачах для эллиптического уравнения второго порядка. В двухмерном случае из проанализированных сглаживателей только метод сопряженных градиентов дал оптимальную арифметическую сложность. Из работ В.В. Шайдурова эта оптимальность следует также для метода простой итерации со специальными чебышевскими итерационными параметрами [51, 52]. В трёхмерном случае помимо них ещё несколько сглаживателей обеспечивают оптимальную сложность.

При использовании алгоритмов на последовательности сеток важным вопросом является «вложенность» конечных элементов, т.е. возможность выражения базисных функций на грубой сетке в виде линейной комбинации небольшого количества базисных функций на более мелкой сетке. Такое свойство выполняется для многоугольных областей и даёт простые правила интерполяции и проектирования функций с одной сетки на другую. В случае областей с криволинейной границей потребность аппроксимации границы при измельчении сетки приводит к тому, что обычные кусочно-линейные элементы вблизи границы не будут обладать свойством вложенности [9].

Несмотря на исключительную простоту, каскадные многосеточные методы обладают рядом недостатков, связанных с ограничением на выбор сглаживателей, наличием проблемно-зависимой интерполяции, трудностями применения к решению дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами, особенно на адаптивных сетках.

2) *Классические многосеточные методы* характеризует представление решения в виде суммы поправки и приближения после аппроксимации исходной дифференциальной задачи. В зависимости от использования или не использования данных о вычислительной сетке классические методы делят на геометрические и алгебраические. Основной задачей при построении варианта КММ является достижение максимальной скорости сходимости посредством максимального использования априорной информации о решаемой задаче, которое выражается в оптимальной адаптации проблемно-зависимых компонент алгоритма.

3) *Универсальную многосеточную технологию* характеризует представление решения в виде суммы или произведения поправки и приближения перед аппроксимацией исходной дифференциальной задачи. Как и каскадные методы, УМТ не содержит предварительного сглаживания. Увеличение количества сглаживающих итераций на многосеточной структуре приведёт к уменьшению количества многосеточных итераций. В пределе УМТ, как и каскадные методы, позволит получить достаточно точное приближение к решению за одну многосеточную итерацию. С другой стороны, УМТ, как и КММ, содержит многосеточные итерации.

Отличительной особенностью УМТ, не имеющей аналогов среди многосеточных методов, являются проблемно-независимые операторы переходов. В результате сглаживание в УМТ всегда осуществляют только на самой мелкой сетке. Поэтому УМТ не обладает оптимальной скоростью сходимости.

Согласно предложенной классификации по представлению решения в виде поправки и приближения можно утверждать, что все возможные направления развития многосеточных методов сформулированы и ожидать появления каких-то принципиально новых алгоритмов не приходится.

ГЛАВА 3

ЭЛЕМЕНТЫ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ ГИДРОДИНАМИКИ

Рассмотрены вопросы, связанные с численным решением уравнений Навье-Стокса. Показаны особенности конечно-разностной аппроксимации конвективно-диффузионных уравнений и способ записи линеаризованных сеточных аналогов уравнений Навье-Стокса в виде единой СЛАУ. Рассмотрены распространённые итерационные методы решения единой СЛАУ, показаны их достоинства и недостатки. Сформулирован многосеточный алгоритм, получены Σ -модифицированные уравнения Навье-Стокса и описаны особенности их аппроксимации на многосеточной структуре. Сформулирован метод уменьшения вычислительной работы, необходимой для численного решения уравнений Навье-Стокса, основанный на декомпозиции давления и использовании уравнений постоянств расхода. Показаны особенности применения метода в явных и неявных схемах. В последнем случае необходимо сформулировать вспомогательную задачу, в которой вместо уравнения неразрывности применяются уравнения постоянств расхода. Декомпозиция давления позволяет построить полный многосеточный алгоритм для решения уравнений Навье-Стокса в случае, если решение имеет особенности типа пограничного слоя. Приведены результаты решения ряда модельных задач для иллюстрации эффективности и универсальности алгоритмов на основе УМТ.

§ 1. Уравнения Навье-Стокса

Уравнения динамики жидкости основаны на фундаментальных законах сохранения массы, сохранения количества движения и сохранения

энергии. Применение закона сохранения массы к элементарному объёму жидкости позволяет получить уравнение неразрывности. Закон сохранения количества движения является следствием второго закона Ньютона. Закон сохранения энергии следует из первого закона термодинамики. Для замыкания полученной системы следует добавить уравнение состояния, которое связывает термодинамические параметры жидкости.

Подробный вывод уравнений механики жидкости дан в [1, 14, 15, 27, 34, 36], поэтому сейчас основное внимание будет уделено особенностям численного решения задач гидродинамики. Безразмерные двухмерные уравнения Навье-Стокса и энергии для несжимаемой среды в декартовой системе координат имеют вид:

а) уравнение неразрывности

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad (3.1a)$$

б) уравнение движения по X

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial(u^2)}{\partial x} + \frac{\partial(vu)}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right), \quad (3.1b)$$

в) уравнение движения по Y

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial(uv)}{\partial x} + \frac{\partial(v^2)}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right), \quad (3.1c)$$

г) уравнение энергии

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial(uT)}{\partial x} + \frac{\partial(vT)}{\partial y} = \frac{1}{\text{Re Pr}} \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right). \quad (3.2)$$

Уравнения (3.1) и (3.2) описывают нестационарный конвективный теплообмен при сравнительно небольшом изменении компонент скорости u и v , давления p и температуры T . При этом полагают, что теплофизические свойства жидкости (плотность ρ , динамический коэффициент

вязкости μ , коэффициент теплопроводности λ и удельная теплоемкость при постоянном давлении c_p) являются постоянными.

Величину, обратную безразмерному комплексу, стоящему перед диффузионными членами в уравнениях движения, называют *числом Рейнольдса* (**Re**)

$$\text{Re} = \frac{\rho U_s L_s}{\mu}, \quad (3.3)$$

где U_s и L_s суть масштабы скорости и длины. Число Рейнольдса характеризует соотношение сил инерции и сил вязкости [12].

Величину, целиком составленную из физических параметров, называют числом Прандтля (**Pr**)

$$\text{Pr} = \frac{c_p \mu}{\lambda}.$$

Произведение чисел Рейнольдса и Прандтля называют числом Пекле (**Pe**): $\text{Pe} = \text{Re Pr}$.

Положим, что температура постоянна ($T = \text{const}$), а течение является низкоскоростным ($\text{Re} \sim 1$). В этом случае можно пренебречь конвективными членами в уравнениях движения (3.1b) и (3.1c), и система (3.1) примет вид:

а) уравнение движения по X

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + \frac{\partial p}{\partial x} = 0, \quad (3.4a)$$

б) уравнение движения по Y

$$\frac{\partial v}{\partial t} - \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) + \frac{\partial p}{\partial y} = 0, \quad (3.4b)$$

в) уравнение неразрывности

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0. \quad (3.4c)$$

Систему (3.4) называют *уравнениями Стокса*.

Обозначим через Δ оператор Лапласа

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

и перепишем полученную систему (3.4) в матричной форме

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial t} - \frac{1}{\text{Re}}\Delta & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial t} - \frac{1}{\text{Re}}\Delta & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Введём обозначения

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial t} - \frac{1}{\text{Re}}\Delta & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial t} - \frac{1}{\text{Re}}\Delta \end{pmatrix}, \quad B^T = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{pmatrix}, \quad \vec{V} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}.$$

Тогда система (3.4) примет окончательный вид

$$\begin{pmatrix} A & B^T \\ B & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{V} \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (3.5)$$

Заметим, что

$$BB^T = \Delta. \quad (3.6)$$

Краевые задачи для уравнений Стокса достаточно полно изучены, а численные методы их решения хорошо обоснованы [21].

Нелинейные уравнения Навье-Стокса (3.1) нельзя записать в виде (3.5), однако в подобном виде могут быть записаны линеаризованные сеточные аналоги. Сначала запишем уравнения Навье-Стокса в операторной форме

$$\mathcal{N}(\vec{V}) + \nabla p = 0, \quad (3.7a)$$

$$\nabla \vec{V} = 0. \quad (3.7b)$$

где ∇ есть оператор Гамильтона или набла-оператор ($\nabla\nabla = \Delta$), а нелинейный конвективно-диффузионный оператор \mathcal{N} в двухмерном случае имеет вид

$$\mathcal{N}(\vec{V}) = \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \frac{\partial(u\vec{V})}{\partial x} + \frac{\partial(v\vec{V})}{\partial y} - \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial^2 \vec{V}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vec{V}}{\partial y^2} \right), \quad \vec{V} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}.$$

Уравнения Навье-Стокса в двух- и трёхмерном случае могут быть записаны в операторной форме (3.7) с точностью до вида оператора \mathcal{N} и вектора \vec{V} .

Предположим, что в области Ω поставлена краевая задача для уравнений Навье-Стокса (3.7). Построим в области Ω вычислительную сетку Ω_h и осуществим на ней аппроксимацию уравнений (3.7):

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_h(\vec{V}_h) + \nabla_h p_h &= 0, \\ \nabla_h \vec{V}_h &= 0. \end{aligned}$$

Далее α_h будет означать сеточный аналог α . Линеаризация данной нелинейной системы приводит к следующей СЛАУ

$$\begin{cases} A_h \vec{V}_h + \nabla_h p_h = b_h \\ \nabla_h \vec{V}_h = 0 \end{cases},$$

здесь матрица A_h получена в результате линеаризации нелинейного сеточного оператора \mathcal{N}_h – аналога исходного нелинейного конвективно-диффузионного оператора \mathcal{N} , а вектор b_h зависит от используемого способа линеаризации. Полученную СЛАУ по аналогии с (3.5) запишем в матричной форме

$$\begin{pmatrix} A_h & B_h^T \\ B_h & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{V}_h \\ p_h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_h \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (3.8)$$

где квадратная матрица A_h является обратимой, а матрицы B_h^T и B_h (сеточные аналоги операторов B^T и B в (3.5)) в общем случае являются прямоугольными.

Перечислим основные трудности численного решения уравнений Навье-Стокса:

1) *Структура матрицы коэффициентов СЛАУ (3.8)*. На первый взгляд может показаться, что решение СЛАУ (3.8) не вызовет особых затруднений, если использовать её блочную структуру. В самом деле, формально выразим \vec{V}_h из первого уравнения СЛАУ (3.8)

$$\vec{V}_h + A_h^{-1} B_h^T p_h = A_h^{-1} b_h$$

и подставим во второе уравнение

$$B_h \vec{V}_h + B_h A_h^{-1} B_h^T p_h = B_h A_h^{-1} b_h.$$

Поскольку $B_h \vec{V}_h = 0$ (сеточный аналог уравнения неразрывности (3.1a)), то получим следующую СЛАУ для отыскания давления

$$\mathcal{S} p_h = B_h A_h^{-1} b_h, \quad (3.9)$$

где матрица $\mathcal{S} = B_h A_h^{-1} B_h^T$ называется *дополнением по Шуру*. Однако использовать СЛАУ (3.9) для вычисления давления затруднительно: матрица A_h является разреженной, а A_h^{-1} – (почти) плотно заполненной. Поэтому явное вычисление матрицы A_h^{-1} потребует огромных вычислительных усилий, а её хранение – огромных ресурсов компьютера. Кроме того, матрицу A_h^{-1} необходимо заново вычислять на каждой итерации по нелинейности. Поэтому данный подход выглядит малоперспективным при построении высокоэффективных вычислительных алгоритмов для численного решения уравнений Навье-Стокса.

Следует заметить, что часть диагональных элементов матрицы коэффициентов СЛАУ (3.8) равна нулю из-за отсутствия давления в уравнении неразрывности (3.1). Данное обстоятельство накладывает ограничения на выбор итерационных методов для её решения. В частности, применение метода Зейделя (1.5) к решению СЛАУ возможно, если все

диагональные элементы отличны от нуля.

2) *Нелинейность уравнений Навье-Стокса* крайне затрудняет теоретический анализ и построение универсального алгоритма. Рассмотрим краевую задачу для одномерного уравнения движения

$$\frac{du^2}{dx} = \varepsilon \frac{d^2u}{dx^2} + 2\pi \sin(4\pi x) + 4\pi^2 \varepsilon \sin(2\pi x), \quad u(0) = u(1) = 0, \quad (3.10)$$

с точным решением $u_a(x) = \sin(2\pi x)$ в качестве иллюстративного примера.

Нелинейные уравнения часто решают при помощи локально сходящегося метода Ньютона, который обладает квадратичной скоростью сходимости, если начальное приближение выбрано достаточно близким к корню. Линеаризация по Ньютону заключается в замене нелинейного члена $F(u)$ линейным приближением

$$F(u^{(n)}) \approx F(u^{(n-1)}) + \frac{\partial F(u^{(n-1)})}{\partial u^{(n-1)}}(u^{(n)} - u^{(n-1)}),$$

где n есть номер итерации по нелинейности. В данном случае $F(u) = u^2$, поэтому

$$(u^2)^{(n)} \approx (u^2)^{(n-1)} + 2u^{(n-1)}(u^{(n)} - u^{(n-1)}) = 2u^{(n-1)}u^{(n)} - (u^2)^{(n-1)},$$

и линеаризованная задача принимает вид

$$2 \frac{d(u^{(n-1)}u^{(n)})}{dx} = \varepsilon \frac{d^2u^{(n)}}{dx^2} + 2\pi \sin(4\pi x) + 4\pi^2 \varepsilon \sin(2\pi x) + \frac{d(u^2)^{(n-1)}}{dx}. \quad (3.11)$$

Выберем нулевое начальное приближение $u^{(0)} = 0$ и исследуем изменение погрешности

$$\mathcal{E}^{(n)} = \max_{[0,1]} |u_a(x) - u^{(n)}(x)|$$

в зависимости от величины параметра ε . Погрешность начального приближения $u^{(0)} = 0$ составит

$$\mathcal{E}^{(0)} = \max_{[0,1]} |u_a(x) - u^{(0)}(x)| = \max_{[0,1]} |\sin(2\pi x)| = 1.$$

Линеаризованная задача (3.11) на первой итерации Ньютона ($n = 1$) принимает вид

$$0 = \varepsilon \frac{d^2 u^{(1)}}{dx^2} + 2\pi \sin(4\pi x) + 4\pi^2 \varepsilon \sin(2\pi x),$$

откуда нетрудно найти первое приближение к решению задачи (3.10)

$$u^{(1)}(x) = \frac{1}{8\pi\varepsilon} \sin(4\pi x) + \sin(2\pi x).$$

Погрешность первого приближения составит

$$\mathcal{E}^{(1)} = \max_{[0,1]} |u_a(x) - u^{(1)}(x)| = \max_{[0,1]} \left| \frac{1}{8\pi\varepsilon} \sin(4\pi x) \right| = \frac{1}{8\pi\varepsilon}.$$

Сходимость метода Ньютона означает уменьшение погрешности приближений к решению: $\mathcal{E}^{(n)} \rightarrow 0$ при $n \rightarrow +\infty$. В рассматриваемом примере уменьшение погрешности

$$1 = \mathcal{E}^{(0)} > \mathcal{E}^{(1)} = \frac{1}{8\pi\varepsilon}$$

возможно в случае

$$\varepsilon > \frac{1}{8\pi}. \quad (3.12)$$

Нарушение неравенства (3.12) приведёт к расходимости итераций Ньютона, если начинать решение задачи (3.10) с нулевого начального приближения.

В уравнениях движения (3.1b) и (3.1c) роль малого параметра играет Re^{-1} . Для прикладных задач характерны достаточно высокие значения числа Рейнольдса: $\text{Re} = 10^4 - 10^7$. В этом случае весьма трудно обеспечить сходимость итераций по нелинейности при произвольно выбранном начальном приближении, особенно при решении стационарных уравнений.

3) *Наличие малого параметра Re^{-1} при старших производных в уравнениях движения* приводит также к появлению узких подобластей сильного изменения решения (т.н. пограничных слоёв). В общем случае заранее

не известно количество пограничных слоёв, их положение и характерные толщины. Поэтому предварительно невозможно построить вычислительную сетку таким образом, чтобы достаточное количество узлов находилось внутри пограничного слоя. Чаще всего сетку последовательно приходится перестраивать, чтобы адаптировать её к особенностям решения.

Кроме того, применение многосеточных методов к решению линеаризованной СЛАУ (3.8) выглядит проблематичным, если поправка, отыскиваемая на грубых сетках, тоже имеет особенность типа пограничного слоя. Поэтому желательно выбирать начальное приближение достаточно близким к искомому решению, чтобы поправка не имела особенностей. Проще всего этого достичь при решении нестационарных уравнений, когда в качестве начального приближения можно выбрать экстраполированные с предыдущих временных слоёв значения. Гораздо сложнее получить поправку с нужными свойствами (без пограничных слоёв) при решении стационарных уравнений Навье-Стокса.

4) *Использование сеток с большим количеством узлов.* Совершенствование математических моделей, используемых в вычислительной гидродинамике, опережает развитие компьютерной техники. Современные прикладные задачи характеризует использование достаточно мелких сеток с количеством узлов $10^6 - 10^9$, причём для отдельных приложений (например, прямое моделирование турбулентности) требуются существенно более мелкие сетки. Поэтому разрабатываемые методы численного решения уравнений Навье-Стокса должны обладать оптимальной или близкой к ней скоростью сходимости и позволять эффективно распараллеливать вычисления. В общем случае вычислительная сетка является структурированной, но неортогональной. Соотношение шагов сетки может быть достаточно произвольным, что влияет на выбор упорядочивания неизвестных.

§ 2. Разнесённая сетка

В настоящее время для аппроксимации уравнений Навье-Стокса широкое распространение получили *разнесённые сетки* (staggered grids) [24]. В качестве иллюстрации построения разнесённой сетки рассмотрим задачу о нестационарном изотермическом течении в каверне с движущейся крышкой (рис. 3.1). Квадратная каверна 1×1 заполнена жидкостью с постоянными теплофизическими свойствами. Верхняя крышка каверны, движущаяся со скоростью $U_w(t)$, увлекает за собой прилегающий слой жидкости. Как следствие, в каверне возникает вихревое движение жидкости. Стенки каверны и крышка считаются непроницаемыми для жидкости, поэтому граничные условия для компонент скорости заданы в виде:

- а) крышка каверны: $u(t, x, 1) = U_w(t)$, $v(t, x, 1) = 0$;
- б) правая стенка каверны: $u(t, 1, y) = 0$, $v(t, 1, y) = 0$;
- в) дно каверны: $u(t, x, 0) = 0$, $v(t, x, 0) = 0$;
- г) левая стенка каверны: $u(t, 0, y) = 0$, $v(t, 0, y) = 0$.

В начальный момент $t = 0$ скорость крышки равна нулю и среда в каверне неподвижна

$$U_w(0) = 0, \quad u(0, x, y) = v(0, x, y) = 0.$$

Задача состоит в отыскании решения уравнений (3.1), которое удовлетворяет перечисленным выше начальным и граничным условиям. В постановке задачи отсутствуют граничные условия для давления p , поэтому решение уравнений (3.1) можно отыскать только с точностью до постоянной, т.е. если (u, v, p) является решением, то $(u, v, p + C)$ также является решением, где C есть некоторая константа. Давление часто определяют единственным образом, потребовав

$$\int_0^1 \int_0^1 p \, dx \, dy = 0.$$

Отличительной особенностью разнесённой сетки является использование различных узлов для определения сеточных функций u_h , v_h и p_h и различных контрольных объёмов для аппроксимации уравнений движения (3.1b) и (3.1c) и уравнений неразрывности (3.1a) и энергии (3.2).

Построим в области $\Omega = \{(x, y) \mid 0 < x < 1, 0 < y < 1\}$ равномерную сетку G_1^0 , состоящую из множеств точек $G^v(0;1)$ и $G^f(0;1)$:

$$\begin{aligned} G^v(0;1) &= \{(x_i^v, y_j^v) \mid x_i^v = (i-1)h_x, \quad i = 1, 2, \dots, N_x^0 + 1; \\ &\quad y_j^v = (j-1)h_y, \quad j = 1, 2, \dots, N_y^0 + 1\}, \\ G^f(0;1) &= \{(x_i^f, y_j^f) \mid x_i^f = (x_i^v + x_{i+1}^v)/2, \quad i = 1, 2, \dots, N_x^0; \\ &\quad y_j^f = (y_j^v + y_{j+1}^v)/2, \quad j = 1, 2, \dots, N_y^0\}, \end{aligned}$$

где $h_x = 1/N_x^0$ и $h_y = 1/N_y^0$ суть шаги сетки по направлениям X и Y.

Положим, что областью определения сеточной функции u_h являются узлы (x_i^v, y_j^f) , сеточной функции v_h – узлы (x_i^f, y_j^v) , сеточных функций p_h и T_h – узлы (x_i^f, y_j^f) , и выберем следующие контрольные объёмы для аппроксимации основополагающих уравнений:

а) контрольный объём для аппроксимации уравнения движения (3.1b)

$$V_{ij}^u = \{(x, y) \mid x_{i-1}^f \leq x \leq x_i^f, y_j^v \leq y \leq y_{j+1}^v\},$$

б) контрольный объём для аппроксимации уравнения движения (3.1c)

$$V_{ij}^v = \{(x, y) \mid x_i^v \leq x \leq x_{i+1}^v, y_{j-1}^f \leq y \leq y_j^f\},$$

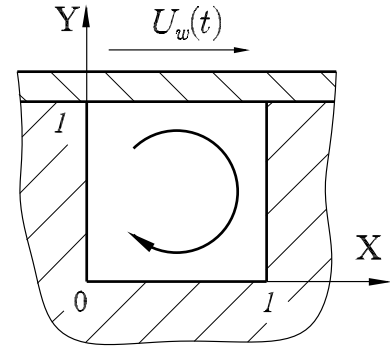


Рис. 3.1. Каверна с движущейся крышкой

в) контрольный объём для аппроксимации уравнений энергии (3.2) и неразрывности (3.1a)

$$V_{ij}^* = \{(x, y) \mid x_i^v \leq x \leq x_{i+1}^v, y_j^v \leq y \leq y_{j+1}^v\}.$$

Расположение контрольных объёмов V_{ij}^u , V_{ij}^v и V_{ij}^* на разнесённой сетке показано на рис. 3.2. Вычислительные шаблоны для аппроксимации уравнений движения (3.1b) и (3.1c), неразрывности (3.1a) и энергии (3.2) показаны на рис. 3.3. Обобщение на трёхмерный случай и на неравномерные сетки является очевидным.

На неразнесённых сетках все сеточные функции определены в одних и тех же узлах. Такие сетки являются более простыми для аппроксимации, однако при решении уравнений Навье-Стокса возможно появление осцилляций нефизичного характера [24].

Аппроксимацию уравнений Навье-Стокса (3.1) и энергии (3.2) осуществляют на разнесённой сетке интегро-интерполяционным методом (3.3 гл. 2), поэтому далее при построении разностных схем будем говорить только об используемых контрольных объёмах, подразумевая, что с каждым из них связан конкретный вычислительный шаблон (рис. 3.3).

Далее, пожертвовав строгостью ради наглядности, будем обозначать непрерывные (u, v, p, T) и сеточные $(u_{ij}, v_{ij}, p_{ij}, T_{ij})$ функции одинаковыми буквами. Интегрирование уравнений движения (3.1b) и (3.1c) по контрольным объёмам V_{ij}^u и V_{ij}^v , неразрывности (3.1a) и энергии (3.2) по объёму V_{ij}^* приводит к следующей двухслойной неявной разностной схеме:

а) сеточный аналог уравнения неразрывности (3.1a)

$$\frac{u_{i+1j}^{(n+1)} - u_{ij}^{(n+1)}}{h_x} + \frac{v_{ij+1}^{(n+1)} - v_{ij}^{(n+1)}}{h_y} = 0, \quad (3.13)$$

б) сеточный аналог уравнения движения по X (3.1b)

$$\begin{aligned}
 & \frac{u_{ij}^{(n+1)} - u_{ij}^{(n)}}{h_t} + \frac{(u^2) \Big|_{(x_i^f, y_j^f)}^{(n+1)} - (u^2) \Big|_{(x_{i-1}^f, y_j^f)}^{(n+1)}}{h_x} \\
 & + \frac{(uv) \Big|_{(x_i^v, y_{j+1}^v)}^{(n+1)} - (uv) \Big|_{(x_i^v, y_j^v)}^{(n+1)}}{h_y} = - \frac{p_{ij}^{(n+1)} - p_{i-1j}^{(n+1)}}{h_x} \\
 & + \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{u_{i-1j}^{(n+1)} - 2u_{ij}^{(n+1)} + u_{i+1j}^{(n+1)}}{h_x^2} + \frac{u_{ij-1}^{(n+1)} - 2u_{ij}^{(n+1)} + u_{ij+1}^{(n+1)}}{h_y^2} \right),
 \end{aligned} \tag{3.14}$$

в) сеточный аналог уравнения движения по Y (3.1c)

$$\begin{aligned}
 & \frac{v_{ij}^{(n+1)} - v_{ij}^{(n)}}{h_t} + \frac{(vu) \Big|_{(x_{i+1}^v, y_j^v)}^{(n+1)} - (vu) \Big|_{(x_i^v, y_j^v)}^{(n+1)}}{h_x} \\
 & + \frac{(v^2) \Big|_{(x_i^f, y_j^f)}^{(n+1)} - (v^2) \Big|_{(x_i^f, y_{j-1}^f)}^{(n+1)}}{h_y} = - \frac{p_{ij}^{(n+1)} - p_{ij-1}^{(n+1)}}{h_y} \\
 & + \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{v_{i-1j}^{(n+1)} - 2v_{ij}^{(n+1)} + v_{i+1j}^{(n+1)}}{h_x^2} + \frac{v_{ij-1}^{(n+1)} - 2v_{ij}^{(n+1)} + v_{ij+1}^{(n+1)}}{h_y^2} \right),
 \end{aligned} \tag{3.15}$$

г) сеточный аналог уравнения энергии (3.2)

$$\begin{aligned}
 & \frac{T_{ij}^{(n+1)} - T_{ij}^{(n)}}{h_t} + \frac{u_{i+1j}^{(n+1)} T \Big|_{(x_{i+1}^v, y_j^f)}^{(n+1)} - u_{ij}^{(n+1)} T \Big|_{(x_i^v, y_j^f)}^{(n+1)}}{h_x} \\
 & + \frac{v_{ij+1}^{(n+1)} T \Big|_{(x_i^f, y_{j+1}^v)}^{(n+1)} - v_{ij}^{(n+1)} T \Big|_{(x_i^f, y_j^v)}^{(n+1)}}{h_y} \\
 & + \frac{1}{\text{Pe}} \left(\frac{T_{i-1j}^{(n+1)} - 2T_{ij}^{(n+1)} + T_{i+1j}^{(n+1)}}{h_x^2} + \frac{T_{ij-1}^{(n+1)} - 2T_{ij}^{(n+1)} + T_{ij+1}^{(n+1)}}{h_y^2} \right).
 \end{aligned} \tag{3.16}$$

Здесь $u_{ij}^{(n)}$, $v_{ij}^{(n)}$, $T_{ij}^{(n)}$ являются известными значениями на предыдущем

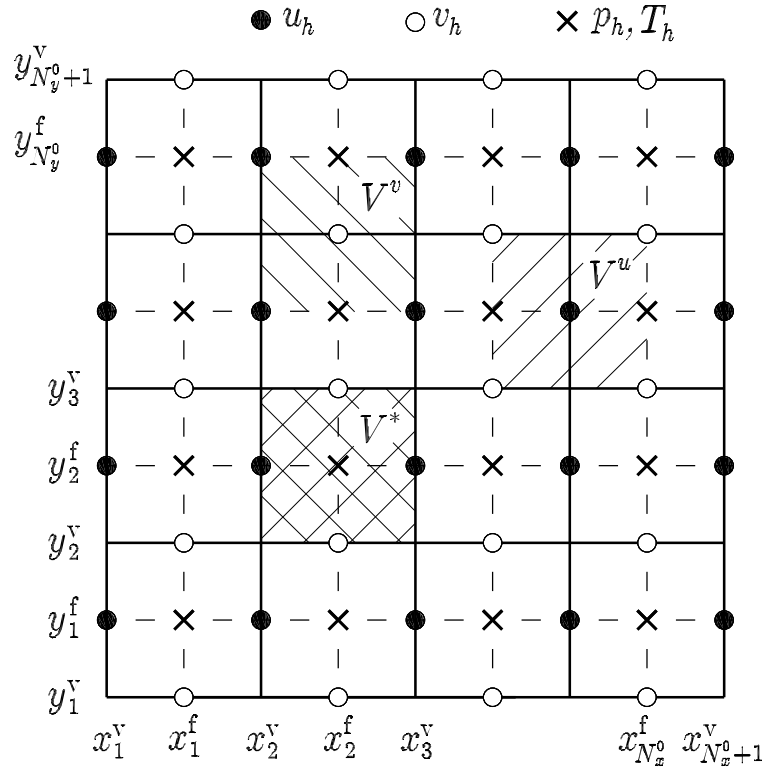


Рис. 3.2. Расположение контрольных объёмов V^u , V^v и V^* на разнесённой сетке

временном слое n , $u_{ij}^{(n+1)}$, $v_{ij}^{(n+1)}$, $p_{ij}^{(n+1)}$, $T_{ij}^{(n+1)}$ – искомые значения на текущем временном слое $n + 1$, а h_t есть безразмерный шаг по времени.

Аппроксимация уравнения неразрывности (3.1a), а также членов p'_x и p'_y в уравнениях движения (3.1b) и (3.1c) на разнесённой сетке осуществляется без дополнительной интерполяции. Спектральные свойства разностных уравнений, построенных с использованием разнесённой сетки, существенно ближе к спектральным свойствам их дифференциальных прообразов, чем для неразнесённых сеток (когда все сеточных функции определены в одних и тех же узлах) [29].

К недостатку разнесённых сеток следует отнести приближённую аппроксимацию граничных условий для компонент скорости. Согласно рис. 3.2, на границе $y = 0$ граничные условия для компоненты скорости

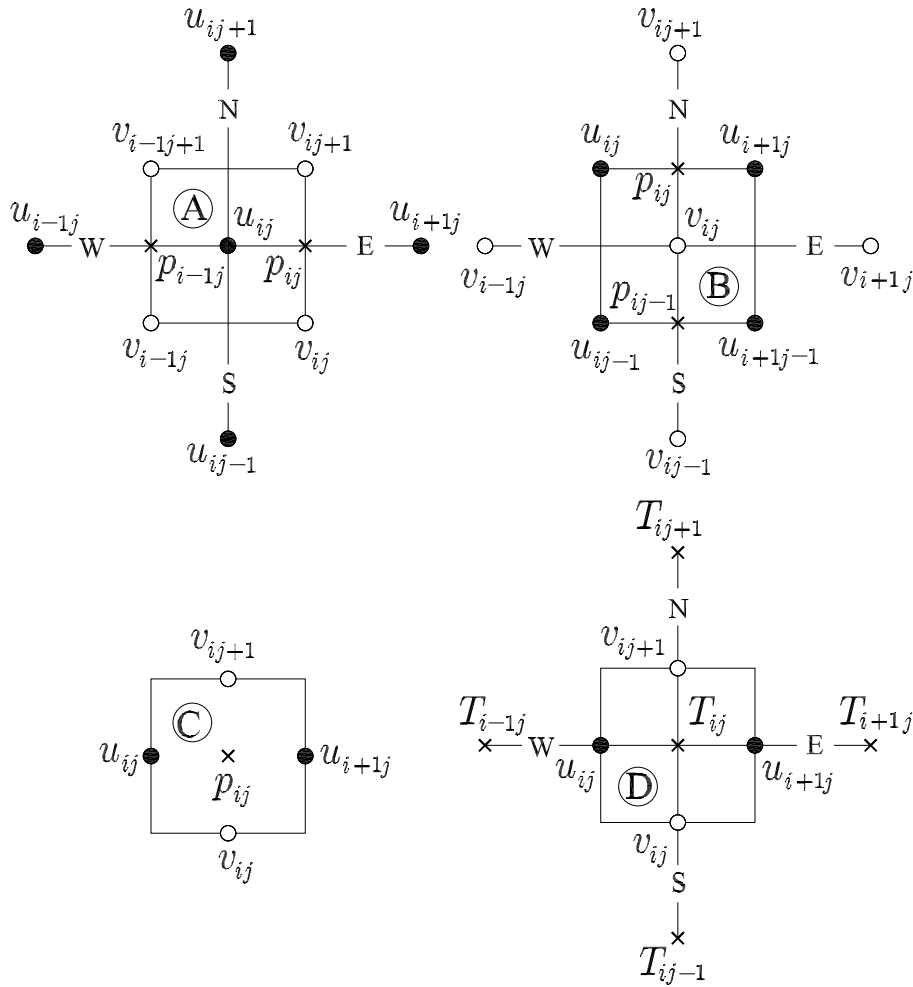


Рис. 3.3. Контрольные объёмы и вычислительные шаблоны для аппроксимации уравнений движения (3.1b) (A) и (3.1c) (B), неразрывности (3.1a) (C) и энергии (3.2) (D)

v_h аппроксимируют точно (узлы \circ расположены на границе), а для компоненты u_h – приближённо (узлы \bullet отодвинуты от границы на расстояние $h_y/2$). В § 4 гл. 2 рассмотрен аналогичный случай при аппроксимации граничных условий для поправки на грубых сетках.

Далее необходимо линеаризовать полученные нелинейные сеточные уравнения и выразить значения $u^{(n+1)}$, $v^{(n+1)}$ и $T^{(n+1)}$ на гранях соответствующих контрольных объёмов V_{ij}^u , V_{ij}^v и V_{ij}^* через значения сеточных функций в узлах.

Существуют разнообразные способы линеаризации нелинейных сеточных уравнений (3.14), (3.15) и (3.16), но наибольшее распространение получил метод Ньютона [8, 13]. Линеаризация по Ньютону состоит в замене нелинейных членов u_{ij}^2 , $u_{ij}v_{ij}$, v_{ij}^2 , $u_{ij}T_{ij}$ и $v_{ij}T_{ij}$ линейными приближениями вида

$$u_{ij}^2 := 2\bar{u}_{ij}u_{ij} - \bar{u}_{ij}^2, \quad (3.17a)$$

$$u_{ij}v_{ij} := \bar{v}_{ij}u_{ij} + \bar{u}_{ij}v_{ij} - \bar{u}_{ij}\bar{v}_{ij}, \quad (3.17b)$$

$$v_{ij}^2 := 2\bar{v}_{ij}v_{ij} - \bar{v}_{ij}^2, \quad (3.17c)$$

$$u_{ij}T_{ij} := \bar{T}_{ij}u_{ij} + \bar{u}_{ij}T_{ij} - \bar{u}_{ij}\bar{T}_{ij}, \quad (3.17d)$$

$$v_{ij}T_{ij} := \bar{T}_{ij}v_{ij} + \bar{v}_{ij}T_{ij} - \bar{v}_{ij}\bar{T}_{ij}, \quad (3.17e)$$

где \bar{u}_{ij} , \bar{v}_{ij} и \bar{T}_{ij} суть известные значения с предыдущей итерации по нелинейности, а $:=$ означает равенство в смысле присвоения.

Например, конвективный член в уравнении (3.14) линеаризуют следующим образом:

$$\begin{aligned} & \frac{(u^2)\Big|_{(x_i^f, y_j^f)}^{(n+1)} - (u^2)\Big|_{(x_{i-1}^f, y_j^f)}^{(n+1)}}{h_x} \approx \frac{(2\bar{u}u - \bar{u}^2)\Big|_{(x_i^f, y_j^f)}^{(n+1)} - (2\bar{u}u - \bar{u}^2)\Big|_{(x_{i-1}^f, y_j^f)}^{(n+1)}}{h_x} \\ & = 2 \frac{\bar{u}\Big|_{(x_i^f, y_j^f)}^{(n+1)} u\Big|_{(x_i^f, y_j^f)}^{(n+1)} - \bar{u}\Big|_{(x_{i-1}^f, y_j^f)}^{(n+1)} u\Big|_{(x_{i-1}^f, y_j^f)}^{(n+1)}}{h_x} - \frac{(\bar{u}^2)\Big|_{(x_i^f, y_j^f)}^{(n+1)} - (\bar{u}^2)\Big|_{(x_{i-1}^f, y_j^f)}^{(n+1)}}{h_x}. \end{aligned}$$

Воспользуемся линейной интерполяцией, чтобы выразить значения \bar{u} на гранях контрольных объёмов через значения в узлах

$$\bar{u}\Big|_{(x_i^f, y_j^f)}^{(n+1)} = \frac{\bar{u}_{ij}^{(n+1)} + \bar{u}_{i+1j}^{(n+1)}}{2} + O(h_x^2), \quad \bar{u}\Big|_{(x_{i-1}^f, y_j^f)}^{(n+1)} = \frac{\bar{u}_{ij}^{(n+1)} + \bar{u}_{i-1j}^{(n+1)}}{2} + O(h_x^2).$$

Тогда линеаризованная форма данного члена выглядит как

$$\frac{(u^2)\Big|_{(x_i^f, y_j^f)}^{(n+1)} - (u^2)\Big|_{(x_{i-1}^f, y_j^f)}^{(n+1)}}{h_x} \approx - \frac{\left(\bar{u}_{ij}^{(n+1)} + \bar{u}_{i+1j}^{(n+1)}\right)^2 - \left(\bar{u}_{ij}^{(n+1)} + \bar{u}_{i-1j}^{(n+1)}\right)^2}{4h_x} + \frac{\left(\bar{u}_{ij}^{(n+1)} + \bar{u}_{i+1j}^{(n+1)}\right)u\Big|_{(x_i^f, y_j^f)}^{(n+1)} - \left(\bar{u}_{ij}^{(n+1)} + \bar{u}_{i-1j}^{(n+1)}\right)u\Big|_{(x_{i-1}^f, y_j^f)}^{(n+1)}}{h_x}.$$

Значения $u\Big|_{(x_{i-1}^f, y_j^f)}^{(n+1)}$ и $u\Big|_{(x_i^f, y_j^f)}^{(n+1)}$ на западной и восточной гранях контрольного объёма тоже необходимо выразить через значения функции в узлах сетки, т.е. через $u_{i-1j}^{(n+1)}$, $u_{ij}^{(n+1)}$ и $u_{i+1j}^{(n+1)}$.

Линеаризацию остальных нелинейных членов в уравнениях (3.14), (3.15) и (3.16) осуществляют аналогичным образом.

§ 3. Аппроксимация конвективно-диффузионного уравнения

Особенности аппроксимации конвективно-диффузионных уравнений покажем на примере следующей модельной задачи

$$\varepsilon\psi'' + \psi' = 0, \quad \psi(0) = 0, \quad \psi(1) = 1,$$

где ε есть малый параметр. Данная краевая задача имеет точное решение

$$\psi(x) = \frac{1 - \exp\left(-\frac{x}{\varepsilon}\right)}{1 - \exp\left(-\frac{1}{\varepsilon}\right)}. \quad (3.18)$$

Положим, что для аппроксимации ψ' на равномерной сетке с шагом h использована центральная разность

$$\varepsilon \frac{\phi_{i-1} - 2\phi_i + \phi_{i+1}}{h^2} + \frac{\phi_{i+1} - \phi_{i-1}}{2h} = 0, \quad \phi_1 = 0, \quad \phi_{N+1} = 1, \quad h = 1/N.$$

Очевидно, что данная разностная схема имеет второй порядок аппроксимации. Решение данной разностной краевой задачи будем искать в виде

$\phi_i = s^i$ [23]. Тогда справедливо

$$\varepsilon \frac{1 - 2s + s^2}{h^2} + \frac{s^2 - 1}{2h} = 0.$$

Корнями полученного квадратного уравнения являются $s_1 = 1$ и

$$s_2 = \frac{2\varepsilon - h}{2\varepsilon + h},$$

поэтому общее решение разностной краевой задачи имеет вид

$$\phi_i = C_1 + C_2 s_2^i, \quad (3.19)$$

где C_1 и C_2 суть некоторые постоянные, которые однозначно определяют при помощи граничных условий $\phi_1 = 0$ и $\phi_{N+1} = 1$.

Точное решение (3.18) является монотонно возрастающей функцией. Численное решение будет монотонно возрастающей функцией только при $s_2 > 0$

$$s_2 > 0 \Rightarrow 2\varepsilon > h.$$

Нарушение условия $2\varepsilon > h$ приводит к тому, что значение s_2^i будет положительным при чётных i и отрицательным при нечётных, т.е. численное решение является немонотонным (осциллирующим), в отличие от точного решения (3.18). Условие $2\varepsilon > h$ накладывает жёсткое ограничение на шаг вычислительной сетки при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Теперь положим, что для аппроксимации ψ' на равномерной сетке с шагом h использована односторонняя разность

$$\varepsilon \frac{\phi_{i-1} - 2\phi_i + \phi_{i+1}}{h^2} + \frac{\phi_{i+1} - \phi_i}{h} = 0, \quad \phi_1 = 0, \quad \phi_{N+1} = 1, \quad h = 1/N.$$

Данная разностная схема имеет первый порядок аппроксимации. Общее решение и в этом случае имеет вид (3.19), где

$$s_2 = \frac{\varepsilon}{\varepsilon + h}.$$

Численное решение ϕ_i всегда будет монотонным вне зависимости от соотношения величин ε и h .

Однако первый порядок аппроксимации может привести к недостаточной точности численного решения. Используя формулу Тейлора, нетрудно получить

$$\begin{aligned}\frac{\psi(x_{i+1}^y) - \psi(x_i^y)}{h} &= \psi'(x_i^y) + \frac{h}{2}\psi''(x_i^y) + O(h^2), \\ \varepsilon \frac{\psi(x_{i-1}^y) - 2\psi(x_i^y) + \psi(x_{i+1}^y))}{h^2} &= \varepsilon\psi''(x_i^y) + O(h^2).\end{aligned}$$

Суммирование данных разложений приводит к следующему соотношению:

$$\varepsilon \frac{\phi_{i-1} - 2\phi_i + \phi_{i+1}}{h^2} + \frac{\phi_{i+1} - \phi_i}{h} = \left(\varepsilon + \frac{h}{2}\right)\psi''(x_i^y) + \psi'(x_i^y) + O(h^2),$$

т.е. разностная схема аппроксимирует исходную краевую задачу с малым параметром $\varepsilon + h/2$ вместо ε . Подобное «увеличение» малого параметра приводит к увеличению характерной толщины пограничного слоя.

Краевые задачи, решение которых имеет особенности типа пограничного слоя, аппроксимируют чаще всего на неравномерных сетках. Рассмотрим следующую краевую задачу:

$$(\theta\psi)' = \varepsilon(\psi)'', \quad \psi(0) = 0, \quad \psi(1) = 1, \quad (3.20)$$

где функция $\theta(x)$ является достаточно гладкой. Пусть заранее известно, что пограничный слой расположен около границы $x = 0$. Построим неравномерную сетку

$$G = \{x_i^y \mid 0 = x_1^y < x_2^y < \dots < x_{N+1}^y = 1\},$$

такую, что

$$x_i^y - x_{i-1}^y < x_{i+1}^y - x_i^y, \quad i = 2, \dots, N,$$

т.е. минимальный шаг сетки G будет возле границы $x = 0$ для разрешения поведения численного решения в пограничном слое. Грани контрольных объёмов расположим посередине между узлами x_i^v и x_{i+1}^v

$$x_i^f = \frac{1}{2}(x_i^v + x_{i+1}^v), \quad i = 1, \dots, N,$$

т.е. контрольный объём V_i задан как $V_i = \{x \mid x_{i-1}^f \leq x \leq x_i^f\}$.

Интегрирование дифференциального уравнения (3.20) по контрольному объёму V_i приводит к следующей разностной схеме:

$$\theta(x_i^f)\phi \Big|_{x_i^f} - \theta(x_{i-1}^f)\phi \Big|_{x_{i-1}^f} = \varepsilon \left(\frac{\phi_{i+1} - \phi_i}{x_{i+1}^v - x_i^v} - \frac{\phi_i - \phi_{i-1}}{x_i^v - x_{i-1}^v} \right). \quad (3.21)$$

Воспользуемся интерполяцией типа

$$\phi \Big|_{x_k^f} = (1 - \gamma_k)\phi_k + \gamma_k\phi_{k+1}, \quad k = i - 1, i, \quad (3.22)$$

чтобы выразить значения $\phi \Big|_{x_k^f}$ на гранях контрольного объёма через значения в узлах ϕ_k и ϕ_{k+1} . Значения весового параметра $\gamma_k = 0$ или $\gamma_k = 1$ соответствуют односторонним разностям, а $\gamma_k = 1/2$ – центральной. Подставляя (3.22) в (3.21), получим уравнение

$$\begin{aligned} & \theta(x_i^f) \left((1 - \gamma_i)\phi_i + \gamma_i\phi_{i+1} \right) - \theta(x_{i-1}^f) \left((1 - \gamma_{i-1})\phi_{i-1} + \gamma_{i-1}\phi_i \right) \\ & = \varepsilon \left(\frac{\phi_{i+1} - \phi_i}{x_{i+1}^v - x_i^v} - \frac{\phi_i - \phi_{i-1}}{x_i^v - x_{i-1}^v} \right), \end{aligned}$$

которое после приведения подобных слагаемых принимает вид

$$a_i\phi_{i-1} + b_i\phi_i + c_i\phi_{i+1} = 0,$$

где

$$\begin{aligned} a_i &= \frac{\varepsilon}{x_i^v - x_{i-1}^v} + \theta(x_{i-1}^f)(1 - \gamma_{i-1}), \\ b_i &= -\frac{\varepsilon}{x_{i+1}^v - x_i^v} - \frac{\varepsilon}{x_i^v - x_{i-1}^v} - \theta(x_i^f)(1 - \gamma_i) + \theta(x_{i-1}^f)\gamma_{i-1}, \\ c_i &= \frac{\varepsilon}{x_{i+1}^v - x_i^v} - \theta(x_i^f)\gamma_i. \end{aligned}$$

Определение. Разностные схемы, сохраняющие монотонность профиля разностного решения, называются *монотонными* [13].

Признак монотонности. Явная двухслойная линейная разностная схема

$$y_i^{(n+1)} = \sum_m \varrho_m y_{i+m}^{(n)} \quad (3.23)$$

монотонна тогда и только тогда, когда все $\varrho_m \geq 0$ [13].

Если двухслойная линейная разностная схема неявна, то её можно преобразовать к явной форме (3.23), где пределы суммы по m бесконечны, а затем применить признак монотонности [13].

Теперь рассмотрим частные случаи:

1) Пусть $\theta(x_i^f) > 0$. Потребуем, чтобы $c_i \geq 0$, т.е.

$$\frac{\varepsilon}{x_{i+1}^v - x_i^v} \geq \theta(x_i^f) \gamma_i \Rightarrow \gamma_i \leq \frac{1}{\theta(x_i^f)} \frac{\varepsilon}{x_{i+1}^v - x_i^v}.$$

Однако в случае

$$\gamma_i \leq \frac{1}{2} \leq \frac{1}{\theta(x_i^f)} \frac{\varepsilon}{x_{i+1}^v - x_i^v}$$

следует выбирать $\gamma_i = 1/2$ из-за более высокого порядка аппроксимации. Поэтому наиболее подходящий выбор весового параметра в случае $\theta(x_i^f) > 0$ выглядит как

$$\gamma_i = \min \left(\frac{1}{2}; \frac{1}{\theta(x_i^f)} \frac{\varepsilon}{x_{i+1}^v - x_i^v} \right). \quad (3.24)$$

2) Пусть $\theta(x_i^f) < 0$. Потребуем, чтобы $a_{i+1} \geq 0$, т.е.

$$\frac{\varepsilon}{x_{i+1}^v - x_i^v} \geq |\theta(x_i^f)| (1 - \gamma_i) \Rightarrow \gamma_i \geq 1 - \frac{1}{|\theta(x_i^f)|} \frac{\varepsilon}{x_{i+1}^v - x_i^v}.$$

Опять же в случае

$$\gamma_i \geq \frac{1}{2} \geq 1 - \frac{1}{|\theta(x_i^f)|} \frac{\varepsilon}{x_{i+1}^v - x_i^v}$$

следует выбирать $\gamma_i = 1/2$ из-за более высокого порядка аппроксимации. Поэтому наиболее подходящий выбор весового параметра в случае $\theta(x_i^f) < 0$ выглядит как

$$\gamma_i = \max \left(\frac{1}{2}; 1 - \frac{1}{|\theta(x_i^f)|} \frac{\varepsilon}{x_{i+1}^v - x_i^v} \right). \quad (3.25)$$

Положим, что величина шага $x_{i+1}^v - x_i^v$ построенной сетки такова, что внутри пограничного слоя справедливо

$$\frac{1}{|\theta(x_i^f)|} \frac{\varepsilon}{x_{i+1}^v - x_i^v} \geq \frac{1}{2}.$$

Тогда в силу (3.24) и (3.25) $\gamma_i = 1/2$ и внутри пограничного слоя (т.е. области сильного изменения решения) разностная схема имеет второй порядок аппроксимации. Вне пограничного слоя порядок аппроксимации уменьшается до первого, но одновременно уменьшаются и величины старших производных решения. Поэтому, как правило, не происходит сильного увеличения главного члена погрешности аппроксимации. В общем случае вычислительную сетку с нужными свойствами трудно построить заранее, так как неизвестна характерная толщина пограничного слоя.

Построение монотонных схем высокого порядка аппроксимации является достаточно трудной задачей. Схемы высокого порядка различают по степени многочлена, используемого для интерполяции искомой функции между соседними узлами. Обычно используют многочлены не выше третьей степени. Обзор подобных схем приведён в [7].

§ 4. Результирующая СЛАУ

Положим, что нелинейные сеточные аналоги уравнений движения (3.14) и (3.15) и энергии (3.16) линеаризованы при помощи метода Ньютона (3.17), а аппроксимация конвективных членов осуществлена при помощи интерполяции типа (3.22). Согласно вычислительным шаблонам,

показанным на рис. 3.3, запишем линеаризованные аналоги в виде:

а) линеаризованный сеточный аналог уравнения движения по X

$$\begin{aligned} U_{ij}^W u_{i-1j}^{(n+1)} + U_{ij}^E u_{i+1j}^{(n+1)} + U_{ij}^S u_{ij-1}^{(n+1)} + U_{ij}^N u_{ij+1}^{(n+1)} + U_{ij}^P u_{ij}^{(n+1)} \\ + U_{ij}^{WN} v_{i-1j+1}^{(n+1)} + U_{ij}^{EN} v_{ij+1}^{(n+1)} + U_{ij}^{WS} v_{i-1j}^{(n+1)} + U_{ij}^{ES} v_{ij}^{(n+1)} \\ + \frac{p_{ij}^{(n+1)} - p_{i-1j}^{(n+1)}}{h_x} = S_{ij}^u, \end{aligned} \quad (3.26)$$

б) линеаризованный сеточный аналог уравнения движения по Y

$$\begin{aligned} V_{ij}^W v_{i-1j}^{(n+1)} + V_{ij}^E v_{i+1j}^{(n+1)} + V_{ij}^S v_{ij-1}^{(n+1)} + V_{ij}^N v_{ij+1}^{(n+1)} + V_{ij}^P v_{ij}^{(n+1)} \\ + V_{ij}^{WN} u_{ij}^{(n+1)} + V_{ij}^{EN} u_{i+1j}^{(n+1)} + V_{ij}^{WS} u_{ij-1}^{(n+1)} + V_{ij}^{ES} u_{i+1j-1}^{(n+1)} \\ + \frac{p_{ij}^{(n+1)} - p_{ij-1}^{(n+1)}}{h_y} = S_{ij}^v, \end{aligned} \quad (3.27)$$

в) линеаризованный сеточный аналог уравнения энергии

$$\begin{aligned} H_{ij}^W T_{i-1j}^{(n+1)} + H_{ij}^E T_{i+1j}^{(n+1)} + H_{ij}^S T_{ij-1}^{(n+1)} + H_{ij}^N T_{ij+1}^{(n+1)} + H_{ij}^P T_{ij}^{(n+1)} \\ + H_{ij}^w u_{ij}^{(n+1)} + H_{ij}^e u_{i+1j}^{(n+1)} + H_{ij}^s v_{ij}^{(n+1)} + H_{ij}^n v_{ij+1}^{(n+1)} = S_{ij}^T. \end{aligned} \quad (3.28)$$

Сначала рассмотрим изотермическое течение $T_{ij}^{(n+1)} = const$. Воспользуемся следующим точечным упорядочиванием неизвестных $u_{ij}^{(n+1)}$, $v_{ij}^{(n+1)}$ и $p_{ij}^{(n+1)}$, как показано на рис. 1.3, т.е. сформируем векторы \mathbf{u}_h , \mathbf{v}_h и \mathbf{p}_h . Аналогично сформируем векторы правых частей \mathbf{s}_h^u и \mathbf{s}_h^v уравнений (3.26) и (3.27). Тогда результирующую СЛАУ, состоящую из (3.26), (3.27) и (3.13), можно записать в матричной форме

$$\begin{pmatrix} A_h & B_h^T \\ B_h & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{V}_h \\ \mathbf{p}_h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{s}_h \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{V}_h = \begin{pmatrix} \mathbf{u}_h \\ \mathbf{v}_h \end{pmatrix}, \quad \mathbf{s}_h = \begin{pmatrix} \mathbf{s}_h^u \\ \mathbf{s}_h^v \end{pmatrix}. \quad (3.29)$$

Ранее аналогичная СЛАУ получена в результате аппроксимации и линеаризации уравнений Навье-Стокса, записанных в операторной форме

(3.8). В § 1 гл. 3 показано, что из четырёх блоков матрицы коэффициентов СЛАУ (3.29) только A_h является обратимым. Обзор методов решения подобных СЛАУ приведён в [38]. Далее будут рассмотрены два наиболее распространённых метода решения СЛАУ (3.29).

§ 5. Метод Узавы

Метод Узавы основан на использовании блочной структуры матрицы коэффициентов СЛАУ (3.29). Итерации метода Узавы имеют вид

$$A_h \vec{V}_h^{(\nu+1)} + B_h^T \mathbf{p}_h^{(\nu)} = \mathbf{s}_h, \quad (3.30a)$$

$$Q \mathbf{p}_h^{(\nu+1)} = Q \mathbf{p}_h^{(\nu)} + B_h \vec{V}_h^{(\nu+1)}, \quad (3.30b)$$

где Q есть некоторая матрица, а ν – номер итерации.

Положим, что уравнение (3.30a) решено точно:

$$\vec{V}_h^{(\nu+1)} + A_h^{-1} B_h^T \mathbf{p}_h^{(\nu)} = A_h^{-1} \mathbf{s}_h.$$

Подставляя $\vec{V}_h^{(\nu+1)}$ во второе уравнение (3.30b), получим

$$Q \mathbf{p}_h^{(\nu+1)} = Q \mathbf{p}_h^{(\nu)} + B_h \left(A_h^{-1} \mathbf{s}_h - A_h^{-1} B_h^T \mathbf{p}_h^{(\nu)} \right)$$

или

$$\mathbf{p}_h^{(\nu+1)} = \left(I - Q^{-1} B_h A_h^{-1} B_h^T \right) \mathbf{p}_h^{(\nu)} + Q^{-1} B_h A_h^{-1} \mathbf{s}_h.$$

Если итерации Узавы сходятся, то точное решение \mathbf{p}_h должно удовлетворять уравнению

$$\mathbf{p}_h = \left(I - Q^{-1} B_h A_h^{-1} B_h^T \right) \mathbf{p}_h + Q^{-1} B_h A_h^{-1} \mathbf{s}_h.$$

Тогда векторы ошибки последующего и предыдущего приближений связаны соотношением

$$\mathbf{p}_h - \mathbf{p}_h^{(\nu+1)} = \left(I - Q^{-1} \mathcal{S} \right) (\mathbf{p}_h - \mathbf{p}_h^{(\nu)}),$$

где матрица $\mathcal{S} = B_h A_h^{-1} B_h^T$ есть *дополнение по Шуру* (3.9).

Очевидно, что выбор матрицы Q определяет скорость сходимости метода Узавы. С одной стороны, необходимо чтобы $Q \rightarrow \mathcal{S}$. Если удастся добиться, что $\|I - Q^{-1}\mathcal{S}\| \leq \omega < 1$, то метод Узавы будет сходиться с линейной скоростью

$$\|\mathbf{p}_h - \mathbf{p}_h^{(\nu+1)}\| \leq \omega \|\mathbf{p}_h - \mathbf{p}_h^{(\nu)}\|.$$

С другой стороны, матрица Q должна быть легко обратимой, т.е. решение (3.30b) не должно требовать чрезмерных вычислительных усилий.

Чаще всего матрицу Q задают в виде $B_h D_A^{-1} B_h^T$, где диагональная матрица D_A образована диагональными элементами A_h .

Однако методу Узавы присущи определённые недостатки. Положим, что шаг по времени h_t настолько мал, что

$$A_h \approx h_t^{-1} I \Rightarrow A_h^{-1} \approx h_t I.$$

В этом случае выбор матрицы Q заметно упрощается:

$$\mathcal{S} = B_h A_h^{-1} B_h^T \approx h_t B_h B_h^T = Q.$$

Из аналогии с (3.6) следует, что $B_h B_h^T = \Delta_h$. Поэтому при малых h_t уравнение (3.30b) принимает вид

$$h_t \Delta_h \delta_p^{(\nu+1)} = B_h \vec{V}_h^{(\nu+1)}, \quad (3.31)$$

где $\delta_p^{(\nu+1)} = \mathbf{p}_h^{(\nu+1)} - \mathbf{p}_h^{(\nu)}$ есть вектор поправок к давлению. В двухмерном случае уравнение (3.31) является сеточным аналогом следующего дифференциального уравнения

$$\frac{\partial^2 \delta_p^{(\nu+1)}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \delta_p^{(\nu+1)}}{\partial y^2} = \frac{1}{h_t} \left(\frac{\partial u^{(\nu+1)}}{\partial x} + \frac{\partial v^{(\nu+1)}}{\partial y} \right). \quad (3.32)$$

Для отыскания поправки к давлению δ_p необходимо задать граничные условия для уравнения (3.32). Сделать это достаточно сложно, поскольку уравнение (3.30b) или (3.32) не имеет физического смысла, а исходная

дифференциальная задача не содержит граничных условий для давления. В качестве иллюстрации, помимо задачи о каверне, рассмотрим также задачу о развивающемся течении между параллельными пластинами. Геометрия задач и граничные условия показаны на рис. 3.4.

Рассмотрим задачу о течении в каверне с движущейся крышкой. Интегрируя уравнение (3.32) по области $\Omega = \{(x, y) \mid 0 < x < 1, 0 < y < 1\}$, получим условие разрешимости

$$\int_0^1 \frac{\partial \delta_p^{(\nu+1)}}{\partial x} \Big|_{x=1} dy - \int_0^1 \frac{\partial \delta_p^{(\nu+1)}}{\partial x} \Big|_{x=0} dy + \int_0^1 \frac{\partial \delta_p^{(\nu+1)}}{\partial y} \Big|_{y=1} dx - \int_0^1 \frac{\partial \delta_p^{(\nu+1)}}{\partial y} \Big|_{y=0} dx = 0.$$

Обычно на твёрдых поверхностях задают нулевой градиент поправки к давлению, поэтому граничные условия для уравнения (3.32) в задаче о каверне можно сформулировать следующим образом:

$$\frac{\partial \delta_p^{(\nu+1)}}{\partial x} \Big|_{x=1} = \frac{\partial \delta_p^{(\nu+1)}}{\partial x} \Big|_{x=0} = \frac{\partial \delta_p^{(\nu+1)}}{\partial y} \Big|_{y=1} = \frac{\partial \delta_p^{(\nu+1)}}{\partial y} \Big|_{y=0} = 0.$$

Соответственно, сеточный аналог данных однородных условий Неймана используют для (3.31). Поставленная задача Неймана для уравнения Пуассона разрешима, однако её решение требует бóльшего объёма вычислений, чем решение задачи Дирихле.

Теперь рассмотрим задачу о течении между параллельными пластинами (рис. 3.4). Пластины $y = 0$ и $y = 1$ считают непроницаемыми для жидкости. На входе ($x = 0$) известно распределение компонент скоростей, а на выходе ($x = 1$) заданы однородные условия Неймана для компоненты скорости u и однородные условия Дирихле для компоненты скорости v .

Интегрируя уравнение (3.32) по области $\Omega = \{(x, y) \mid 0 < x < 1, 0 <$

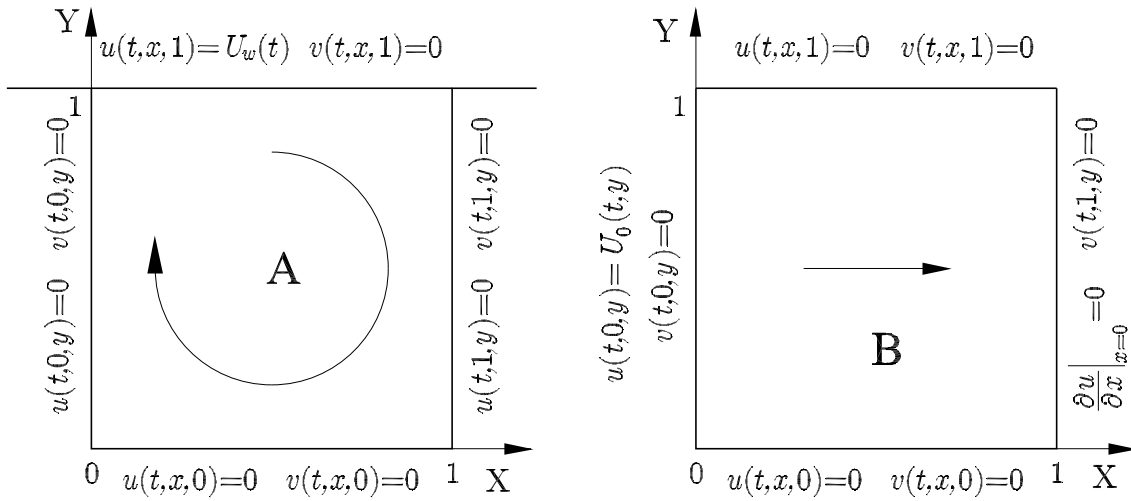


Рис. 3.4. Геометрия задач о течении в каверне (А) и между пластинами (В)

$y < 1$ }, получим

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \frac{\partial \delta_p^{(\nu+1)}}{\partial x} \Big|_{x=1} dy - \int_0^1 \frac{\partial \delta_p^{(\nu+1)}}{\partial x} \Big|_{x=0} dy + \int_0^1 \frac{\partial \delta_p^{(\nu+1)}}{\partial y} \Big|_{y=1} dx - \int_0^1 \frac{\partial \delta_p^{(\nu+1)}}{\partial y} \Big|_{y=0} dx \\ &= \frac{1}{h_t} \int_0^1 u^{(\nu+1)}(t^{(n+1)}, 1, y) dy - \frac{1}{h_t} \int_0^1 u^{(\nu+1)}(t^{(n+1)}, 0, y) dy. \end{aligned} \quad (3.33)$$

Правая часть уравнения (3.33) есть ошибка расхода жидкости между выходным ($x = 1$) и входным ($x = 0$) сечениями. Для точного решения, удовлетворяющего уравнению неразрывности (3.1а), справедливо

$$\int_0^1 u(t^{(n+1)}, x, y) dy = \int_0^1 u(t^{(n+1)}, 0, y) dy, \quad 0 \leq x \leq 1.$$

По аналогии с задачей о каверне положим, что градиент поправки к давлению на твёрдых поверхностях равен нулю

$$\int_0^1 \frac{\partial \delta_p^{(\nu+1)}}{\partial y} \Big|_{y=1} dx = \int_0^1 \frac{\partial \delta_p^{(\nu+1)}}{\partial y} \Big|_{y=0} dx = 0. \quad (3.34)$$

Тогда уравнение (3.33) принимает вид

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \frac{\partial \delta_p^{(\nu+1)}}{\partial x} \Big|_{x=1} dy - \int_0^1 \frac{\partial \delta_p^{(\nu+1)}}{\partial x} \Big|_{x=0} dy \\ &= \frac{1}{h_t} \int_0^1 u^{(\nu+1)}(t^{(n+1)}, 1, y) dy - \frac{1}{h_t} \int_0^1 u(t^{(n+1)}, 0, y) dy. \end{aligned} \quad (3.35)$$

Значение компоненты скорости $u(t^{(n+1)}, 0, y)$ на входе является известным, поэтому не зависит от ν . Из уравнения (3.35) следует, что граничные условия для поправки к давлению зависят от ошибки расхода и будут различными на разных итерациях ν .

В настоящее время предложены разнообразные способы постановки граничных условий для поправки к давлению [37, 39, 41, 49, 50] и др., однако для конкретной задачи практически невозможно заранее выбрать тот способ, который обеспечивает наиболее высокую скорость сходимости. Неоднозначность постановки граничных условий для поправки к давлению $\delta_p^{(\nu+1)}$ является недостатком метода Узавы.

Метод Узавы содержит параметр нижней релаксации, т.е. новое приближение к решению вычисляют следующим образом:

$$\mathbf{p}_h^{(\nu+1)} := \mathbf{p}_h^{(\nu)} + \varpi_Q \boldsymbol{\delta}_p^{(\nu+1)}.$$

Параметр нижней релаксации ϖ_Q предназначен для частичной компенсации разницы между разреженной матрицей Q и плотно заполненной матрицей \mathcal{S} . В силу нелинейности уравнений Навье-Стокса оптимальное значение параметра ϖ_Q также будет зависеть от ν . Необходимость отыскания оптимального значения ϖ_Q является вторым недостатком метода Узавы.

Таковыми же недостатками обладает метод SIMPLE и его варианты [24], которые использованы в большинстве коммерческих пакетов про-

грамм. Очевидно, что наличие проблемно-зависимых компонент (матрица Q , граничные условия для поправки к давлению и параметр нижней релаксации) в данных методах не позволит на их основе разработать универсальный алгоритм для решения уравнений Навье-Стокса.

§ 6. Метод Ванки

Метод Ванки является вариантом метода Зейделя со специальным блочным упорядочиванием неизвестных [55]. В § 1 гл. 1 приведён пример построения метода Зейделя с блочным 2×2 упорядочиванием (рис. 1.6). Метод Ванки построен аналогичным образом, но с учётом специфики СЛАУ (3.29).

Предположим, что для аппроксимации уравнений Навье-Стокса построена разнесённая сетка (рис. 3.2). Пронумеруем контрольные объёмы для аппроксимации уравнения неразрывности (3.1а) вдоль линий $i = const$, как показано на рис. 3.5.

У неизвестных в уравнениях (3.26)–(3.28) и (3.13) опустим верхний индекс $(n + 1)$, указывающий на принадлежность к $(n + 1)$ -ому временному слою. Вместо него будем использовать индекс ν – номер итерации Ванки.

Сформируем подвектор (блок) неизвестных

$$\mathcal{V} = \left(u_{ij}^{(\nu+1)} \quad u_{i+1j}^{(\nu+1)} \quad v_{ij}^{(\nu+1)} \quad v_{ij+1}^{(\nu+1)} \quad p_{ij}^{(\nu+1)} \right)^T$$

из компонент скорости на гранях контрольного объёма, используемого для аппроксимации уравнения неразрывности (3.1а), и давления в центре объёма (рис. 3.3С).

С каждым контрольным объёмом ассоциирована СЛАУ, составленная из линеаризованных сеточных аналогов уравнений движения (3.26) и (3.27) и неразрывности (3.13).

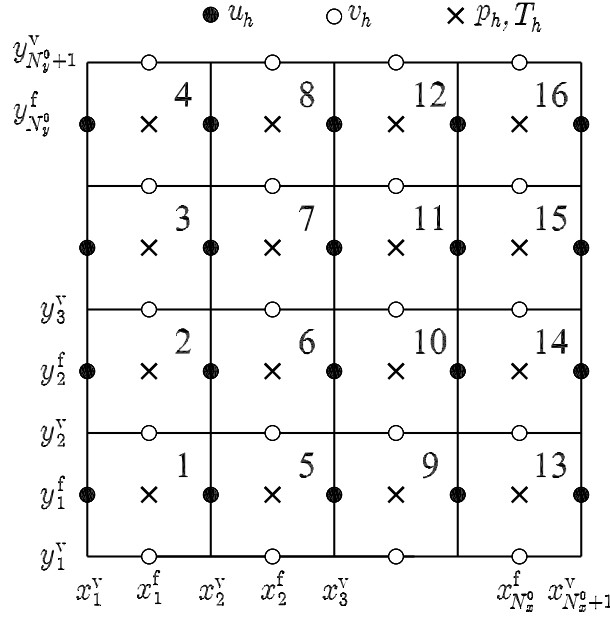


Рис. 3.5. Упорядочивание контрольных объёмов для аппроксимации уравнения неразрывности (3.1a) вдоль линий $i = \text{const}$

Рассмотрим методику построения данной СЛАУ.

С учётом выбранного упорядочивания контрольных объёмов, показанного на рис. 3.5, линеаризованный сеточный аналог уравнения движения по X (3.26) принимает вид

$$\begin{aligned} U_{ij}^W u_{i-1j}^{(\nu+1)} + U_{ij}^E u_{i+1j}^{(\nu+1)} + U_{ij}^S u_{ij-1}^{(\nu+1)} + U_{ij}^N u_{ij+1}^{(\nu)} + U_{ij}^P u_{ij}^{(\nu+1)} + U_{ij}^{WN} v_{i-1j+1}^{(\nu+1)} \\ + U_{ij}^{EN} v_{ij+1}^{(\nu+1)} + U_{ij}^{WS} v_{i-1j}^{(\nu+1)} + U_{ij}^{ES} v_{ij}^{(\nu+1)} + \frac{p_{ij}^{(\nu+1)} - p_{i-1j}^{(\nu+1)}}{h_x} = S_{ij}^u. \end{aligned}$$

Оставим в левой части члены с неизвестными, образующих блок \mathcal{V} :

$$U_{ij}^E u_{i+1j}^{(\nu+1)} + U_{ij}^P u_{ij}^{(\nu+1)} + U_{ij}^{EN} v_{ij+1}^{(\nu+1)} + U_{ij}^{ES} v_{ij}^{(\nu+1)} + h_x^{-1} p_{ij}^{(\nu+1)} = b_1, \quad (3.36a)$$

$$\begin{aligned} b_1 = S_{ij}^u - U_{ij}^W u_{i-1j}^{(\nu+1)} - U_{ij}^S u_{ij-1}^{(\nu+1)} - U_{ij}^N u_{ij+1}^{(\nu)} \\ - U_{ij}^{WN} v_{i-1j+1}^{(\nu+1)} - U_{ij}^{WS} v_{i-1j}^{(\nu+1)} + h_x^{-1} p_{i-1j}^{(\nu+1)}. \end{aligned} \quad (3.36b)$$

На рис. 3.6А показано расположение вычислительного шаблона, используемого для аппроксимации уравнения движения по X (3.1b), и контроль-

ного объёма, используемого для аппроксимации уравнения неразрывности (3.1a).

Теперь сдвинем шаблон вправо на величину шага сетки h_x , т.е. формально заменим i на $i + 1$ в (3.26) (рис. 3.6B):

$$\begin{aligned} & U_{i+1j}^W u_{ij}^{(\nu+1)} + U_{i+1j}^E u_{i+2j}^{(\nu+1)} + U_{i+1j}^S u_{i+1j-1}^{(\nu+1)} + U_{i+1j}^N u_{i+1j+1}^{(\nu)} + U_{i+1j}^P u_{i+1j}^{(\nu+1)} \\ & + U_{i+1j}^{WN} v_{ij+1}^{(\nu+1)} + U_{i+1j}^{EN} v_{i+1j+1}^{(\nu+1)} + U_{i+1j}^{WS} v_{ij}^{(\nu+1)} + U_{i+1j}^{ES} v_{i+1j}^{(\nu+1)} \\ & + \frac{p_{i+1j}^{(\nu+1)} - p_{ij}^{(\nu+1)}}{h_x} = S_{i+1j}^u. \end{aligned}$$

Оставим в левой части члены с неизвестными, образующими блок \mathcal{V} :

$$\begin{aligned} & U_{i+1j}^W u_{ij}^{(\nu+1)} + U_{i+1j}^P u_{i+1j}^{(\nu+1)} + U_{i+1j}^{WN} v_{ij+1}^{(\nu+1)} \\ & + U_{i+1j}^{WS} v_{ij}^{(\nu+1)} - h_x^{-1} p_{ij}^{(\nu+1)} = b_2, \end{aligned} \quad (3.37a)$$

$$\begin{aligned} & b_2 = S_{i+1j}^u - U_{i+1j}^E u_{i+2j}^{(\nu+1)} - U_{i+1j}^S u_{i+1j-1}^{(\nu+1)} \\ & - U_{i+1j}^N u_{i+1j+1}^{(\nu)} - U_{i+1j}^{EN} v_{i+1j+1}^{(\nu+1)} - U_{i+1j}^{ES} v_{i+1j}^{(\nu+1)} - h_x^{-1} p_{i+1j}^{(\nu+1)}. \end{aligned} \quad (3.37b)$$

Далее аналогично поступим с линеаризованным сеточным аналогом уравнения движения по Y (3.27). Согласно рис. 3.6C, получим

$$V_{ij}^{WN} u_{ij}^{(\nu+1)} + V_{ij}^{EN} u_{i+1j}^{(\nu+1)} + V_{ij}^P v_{ij}^{(\nu+1)} + V_{ij}^N v_{ij+1}^{(\nu+1)} + h_y^{-1} p_{ij}^{(\nu+1)} = b_3, \quad (3.38a)$$

$$\begin{aligned} & b_3 = S_{ij}^v - V_{ij}^W v_{i-1j}^{(\nu+1)} - V_{ij}^E v_{i+1j}^{(\nu)} - V_{ij}^S v_{ij-1}^{(\nu+1)} \\ & - V_{ij}^{WS} u_{ij-1}^{(\nu+1)} - V_{ij}^{ES} u_{i+1j-1}^{(\nu+1)} + h_y^{-1} p_{ij-1}^{(\nu+1)}. \end{aligned} \quad (3.38b)$$

Теперь сдвинем шаблон вверх на величину шага сетки h_y , т.е. формально заменим j на $j + 1$ в (3.27) (рис. 3.6D):

$$\begin{aligned} & V_{ij+1}^{WS} u_{ij}^{(\nu+1)} + V_{ij+1}^{ES} u_{i+1j}^{(\nu+1)} + V_{ij+1}^S v_{ij+1}^{(\nu+1)} \\ & + V_{ij+1}^P v_{ij+1}^{(\nu+1)} - h_y^{-1} p_{ij}^{(\nu+1)} = b_4, \end{aligned} \quad (3.39a)$$

$$\begin{aligned} & b_4 = S_{ij+1}^v - V_{ij+1}^W v_{i-1j+1}^{(\nu+1)} - V_{ij+1}^E v_{i+1j+1}^{(\nu+1)} - V_{ij+1}^N v_{ij+2}^{(\nu)} \\ & - V_{ij+1}^{WN} u_{ij+1}^{(\nu)} - V_{ij+1}^{EN} u_{i+1j+1}^{(\nu)} - h_y^{-1} p_{ij+1}^{(\nu)}. \end{aligned} \quad (3.39b)$$

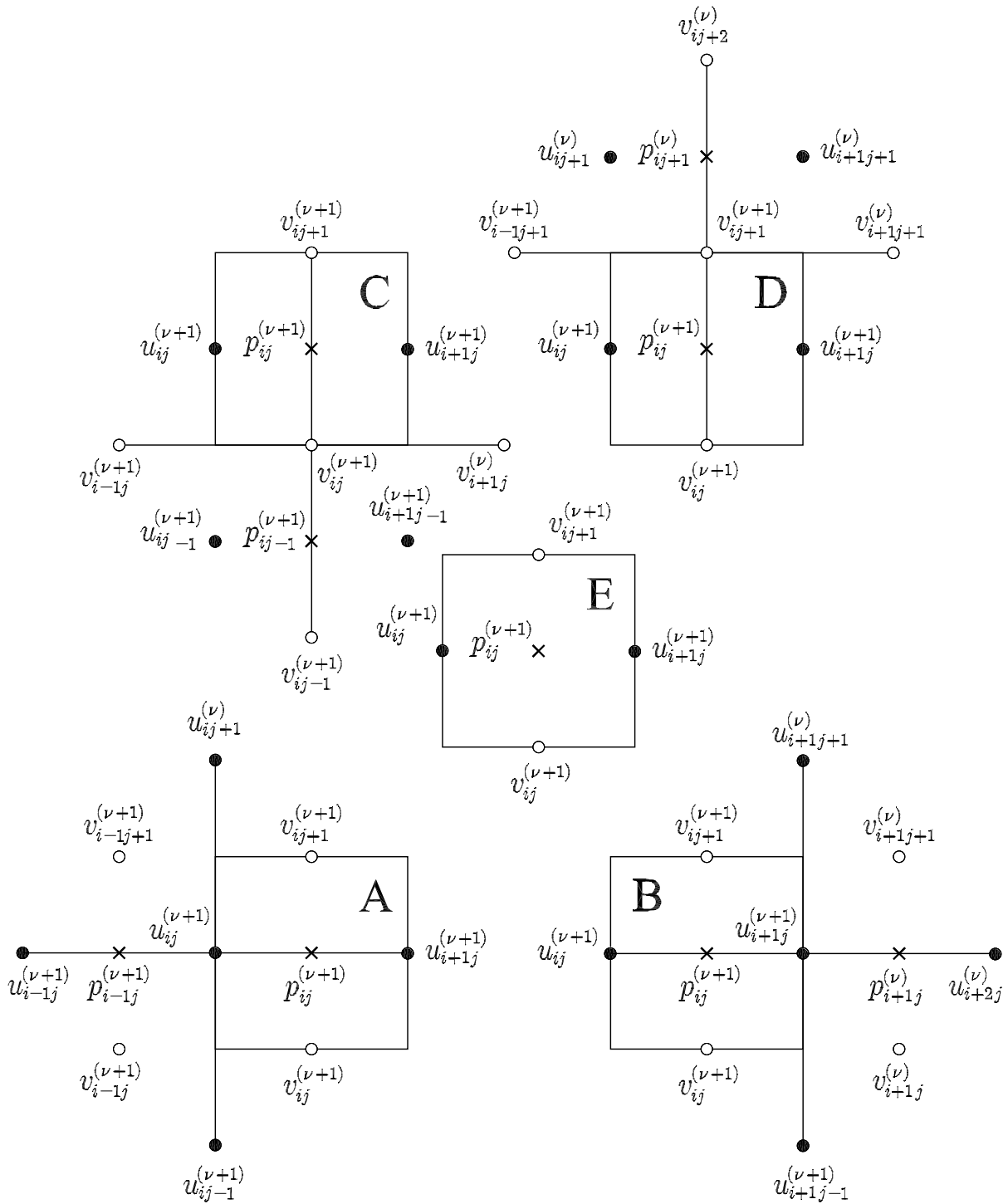


Рис. 3.6. Формирование СЛАУ для метода Ванки

Далее объединим (3.36a), (3.37a), (3.38a), (3.39a) и (3.13) в единую СЛАУ

$$\begin{pmatrix} U_{ij}^P & U_{ij}^E & U_{ij}^{ES} & U_{ij}^{EN} & h_x^{-1} \\ U_{i+1j}^W & U_{i+1j}^P & U_{i+1j}^{WS} & U_{i+1j}^{WN} & -h_x^{-1} \\ V_{ij}^{WN} & V_{ij}^{EN} & V_{ij}^P & V_{ij}^N & h_y^{-1} \\ V_{ij+1}^{WS} & V_{ij+1}^{ES} & V_{ij+1}^S & V_{ij+1}^P & -h_y^{-1} \\ -h_x^{-1} & h_x^{-1} & -h_y^{-1} & h_y^{-1} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{ij}^{(\nu+1)} \\ u_{i+1j}^{(\nu+1)} \\ v_{ij}^{(\nu+1)} \\ v_{ij+1}^{(\nu+1)} \\ p_{ij}^{(\nu+1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (3.40)$$

где компоненты вектора правых частей заданы соотношениями (3.36b), (3.37b), (3.38b) и (3.39b).

СЛАУ (3.40) решают при помощи метода Гаусса с выбором главного элемента (§ 1 гл. 1), который не использует структуру матрицы коэффициентов. Поэтому наличие нулевого элемента на главной диагонали в данном случае не существенно. Полученное приближение к решению будет точно удовлетворять сеточному аналогу уравнения неразрывности (3.13) (последнее уравнение в СЛАУ (3.40)).

Поскольку СЛАУ (3.40) составлена из линеаризованных уравнений, то вычисления следует повторять до достижения критерия сходимости итераций по нелинейности. При решении стационарных уравнений ($h_t = \infty$), как правило, необходимо использовать нижнюю релаксацию

$$\begin{aligned} u_{kj}^{(\nu+1)} &:= \bar{u}_{kj}^{(\nu+1)} + \varpi_u \left(u_{kj}^{(\nu+1)} - \bar{u}_{kj}^{(\nu+1)} \right), & k = i, i+1, \\ v_{ik}^{(\nu+1)} &:= \bar{v}_{ik}^{(\nu+1)} + \varpi_v \left(v_{ik}^{(\nu+1)} - \bar{v}_{ik}^{(\nu+1)} \right), & k = j, j+1, \\ p_{ij}^{(\nu+1)} &:= \bar{p}_{ij}^{(\nu+1)} + \varpi_p \left(p_{ij}^{(\nu+1)} - \bar{p}_{ij}^{(\nu+1)} \right), \end{aligned}$$

для обеспечения сходимости итераций по нелинейности. Здесь \bar{u}_{kj} , \bar{v}_{kj} и \bar{p}_{kj} суть известные значения с предыдущей итерации по нелинейности. Обычно на первых итерациях принимают $0.2 \leq \varpi_u \approx \varpi_v \leq 0.8$ и $\varpi_p = 1$, причём меньшие значения параметров релаксации ϖ_u и ϖ_v соответству-

ют бóльшим значениям числа Рейнольдса Re .

Перечислим основные достоинства метода Ванки:

1) итерационный метод Ванки, в отличие от методов Узавы или SIMPLE, не содержит проблемно-зависимых компонент (параметр нижней релаксации ϖ_Q , матрица Q , искусственные граничные условия для поправки к давлению и т.д.);

2) уравнения результирующей СЛАУ всегда решают совместно. Более того, если исходная задача, помимо уравнений Навье-Стокса (3.1), содержит дополнительные уравнения (например, уравнение энергии (3.2)), то их также можно включить в СЛАУ (3.40). В частности, перепишем линеаризованный сеточный аналог уравнения энергии (3.28) в виде

$$H_{ij}^W u_{ij}^{(n+1)} + H_{ij}^e u_{i+1j}^{(n+1)} + H_{ij}^s v_{ij}^{(n+1)} + H_{ij}^n v_{ij+1}^{(n+1)} + H_{ij}^P T_{ij}^{(n+1)} = b_5, \quad (3.41a)$$

$$b_5 = S_{ij}^T - H_{ij}^W T_{i-1j}^{(n+1)} - H_{ij}^E T_{i+1j}^{(n+1)} - H_{ij}^S T_{ij-1}^{(n+1)} - H_{ij}^N T_{ij+1}^{(n+1)}. \quad (3.41b)$$

Тогда расширенная¹ СЛАУ (3.40) + (3.41) примет вид

$$\begin{pmatrix} U_{ij}^P & U_{ij}^E & U_{ij}^{ES} & U_{ij}^{EN} & h_x^{-1} & 0 \\ U_{i+1j}^W & U_{i+1j}^P & U_{i+1j}^{WS} & U_{i+1j}^{WN} & -h_x^{-1} & 0 \\ V_{ij}^{WN} & V_{ij}^{EN} & V_{ij}^P & V_{ij}^N & h_y^{-1} & 0 \\ V_{ij+1}^{WS} & V_{ij+1}^{ES} & V_{ij+1}^S & V_{ij+1}^P & -h_y^{-1} & 0 \\ -h_x^{-1} & h_x^{-1} & -h_y^{-1} & h_y^{-1} & 0 & 0 \\ H_{ij}^W & H_{ij}^e & H_{ij}^s & H_{ij}^n & 0 & H_{ij}^P \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{ij}^{(\nu+1)} \\ u_{i+1j}^{(\nu+1)} \\ v_{ij}^{(\nu+1)} \\ v_{ij+1}^{(\nu+1)} \\ p_{ij}^{(\nu+1)} \\ T_{ij}^{(\nu+1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \\ 0 \\ b_5 \end{pmatrix}.$$

3) СЛАУ типа (3.40) можно формировать используя группу контрольных объёмов, применяемых для аппроксимации уравнения неразрывности. В § 6 гл. 1 было показано, что скорость сходимости многосеточных мето-

¹Данный пример построения расширенной СЛАУ приведён в методологических целях. На самом деле, если теплофизические свойства среды постоянны, то компоненты скорости и давление не зависят от температуры. Поэтому в данном случае уравнение энергии (3.2) лучше решать после отыскания решения уравнений Навье-Стокса (3.1), т.е. уравнения (3.41) не включать в СЛАУ.

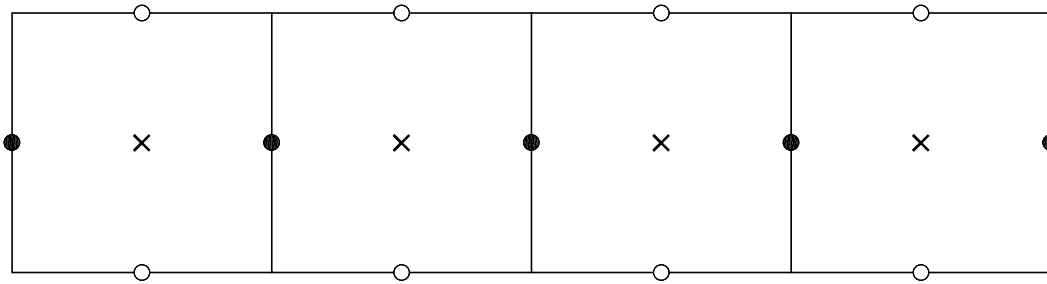


Рис. 3.7. Группа контрольных объёмов для аппроксимации уравнения неразрывности

дов сильно зависит от соотношения шагов сетки h_x и h_y . В общем случае, выбор конфигурации группы контрольных объёмов должен учитывать соотношение h_x/h_y . На рис. 3.7 показана преимущественная конфигурация при $h_x \ll h_y$.

4) метод Ванки в односеточном исполнении сходится медленно, однако считается одним из лучших сглаживателей для многосеточных методов. В настоящее время сходимость метода Ванки не доказана даже для простейшего случая – системы Стокса (3.4) [21].

Единственный недостаток метода Ванки связан с чрезмерными вычислительными затратами при решении СЛАУ с плотно заполненной матрицей коэффициентов методом Гаусса. Напомним, что для решения СЛАУ с матрицей $N \times N$ необходимо выполнить количество арифметических операций, пропорциональных N^3 .

Данное обстоятельство сильно осложняет построение эффективного и универсального алгоритма для решения прикладных задач. Например, с четырьмя контрольными объёмами, показанными на рис. 3.7, ассоциирована СЛАУ с матрицей 17×17 . Однако, если математическая модель состоит из уравнений Навье-Стокса, уравнения энергии и уравнений двухпараметрической модели турбулентности, то размер матрицы коэффициентов увеличится до 29×29 . В трёхмерном случае с аналогичной группой контрольных объёмов ассоциирована СЛАУ с матрицей

25×25 . Если математическая модель, помимо уравнений Навье-Стокса, содержит три дополнительных уравнения, то размер матрицы коэффициентов составит 37×37 .

В таблице (2.2) приведены результаты численного решения задачи Дирихле для анизотропного уравнения. В качестве сглаживателя использован метод Зейделя с блочными упорядочиваниями неизвестных (блоки $3 \times 3 \times 3$ и $5 \times 5 \times 1$), которые привели к СЛАУ размера 27×27 и 25×25 . Несмотря на незначительное различие в размерах СЛАУ, время счёта с блоками $3 \times 3 \times 3$ увеличилось на $\sim 30\%$ по сравнению со временем счёта с блоками $5 \times 5 \times 1$. Количество блоков неизвестных в обоих случаях сравнимо, но зависимость вычислительной работы для метода Гаусса от размера матрицы коэффициентов СЛАУ ($\sim N^3$) показывает, что $(27/25)^3 \approx 1.26$, т.е. соответствует результатам вычислительного эксперимента. По-видимому, в общем случае не удастся все сеточные уравнения решать совместно. А разделение результирующей СЛАУ на СЛАУ меньшей размерности приведёт к уменьшению скорости сходимости многосеточных методов. Тем не менее, отсутствие проблемно-зависимых компонент и возможность применения к решению краевых задач для различных уравнений и систем позволяет использовать метод Ванки в качестве сглаживателя в универсальных алгоритмах.

§ 7. Простейший многосеточный алгоритм

Представим решение уравнений Навье-Стокса (3.1) в виде суммы двух функций

$$u(t, x, y) = c^u(t, x, y) + \hat{u}(t, x, y), \quad (3.42a)$$

$$v(t, x, y) = c^v(t, x, y) + \hat{v}(t, x, y), \quad (3.42b)$$

$$p(t, x, y) = c^p(t, x, y) + \hat{p}(t, x, y). \quad (3.42c)$$

Сеточные аналоги функций $c^u(t, x, y)$, $c^v(t, x, y)$ и $c^p(t, x, y)$ будут поправками, а аналоги функций $\hat{u}(t, x, y)$, $\hat{v}(t, x, y)$ и $\hat{p}(t, x, y)$ – приближением к решению в многосеточных итерациях УМТ. Подстановка (3.42) в (3.1) приводит к следующей Σ -модифицированной форме уравнений Навье-Стокса:

а) уравнение неразрывности

$$\frac{\partial c^u}{\partial x} + \frac{\partial c^v}{\partial y} + \frac{\partial \hat{u}}{\partial x} + \frac{\partial \hat{v}}{\partial y} = 0,$$

б) уравнение движения по X

$$\begin{aligned} & \frac{\partial c^u}{\partial t} + \frac{\partial \hat{u}}{\partial t} + \frac{\partial (c^u + \hat{u})^2}{\partial x} + \frac{\partial ((c^v + \hat{v})(c^u + \hat{u}))}{\partial y} \\ &= -\frac{\partial c^p}{\partial x} - \frac{\partial \hat{p}}{\partial x} + \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial^2 c^u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 c^u}{\partial y^2} \right) + \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial y^2} \right), \end{aligned}$$

в) уравнение движения по Y

$$\begin{aligned} & \frac{\partial c^v}{\partial t} + \frac{\partial \hat{v}}{\partial t} + \frac{\partial ((c^u + \hat{u})(c^v + \hat{v}))}{\partial x} + \frac{\partial (c^v + \hat{v})^2}{\partial y} \\ &= -\frac{\partial c^p}{\partial y} - \frac{\partial \hat{p}}{\partial y} + \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial^2 c^v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 c^v}{\partial y^2} \right) + \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial^2 \hat{v}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \hat{v}}{\partial y^2} \right). \end{aligned}$$

Преобразуем нелинейные конвективные члены

$$\begin{aligned} (c^u + \hat{u})^2 &= (c^u)^2 + 2\hat{u}c^u + \hat{u}^2, \\ (c^v + \hat{v})^2 &= (c^v)^2 + 2\hat{v}c^v + \hat{v}^2, \\ (c^v + \hat{v})(c^u + \hat{u}) &= c^vc^u + \hat{v}c^u + c^v\hat{u} + \hat{v}\hat{u}. \end{aligned}$$

Перенесём члены с \hat{u} , \hat{v} и \hat{p} в правую часть и получим Σ -модифицированные уравнения Навье-Стокса:

а) уравнение неразрывности

$$\frac{\partial c^u}{\partial x} + \frac{\partial c^v}{\partial y} = R^*(t, x, y), \quad (3.43a)$$

б) уравнение движения по X

$$\begin{aligned} \frac{\partial c^u}{\partial t} + \frac{\partial(c^u)^2}{\partial x} + 2\frac{\partial(\hat{u}c^u)}{\partial x} + \frac{\partial(c^v c^u)}{\partial y} + \frac{\partial(\hat{v}c^u)}{\partial y} + \frac{\partial(c^v \hat{u})}{\partial y} \\ = -\frac{\partial c^p}{\partial x} + \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial^2 c^u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 c^u}{\partial y^2} \right) + R^u(t, x, y), \end{aligned} \quad (3.43b)$$

в) уравнение движения по Y

$$\begin{aligned} \frac{\partial c^v}{\partial t} + \frac{\partial(c^v c^u)}{\partial x} + \frac{\partial(\hat{v}c^u)}{\partial x} + \frac{\partial(c^v \hat{u})}{\partial x} + \frac{\partial(c^v)^2}{\partial y} + 2\frac{\partial(\hat{v}c^v)}{\partial y} \\ = -\frac{\partial c^p}{\partial y} + \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial^2 c^v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 c^v}{\partial y^2} \right) + R^v(t, x, y), \end{aligned} \quad (3.43c)$$

где источниковые члены $R^*(t, x, y)$, $R^u(t, x, y)$ и $R^v(t, x, y)$ имеют вид

$$R^*(t, x, y) = -\frac{\partial \hat{u}}{\partial x} - \frac{\partial \hat{v}}{\partial y}, \quad (3.44a)$$

$$R^u(t, x, y) = -\frac{\partial \hat{u}}{\partial t} - \frac{\partial(\hat{u}^2)}{\partial x} - \frac{\partial(\hat{v}\hat{u})}{\partial y} - \frac{\partial \hat{p}}{\partial x} + \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial y^2} \right), \quad (3.44b)$$

$$R^v(t, x, y) = -\frac{\partial \hat{v}}{\partial t} - \frac{\partial(\hat{u}\hat{v})}{\partial x} - \frac{\partial(\hat{v}^2)}{\partial y} - \frac{\partial \hat{p}}{\partial y} + \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial^2 \hat{v}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \hat{v}}{\partial y^2} \right). \quad (3.44c)$$

Источниковые члены (3.44) совпадают с уравнениями Навье-Стокса (3.1). Сходимость означает, что поправки стремятся к нулю: $c^u \rightarrow 0$, $c^v \rightarrow 0$, $c^p \rightarrow 0$, следовательно, к нулю будут стремиться источниковые члены R^* , R^v , R^u , поэтому приближения к решению \hat{u} , \hat{v} , \hat{p} будут удовлетворять уравнениям Навье-Стокса (3.1).

Положим, что построена равномерная сетка с шагами h_x и h_y и многосеточная структура для аппроксимации Σ -модифицированных уравнений Навье-Стокса (3.43).

Рассмотрим подробнее аппроксимацию Σ -модифицированного уравнения движения по X (3.43b) на многосеточной структуре. Интегрирование уравнения (3.43b) по контрольному объёму

$$V_{ij}^u = \{(x, y) \mid x_{\{i-1\}}^f \leq x \leq x_{\{i\}}^f, y_{\{j\}}^v \leq y \leq y_{\{j+1\}}^v\}$$

приводит к следующему сеточному уравнению:

$$\begin{aligned}
& \frac{(c^u)_{\{ij\}}^{(n+1)} - (c^u)_{\{ij\}}^{(n)}}{h_t} + \frac{(c^u)^2 \Big|_{(x_{\{i\}}^f, y_{\{j\}}^f)}^{(n+1)} - (c^u)^2 \Big|_{(x_{\{i-1\}}^f, y_{\{j\}}^f)}^{(n+1)}}{h_x 3^{l_x}} \\
& + 2 \frac{\langle \hat{u} \rangle_{\{ij\}}^x c^u \Big|_{(x_{\{i\}}^f, y_{\{j\}}^f)}^{(n+1)} - \langle \hat{u} \rangle_{\{i-1j\}}^x c^u \Big|_{(x_{\{i-1\}}^f, y_{\{j\}}^f)}^{(n+1)}}{h_x 3^{l_x}} \\
& + \frac{(c^v c^u) \Big|_{(x_{\{i\}}^v, y_{\{j+1\}}^v)}^{(n+1)} - (c^v c^u) \Big|_{(x_{\{i\}}^v, y_{\{j\}}^v)}^{(n+1)}}{h_y 3^{l_y}} \\
& + \frac{\langle \hat{v} \rangle_{\{ij+1\}} c^u \Big|_{(x_{\{i\}}^v, y_{\{j+1\}}^v)}^{(n+1)} - \langle \hat{v} \rangle_{\{ij\}} c^u \Big|_{(x_{\{i\}}^v, y_{\{j\}}^v)}^{(n+1)}}{h_y 3^{l_y}} \\
& + \frac{\langle \hat{u} \rangle_{\{ij+1\}}^y c^v \Big|_{(x_{\{i\}}^v, y_{\{j+1\}}^v)}^{(n+1)} - \langle \hat{u} \rangle_{\{ij\}}^y c^v \Big|_{(x_{\{i\}}^v, y_{\{j\}}^v)}^{(n+1)}}{h_y 3^{l_y}} \\
& = \frac{1}{\text{Re}} \frac{(c^u)_{\{i-1j\}}^{(n+1)} - 2(c^u)_{\{ij\}}^{(n+1)} + (c^u)_{\{i+1j\}}^{(n+1)}}{h_x^2 3^{2l_x}} \\
& + \frac{1}{\text{Re}} \frac{(c^u)_{\{ij-1\}}^{(n+1)} - 2(c^u)_{\{ij\}}^{(n+1)} + (c^u)_{\{ij+1\}}^{(n+1)}}{h_y^2 3^{2l_y}} \\
& - \frac{(c^p)_{\{ij\}}^{(n+1)} - (c^p)_{\{i-1j\}}^{(n+1)}}{h_x 3^{l_x}} + \langle R^u \rangle_{\{ij\}},
\end{aligned}$$

где

$$\langle \hat{u} \rangle_{\{kj\}}^x = \frac{1}{h_t h_y 3^{l_y}} \int_{t^{(n)}}^{t^{(n+1)}} \int_{y_{\{j\}}^v}^{y_{\{j+1\}}^v} u(t, x_{\{k\}}^f, y) dy dt, \quad k = i-1, i, \quad (3.45)$$

есть среднее значение приближения к решению \hat{u} на западной ($k = i-1$) и восточной ($k = i$) гранях контрольного объёма,

$$\langle \hat{u} \rangle_{\{ik\}}^y = \frac{1}{h_t h_x 3^{l_x}} \int_{t^{(n)}}^{t^{(n+1)}} \int_{x_{\{i-1\}}^f}^{x_{\{i\}}^f} u(t, x, y_{\{k\}}^v) dx dt, \quad k = j, j + 1, \quad (3.46)$$

есть среднее значение приближения к решению \hat{u} на южной ($k = j$) и северной ($k = j + 1$) гранях контрольного объёма,

$$\langle \hat{v} \rangle_{\{ik\}} = \frac{1}{h_t h_x 3^{l_x}} \int_{t^{(n)}}^{t^{(n+1)}} \int_{x_{\{i-1\}}^f}^{x_{\{i\}}^f} v(t, x, y_{\{k\}}^v) dx dt, \quad k = j, j + 1, \quad (3.47)$$

есть среднее значение приближения к решению \hat{v} на южной ($k = j$) и северной ($k = j + 1$) гранях контрольного объёма.

Источниковый член $\langle R^u \rangle_{\{ij\}}$ имеет вид

$$\langle R^u \rangle_{\{ij\}} = \frac{1}{h_t h_x h_y 3^{l_x + l_y}} \int_{t^{(n)}}^{t^{(n+1)}} \int_{x_{\{i-1\}}^f}^{x_{\{i\}}^f} \int_{y_{\{j\}}^v}^{y_{\{j+1\}}^v} R^u(t, x, y) dy dx dt, \quad (3.48)$$

и является осреднённой по контрольному объёму невязкой.

Нетрудно видеть, что Σ -модификация приводит к появлению дополнительных конвективных членов, поэтому аппроксимация модифицированных уравнений Навье-Стокса несколько сложнее, чем исходных. Однако указанное затруднение не носит принципиального характера. Вычисление осреднённых на гранях компонент скорости (3.46)–(3.47) также не приводит к существенному росту объёма вычислительной работы.

Положим, что на предыдущем временном слое сеточные уравнения решены точно: $(c^u)_{\{ij\}}^{(n)} = 0$. Тогда опустим верхний индекс $(n + 1)$ у поправок, т.е. считаем, что поправки определены только на временном слое $(n + 1)$. Линеаризуем полученное нелинейное сеточное уравнение при помощи соотношений (3.17a) и (3.17b). Тогда

$$\begin{aligned}
& 2 \frac{(\bar{c}^u c^u) \Big|_{(x_{\{i\}}^f, y_{\{j\}}^f)} - (\bar{c}^u c^u) \Big|_{(x_{\{i-1\}}^f, y_{\{j\}}^f)}}{h_x 3^{l_x}} - \frac{(\bar{c}^u)^2 \Big|_{(x_{\{i\}}^f, y_{\{j\}}^f)} - (\bar{c}^u)^2 \Big|_{(x_{\{i-1\}}^f, y_{\{j\}}^f)}}{h_x 3^{l_x}} \\
& \frac{c_{\{ij\}}^u}{h_t} + 2 \frac{\langle \hat{u} \rangle_{\{ij\}}^x c^u \Big|_{(x_{\{i\}}^f, y_{\{j\}}^f)} - \langle \hat{u} \rangle_{\{i-1j\}}^x c^u \Big|_{(x_{\{i-1\}}^f, y_{\{j\}}^f)}}{h_x 3^{l_x}} \\
& + \frac{(\bar{c}^v c^u) \Big|_{(x_{\{i\}}^v, y_{\{j+1\}}^v)} - (\bar{c}^v c^u) \Big|_{(x_{\{i\}}^v, y_{\{j\}}^v)}}{h_y 3^{l_y}} + \frac{(c^v \bar{c}^u) \Big|_{(x_{\{i\}}^v, y_{\{j+1\}}^v)} - (c^v \bar{c}^u) \Big|_{(x_{\{i\}}^v, y_{\{j\}}^v)}}{h_y 3^{l_y}} \\
& \quad - \frac{(\bar{c}^v \bar{c}^u) \Big|_{(x_{\{i\}}^v, y_{\{j+1\}}^v)} - (\bar{c}^v \bar{c}^u) \Big|_{(x_{\{i\}}^v, y_{\{j\}}^v)}}{h_y 3^{l_y}} \\
& \quad + \frac{\langle \hat{v} \rangle_{\{ij+1\}} c^u \Big|_{(x_{\{i\}}^v, y_{\{j+1\}}^v)} - \langle \hat{v} \rangle_{\{ij\}} c^u \Big|_{(x_{\{i\}}^v, y_{\{j\}}^v)}}{h_y 3^{l_y}} \\
& \quad + \frac{\langle \hat{u} \rangle_{\{ij+1\}}^y c^v \Big|_{(x_{\{i\}}^v, y_{\{j+1\}}^v)} - \langle \hat{u} \rangle_{\{ij\}}^y c^v \Big|_{(x_{\{i\}}^v, y_{\{j\}}^v)}}{h_y 3^{l_y}} \\
& = \frac{1}{\text{Re}} \frac{c_{\{i-1j\}}^u - 2c_{\{ij\}}^u + c_{\{i+1j\}}^u}{h_x^2 3^{2l_x}} + \frac{1}{\text{Re}} \frac{c_{\{ij-1\}}^u - 2c_{\{ij\}}^u + c_{\{ij+1\}}^u}{h_y^2 3^{2l_y}} \\
& \quad - \frac{c_{\{ij\}}^p - c_{\{i-1j\}}^p}{h_x 3^{l_x}} + \langle R^u \rangle_{\{ij\}}.
\end{aligned}$$

Значения поправок \bar{c}^u и \bar{c}^v на гранях контрольного объёма выразим через значения в узлах при помощи линейной интерполяции

$$\begin{aligned}
\bar{c}^u \Big|_{(x_{\{i\}}^f, y_{\{j\}}^f)} &= \frac{1}{2} \left(\bar{c}_{\{ij\}}^u + \bar{c}_{\{i+1j\}}^u \right), & \bar{c}^u \Big|_{(x_{\{i\}}^f, y_{\{j\}}^f)} &= \frac{1}{2} \left(\bar{c}_{\{ij\}}^u + \bar{c}_{\{i+1j\}}^u \right), \\
\bar{c}^v \Big|_{(x_{\{i\}}^v, y_{\{j\}}^v)} &= \frac{1}{2} \left(\bar{c}_{\{ij\}}^v + \bar{c}_{\{ij-1\}}^v \right), & \bar{c}^v \Big|_{(x_{\{i\}}^v, y_{\{j+1\}}^v)} &= \frac{1}{2} \left(\bar{c}_{\{ij\}}^v + \bar{c}_{\{ij+1\}}^v \right).
\end{aligned}$$

Далее при помощи интерполяции (3.22) полученные линеаризованные сеточные аналоги Σ -модифицированных уравнений неразрывности и движения (3.43) легко свести к виду (3.40).

Коэффициенты $\langle \hat{u} \rangle_{\{kj\}}^x$ (3.45), $\langle \hat{u} \rangle_{\{ik\}}^y$ (3.46) и $\langle \hat{v} \rangle_{\{ik\}}$ (3.47) на самой мелкой сетке аппроксимируют при помощи формулы средних значений

$$\begin{aligned}\langle \hat{u} \rangle_{kj}^x &= \frac{1}{2} (\hat{u}_{kj} + \hat{u}_{k+1j}), & k = i - 1, i, \\ \langle \hat{u} \rangle_{ik}^y &= \frac{1}{2} (\hat{u}_{ik-1} + \hat{u}_{ik}), & k = j, j + 1, \\ \langle \hat{v} \rangle_{ik} &= \frac{1}{2} (\hat{v}_{i-1k} + \hat{v}_{ik}), & k = j, j + 1.\end{aligned}$$

Напомним, что величины $\langle \hat{u} \rangle_{\{ij\}}^x$, $\langle \hat{u} \rangle_{\{ij\}}^y$ и $\langle \hat{v} \rangle_{\{ij\}}$ на грубых сетках однозначно определяются значениями $\langle \hat{u} \rangle_{ij}^x$, $\langle \hat{u} \rangle_{ij}^y$ и $\langle \hat{v} \rangle_{ij}$, вычисленными на самой мелкой сетке (§10 гл. 2).

Граничные условия для поправок c^u и c^v аппроксимируют при помощи уравнений (2.17)–(2.21).

Монотонность, консервативность и точность численного решения зависят от аппроксимации источниковых членов $\langle R^* \rangle_{ij}$, $\langle R^u \rangle_{ij}$ и $\langle R^v \rangle_{ij}$ на самой мелкой сетке. Например, аппроксимация источникового члена $\langle R^u \rangle_{ij}$ (3.48)

$$\langle R^u \rangle_{ij} = R^u(t^{(n+1)}, x_i^v, y_j^f),$$

приводит к неявной схеме, а

$$\langle R^u \rangle_{ij} = \frac{1}{2} \left(R^u(t^{(n)}, x_i^v, y_j^f) + R^u(t^{(n+1)}, x_i^v, y_j^f) \right),$$

– к схеме Кранка-Николсона.

Поскольку все поправки стремятся к нулю при сходимости многосеточных итераций, то для аппроксимации конвективных членов Σ -модифицированных уравнений Навье-Стокса (3.43) достаточно простейшей интерполяции (3.22). В отдельных приложениях конвективные члены, входящие в состав источниковых членов $\langle R^* \rangle_{ij}$, $\langle R^u \rangle_{ij}$ и $\langle R^v \rangle_{ij}$, следует аппроксимировать с более высоким порядком [7]. Поскольку исходные уравнения Навье-Стокса выступают в качестве источниковых членов в

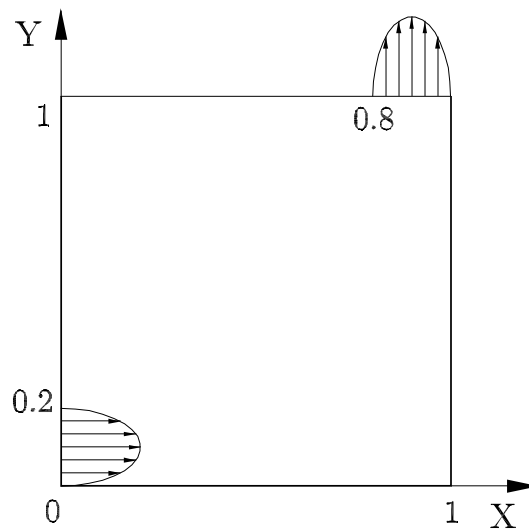


Рис. 3.8. Геометрия задачи о стационарном течении в квадратной полости

Σ -модифицированных уравнениях, то изменение порядка аппроксимации не вносит существенных изменений в многосеточный алгоритм.

В качестве иллюстративного примера рассмотрим задачу о стационарном течении в квадратной полости. Геометрия задачи показана на рис. 3.8. В квадратную полость втекает поток жидкости через отверстие в левой стенке и вытекает через отверстие в верхней стенке. Граничные условия для компонент скорости заданы в виде

$$u(0, y) = \begin{cases} 100y(0.2 - y), & \text{при } y \leq 0.2, \\ 0, & \text{при } y > 0.2, \end{cases}$$

$$u(1, y) = u(x, 0) = u(x, 1) = 0,$$

$$v(x, 1) = \begin{cases} 100(x - 0.8)(1 - x), & \text{при } x \geq 0.8, \\ 0, & \text{при } x < 0.8, \end{cases}$$

$$v(0, y) = v(1, y) = v(x, 0) = 0.$$

Данная задача решена на сетках 101×101 и 1001×1001 при значениях числа Рейнольдса $Re = 100$ и $Re = 500$. Метод Ванки использо-

Таблица 3.1. Сходимость УМТ при решении задачи о течении в квадратной полости

сетка	Re	ν	q	$\rho_{MG}^{(q)}$
101 × 101	100 (500)	4	5	0.132 (0.167)
1001 × 1001	100 (500)	4	5	0.151 (0.194)

ван в качестве сглаживателя, на каждой сетке выполнено четыре сглаживающих итерации. На уровне с самыми грубыми сетками сеточные уравнения решены точно. Многосеточные итерации выполнены по схеме пилообразного цикла, показанного на рис. 2.7. Всего выполнено пять многосеточных итераций. В качестве меры сходимости УМТ использован коэффициент осреднённого уменьшения нормы вектора невязки сеточного уравнения неразрывности (1.51). Результаты вычислительного эксперимента, сведённые в таблицу 3.1, показывают высокую скорость сходимости УМТ при решении данной задачи, которая сравнительно слабо зависит от величины шага сетки и значения Re.

Однако скорость сходимости многосеточных итераций может существенно замедлиться, если компоненты скорости имеют особенность типа пограничного слоя. Применение многосеточного цикла, показанного на рис. 2.9, несколько улучшит сходимость. Очевидно, что необходимо разработать методику быстрого построения начального приближения, близкого к решению, чтобы исключить особенности у поправок.

§ 8. Принцип формальной декомпозиции давления

В общем случае скорость сходимости многосеточных методов при решении краевых задач для уравнений Навье-Стокса будет выше, если вычисления начинать не с произвольного начального приближения, а с приближения, достаточно близкого к искомому решению. Построение тако-

го приближения должно быть экономичным и не содержать проблемно-зависимых компонент. Методика построения приближения, достаточно близкого к искомому решению, основана на упрощённых уравнениях Навье-Стокса.

8.1 Упрощённые уравнения Навье-Стокса. На начальном этапе развития вычислительной гидродинамики ограниченность ресурсов компьютеров и отсутствие эффективных алгоритмов не позволяли моделировать течения на основе полных уравнений Навье-Стокса. Поэтому основное внимание в то время уделялось отдельным классам течений, которые описываются упрощёнными уравнениями Навье-Стокса. Сейчас упрощённые уравнения и методы их решения практически забыты, но к ним можно вернуться, чтобы на их основе построить достаточно точное приближение к решению полных уравнений Навье-Стокса.

Рассмотрим задачу о развивающемся симметричном течении среды с постоянными свойствами между параллельными пластинами (рис. 3.4). Если длина пластин значительно превосходит расстояние между ними, то можно пренебречь изменением давления в поперечном направлении, т.е. принять, что $p'_y = 0$ [15, 36]. Это позволит исключить уравнение движения по Y (3.1с), а вместо него использовать уравнение постоянства расхода

$$\int_0^1 u(t, x, y) dy = \int_0^1 u(t, 0, y) dy, \quad (3.49)$$

которое получено в результате интегрирования уравнения неразрывности.

Допущения физического характера позволяют упростить уравнения, описывающие течение между пластинами, и алгоритм их численного решения. Полученную систему интегро-дифференциальных уравнений называют уравнениями Навье-Стокса в приближении длинного

канала:

а) уравнения движения по X и постоянства расхода

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial(u^2)}{\partial x} + \frac{\partial(vu)}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \\ \int_0^1 u(x, y) dy = \int_0^1 u(0, y) dy \end{cases}, \quad (3.50)$$

б) уравнение неразрывности (3.1а).

Фигурная скобка означает, что уравнения решают совместно: компоненту скорости u и давление p отыскивают из уравнения движения по X , причём давление p определяют из условия, что компонента скорости u удовлетворяет уравнению постоянства расхода. Далее компоненту скорости v вычисляют из уравнения неразрывности (3.1а) по известному значению u .

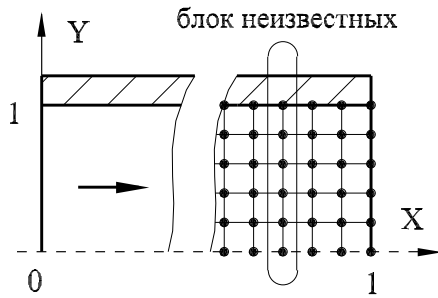


Рис. 3.9. Блочное упорядочивание неизвестных в задаче о течении между пластинами

Рассмотрим подробнее метод численного решения системы (3.50). Положим, что построена равномерная сетка с шагами $h_x = 1/N_x$ и $h_y = 1/N_y$, осуществлена аппроксимация и линеаризация. Объединим неизвестные в блоки, как показано на рис. 3.9. Линеаризованные разностные аналоги уравнений движения по X и

постоянства расхода на равномерной сетке при данном блочном упорядочивании неизвестных принимают вид

$$\begin{cases} a_{ij} u_{ij-1}^{(n+1)} + b_{ij} u_{ij}^{(n+1)} + c_{ij} u_{ij+1}^{(n+1)} = p_i^{(n+1)} + d_{ij} \\ \sum_{j=1}^{N_y} u_{ij}^{(n+1)} = \frac{1}{h_y} G_0 \end{cases}, \quad i = 2, 3, \dots, N_x + 1,$$

где G_0 есть заданный расход на входе

$$G_0 = \int_0^1 u(t^{(n+1)}, 0, y) dy \approx h_y \sum_{j=1}^{N_y} u_{1j}^{(n+1)}.$$

Опустим верхний индекс $(n+1)$ и перепишем СЛАУ в матричной форме

$$\begin{pmatrix} b_{i1} & c_{i1} & & \cdots & 1 \\ a_{i2} & b_{i2} & c_{i2} & & \cdots & 1 \\ & a_{i3} & b_{i3} & c_{i3} & \cdots & 1 \\ & & a_{i4} & b_{i4} & \cdots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{i1} \\ u_{i2} \\ u_{i3} \\ u_{i4} \\ \dots \\ p_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_{i1} \\ d_{i2} \\ d_{i3} \\ d_{i4} \\ \dots \\ h_y^{-1} G_0 \end{pmatrix}.$$

Полученная СЛАУ напоминает (3.8), однако нулевой блок на главной диагонали матрицы коэффициентов имеет минимальный размер (1×1) , поскольку давление $p(t, x)$ зависит только от одной пространственной координаты. Данное обстоятельство позволяет разработать высокоэффективные методы численного решения упрощённых уравнений Навье-Стокса, одним из которых является метод секущих [40].

Метод секущих основан на отыскании давления из решения уравнения

$$F(p_i) = \sum_{j=1}^{N_y} u_{ij} - \frac{1}{h_y} G_0,$$

которое является ошибкой сеточного аналога уравнения постоянства расхода (3.49). В i -ом сечении значения u_{ij} зависят от параметра p_i , но из всех возможных p_i выбираем то, для которого $F(p_i) = 0$ при помощи следующего итерационного метода:

$$p_i^{(k+1)} = p_i^{(k)} - \frac{p_i^{(k)} - p_i^{(k-1)}}{F_i^{(k)} - F_i^{(k-1)}} F_i^{(k)}, \quad k = 1, 2, \dots$$

Метод секущих является двухшаговым, т.е. новое приближение $p_i^{(k+1)}$ определяют по двум предыдущим итерациям $p_i^{(k-1)}$ и $p_i^{(k)}$ [13]. Поэтому в методе секущих необходимо задавать два начальных приближения $p_i^{(0)}$ и $p_i^{(1)}$. Проще всего положить $p_i^{(0)} = p_{i-1}$, т.е. первую итерацию выполнять при нулевом градиенте давления. Лучше в качестве $p_i^{(0)}$ использовать значение, полученное экстраполяцией с предыдущих сечений: например, для равномерной по X сетки $p_i^{(0)} = 2p_{i-1} - p_{i-2}$. Для задания $p_i^{(1)}$ можно воспользоваться интерполяцией

$$p_i^{(1)} = \gamma p_i^{(0)} + (1 - \gamma)p_{i-1},$$

где весовой параметр γ близок к единице, но не равен ей (например, $\gamma = 1.01$).

В окрестности нуля функция $F(p_i)$ зависит от p_i почти линейно, а метод секущих является точным для линейных задач. Поэтому потребуется несколько итераций метода секущих, чтобы отыскать значение p_i , обеспечивающее постоянство расхода с заданной точностью.

Уравнения системы (3.50) решают последовательно в вертикальных сечениях $i = 2, 3, \dots, N_x + 1$. Сначала отыскивают решение уравнения движения при фиксированном давлении p_i . Далее проверяют критерий останова по ошибке расхода и в случае необходимости давление корректируют при помощи метода секущих. Вычисления продолжают до тех пор, пока ошибка уравнения постоянства расхода в i -ом сечении не станет меньше заданной величины.

Одной из проблем вычислительной гидродинамики является выбор критериев останова итераций. Из-за нелинейного характера уравнений Навье-Стокса оценки погрешности вычислений можно получить только для некоторых простейших течений. Рассмотрим стационарное ($h_t = \infty$) ламинарное течение между пластинами длиной L , расстояние между

пластинами есть H . На достаточном удалении от входного сечения $x = 0$ компонента скорости v равна нулю, а осевая компонента u изменяется только в направлении, перпендикулярном поверхности пластин. Безразмерное уравнение движения в этом случае существенно упрощается

$$0 = -\frac{H}{L} \frac{dp}{dx} + \frac{1}{\text{Re}} \frac{d^2 u}{dy^2}, \quad \text{Re} = \frac{\rho H U_s}{\mu}, \quad (3.51)$$

причём давление изменяется по линейному закону ($p'_x = \text{const} < 0$) вдоль пластин. Здесь расстояние между пластинами H выбрано в качестве геометрического масштаба, а в качестве масштаба скорости U_s обычно используют известное значение на входе $u(0, y)$.

Граничные условия для компонент скорости u и v имеют вид:

а) условия симметрии на оси

$$\left. \frac{du}{dy} \right|_{y=0} = 0, \quad v(x, 0) = 0,$$

б) условия прилипания и непротекания на стенке

$$u(x, 1) = 0, \quad v(x, 1) = 0.$$

С другой стороны, компоненту скорости v отыскивают из уравнения неразрывности (3.1а), т.е. из дифференциального уравнения первого порядка, для которого нужно только одно граничное условие. Поэтому положим, что для отыскания компоненты v использовано условие симметрии, а условием непротекания воспользуемся для контроля точности вычислений.

Интегрирование уравнения движения (3.51) с учётом граничных условий позволяет получить параболический закон распределения компоненты скорости u

$$u(x, y) = -\frac{H}{L} \frac{\text{Re}}{2} \frac{dp}{dx} (1 - y^2).$$

Поскольку давление изменяется линейно вдоль пластин, то градиент давления можно вычислить следующим образом:

$$\frac{dp}{dx} = \frac{p(x_i^v) - p(x_{i-1}^v)}{h_x}.$$

Данное соотношение является точным. Теперь положим, что давление $p(x_i^v)$ вычислено с некоторой погрешностью δ_p , которая приводит к погрешности компоненты скорости

$$u^*(x_i^v, y) = -\frac{H \operatorname{Re} p(x_i^v) + \delta_p - p(x_{i-1}^v)}{L \cdot 2 \cdot h_x} (1 - y^2),$$

где u^* – возмущённое значение компоненты u , вызванное погрешностью давления δ_p .

Интегрируя уравнение неразрывности (3.1а) по объёму Ω

$$\Omega = \{(x, y) \mid x_{i-1}^v \leq x \leq x_i^v, 0 \leq y \leq 1\},$$

получим

$$\int_{x_{i-1}^v}^{x_i^v} (v(x, 1) - v(x, 0)) dx = - \int_0^1 (u^*(x_i^v, y) - u(x_{i-1}^v, y)) dy.$$

Аппроксимация граничного условия $v(x, 0) = 0$ является точной, а правая часть вычислена как

$$\int_0^1 (u^*(x_i^v, y) - u(x_{i-1}^v, y)) dy = -\frac{H \operatorname{Re} \delta_p}{L \cdot 2 \cdot h_x} \int_0^1 (1 - y^2) dy = -\frac{H \operatorname{Re} \delta_p}{L \cdot 3 \cdot h_x}.$$

Тогда можно определить значение компоненты скорости v на поверхности верхней пластины

$$\frac{H \operatorname{Re} \delta_p}{L \cdot 3 \cdot h_x} = \int_{x_{i-1}^v}^{x_i^v} v(x, 1) dx \approx h_x \frac{v(x_{i-1}^v, 1) + v(x_i^v, 1)}{2}.$$

Поскольку $v(x_{i-1}^v, 1) = 0$, то значение компоненты скорости $v(x_i^v, 1)$ на поверхности верхней пластины связано с погрешностью вычисления давления δ_p следующим образом:

$$v(x_i^v, 1) \approx \frac{2 H \operatorname{Re}}{3 L h_x^2} \delta_p.$$

Отсюда следует, что граничное условие непротекания $v(x_i^v, 1) = 0$ будет выполнено точно, если погрешность вычисления давления δ_p равна нулю. Высокая скорость сходимости метода секущих позволяет быстро отыскивать значение давления, которое гарантирует постоянство расхода с погрешностью, соизмеримой с величиной погрешности округления.

8.2 Декомпозиция давления. Упрощённые уравнения в отдельных случаях позволяют получить достаточно точное приближение к решению полных уравнений Навье-Стокса. Основным допущением является предположение физического характера о зависимости давления только от одной пространственной координаты. В общем случае давление зависит от всех пространственных координат, однако можно искусственно выделить «часть» давления, которую далее можно отыскать при помощи методов, предложенных ранее для решения упрощённых уравнений Навье-Стокса.

Преобразуем давление, добавляя и вычитая слагаемые, каждое из которых зависит только от одной пространственной координаты

$$p(t, x, y, z) = p^x(t, x) + p^y(t, y) + p^z(t, z) + (-p^x(t, x) - p^y(t, y) - p^z(t, z) + p(t, x, y, z)),$$

где верхние индексы x , y и z показывают зависимость того или иного слагаемого от пространственных координат. Введём обозначение

$$p^{xyz}(t, x, y, z) = -p^x(t, x) - p^y(t, y) - p^z(t, z) + p(t, x, y, z).$$

Тогда давление представимо в виде

$$p(t, x, y, z) = p^x(t, x) + p^y(t, y) + p^z(t, z) + p^{xyz}(t, x, y, z). \quad (3.52)$$

Представление (3.52) получило название *принципа формальной декомпозиции давления*. В дальнейшем слагаемые типа $p^x(t, x)$, $p^y(t, y)$ и $p^z(t, z)$ будут называться «одномерными», а типа $p^{xyz}(t, x, y, z)$ – «многомерным».

Основная идея состоит в возможности быстрого вычисления «части» давления (суммы «одномерных» слагаемых $p^x + p^y + p^z$) методами, которые ранее применялись для решения упрощённых уравнений Навье–Стокса. Если сумма «одномерных» слагаемых достаточно хорошо аппроксимирует давление

$$p^x(t, x) + p^y(t, y) + p^z(t, z) \rightarrow p(t, x, y, z),$$

то «многомерное» слагаемое $p^{xyz}(t, x, y, z)$, отыскание которое наиболее трудоёмко, стремится к нулю:

$$p^{xyz}(t, x, y, z) \rightarrow 0.$$

Поэтому уменьшаются усилия для его вычисления.

Представление (3.52) основано на формальном математическом преобразовании, а не на предположениях физического характера. Подобным образом можно преобразовать любую функцию n переменных, поэтому декомпозиция (3.52) названа формальной.

Отметим следующие свойства формальной декомпозиции давления:

1. Каждое из слагаемых в представлении (3.52) лишено физического смысла, физический смысл имеет лишь их сумма. Давление при численном решении уравнений Навье–Стокса, описывающих течение несжимаемой среды, определяют с точностью до константы. Иногда для удобства

проведения вычислений давление закрепляют в одной из точек. Например, можно положить, что $p(t, 0, 0, 0) = p_0 = \text{const}$. Тогда с учётом (3.52) получаем, что

$$p_0 = p(t, 0, 0, 0) = p^x(t, 0) + p^y(t, 0) + p^z(t, 0) + p^{xyz}(t, 0, 0, 0).$$

Значение p_0 достаточно произвольным образом может быть перераспределено между слагаемыми $p^x(t, x)$, $p^y(t, y)$, $p^z(t, z)$ и $p^{xyz}(t, x, y, z)$, поэтому слагаемые в (3.52) лишены физического смысла. Иногда удобно полагать, что

$$p^{xyz}(t, 0, 0, 0) = p_0, \quad p^x(t, 0) = 0, \quad p^y(t, 0) = 0, \quad p^z(t, 0) = 0.$$

Отсутствие физического смысла отражено в кавычках «», которые использованы для обозначения «одномерных» и «многомерных» слагаемых в (3.52).

2. Согласно (3.52), давление представимо в виде суммы $d = 2, 3$ «одномерных» слагаемых и одного «многомерного». Поэтому необходимо сформулировать d дополнительных условий для определения «одномерных» слагаемых. В качестве таких условий используют уравнения постоянств расхода типа (3.49), которые рассматривают как априорную информацию физического характера об искомом решении.

3. Поскольку уравнения постоянств расхода следуют из уравнения неразрывности (3.1a), то «одномерные» слагаемые необходимо отыскивать перед вычислением «многомерного» слагаемого.

4. Несмотря на представление давления в виде суммы $(d + 1)$ -ого слагаемого, в уравнения движения входят градиенты только двух из них, а именно «многомерного» и соответствующего «одномерного». Например, градиент давления в уравнении движения по X (3.1b) принимает вид

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(p^x(t, x) + p^y(t, y) + p^z(t, z) + p^{xyz}(t, x, y, z) \right) = \frac{\partial p^x}{\partial x} + \frac{\partial p^{xyz}}{\partial x}.$$

Поэтому погрешности вычисления «одномерных» слагаемых не влияют друг на друга.

5. Уменьшение объёма вычислений, по сравнению с традиционными алгоритмами без декомпозиции давления, зависит от типа течения. Максимальный выигрыш в эффективности возникает при доминировании градиентов «одномерных» слагаемых, т.е. при моделировании течений с выделенным направлением течения среды (течения в струях, соплах, каналах, обтекание тел и т.д.). Минимальный выигрыш в эффективности наблюдается при моделировании циркуляционных течений (например, течение в каверне с движущейся крышкой).

6. В трёхмерном случае предлагаемый подход более эффективен, чем в двухмерном, поскольку большая часть давления отыскивается при помощи упрощённых уравнений Навье–Стокса.

7. Компоненты скорости и соответствующие им «одномерные» слагаемые всегда отыскивают совместно, «многомерное» слагаемое может быть вычислено как совместно, так и сегрегированно (раздельно).

8. Для явных схем градиенты «одномерных» слагаемых определяют явным образом, а для неявных схем необходимо построить вспомогательную задачу.

8.3 Явные схемы.

Сначала рассмотрим применение принципа декомпозиции давления для совершенствования явных схем. В отличие от неявных схем изменения, которые необходимо вносить в классические алгоритмы, являются минимальными. Воспользуемся явной схемой расщепления по физическим факторам [5, 10, 48] на примере моделирования двумерного течения в каверне с движущейся крышкой. Классическая схема расщепления состоит из трёх этапов:

$$\begin{aligned} \text{Этап I:} \quad & \frac{V^{(n+1/2)} - V^{(n)}}{h_t} = -(V^{(n)} \nabla) V^{(n)} + \text{Re}^{-1} \Delta V^{(n)}; \\ \text{Этап II:} \quad & \Delta p = \frac{\nabla V^{(n+1/2)}}{h_t}; \\ \text{Этап III:} \quad & \frac{V^{(n+1)} - V^{(n+1/2)}}{h_t} = -\nabla p; \end{aligned}$$

где h_t есть полушаг по времени, а $V^{(n+1/2)}$ – промежуточное поле скорости.

В явных схемах скорость и давление всегда рассчитываются сегрегированно (раздельно). Например, компоненты скорости, отыскиваемые на $n + 1/2$ временном слое, не зависят от давления (этап I). Поэтому компоненты скорости не удовлетворяют ни уравнению неразрывности, ни уравнениям постоянств расхода. Декомпозиция давления позволяет частично учесть взаимосвязь между скоростью и давлением.

Интегрируя уравнение неразрывности (3.1a) по контрольным объёмам

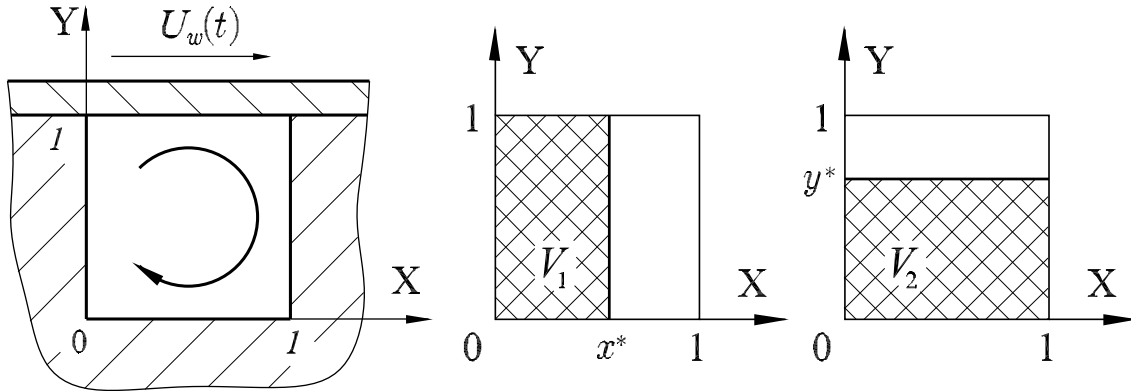
$$\begin{aligned} V_1 &= \{(x, y) \mid 0 \leq x^* \leq 1; 0 \leq y \leq 1\}, \\ V_2 &= \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1; 0 \leq y^* \leq 1\}, \end{aligned}$$

показанным на рис. 3.10, получим два уравнения постоянства расхода

$$\int_0^1 u(t, x, y) dy = 0, \quad (3.53)$$

$$\int_0^1 v(t, x, y) dx = 0. \quad (3.54)$$

Соответственно, сеточные аналоги уравнений неразрывности (3.1a) и постоянств расхода (3.53) и (3.54) на разнесённой сетке с шагами $h_x =$

Рис. 3.10. Каверна с движущейся крышкой и контрольные объемы V_1 и V_2

$1/N_x$ и $h_y = 1/N_y$ (рис. 3.2) имеют вид

$$\frac{u_{i+1j}^{(n+1)} - u_{ij}^{(n+1)}}{h_x} + \frac{v_{ij+1}^{(n+1)} - v_{ij}^{(n+1)}}{h_y} = 0, \quad (3.55)$$

$$h_y \sum_{j=1}^{N_y} u_{ij}^{(k)} = 0, \quad k = n, n + 1/2, n + 1, \quad (3.56)$$

$$h_x \sum_{i=1}^{N_x} v_{ij}^{(k)} = 0, \quad k = n, n + 1/2, n + 1. \quad (3.57)$$

Данные уравнения постоянств расхода получены в результате интегрирования уравнения неразрывности. Поэтому аппроксимация уравнения неразрывности (3.55) определяет аппроксимацию уравнений постоянств расхода (3.56) и (3.57). Другими словами, (3.56) и (3.57) должны быть алгебраическим следствием (3.55) подобно тому, как (3.53) и (3.54) являются интегральным следствием (3.1а).

Уравнения (3.53) и (3.54) следует рассматривать как априорную информацию об искомом решении полных уравнений Навье-Стокса, т.е. не зная значений компонент скорости u и v , можно утверждать, что они должны удовлетворять уравнениями (3.53) и (3.54).

Далее в рассматриваемом двухмерном случае представим давление

в виде

$$p(t, x, y) = p^x(t, x) + p^y(t, y) + p^{xy}(t, x, y), \quad (3.58)$$

где верхние индексы x , y и xy показывают зависимость того или иного слагаемого от соответствующих пространственных координат.

Модифицируем явную схему расщепления по физическим факторам. Для этого запишем уравнение движения по X в виде

$$\begin{aligned} \frac{u_{ij}^{(n+1/2)} - u_{ij}^{(n)}}{h_t} + \left(\frac{\partial(u^2)}{\partial x} + \frac{\partial(vu)}{\partial y} \right)_{ij}^{(n)} = - \left(\frac{\partial p^x}{\partial x} \right)_i^{(n+1/2)} + \\ + \left(\frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \right)_{ij}^{(n)}, \end{aligned}$$

т.е. на промежуточном временном слое $(n + 1/2)$ компонента скорости u и «одномерное» слагаемое p^x будут отыскиваться совместно с привлечением сеточного аналога уравнения постоянства расхода (3.56). В этом заключается основное отличие от классической схемы расщепления.

Для удобства выкладок перепишем уравнение движения в виде

$$\frac{u_{ij}^{(n+1/2)} - u_{ij}^{(n)}}{h_t} = - \left(\frac{\partial p^x}{\partial x} \right)_i^{(n+1/2)} + \Theta_{ij}, \quad (3.59)$$

где сеточная функция Θ_{ij} известна, т.к. состоит из полученных на предыдущем временном слое значений:

$$\Theta_{ij} = \left(-\frac{\partial(u^2)}{\partial x} - \frac{\partial(vu)}{\partial y} + \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \right)_{ij}^{(n)}.$$

Задача состоит в отыскании значений компоненты скорости $u_{ij}^{(n+1/2)}$ и давления $p_i^{(n+1/2)}$ из (3.59), причём давление необходимо отыскивать из условия, что компонента скорости удовлетворяет сеточному аналогу уравнения постоянства расхода (3.56). Домножая (3.59) на h_y и суммируя

по j , получим

$$\frac{1}{h_t} \left(h_y \sum_{j=1}^{N_y} u_{ij}^{(n+1/2)} - h_y \sum_{j=1}^{N_y} u_{ij}^{(n)} \right) = - \sum_{j=1}^{N_y} h_y \left(\frac{\partial p^x}{\partial x} \right)_i^{(n+1/2)} + h_y \sum_{j=1}^{N_y} \Theta_{ij}.$$

В силу (3.56) левая часть данного уравнения равна нулю. Первый член в правой части преобразуем следующим образом:

$$\sum_{j=1}^{N_y} h_y \left(\frac{\partial p^x}{\partial x} \right)_i^{(n+1/2)} = \left(\frac{\partial p^x}{\partial x} \right)_i^{(n+1/2)} \sum_{j=1}^{N_y} h_y = \left(\frac{\partial p^x}{\partial x} \right)_i^{(n+1/2)},$$

поскольку градиент p^x не зависит от j , а сумма шагов h_y равна безразмерной высоте каверны, т.е. единице. Тогда выражение для градиента «одномерного» слагаемого p^x принимает вид

$$\left(\frac{\partial p^x}{\partial x} \right)_i^{(n+1/2)} = h_y \sum_{j=1}^{N_y} \Theta_{ij}. \quad (3.60)$$

Подставляя (3.60) в (3.59), получим выражение для вычисления промежуточного значения компоненты скорости

$$\frac{u_{ij}^{(n+1/2)} - u_{ij}^{(n)}}{h_t} = -h_y \sum_{j=1}^{N_y} \Theta_{ij} + \Theta_{ij}. \quad (3.61)$$

Благодаря поправке $h_y \sum_{j=1}^{N_y} \Theta_{ij}$ промежуточное значение компоненты скорости u удовлетворяет сеточному аналогу уравнения постоянства расхода (3.56).

Порядок вычислений следующий: сначала вычисляют $h_y \sum_{j=1}^{N_y} \Theta_{ij}$, далее из уравнения (3.60) отыскивают давление как решение обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка

$$\left(p^x \right)_i^{(n+1/2)} = \left(p^x \right)_{i-1}^{(n+1/2)} + h_x h_y \sum_{j=1}^{N_y} \Theta_{ij}, \quad \left(p^x \right)_1^{(n+1/2)} = 0,$$

а из уравнения (3.61) – компоненту скорости u :

$$u_{ij}^{(n+1/2)} = u_{ij}^{(n)} - h_t h_y \sum_{j=1}^{N_y} \Theta_{ij} + h_t \Theta_{ij}.$$

Промежуточное значение компоненты скорости v и «одномерного» слагаемого p^y вычисляются аналогичным образом.

В классической схеме расщепления компоненты скорости на промежуточном слое $(n + 1/2)$ не зависят от давления (этап I), поэтому они не удовлетворяют сеточным аналогам уравнений постоянств расхода (3.56) и (3.57). Благодаря декомпозиции давления возможно частично учесть взаимосвязь между компонентами скорости и давлением, поэтому компоненты скорости удовлетворяют уравнениям (3.56) и (3.57). При этом сохраняется явный характер вычислений.

Второй этап с учётом декомпозиции (3.58) состоит в решении краевой задачи для уравнения Пуассона

$$\Delta p^{xy} = -\frac{1}{h_t} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right)^{(n+1/2)},$$

т.е. сумму «одномерных» слагаемых $p^x + p^y$ и «многомерное» слагаемое p^{xy} отыскивают на разных временных слоях. Поскольку компоненты скорости удовлетворяют уравнениям постоянств расхода, то ожидается, что декомпозиция давления приведёт к уменьшению правой части по сравнению с классической схемой. Поэтому следует ожидать уменьшения объёма вычислительной работы при решении данной краевой задачи для уравнения Пуассона.

Третий этап данной модифицированной схемы, с учётом декомпозиции (3.58), состоит в вычислении скорости на $(n + 1)$ -ом временном слое

$$\frac{V^{(n+1)} - V^{(n+1/2)}}{h_t} = -\nabla p^{xy}.$$

В отличие от классической схемы, в предлагаемом подходе компоненты скорости и «часть» давления (сумма «одномерных» слагаемых $p^x + p^y$) вычисляют совместно, а другая «часть» давления («многомерное» слагаемое p^{xy}) – сегрегированно.

Для вычислительного эксперимента положим, что скорость крышки изменяется по закону

$$U_w^{(n)} = \min \left(\frac{n}{100}; 1 \right) .$$

Вычисления проведены на равномерной разнесённой сетке 201×201 ($h = h_x = h_y = 1/200$) при $Re = 1000$, величина шага по времени выбрана $h_t = h/5$. Число Рейнольдса определено по максимальной скорости крышки $\max U_w^{(n)} = 1$. Отношение времени счёта $T_m^{(n)}/T_c^{(n)}$ использовано в качестве критерия эффективности метода, где $T_c^{(n)}$ и $T_m^{(n)}$ есть время счёта в классическом и разработанном алгоритмах. На рис. 3.11 показано уменьшение времени счёта на первых двухстах временных слоях ($n \leq 200$). В вычислительном эксперименте отмечено уменьшение объёма вычислений, связанного с решением задачи Неймана для уравнения Пуассона на втором этапе. Среднее значение

$$\frac{1}{200} \sum_{n=1}^{200} T_m^{(n)}/T_c^{(n)} = 0.81$$

показывает минимальную эффективность (уменьшение времени счёта) применения декомпозиции давления, возникающую при моделировании циркуляционных течений.

Влияние декомпозиции давления на время счёта будет уменьшаться по мере приближения к стационарному решению, если оно существует.

Аналогичным образом можно модифицировать и другие явные схемы для решения уравнений Навье-Стокса, описывающих течение сжимаемых и несжимаемых сред [17].

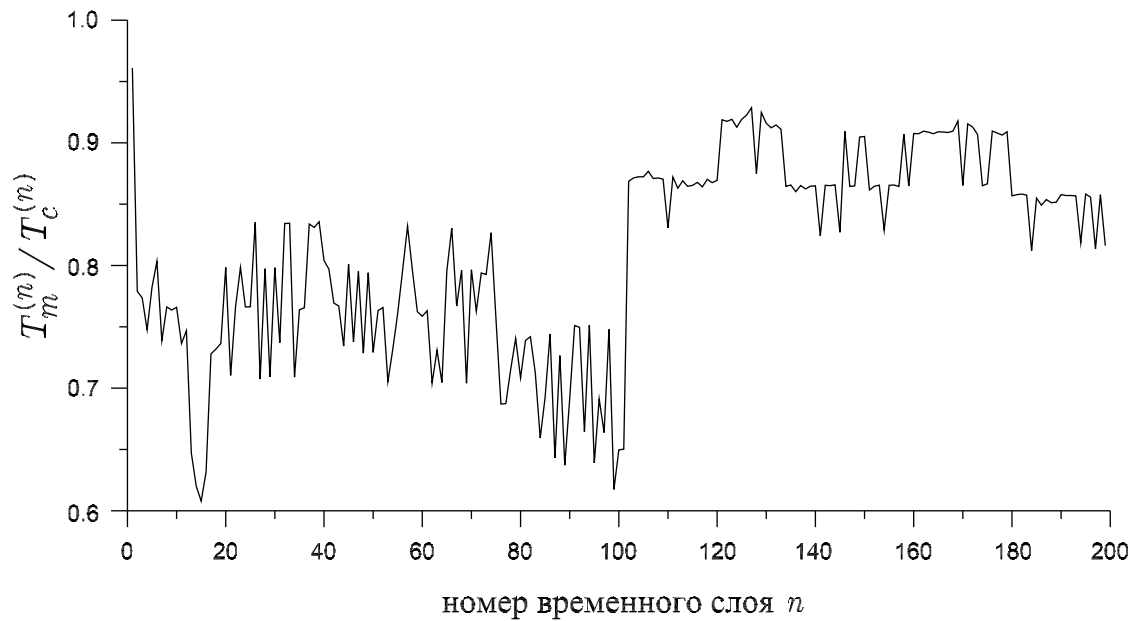


Рис. 3.11. Влияние декомпозиции давления на время счёта при моделировании течения в каверне с движущейся крышкой

8.4 Неявные схемы. В случае использования неявных разностных схем для решения уравнений Навье-Стокса невозможно получить выражения типа (3.60) для отыскания градиентов «одномерных» слагаемых. Поэтому наряду с основной задачей необходимо решать вспомогательную задачу, которая предназначена для быстрого вычисления «части» давления (суммы «одномерных» слагаемых в (3.58)).

Вспомогательную задачу формулируют в предположении, что вместо одного уравнения неразрывности (3.1) используют d ($= 2, 3$) уравнений постоянств расхода. Применительно к течению в каверне вспомогательная задача имеет вид:

а) уравнение движения по X и уравнение постоянства расхода (3.53)

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial(u^2)}{\partial x} + \frac{\partial(vu)}{\partial y} = -\frac{\partial p^x}{\partial x} - \left[\frac{\partial p^{xy}}{\partial x} \right] + \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right), \\ \int_0^1 u(t, x, y) dy = 0 \end{cases} \quad (3.62)$$

б) уравнение движения по Y и уравнение постоянства расхода (3.54)

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial(uv)}{\partial x} + \frac{\partial(v^2)}{\partial y} = -\frac{\partial p^y}{\partial y} - \left[\frac{\partial p^{xy}}{\partial y} \right] + \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \\ \int_0^1 v(t, x, y) dx = 0 \end{array} \right., \quad (3.63)$$

где квадратные скобки означают, что производные $(p^{xy})'_x$ и $(p^{xy})'_y$ являются фиксированными (т.е. вычисляются по значениям p^{xy} , взятым с предыдущей итерации), а фигурные скобки означают, что уравнения движения решают согласованно с соответствующими уравнениями постоянств расхода.

Нетрудно видеть, что каждая из систем (3.62) и (3.63) напоминает уравнения Навье-Стокса в приближении длинного канала (3.50), поэтому для их решения следует применять одинаковые численные методы. Различие состоит только в выборе критерия останова. Для получения приближения к решению полных уравнений Навье-Стокса достаточно выполнить несколько итераций метода Зейделя с блочным упорядочиванием неизвестных и отысканием «одномерных» слагаемых $p^x(x)$ и $p^y(y)$, используя быструю сходимость метода Зейделя на первых итерациях и метода секущих. В многосеточных методах вспомогательная задача будет использована для дополнительного сглаживания на самой мелкой сетке.

Далее значения «одномерных» слагаемых фиксируют и осуществляют переход к исходной задаче, в которой уравнения движения имеют вид

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial(u^2)}{\partial x} + \frac{\partial(vu)}{\partial y} = - \left[\frac{dp^x}{dx} \right] - \frac{\partial p^{xy}}{\partial x} + \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right), \quad (3.64)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial(uv)}{\partial x} + \frac{\partial(v^2)}{\partial y} = - \left[\frac{dp^y}{dy} \right] - \frac{\partial p^{xy}}{\partial y} + \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right), \quad (3.65)$$

где квадратные скобки означают, что производные $(p^x)'_x$ и $(p^y)'_y$ являются фиксированными, т.е. вычислены во вспомогательной задаче.

Для иллюстрации влияния вспомогательной задачи (3.64)–(3.65) на точность приближения к решению рассмотрим стационарное течение в каверне при $\text{Re} = 100$. При малых числах Рейнольдса, как правило, не возникает проблем, связанных со сходимостью итераций по нелинейности при решении уравнений движения. Выберем нулевые значения компонент скорости и давления $u^{(0)} = 0$, $v^{(0)} = 0$ и $p^{(0)} = 0$ в качестве начального приближения. В этом случае компонента скорости v точно удовлетворяет уравнению движения по Y и граничным условиям, поэтому в традиционных сегрегированных алгоритмах получение приближения к решению уравнений Навье-Стокса сводится к решению уравнения

$$\frac{\partial(u^2)}{\partial x} = \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right). \quad (3.66)$$

Вспомогательная задача (3.64)–(3.65) в данном случае принимает вид

$$\begin{cases} \frac{\partial(u^2)}{\partial x} = -\frac{dp^x}{dx} + \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \\ \int_0^1 u(x, y) dy = 0 \end{cases}. \quad (3.67)$$

Обе задачи в конечном итоге сводятся к системам вида $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$. В методологических целях критерий останова итераций задан в виде

$$\frac{\|A\mathbf{x} - \mathbf{b}\|}{\|\mathbf{b}\|} < 10^{-7},$$

чтобы сравнить решения (3.66) и (3.67) с решением полных уравнений Навье-Стокса (3.1). Моделирование течения при $\text{Re} = 100$ осуществлено на равномерной разнесённой сетке 101×101 с шагом $h_x = h_y = 1/100$.

Рис. 3.12 иллюстрирует преимущества, которые возникают при использовании уравнений постоянств расхода (3.56) и (3.57) в качестве

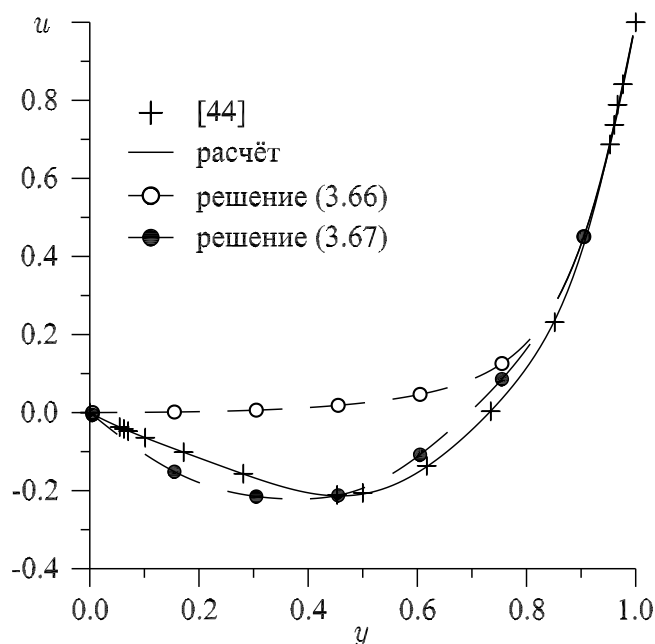


Рис. 3.12. Распределение компоненты скорости u в вертикальном сечении, проходящем через середину дна и крышки каверны (т.е. $u(0.5, y)$) при $Re = 100$

априорной информации. На рисунке сплошной линией показано решение уравнений Навье–Стокса (3.1) в переменных «скорость–давление», а маркерами «+» – решение уравнений Навье–Стокса в переменных «вихрь–функция тока» [44] в вертикальном сечении, проходящем через середину дна и крышки каверны ($x = 0.5$). Приближение к решению в традиционных сегрегированных алгоритмах, полученное из (3.66), близко к решению только в непосредственной близости ($y > 0.7$) от движущейся крышки. Приближение, полученное из (3.67), близко к искомому решению уравнений Навье–Стокса во всем вертикальном сечении благодаря использованию уравнения постоянства расхода.

Отметим следующие прикладные аспекты принципа формальной декомпозиции давления:

1) Метод основан на формальном преобразовании давления (3.52) и использовании интегральных форм уравнения неразрывности (3.1а) (урав-

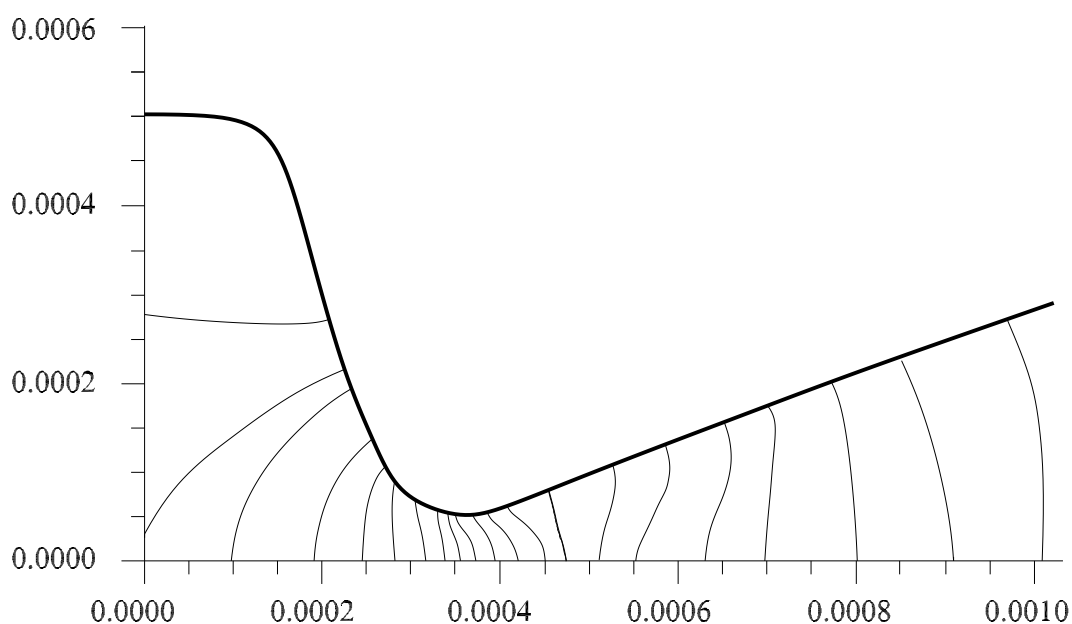


Рис. 3.13. Изобары в плоском микросопле Лавалья (размеры сопла в мм)

нений постоянств расхода типа (3.53) и (3.54)). Поэтому данный метод можно применять к решению широкого класса прикладных задач. Единственным ограничением является требование регулярности вычислительной сетки.

2) Алгоритм решения вспомогательной задачи состоит из итераций Зейделя в сочетании с итерационным способом отыскания «одномерных» слагаемых в (3.52), т.е. не содержит каких-либо проблемно-зависимых компонент. Поскольку метод Зейделя сходится быстро только на первых итерациях, то вспомогательную задачу следует использовать для вспомогательного сглаживания в многосеточных алгоритмах.

3) Эффективность метода зависит от типа течения, наилучшие результаты достигают при моделировании течений с выделенным направлением движения среды. На рис. 3.13 показано распределение давления в микросопле Лавалья. Хорошо видно, что изобары в окрестности критического сечения сопла и в сверхзвуковой части можно аппроксимировать вер-

тикальными линиями, т.е. давление изменяется преимущественно вдоль оси микросопла. В данном случае градиент одного из «одномерных» слагаемых в (3.52) будет доминирующим и большая часть давления будет отыскана при решении вспомогательной задачи, которая требует существенно меньшего объёма вычислений, чем основная. При моделировании рециркуляционных течений метод показывает наименьшую эффективность.

§ 9. Полный многосеточный алгоритм

Положим, что решение уравнений Навье-Стокса имеет особенности типа пограничного слоя или столь сложную структуру, которая не позволяет начинать многосеточную итерацию с самой грубой сетки. В этом случае желательно чтобы приближение было близким к искомому решению, тогда поправка, отыскиваемая на грубых сетках, не будет иметь особенностей.

Одним из способов получения достаточно точного приближения является использование многосеточного цикла, показанного на рис. 2.9. Здесь предполагается, что поправка, как разность приближений между значениями с последующей и предыдущей многосеточными итерациями, не будет иметь особенностей. Однако при этом иногда потребуется выполнить большое количество многосеточных итераций, прежде чем станет возможным перейти к уровню с более грубыми сетками. Более перспективным является применение дополнительного сглаживания на самой мелкой сетке, основанного на решении вспомогательной задачи.

Данный подход основан на предположении, что решение вспомогательной задачи, состоящей из уравнений движения и постоянств расхода, будет близко к решению основной задачи, состоящей из уравнений движения и неразрывности.

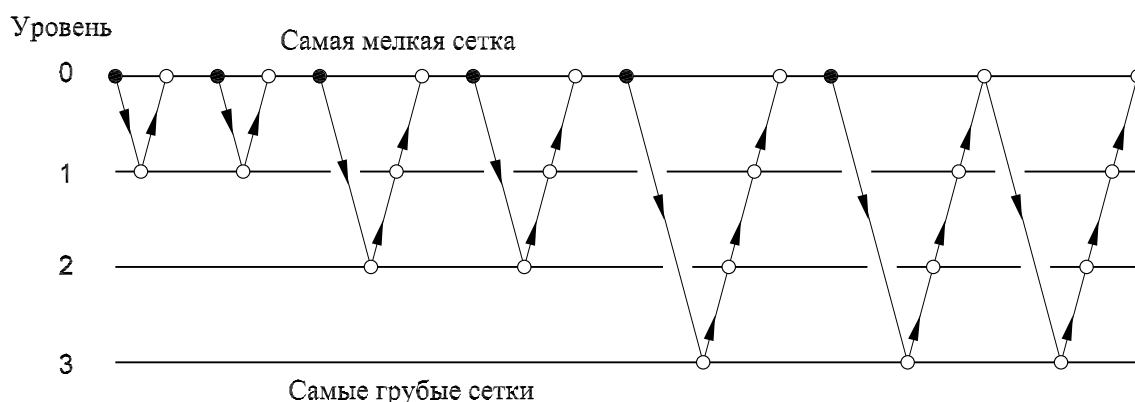


Рис. 3.14. Полный многосеточный цикл для решения уравнений Навье-Стокса (● – вспомогательная задача, ○ – основная задача)

Положим, что сформулирована вспомогательная задача, основанная на замене уравнения неразрывности (3.1а) уравнениями постоянств расхода, и основная, совпадающая с точностью до вида градиента давления с исходными уравнениями Навье-Стокса (3.1). Тогда на первых многосеточных итерациях следует использовать вспомогательную задачу для дополнительного сглаживания на самой мелкой сетке, как показано на рис. 3.14. Если приближение к решению после многосеточной итерации оказывается достаточно точным, то от дополнительного сглаживания следует отказаться и перейти к пилообразному циклу.

Возможен более простой, но менее эффективный, способ использования вспомогательной задачи: сначала решить вспомогательную задачу, затем её решение использовать в качестве начального приближения для уравнений Навье-Стокса. Вспомогательную задачу не обязательно решать точно, достаточно выполнить несколько многосеточных итераций для получения нужного приближения к решению.

Применим второй способ к решению задачи о стационарном течении в квадратной полости (рис. 3.8) для более наглядного сравнения решений вспомогательной и основной задач, которые в данном случае имеют вид:

1) вспомогательная задача

а) уравнение движения по X и уравнение постоянства расхода

$$\begin{cases} \frac{\partial(u^2)}{\partial x} + \frac{\partial(vu)}{\partial y} = -\frac{dp^x}{dx} - \left[\frac{\partial p^{xy}}{\partial x} \right] + \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right), \\ \int_0^1 u(x, y) dy = \int_0^1 u(0, y) dy - \int_0^x v(\xi, 1) d\xi, \end{cases}$$

б) уравнение движения по Y и уравнение постоянства расхода

$$\begin{cases} \frac{\partial(uv)}{\partial x} + \frac{\partial(v^2)}{\partial y} = -\frac{dp^y}{dy} - \left[\frac{\partial p^{xy}}{\partial y} \right] + \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right), \\ \int_0^1 v(x, y) dx = \int_0^y u(0, \xi) d\xi; \end{cases}$$

2) основная задача

а) уравнение неразрывности

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0,$$

б) уравнение движения по X

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial(u^2)}{\partial x} + \frac{\partial(vu)}{\partial y} = - \left[\frac{dp^x}{dx} \right] - \frac{\partial p^{xy}}{\partial x} + \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right),$$

в) уравнение движения по Y

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial(uv)}{\partial x} + \frac{\partial(v^2)}{\partial y} = - \left[\frac{dp^y}{dy} \right] - \frac{\partial p^{xy}}{\partial y} + \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right).$$

Данная задача решена на сетках 101×101 и 1001×1001 при значениях числа Рейнольдса $\text{Re} = 100$ и $\text{Re} = 500$. Многосеточные итерации выполнены по схеме пилообразного цикла, показанного на рис. 2.9, как для вспомогательной, так и для основной задач. Дополнительное сглаживание на самой мелкой сетке состоит из выполнения трёх итераций метода Зейделя в сочетании с методом секущих применительно к сеточному аналогу уравнений вспомогательной задачи. Метод Ванки использован

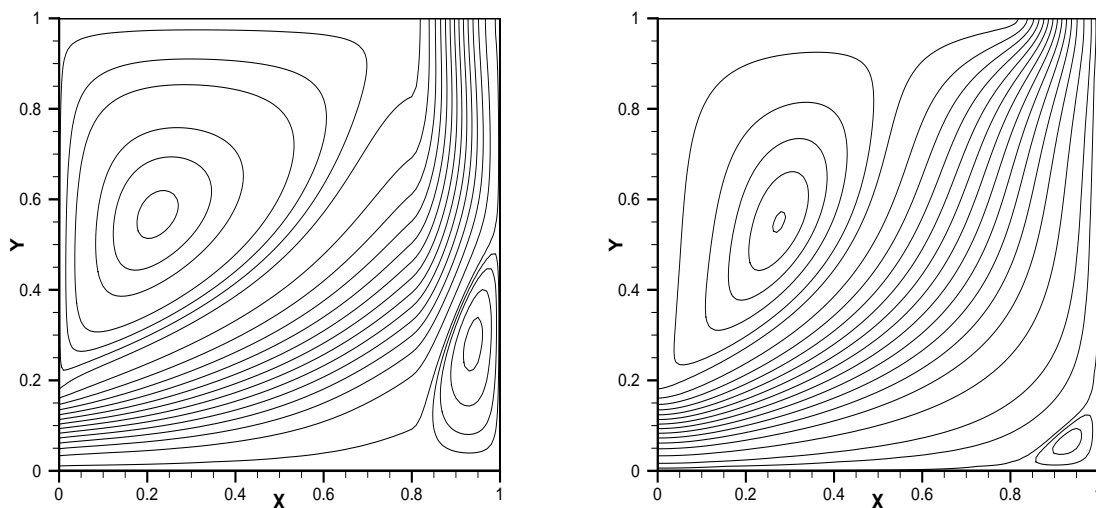


Рис. 3.15. Изолинии функции тока: решение вспомогательной (слева) и основной (справа) задач при $Re = 100$

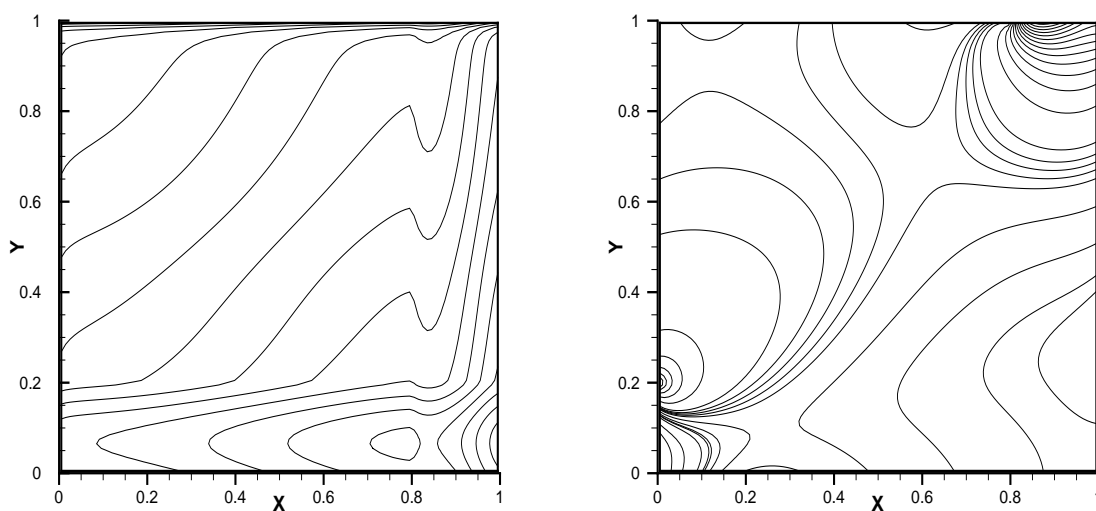


Рис. 3.16. Изобары: решение вспомогательной ($p^x + p^y$, слева) и основной ($p^x + p^y + p^{xy}$, справа) задач при $Re = 100$

в качестве сглаживателя для сеточных аналогов Σ -модифицированных уравнений основной задачи, на каждой сетке выполнено четыре сглаживающих итерации. На уровне с самыми грубыми сетками сеточные уравнения решены точно.

Сравнение решений вспомогательной и основной задач показано на рис. 3.15 и 3.16. Вспомогательная задача предсказывает наличие основного течения и двух вихрей, одного в верхнем левом углу полости, а другого – в нижнем правом. Однако положение и размеры вихрей, особенно в нижнем углу, несколько отличаются от результатов решения основной задачи.

Совпадение по значениям давления, показанным на рис. 3.16, немного хуже, потому что во вспомогательной задаче отыскивается только «часть» давления (сумма одномерных слагаемых $p^x + p^y$). В данном случае все слагаемые в представлении (3.58) имеют сравнимую величину, что привело к заметному различию между $p^x + p^y$ и $p^x + p^y + p^{xy}$.

Сходимость многосеточных итераций при решении стационарных уравнений Навье–Стокса показана на рис. 3.17, где $\|r_u\|$, $\|r_v\|$, $\|r_{uv}\|$, $\|r_u^*\|$ и $\|r_v^*\|$ суть $\|\cdot\|_\infty$ нормы невязок линеаризованных сеточных аналогов уравнений движения по X , Y , неразрывности и постоянств расхода соответственно. Критерий останова при решении вспомогательной задачи задан в виде

$$\max(\|r_u\|, \|r_v\|) < 10^{-3}, \quad \max(\|r_u^*\|, \|r_v^*\|) < 10^{-6},$$

а при решении основной задачи определён как

$$\max(\|r_u\|, \|r_v\|, \|r_{uv}\|) < 10^{-4}.$$

Критерий останова проверялся после каждого сглаживания на самой мелкой сетке.

Перечислим все факторы, которые определяют скорость сходимости многосеточных итераций УМТ:

- количество сглаживающих итераций,

- оптимальное значение параметра нижней релаксации для нелинейных задач,
- конфигурация блока неизвестных для анизотропных задач,
- условия перехода к уровню с более грубыми сетками для полного многосеточного цикла (рис. 3.14).

При разработке программного обеспечения следует помнить, что заранее неизвестно имеет ли данная задача стационарное решение. В общем случае можно отыскивать стационарные решения посредством счёта на установление, причём фиктивное время играет роль параметра нижней релаксации. Однако счёт на установление требует существенно большего объёма вычислений, по сравнению с непосредственным решением стационарных уравнений. Увеличение шага по фиктивному времени не позволит достичь оптимальной скорости сходимости [13].

Для инженерных приложений характерны сложные геометрии областей. Построение структурированных ортогональных сеток в таких областях является трудной проблемой. Наиболее перспективным направлением является разделение исходной области на более простые подобласти, в которых легче построить структурированную неортогональную сетку. Однако аппроксимация краевых задач на неортогональных сетках достаточно сложна, хотя все положения УМТ легко обобщить на неортогональные сетки. Ещё более сложно устроен многосеточный алгоритм для решения краевых задач на адаптированных сетках. В этом случае необходимо на основе анализа промежуточных приближений построить новую сетку, лучше адаптированную к решению, проинтерполировать приближение со старой сетки на новую и продолжить выполнение многосеточных итераций.

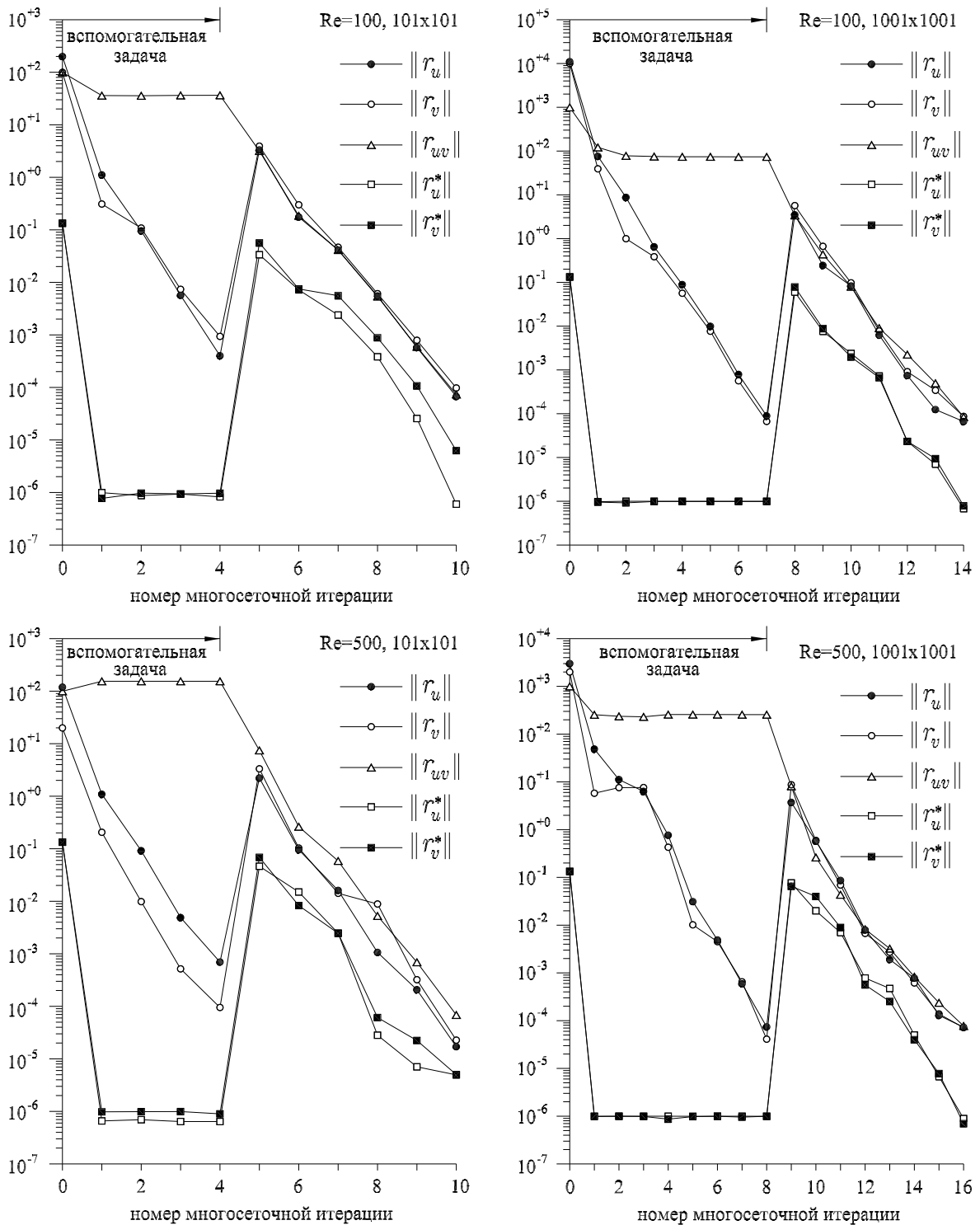


Рис. 3.17. Сходимость многосеточных итераций при решении стационарных уравнений Навье-Стокса

Литература

- [1] АНДЕРСОН А., ТАННЕХИЛЛ ДЖ., ПЛЕТЧЕР Р. Вычислительная гидродинамика и теплообмен: В 2-х т.: М.: Мир, 1990. 384 с.
- [2] АСТРАХАНЦЕВ Г.П. Об одном релаксационном методе // ЖВМ и МФ. 1971. Т.11. №2. С.439-448.
- [3] БАХВАЛОВ Н.С. О сходимости одного релаксационного метода при естественных ограничениях на эллиптический оператор // ЖВМ и МФ. 1966. Т.6, №5. С.861-883.
- [4] БАХВАЛОВ Н.С., ЖИДКОВ Н.П., КОБЕЛЬКОВ Г.М. Численные методы. М.: Лаборатория Базовых Знаний, 2002. 632 с.
- [5] БЕЛОЦЕРКОВСКИЙ О.М., ГУЩИН В.А., ЩЕННИКОВ В.В. Метод расщепления в применении к решению задач динамики вязкой несжимаемой жидкости // ЖВМ и МФ. 1975. Т. 15, №1. С.197-207.
- [6] ВЛАСОВА Е.А., ЗАРУБИН В.С., КУВЫРКИН Г.Н. Приближенные методы математической физики: Учеб. для вузов / Под ред. В.С. Зарубина, А.П. Крищенко. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2001. 700 с.
- [7] ВОЛКОВ К.Н. Дискретизация конвективных потоков в уравнениях Навье-Стокса на основе разностных схем высокой разрешающей способности // Вычислительные методы и программирование. 2004. Т.5., Раздел 1. с. 129–145.

- [8] ГАЛАНИН М.П., САВЕНКОВ Е.Б. Методы численного анализа математических моделей. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э.Баумана, 2010. 591 с.
- [9] ГИЛЁВА Л.В., ШАЙДУРОВ В.В. Каскадный многосеточный алгоритм в методе конечных элементов для трёхмерной задачи Дирихле в области с криволинейной границей // Сибирский журнал вычислительной математики. 2002. №5. С.127-147.
- [10] ГУЩИН В.А. Пространственное обтекание трехмерных тел потоком вязкой жидкости // ЖВМ и МФ. 1976. Т. 16, №2. С.529-534.
- [11] ЖУКОВ В.Т., НОВИКОВА Н.Д., ФЕОДОРИТОВА О.Б. Параллельный многосеточный метод для разностных эллиптических уравнений. Часть I. Основные элементы алгоритма // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша РАН. 2012. №30. 32 с. (<http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2012-30>)
- [12] ИСАЧЕНКО В.П., ОСИПОВА В.А., СУКОМЕЛ А.С. Теплопередача. М.: Энергоатомиздат, 1981. 416 с.
- [13] КАЛИТКИН Н.Н. Численные методы. М.: Наука, 1978. 512 с.
- [14] ЛАНДАУ Л.Д., ЛИФШИЦ Е.М. Теоретическая физика: Учеб. пособие. В 10 т. Т. VI Гидродинамика. 4-е изд., стер. М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1988. 736 с.
- [15] ЛОЙЦЯНСКИЙ Л.Г. Механика жидкости и газа. М.: Наука, 1987. 840 с.
- [16] МАРТЫНЕНКО С.И. Универсальная многосеточная технология для численного решения краевых задач на структурированных сетках // Вычислительные методы и программирование. 2000. Т.1, раздел 1. С.85-104.

-
- [17] МАРТЫНЕНКО С.И. Замечания о применении явных схем для численного решения уравнений Навье-Стокса // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Естественные науки. 2011. №2. С.107-120.
- [18] МАРЧУК Г.И. Методы вычислительной математики: Учеб. пособие. 3-е изд., перераб. и доп. М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1989. 608 с.
- [19] МУДРОВ А.Е. Численные методы для ПЭВМ на языках Бейсик, Фортран и Паскаль. Томск: МП «РАСКО». 1991. 272 с.
- [20] НЕМНЮГИН С.А., СТЕСИК О.Л. Параллельное программирование для многопроцессорных вычислительных систем. СПб.: БХВ-Петербург, 2002. 400 с.
- [21] ОЛЬШАНСКИЙ М.А. Лекции и упражнения по многосеточным методам. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. 168 с.
- [22] ОРТЕГА ДЖ. Введение в параллельные и векторные методы решения линейных систем. М: Мир, 1991. 367 с.
- [23] ПАСКОНОВ В.М., ПОЛЕЖАЕВ В.И., ЧУДОВ Л.А. Численное моделирование процессов тепло- и массообмена: Учебное пособие для вузов. М.: Наука, 1984. 288 с.
- [24] ПАТАНКАР С. Численные методы решения задач теплообмена и динамики жидкости: М.: Энергоатомиздат, 1984. 152 с.
- [25] САМАРСКИЙ А.А. Теория разностных схем: Уч. пос. М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1983. 616 с.
- [26] САМАРСКИЙ А.А., ГУЛИН А.В. Численные методы. М.: Наука, 1989. 432 с.
- [27] СЕБИСИ Т., БРЭДШОУ П. Конвективный теплообмен. Физические основы и вычислительные методы. М.: Мир, 1987. 592 с.

- [28] СТАНКОВА Е.Н., ЗАТЕВАХИН М.А. Многосеточные методы: введение в стандартные методы (http://www.csa.ru/skif/kurs_3/multigrid)
- [29] РОЖДЕСТВЕНСКИЙ Б.Л., МОИСЕЕНКО Б.Д., СИДОРОВА В.К. Условия численного моделирования предельных режимов течений вязкой жидкости. // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша АН. 1973. №24.
- [30] РЯБЕНЬКИЙ В.С. Введение в вычислительную математику: Учеб. пособие. 2-е изд., исправл. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2000. 296 с.
- [31] ФЕДОРЕНКО Р.П. Релаксационный метод решения разностных эллиптических уравнений // ЖВМ и МФ. 1961. Т.1, №5. С.922–927.
- [32] ФЕДОРЕНКО Р.П. Скорость сходимости одного итерационного метода // ЖВМ и МФ. 1964. Т.4, №3. С.227–235.
- [33] ФЕДОРЕНКО Р.П. Введение в вычислительную физику. М.: МФТИ, 1994. 528 с.
- [34] ФЛЕТЧЕР К. Вычислительные методы в динамике жидкостей: В 2-х т.: М.: Мир, 1991. 552 с.
- [35] ШАЙДУРОВ В.В. Многосеточные методы конечных элементов. М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1989. 288 с.
- [36] ШЛИХТИНГ Г. Теория пограничного слоя. М.: Наука, 1974. 711 с.
- [37] BAO W. Artificial boundary conditions for incompressible Navier-Stokes equations: a well-posed result // *Comp. Meth. Appl. Mech. Engrg.* 2000. V. 188, №1-3. P. 595-611.
- [38] BENZI M., GOLUB G.H., LIESEN, J. Numerical solution of saddle point problems // *Acta Numerica.* 2006. V.14. P. 1-137.
- [39] BERTAGNOLIO F. Solution of the incompressible Navier-Stokes equations on domains with one or several open boundaries // *Int. J. Num. Meth. Fluids.* 1999. V. 31, №7. P. 1061-1085.

-
- [40] BRILEY W.R. Numerical method for predicting three-dimensional steady viscous flow in ducts // *J. Comp. Phys.* 1974. V.14. pp. 8–28.
- [41] BRUNEAU CH.-H., FABRIE P. Effective downstream boundary conditions for incompressible Navier-Stokes equations // *Int. J. Num. Meth. in Fluids.* 1994. V. 19, P. 693-705.
- [42] DEUFLHARD P. Cascadic conjugate gradient methods for elliptic partial differential equations. I. Algorithm and numerical results. // Technical Report SC 93-23, Berlin: Konrad-Zuse-Zentrum, 1993.
- [43] DEUFLHARD P. Cascadic conjugate gradient methods for elliptic partial differential equations. Algorithm and numerical results. In: *Proceedings of 7th International Conference on Domain Decomposition Methods 1993*, Providence: AMS, 1994.
- [44] GHIA U., GHIA K.N., SHIN C.T. High-Re Solutions for Incompressible Flow Using the Navier-Stokes Equations and a Multigrid Method // *J. Comp. Physics.* 1982. V.48. pp. 387–411.
- [45] HACKBUSCH W. *Multi-grid Methods and Applications*. Berlin, Heidelberg: Springer, 1985.
- [46] HACKBUSCH W. Robust multi-grid methods, the frequency decomposition multi-grid algorithm // *Proc. 4th GAMM-seminar*. Berlin. 1988. P.96-104.
- [47] MARTYNENKO S.I. Robust Multigrid Technique for black box software // *Comp. Meth. in Appl. Math.* 2006. V. 6, №4. P.413-435.
- [48] MARTYNENKO S.I. A physical approach to development of numerical methods for solving Navier-Stokes equations in primitive variables formulation // *Int. J. of Comp. Science and Math.* 2009. V.2, №4. P.291-307.

-
- [49] NAZAROV S.A., SPECOVIUS-NEUGEBAUER M., VIDEMAN J.H. Nonlinear artificial boundary conditions for the Navier-Stokes equations in an aperture domain // *Math. Nachr.* 2004. V. 265, P.24-67.
- [50] OLSHANSKII M.A., STAROVEROV V.M. On simulation of outflow boundary conditions in finite difference calculations for incompressible fluid // *Int. J. Num. Meth. Fluids.* 2000. V. 33. P. 499-534.
- [51] SHAIDUROV V.V. Some estimates of the rate of convergence for the cascadic conjugate-gradient method // *Computers Math. Applic.* 1996. V. 31. №.4/5, P.161-175.
- [52] SHAIDUROV V.V. The convergence of the cascadic conjugate-gradient method under a deficient regularity // In: *Problems and Methods in Mathematical Physics.* Stuttgart: Teubner, 1994. P.185-194.
- [53] SHORTLEY G., WELLER R. Numerical solution of Laplace's equation. // *J. Appl. Phys.* 1938. №9. p.334-348.
- [54] TROTTENBERG U., OOSTERLEE C.W., SCHÜLLER A. *Multigrid.* Academic Press. London. 2001.
- [55] VANKA S.P. Block-implicit multigrid solution of Navier–Stokes equations in primitive variables // *J. Comput. Physics.* 1986. V. 65. P. 138–158.
- [56] WESSELING P. *An Introduction to Multigrid Methods.* Wiley. Chichester. 1991.

Предметный указатель

- П-модификация, 72
- Σ-модификация, 71
- алгоритм, 67
 - универсальный, 69
- контрольный объём, 82
- критерий останова, 15
- матрица
 - диагональная, 18
 - единичная, 18
 - итераций, 21
 - коэффициентов, 13
 - невырожденная, 18
 - обратная, 18
 - собственный вектор, 18
 - собственное значение, 18
 - спектр, 18
 - спектральный радиус, 18
 - транспонированная, 18
 - треугольная, 14, 18
- метод
 - баланса, 70
 - Гаусса, 15
 - Зейделя, 17
 - симметричный, 17
 - итерационный, 14
 - Ньютона, 169, 178
 - прогонки, 28
 - прямой, 14, 92
- многосеточная структура, 76
- многосеточный цикл
 - пилообразный, 91
- модель
 - математическая, 67
- норма
 - вектора
 - Гельдера, 18
 - кубическая, 19
 - октаэдрическая, 19
 - сферическая, 19
- матричная, 19
 - подчинённая, 20
 - согласованная, 20
 - спектральная, 19
 - эквивалентная, 20
- оператор
 - Гамильтона, 167

- Лапласа, 166
- продолжения, 39, 53, 62, 92
- сужения, 39, 51, 90
- операторы переходов, 40
- отображение индексов, 78
- поправка, 71
- предобуславливатель, 20
- приближение
 - к решению, 15, 71
 - начальное, 17
- сетка
 - грубая, 37, 75
 - мелкая, 37, 73
 - неравномерная, 73
 - равномерная, 73
 - разнесённая, 94, 172
 - структурированная, 76
- сеточный уровень
 - нулевой, 76
 - первый, 76
- сглаживание
 - последующее, 38, 53
 - предварительное, 38, 53
- сглаживатель, 35
- сходимость
 - линейная, 21
 - оптимальная, 35, 59
- свойство
 - аддитивности интеграла, 81
 - аппроксимации, 40
 - сглаживания, 38
- технология, 70
- точка сетки, 73
 - фиктивная, 76
- узел сетки, 82
 - фиктивный, 97
- универсальность, 69
- упорядочивание
 - блочное, 27
 - точечное, 26
- уравнение
 - теплопроводности, 85, 115
 - энергии, 164
- уравнения Навье-Стокса, 164
- уравнения Стокса, 166
- число
 - Пекле, 165
 - Прантдля, 165
 - Рейнольдса, 165
- шаблон, 23
 - пятиточечный, 23
- шаблонный функционал, 84

Оглавление

Обозначения	3
Введение	7
Глава 1. Основы многосеточных методов	13
§ 1. Базовые прямые и итерационные методы	13
§ 2. Модельная задача	23
§ 3. Основополагающая идея Р.П. Федоренко	33
§ 4. Простейший многосеточный метод	37
§ 5. Многосеточная итерация	46
§ 6. Классические многосеточные методы	57
Глава 2. Универсальная многосеточная технология	67
§ 1. Мотивация и терминология	67
§ 2. Аналитическая часть технологии	70
§ 3. Вычислительная часть технологии	73
3.1 Построение самой мелкой сетки	73
3.2 Построение грубых сеток	74
3.3 Аппроксимация на многосеточной структуре	82
3.4 Многосеточные итерации	91
§ 4. Аппроксимация граничных условий	93
§ 5. Иллюстративный пример	96
§ 6. Анализ сходимости	107
§ 7. Вычислительные эксперименты	115
§ 8. Неструктурированные сетки	129
§ 9. Оценка эффективности распараллеливания	138

§ 10. Замечания о программном обеспечении	150
§ 11. Сравнение многосеточных методов	160
Глава 3. Элементы вычислительной гидродинамики	163
§ 1. Уравнения Навье-Стокса	163
§ 2. Разнесённая сетка	172
§ 3. Аппроксимация конвективно-диффузионного уравнения	179
§ 4. Результирующая СЛАУ	184
§ 5. Метод Узавы	186
§ 6. Метод Ванки	191
§ 7. Простейший многосеточный алгоритм	198
§ 8. Принцип формальной декомпозиции давления	206
8.1 Упрощённые уравнения Навье-Стокса	207
8.2 Декомпозиция давления	213
8.3 Явные схемы	216
8.4 Неявные схемы	222
§ 9. Полный многосеточный алгоритм	228
Литература	235
Предметный указатель	241

Для заметок

Научное издание

Мартыненко Сергей Иванович

УНИВЕРСАЛЬНАЯ МНОГОСЕТОЧНАЯ ТЕХНОЛОГИЯ

Корректор А.А.Симон