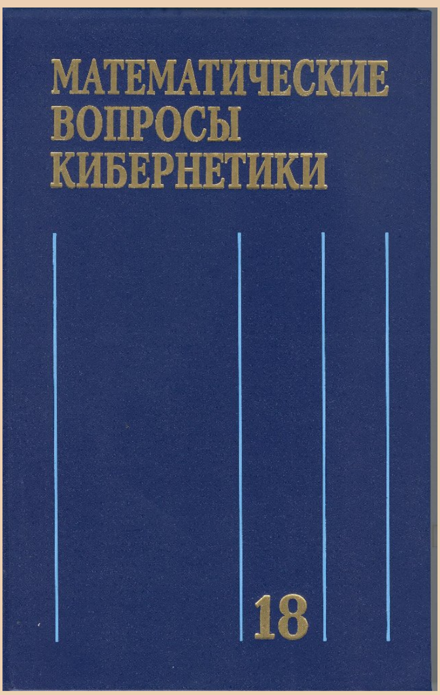

Р. М. Колпаков,
М. А. Посыпкин

Верхняя оценка числа ветвлений для задачи о сумме подмножеств

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Колпаков Р. М., Посыпкин М. А. Верхняя оценка числа ветвлений для задачи о сумме подмножеств // Математические вопросы кибернетики. Вып. 18. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2013. — С. 213–226. URL: http://library.keldysh.ru/mvk.asp?id=2013-213

ВЕРХНЯЯ ОЦЕНКА ЧИСЛА ВЕТВЛЕНИЙ ДЛЯ ЗАДАЧИ О СУММЕ ПОДМНОЖЕСТВ

Р. М. КОЛПАКОВ, М. А. ПОСЫПКИН

(МОСКВА)

В работе получена верхняя оценка сложности решения задачи о сумме подмножеств методом ветвей и границ с ветвлением по переменной с максимальным весом. Эта оценка зависит только от исходных данных задачи, тем самым позволяя оценить максимальное необходимое для решения задачи число операций до начала решения задачи на основании ее исходных данных.

§ 1. Введение

Задачи дискретной оптимизации, также называемые задачами целочисленного программирования, состоят в нахождении максимального (минимального) значения функции f на конечном множестве G. К этому классу относятся классические задачи коммивояжера, задача о ранце, покрытии графа и многие другие. В настоящее время разработано большое число алгоритмов, которые позволяют эффективно решать такие задачи: методы динамического программирования, ветвей и границ, отсечений и др. Все перечисленные алгоритмы основаны на идее сокращенного перебора элементов множества G, отличающегося от полного тем, что в процессе работы алгоритма различные подмножества G исключаются и их элементы не рассматриваются. Известно, что число шагов перечисленных алгоритмов, необходимых для нахождения точного решения задачи и доказательства его оптимальности, сильно зависит от исходных данных задачи. При этом сложность работы алгоритмов колеблется в очень широких пределах: от константного до экспоненциального по числу переменных задачи числа шагов. Поэтому представляют интерес не только оценки максимального числа шагов алгоритма для всего множества возможных исходных данных, но также и получение усредненных оценок и оценок, зависящих от коэффициентов задачи.

В данной работе рассмотрен метод ветвей и границ для задачи о сумме подмножеств, являющейся важным частным случаем задачи о ранце [11]. В рассматриваемом варианте метода декомпозиция всегда осуществляется по переменной, имеющей наибольший вес. Получены верхние оценки сложности решения в зависимости от исходных данных задачи. Эти оценки также являются верхними оценками сложности решения для задачи о ранце, т. к. при решении задачи о ранце имеет место дополнительное сокращение перебора за счет отсева подмножеств по значению целевой функции.

§ 2. Основные понятия и определения

Задача о *сумме подмножеств* формулируется следующим образом:

$$f(x)=\sum_{i=1}^{n} x_i w_i \to max,\ \sum_{i=1}^{n} x_i w_i \leqslant C,\ x_i \in \{0,1\},\ i\in N, \tag{1}$$

где $N=\{1,\ldots,n\}$ — множество целых чисел от 1 до n, а граница C и веса w_i, $i\in N$, — положительные действительные числа.

Подзадачей задачи (1) будем называть следующую оптимизационную задачу:

$$\begin{aligned} &f(x)=\sum_{i=1}^{n} w_i x_i \to max,\\ &\sum_{i=1}^{n} w_i x_i \leqslant C,\\ &x_i=\theta_i,\ i\in I,\ \theta_i\in\{0,1\},\\ &x_i\in\{0,1\},\ i\in N\setminus I, \end{aligned} \tag{2}$$

где $I\subseteq N$ — множество индексов всех переменных x_i, принимающих фиксированные значения θ_i. Множество I далее будем называть множеством *индексов фиксированных переменных*, а множество $N\setminus I$ — *множеством свободных переменных* подзадачи (2). Отметим, что задача (1) является частным случаем задачи (2), когда множество I пусто. Набор $\widetilde{\theta}=\{\theta_i|\ i\in I\}$ будем называть набором значений фиксированных переменных подзадачи (2).

Допустимым решением подзадачи (2) называется любой булев вектор x длины n, удовлетворяющий ограничениям:

$$\begin{aligned} &f(x)\leqslant C,\\ &x_i=\theta_i,\ i\in I,\ \theta_i\in\{0,1\},\\ &x_i\in\{0,1\},\ i\in N\setminus I. \end{aligned}$$

Произвольное допустимое решение подзадачи (2) является также допустимым решением исходной задачи (1). *Оптимальным* решением подзадачи (2) будем называть ее допустимое решение x, такое, что для любого другого ее допустимого решения y выполняется $f(y)\leqslant f(x)$.

Пусть имеется набор булевых величин $\widetilde{\theta}=\{\theta_i|\ i\in I\}$, где $I\subseteq N$. Будем называть 1-*дополнением* набора $\widetilde{\theta}$ вектор $\widetilde{\theta}^{(1)}$ длины n, i-й элемент которого удовлетворяет соотношению

$$\theta_i^{(1)}=\begin{cases}\theta_i, i\in I,\\ 1, i\in N\setminus I.\end{cases}$$

По аналогии определим 0-*дополнение* $\widetilde{\theta}^{(0)}$:

$$\theta_i^{(0)}=\begin{cases}\theta_i, i\in I,\\ 0, i\in N\setminus I.\end{cases}$$

Будем говорить, что для подзадачи P вида (2) выполнено *условие* **C0**, если $\sum\limits_{i\in I}\theta_i w_i > C$. Будем говорить, что для подзадачи вида (2) выполнено *условие* **C1**, если $\sum\limits_{i\in I}(1-\theta_i)w_i \geqslant W-C$.

Утверждение 1. *Подзадача* (2), *удовлетворяющая условию* **C0**, *не имеет допустимых решений.*

Справедливость этого утверждения непосредственно следует из того, что выполнение условия **C0** автоматически означает невыполнение ограничений задачи (2).

Утверждение 2. *Если подзадача* (2) *удовлетворяет условию* **C1**, *то* 1*-дополнение набора* $\{\theta_i |\, i \in I\}$ *будет оптимальным решением подзадачи* (2).

Доказательство. Пусть подзадача (2) удовлетворяет условию **C1**. Рассмотрим 1-дополнение $\widetilde{\theta}^{(1)}$ набора $\widetilde{\theta} = \{\theta_i |\, i \in I\}$. Согласно определению условия **C1** выполнено $\sum\limits_{i\in I}(1-\theta_i)w_i \geqslant W - C$. Следовательно, $W - \sum\limits_{i\in I}(1-\theta_i)w_i \leqslant C$. С другой стороны,

$$W - \sum_{i\in I}(1-\theta_i)w_i = \sum_{i\in I}\theta_i w_i + \sum_{i\in N\setminus I} w_i = \sum_{i\in N}\theta_i^{(1)}w_i.$$

Следовательно, $\sum\limits_{i\in N}\theta_i^{(1)}w_i \leqslant C$. Таким образом доказана допустимость решения $\widetilde{\theta}^{(1)}$. Его оптимальность является очевидным следствием определения 1-дополнения. Тем самым справедливость доказываемого утверждения установлена.

Из утверждений 1 и 2 непосредственно вытекает

Следствие 1. *Подзадача* (2) *не может удовлетворять одновременно условиям* **C0** *и* **C1**.

Утверждение 3. *Если* $I = N$, *то подзадача* (2) *удовлетворяет одному из условий* **C0**, **C1**.

Доказательство. Пусть для подзадачи (2) справедливо $I = N$. Предположим, что для этой подзадачи условие **C0** не выполняется: $\sum\limits_{i\in N}\theta_i w_i \leqslant C$. Так как $\sum\limits_{i\in N}\theta_i w_i = W - \sum\limits_{i\in N}(1-\theta_i)$, то $W - \sum\limits_{i\in N}(1-\theta_i)w_i \leqslant C$, т. е. $\sum\limits_{i\in N}(1-\theta_i)w_i \geqslant W - C$. Последнее неравенство означает выполнение условия **C1**. Тем самым утверждение доказано.

Таблица

Разбиение задачи (1) на две подзадачи

Подзадача **P0**	Подзадача **P1**
$\sum\limits_{i=1}^{n} w_i x_i \to max,$	$\sum\limits_{i=1}^{n} w_i x_i \to max,$
$\sum\limits_{i=1}^{n} w_i x_i \leqslant C,$	$\sum\limits_{i=1}^{n} w_i x_i \leqslant C,$
$x_i = \theta_i, i \in I, \theta_i \in \{0,1\},$	$x_i = \theta_i, i \in I, \theta_i \in \{0,1\},$
$x_j = 0,$	$x_j = 1,$
$x_i \in \{0,1\}, i \in N \setminus \big(I \cup \{j\}\big).$	$x_i \in \{0,1\}, i \in N \setminus \big(I \cup \{j\}\big).$

Разбиением подзадачи (2) *по переменной* x_j, $j \in N \setminus I$, назовем множество из двух подзадач **P0**, **P1**, получающихся из (2) приданием переменой x_j значений 0 и 1 соответственно (см. таблицу). Переменную x_j будем называть *переменной ветвления*. Справедливо следующее

Утверждение 4. *Множества допустимых и оптимальных решений задачи* (2) *совпадают с объединением множеств допустимых и оптимальных решений задач* **P0**, **P1** *ее разбиения*.

Сформулируем теперь вариант метода ветвей и границ для решения задачи (1), рассматриваемый в данной работе:

Алгоритм МВГ

Данные: Список подзадач $\mathbb{S}$. Рекордное решение $\widetilde{x}_r$, обладающее наибольшим из рассмотренных допустимых решений значением $f(\widetilde{x}_r)$ целевой функции $f(x)$.

Шаг 1. В список подзадач помещается исходная задача (1), в качестве рекордного решения выбирается нулевой вектор: $x^{(r)} = \{0, \ldots, 0\}$.

Шаг 2. Из списка выбирается и удаляется одна из подзадач.

Шаг 3. Если выбранная подзадача не удовлетворяет условиям **C0** и **C1**, то в список помещаются две подзадачи, образующие ее разбиение по свободной переменной с наибольшим весом. В противном случае если выбранная подзадача удовлетворяет условию **C1**, то формируется 1-дополнение $\widetilde{\theta}^{(1)}$ набора $\{\theta_i \mid i \in I\}$. Если $f(\widetilde{\theta}^{(1)}) > f(\widetilde{x}_r)$, то $\widetilde{x}_r$ заменяется на $\widetilde{\theta}^{(1)}$.

Шаг 4. Если список подзадач пуст, то алгоритм завершается. В противном случае выполняется переход к шагу 2.

Из ограниченности числа переменных следует, что алгоритм завершится за конечное число шагов, а из утверждений 1–4 следует, что найденное рекордное решение будет оптимальным решением задачи (1).

Мы называем данный вариант метода ветвей и границ *мажоритарным*. Отметим, что поскольку при решении задачи о сумме подмножеств мажоритарным методом ветвей и границ в качестве переменной ветвления всегда выбирается свободная переменная с наибольшим весом, без ограничения общности мы будем полагать, что все переменные задачи (1) упорядочены в порядке невозрастания их весов, т. е. $w_1 \geqslant w_2 \geqslant \ldots \geqslant w_n$. В таком случае в качестве переменной ветвления всегда выбирается свободная переменная с наименьшим номером, т. е. для каждой рассматриваемой в процессе решения подзадачи вида (2) выполняется $I = \{1, 2, \ldots, s\}$, где $0 \leqslant s < n$, при этом x_{s+1} является переменной ветвления данной подзадачи.

Процесс решения задачи о сумме подмножеств мажоритарным методом ветвей и границ можно представить в виде *дерева ветвления*, вершинам которого соответствуют рассматриваемые в процессе решения подзадачи. Вершина, соответствующая подзадаче, соединяется дугами с вершинами, соответствующими подзадачам, полученным из этой подзадачи в результате разбиения. Дуга, ведущая в вершину, соответствующую подзадаче, полученной присваиванием переменной ветвления значения 0 (значения 1), помечается символом 0 (символом 1). Корнем дерева ветвления полагается вершина, соответствующая исходной задаче. *Сложность решения задачи* мажоритарным методом ветвей и границ будем определять как число концевых вершин в дереве ветвления. Заметим, что это число равно по порядку общему числу вершин в дереве ветвления, т. е. числу рассматриваемых в процессе решения задачи подзадач.

Концевым вершинам дерева ветвления соответствуют подзадачи, удовлетворяющие условиям **C0** и **C1**. Каждой вершине, удовлетворяющей условию **C0**, сопоставим двоичный набор длины n, являющийся 0-дополнением множества значений фиксированных переменных соответствующей подзадачи. Такие наборы будем называть 0-*наборами*. Каждой вершине, удовлетворяющей условию **C1**, сопоставим двоичный набор длины n, который является 1-дополнением набора значений фиксированных переменных соответствующей подзадачи. Такие наборы будем называть 1-*наборами*.

Введем в рассмотрение множество B^n двоичных наборов длины n. Определим в этом множестве частичный порядок следующим образом: $\widetilde{\alpha} \leqslant \widetilde{\beta}$, если $\alpha_i \leqslant \beta_i$ для всех $i \in N$. Если соотношение $\widetilde{\alpha} \leqslant \widetilde{\beta}$ не выполнено, то будем писать $\widetilde{\alpha} \nleqslant \widetilde{\beta}$.

Утверждение 5. *Все 0-наборы образуют антицепь (множество попарно несравнимых элементов) в B^n.*

Доказательство. Проведем доказательство от противного. Пусть $\widetilde{\alpha}$ и $\widetilde{\beta}$ — два различных 0-набора, при этом $\widetilde{\alpha} \leqslant \widetilde{\beta}$. Тогда найдется $j \in N$, такое что $\alpha_j = 0$, $\beta_j = 1$. Согласно определению 0-набора, $\sum\limits_{i \in N} \alpha_i w_i > C$. Поэтому

$$\sum_{i \in N} \beta_i w_i > \sum_{i \in N} \alpha_i w_i + w_j > C + w_j. \tag{3}$$

С другой стороны, если подзадача P_β была получена в результате разбиения подзадачи P по переменной x_k, то, согласно определению метода ветвей и границ, $w_k = \min\limits_{i \in I_\beta} w_i$, где I_β — множество фиксированных переменных подзадачи P_β, т. е. $w_k \leqslant w_j$. Так как P не удовлетворяет условию **C0**, то $\sum\limits_{i \in I_\beta \setminus \{k\}} \beta_i w_i < C$. Следовательно,

$$\sum_{i \in N} \beta_i w_i = \sum_{i \in I_\beta} \beta_i w_i < C + w_k \leqslant C + w_j. \tag{4}$$

Неравенства (3) и (4) противоречат друг другу, поэтому сделанное предположение неверно. Тем самым утверждение доказано.

Аналогичным образом устанавливается следующее

Утверждение 6. *Все 1-наборы образуют антицепь в B^n.*

Антицепь, образованную 0-наборами, будем называть *0-антицепью*. Антицепь, образованную 1-наборами, — *1-антицепью*. Следующее утверждение устанавливает связь между элементами этих антицепей.

Утверждение 7. *Если $\widetilde{\alpha}$ — 0-набор и $\widetilde{\beta}$ — 1-набор, то $\widetilde{\alpha} \nleqslant \widetilde{\beta}$.*

Доказательство. Очевидно, что для любых двух наборов $\widetilde{\alpha}$ и $\widetilde{\beta}$ таких, что $\widetilde{\alpha} \leqslant \widetilde{\beta}$, выполняется $f(\widetilde{\alpha}) \leqslant f(\widetilde{\beta})$. Так как 1-набор является допустимым решением задачи (1), то $f(\widetilde{\beta}) \leqslant C$. Так как 0-набор кодирует подзадачу, удовлетворяющую условию **C0**, то $f(\widetilde{\alpha}) > C$. Тогда $f(\widetilde{\beta}) < f(\widetilde{\alpha})$, откуда следует, что $\widetilde{\alpha} \nleqslant \widetilde{\beta}$.

§ 3. Свойства двоичных наборов

3.1. Базовые операции над двоичными наборами. В данном разделе рассмотрим некоторые свойства элементов упорядоченного множества B^n. Введем несколько определений. Число единичных компонент набора $\widetilde{\alpha}$ из B^n называется *весом* набора $\widetilde{\alpha}$ и обозначается через $\|\widetilde{\alpha}\|$. Обозначим через B^n_+ множество всех двоичных наборов длины n, у которых единичных компонент больше, чем нулевых. Пусть $\widetilde{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ — произвольный двоичный набор из B^n_+. *Поднабором* набора $\widetilde{\alpha}$ будем называть двоичный набор $(\alpha_{i_1}, \ldots, \alpha_{i_k})$, где $1 \leqslant i_1 < \ldots < i_k \leqslant n$, $k \geqslant 1$, составленный из произвольного непустого подмножества компонент набора $\widetilde{\alpha}$ (при этом для каждой компоненты поднабора сохраняется ее номер в исходном наборе $\widetilde{\alpha}$).

Для $1 \leqslant i, j \leqslant n$ через $\widetilde{\alpha}[i:j]$ будем обозначать поднабор $(\alpha_i, \ldots, \alpha_j)$ в случае $i \leqslant j$ и поднабор $(\alpha_1, \ldots, \alpha_j, \alpha_i, \ldots, \alpha_n)$ в случае $i > j$. Такие поднаборы будем называть *сегментами*. Будем говорить что сегмент $\widetilde{\alpha}[i:j]$ *предшествует* компоненте α_{j+1} в случае $j < n$ и компоненте α_1 в случае $j = n$. Два сегмента назовем *изолированными*, если никакие компоненты из одного из сегментов не являются соседними с компонентами из другого сегмента (при этом компоненты α_1 и α_n также считаются соседними). В случае $i \leqslant j$ под *префиксом* сегмента $\widetilde{\alpha}[i:j]$ будем понимать любой сегмент $\widetilde{\alpha}[i:j']$, где $i \leqslant j' \leqslant j$, в противном случае под *префиксом* сегмента $\widetilde{\alpha}[i:j]$ понимается любой сегмент $\widetilde{\alpha}[i:j']$, где $i \leqslant j' \leqslant n$ либо $1 \leqslant j' \leqslant j$.

Пусть $\widetilde{\beta} = (\alpha_{i_1}, \ldots, \alpha_{i_k})$ — произвольный поднабор набора $\widetilde{\alpha}$, содержащий по крайней мере одну нулевую и одну единичную компоненты. Пусть α_{i_j} — имеющая минимальный номер нулевая компонента поднабора $\widetilde{\beta}$ такая, что $\alpha_{i_{j+1}} = 1$ (при этом полагаем $i_{k+1} = i_1$). Введем операцию *редукции набора* ∇: обозначим через $\nabla(\widetilde{\beta})$ поднабор набора $\widetilde{\alpha}$, полученный из поднабора $\widetilde{\beta}$ удалением компонент α_{i_j} и $\alpha_{i_{j+1}}$.

Пусть t — число нулевых компонент набора $\widetilde{\alpha}$, $t = n - \|\widetilde{\alpha}\| < n/2$. Тогда операцию редукции к набору $\widetilde{\alpha}$ можно применить последовательно t раз подряд. Рассмотрим последовательность $\widetilde{\beta}^{(0)}, \widetilde{\beta}^{(1)}, \ldots, \widetilde{\beta}^{(t)}$ поднаборов набора $\widetilde{\alpha}$ такую, что $\widetilde{\beta}^{(0)} = \widetilde{\alpha}$ и $\widetilde{\beta}^{(i)} = \nabla(\widetilde{\beta}^{(i-1)})$ для $i = 1, \ldots, t$. Будем говорить, что две компоненты набора $\widetilde{\alpha}$ *образуют связанную пару* в этом наборе, если они были удалены в результате применения операции ∇ к одному из наборов $\widetilde{\beta}^{(0)}, \widetilde{\beta}^{(1)}, \ldots, \widetilde{\beta}^{(t-1)}$. Все компоненты, образующие связанные пары в $\widetilde{\alpha}$, будем также называть *связанными* в $\widetilde{\alpha}$. Оставшиеся компоненты набора $\widetilde{\alpha}$ будем называть *несвязанными* в $\widetilde{\alpha}$.

Положим $\mathscr{R}(\widetilde{\alpha}) = \widetilde{\beta}^{(t)}$. Очевидно, что $\mathscr{R}(\widetilde{\alpha})$ состоит из всех несвязанных в $\widetilde{\alpha}$ компонент. Заметим также, что поднабор $\mathscr{R}(\widetilde{\alpha})$ содержит только единичные компоненты набора $\widetilde{\alpha}$, т. е. все несвязанные в рассматриваемом двоичном наборе компоненты являются единичными.

Нетрудно заметить, что множество всех связанных в $\widetilde{\alpha}$ компонент однозначным образом разбивается на попарно изолированные сегменты такие, что в каждом из сегментов содержится поровну нулевых и единичных компонент и любые две компоненты, образующие связанную пару в $\widetilde{\alpha}$, содержатся в одном и том же сегменте. Мы будем называть данные сегменты *сегментами связанности* набора $\widetilde{\alpha}$. Индукцией по числу компонент в сегменте связанности нетрудно также доказать следующий факт.

Утверждение 8. *В любом префиксе сегмента связанности число единичных компонент не превосходит числа нулевых компонент.*

Имеет место следующий критерий.

Лемма 1. *Единичная компонента набора $\widetilde{\alpha}$ является связанной тогда и только тогда, когда в $\widetilde{\alpha}$ найдется предшествующий данной компоненте сегмент, в котором число нулевых компонент превосходит число единичных компонент.*

Доказательство. Пусть α_i — связанная в $\widetilde{\alpha}$ единичная компонента, принадлежащая сегменту связанности $\widetilde{\alpha}[i':j']$. Согласно утверждению 8 имеем $\alpha_{i'} = 0$, т. е. $i \neq i'$ и в префиксе $\widetilde{\alpha}[i':i]$ сегмента $\widetilde{\alpha}[i':j']$ число единичных компонент не превосходит числа нулевых компонент. Следовательно, в префиксе сегмента $\widetilde{\alpha}[i':j']$, предшествующем компоненте α_i, число нулевых компонент превосходит число единичных компонент. С другой стороны, пусть существует некоторый предшествующий компоненте α_i сегмент, в котором число нулевых компонент превосходит число единичных компонент. Поскольку все нулевые компоненты являются связанными в $\widetilde{\alpha}$, в этом сегменте найдется по крайней мере одна нулевая компонента, которая образует связанную пару в $\widetilde{\alpha}$ с единичной компонентой, находящейся вне этого сегмента. В таком случае компонента α_i должна быть связанной в $\widetilde{\alpha}$.

Из леммы 1 нетрудно получить

Следствие 2. *Пусть $\widetilde{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, $\widetilde{\alpha}' = (\alpha'_1, \ldots, \alpha'_n)$ — два набора из B^n_+ таких, что $\widetilde{\alpha} \leqslant \widetilde{\alpha}'$, и α_i является несвязанной в $\widetilde{\alpha}$ единичной компонентой. Тогда α'_i является несвязанной в $\widetilde{\alpha}'$ единичной компонентой.*

Определим операцию *модификации набора* $\mathscr{D}$: обозначим через $\mathscr{D}(\widetilde{\alpha})$ двоичный набор, получающийся из набора $\widetilde{\alpha}$ заменой на нуль несвязанной в $\widetilde{\alpha}$ единичной компоненты с максимальным номером.

Из следствия 2 непосредственно вытекает

Следствие 3. *Пусть* $\widetilde{\alpha}=(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$, $\widetilde{\alpha}'=(\alpha_1',\ldots,\alpha_n')$ — *два набора из* B_+^n *таких, что* $\widetilde{\alpha}=\mathscr{D}(\widetilde{\alpha}')$, *и* α_i *является несвязанной в* $\widetilde{\alpha}$ *единичной компонентой. Тогда* α_i' *является несвязанной в* $\widetilde{\alpha}'$ *единичной компонентой.*

Докажем инъективность операции $\mathscr{D}$.

Лемма 2. *Для любых наборов* $\widetilde{\alpha}',\widetilde{\alpha}''\in B_+^n$ *из* $\widetilde{\alpha}'\neq\widetilde{\alpha}''$ *следует* $\mathscr{D}(\widetilde{\alpha}')\neq\mathscr{D}(\widetilde{\alpha}'')$.

Доказательство. Предположим, что для некоторых двух различных наборов $\widetilde{\alpha}'=(\alpha_1',\ldots,\alpha_n')$, $\widetilde{\alpha}''=(\alpha_1'',\ldots,\alpha_n'')$ из B_+^n имеет место равенство $\mathscr{D}(\widetilde{\alpha}')=\mathscr{D}(\widetilde{\alpha}'')$. Пусть $\mathscr{D}(\widetilde{\alpha}')$ получен из $\widetilde{\alpha}'$ заменой на нуль единичной компоненты $\alpha_{i'}'$, а $\mathscr{D}(\widetilde{\alpha}'')$ получен из $\widetilde{\alpha}''$ заменой на нуль единичной компоненты $\alpha_{i''}''$. Так как $\widetilde{\alpha}'\neq\widetilde{\alpha}''$, то $i'\neq i''$. Не ограничивая общности, будем считать, что $i'>i''$. Поскольку $\alpha_{i''}''$ является несвязанной в $\widetilde{\alpha}''$ компонентой с максимальным номером, компоненты $\alpha_{i''+1}'',\ldots,\alpha_n''$ являются связанными в $\widetilde{\alpha}''$, т. е. сегмент $\widetilde{\alpha}''[i''+1:n]$ является префиксом некоторого сегмента связанности в $\widetilde{\alpha}''$. Следовательно, согласно утверждению 8, в наборе $\widetilde{\alpha}''$ между компонентами $\alpha_{i''}''$ и $\alpha_{i'}''$ число единичных компонент не превосходит числа нулевых компонент (этот факт, очевидно, также имеет место в случае, когда компоненты $\alpha_{i''}''$, $\alpha_{i'}''$ являются соседними). Так как $\mathscr{D}(\widetilde{\alpha}')=\mathscr{D}(\widetilde{\alpha}'')$, все компоненты набора $\widetilde{\alpha}'$ кроме $\alpha_{i'}'$ и $\alpha_{i''}'$ должны совпадать с соответствующими компонентами набора $\widetilde{\alpha}''$. Поэтому в наборе $\widetilde{\alpha}'$ между компонентами $\alpha_{i''}'$ и $\alpha_{i'}'$ число единичных компонент также не превосходит числа нулевых компонент. Кроме того, из $\mathscr{D}(\widetilde{\alpha}')=\mathscr{D}(\widetilde{\alpha}'')$ вытекает, что $\alpha_{i''}'=0$. Таким образом, в сегменте $\widetilde{\alpha}'[i'':i'-1]$ набора $\widetilde{\alpha}'$ число нулевых компонент превосходит число единичных компонент. Следовательно, согласно лемме 1, компонента $\alpha_{i'}'$ является связанной в $\widetilde{\alpha}'$, что противоречит определению данной компоненты как несвязанной в $\widetilde{\alpha}'$ компоненты с максимальным номером.

Введем в рассмотрение набор $\widetilde{\gamma}_s=(\underbrace{0,\ldots,0}_{n-s},\underbrace{1,\ldots,1}_{s})$, где $s>n/2$.

Лемма 3. *Если для набора* $\widetilde{\alpha}\in B_+^n$, $\|\widetilde{\alpha}\|\geqslant n/2+1$, *справедливо* $\widetilde{\alpha}\not\leqslant\widetilde{\gamma}_s$, *то* $\mathscr{D}(\widetilde{\alpha})\not\leqslant\widetilde{\gamma}_s$.

Доказательство. Пусть $\widetilde{\alpha}=(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$. Предположим, что $\alpha_1=0$. Рассмотрим в $\widetilde{\alpha}$ единичную компоненту с минимальным номером. Пусть такой компонентой является компонента α_i. Очевидно, что α_i образует с α_{i-1} связанную пару в $\widetilde{\alpha}$, т. е. α_i является связанной в $\widetilde{\alpha}$. Следовательно, α_i совпадает с соответствующей компонентой набора $\mathscr{D}(\widetilde{\alpha})$, т. е. i-я компонента набора $\mathscr{D}(\widetilde{\alpha})$ является единичной. Заметим, что $i\leqslant n-s$, поскольку в противном случае $\widetilde{\alpha}\leqslant\widetilde{\gamma}_s$. Поэтому $\mathscr{D}(\widetilde{\alpha})\not\leqslant\widetilde{\gamma}_s$. Предположим теперь, что $\alpha_1=1$. Покажем, что тогда первая компонента набора $\mathscr{D}(\widetilde{\alpha})$ также является единичной, поэтому соотношение $\mathscr{D}(\widetilde{\alpha})\leqslant\widetilde{\gamma}_s$ не выполняется. Это очевидно в случае, если α_1 является связанной в $\widetilde{\alpha}$. Пусть α_1 не является связанной в $\widetilde{\alpha}$. Заметим, что из условия $\|\widetilde{\alpha}\|>n/2+1$ вытекает, что по крайней мере две компоненты являются несвязанными в $\widetilde{\alpha}$, поэтому α_1 не может быть несвязанной компонентой с максимальным номером. Следовательно, и в этом случае первая компонента набора $\mathscr{D}(\widetilde{\alpha})$ совпадает с α_1, тем самым лемма доказана.

Лемма 4. *Пусть для набора* $\widetilde{\alpha}\in B_+^n$ *выполняются соотношения* $\widetilde{\alpha}\not\leqslant\widetilde{\gamma}_s$ *и* $\mathscr{D}(\widetilde{\alpha})\leqslant\widetilde{\gamma}_s$. *Тогда не существует набора* $\widetilde{\alpha}'\in B^n$ *такого, что* $\widetilde{\alpha}=\mathscr{D}(\widetilde{\alpha}')$.

Доказательство. Пусть $\widetilde{\alpha}=(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$. Из леммы 3 вытекает, что условия леммы 4 могут быть выполнены лишь в случае, когда n —

нечетное число и $\|\widetilde{\alpha}\| = (n+1)/2$. Соответственно в этом случае в $\widetilde{\alpha}$ имеется только одна несвязанная компонента α_i. Тогда α_i должна быть единственной единичной компонентой набора $\widetilde{\alpha}$, удовлетворяющей условию $i \leqslant n-s$. Поэтому при $i>1$ данная компонента должна образовывать связанную пару с нулевой компонентой α_{i-1}, т. е. должна быть связанной в $\widetilde{\alpha}$. Следовательно, возможен только случай $i=1$. Предположим, что существует набор $\widetilde{\alpha}' = (\alpha_1', \ldots, \alpha_n')$ такой, что $\widetilde{\alpha} = \mathscr{D}(\widetilde{\alpha}')$. Тогда, согласно следствию 3, компонента α_1' является несвязанной в $\widetilde{\alpha}'$. Пусть α_j' — несвязанная компонента с максимальным номером в $\widetilde{\alpha}'$. Так как в $\widetilde{\alpha}'$ должно быть три несвязанных компоненты, то $j \neq 1$. При этом либо $j=n$, либо $\widetilde{\alpha}'[j+1:n]$ является сегментом связанности в $\widetilde{\alpha}'$, т. е. в $\widetilde{\alpha}'$ правее компоненты α_j' содержится поровну нулевых и единичных компонент. Поскольку набор $\widetilde{\alpha}$ отличается от $\widetilde{\alpha}'$ только в j-й компоненте, в $\widetilde{\alpha}$ правее компоненты α_j также должно содержаться поровну нулевых и единичных компонент. Так как $\widetilde{\alpha}$ получается из $\widetilde{\alpha}'$ заменой j-й компоненты на 0, то $\alpha_j = 0$. Таким образом, в сегменте $\widetilde{\alpha}[j:n]$ нулевых компонент должно быть на одну больше, чем единичных. Следовательно, согласно лемме 1, компонента α_1 должна быть связанной в $\widetilde{\alpha}$, что противоречит тому, что α_1 является несвязанной в $\widetilde{\alpha}$ компонентой. Таким образом, лемма доказана.

3.2. Свойства антицепей множества B^n. Пусть T', T'' — две антицепи в B^n такие, что для любых двух наборов $\widetilde{\alpha}' \in T'$, $\widetilde{\alpha}'' \in T''$ справедливо $\widetilde{\alpha}' \not\geqslant \widetilde{\alpha}''$. В таком случае будем писать, что $T' < T''$ (отметим, что из $T' < T''$ вытекает $T' \cap T'' = \varnothing$). Для $s > n/2$ обозначим через $\mathscr{A}_s$ множество всех пар (T', T'') антицепей в B^n таких, что $T' < T''$ и $\widetilde{\gamma}_s \in T'$. Под мощностью пары непересекающихся антицепей будем понимать суммарную мощность этих антицепей.

Пару антицепей (T', T'') из $\mathscr{A}_s$ будем называть *правильной снизу*, если в множестве $(T' \cup T'') \setminus \{\widetilde{\gamma}_s\}$ все наборы, имеющие минимальный вес, содержатся в T', и *правильной сверху*, если в множестве $(T' \cup T'') \setminus \{\widetilde{\gamma}_s\}$ все наборы, имеющие максимальный вес, содержатся в T''. Заметим, что из любой пары антицепей $(T', T'') \in \mathscr{A}_s$, содержащих наборы с весом меньшим, чем s, мы можем получить правильную снизу пару антицепей из $\mathscr{A}_s$, переместив все имеющие минимальный вес наборы из $T' \cup T'' \setminus \{\widetilde{\gamma}_s\}$ в антицепь T'. Полученную таким образом пару антицепей будем называть *нижним исправлением* исходной пары (T', T''). Аналогичным образом из любой пары антицепей $(T', T'') \in \mathscr{A}_s$ мы можем получить правильную сверху пару антицепей из $\mathscr{A}_s$, которую будем называть *верхним исправлением* исходной пары (T', T''), переместив все имеющие максимальный вес наборы из $(T' \cup T'') \setminus \{\widetilde{\gamma}_s\}$ в антицепь T''. Отметим, что антицепи как нижнего, так и верхнего исправлений пары антицепей состоят в совокупности из тех же наборов, что и исходные антицепи.

Лемма 5. *Для любого $s > n/2$ в $\mathscr{A}_s$ существует имеющая максимальную мощность пара антицепей, состоящих из наборов с весом не меньшим, чем $\lfloor n/2 \rfloor$.*

Доказательство. Рассмотрим произвольную пару антицепей (T', T'') из $\mathscr{A}_s$, имеющую максимальную мощность. Предположим, что минимальный вес наборов из $T' \cup T''$ равен $r < \lfloor n/2 \rfloor$. Пусть (T_0', T_0'') — нижнее исправление пары (T', T''). Поскольку, очевидно, $T_0' \cup T_0'' = T' \cup T''$, пара антицепей (T_0', T_0'') также имеет максимальную мощность в $\mathscr{A}_s$ и минимальный вес наборов из $T_0' \cup T_0''$ также равен r. При этом поскольку пара антицепей (T_0', T_0'') является правильной снизу, все наборы из $T_0' \cup T_0''$ с весом r содержатся в T_0'. Обозначим множество всех таких наборов через V. Кроме того, обозначим через U множество всех наборов из T_0'' с весом $r+1$. Обозначим также через V' множество всех наборов из B^n с весом $r+1$, сравнимых хотя бы с одним набором из V, и через U' множество всех наборов из B^n с весом $r+2$, сравнимых хотя бы с одним набором из U. Отметим, что каждый набор веса r соединен ровно $n-r$ ребрами с наборами веса $r+1$, а каждый набор веса $r+1$ соединен ровно $r+1$ ребрами с наборами веса r. Исходя из этих соображений нетрудно получить, что $|V'| \geqslant \frac{n-r}{r+1}|V|$. Аналогичным образом получаем, что $|U'| \geqslant \frac{n-r-1}{r+2}|U|$. Отметим также, что, поскольку T_0' и T_0'' являются антицепями, множество V' не пересекается с T_0', а множество U' не пересекается с T_0''. Рассмотрим сначала случай $r < n/2-1$, т. е. $r \leqslant n/2-3/2$. В этом случае имеем $|V'| \geqslant \frac{n-r}{r+1}|V| > |V|$ и $|U'| \geqslant \frac{n-r-1}{r+2}|U| \geqslant |U|$. Положим $T_1' = (T_0' \setminus V) \cup V'$ и $T_1'' = (T_0'' \setminus U) \cup U'$. Нетрудно убедиться, что T_1' и T_1'' являются непересекающимися антицепями, образующими пару из $\mathscr{A}_s$. Кроме того, имеем $|T_1'| = |T_0'| + |V'| - |V| > |T_0'|$ и $|T_1''| = |T_0''| + |U'| - |U| \geqslant |T_0''|$. Следовательно, $|T_1' \cup T_1''| = |T_1'| + |T_1''| > |T_0'| + |T_0''| = |T_0' \cup T_0''|$, что противоречит тому, что пара антицепей (T_0', T_0'') имеет максимальную мощность в $\mathscr{A}_s$. Таким образом, случай $r < n/2-1$ невозможен. Рассмотрим теперь оставшийся случай $r = n/2-1$. Отметим, что это возможно лишь в случае, когда n — четное число, т. е. $n = 2k$, и $r = \lfloor n/2 \rfloor - 1 = k-1$. Обозначим через V'' множество $V' \cup U$. Отметим, что множество V'', так же как и множество V', не пересекается с T_0'. Положим $T_2' = (T_0' \setminus V) \cup V''$ и $T_2'' = (T_0'' \setminus U) \cup U'$. Нетрудно убедиться, что T_2' и T_2'' также являются непересекающимися антицепями, образующими пару из $\mathscr{A}_s$. Кроме того, имеем $|V''| \geqslant |V'| \geqslant \frac{n-r}{r+1}|V| = \frac{k+1}{k}|V|$, т. е. $|V| \leqslant \frac{k}{k+1}|V''|$. Имеем также $|U'| \geqslant \frac{n-r-1}{r+2}|U| = \frac{k}{k+1}|U|$. Таким образом, учитывая, что $|U| \leqslant |V''|$, получаем $(|V''| - |V|) + (|U'| - |U|) \geqslant \frac{1}{k+1}|V''| - \frac{1}{k+1}|U| \geqslant 0$. Следовательно, $|T_2' \cup T_2''| = |T_2'| + |T_2''| = |T_0'| + |T_0''| + (|V''| - |V|) + (|U'| - |U|) \geqslant |T_0'| + |T_0''| = |T_0' \cup T_0''|$, мощность пары антицепей (T_2', T_2'') не меньше мощности пары антицепей (T_0', T_0''). Таким образом, пара антицепей (T_2', T_2'') также имеет максимальную мощность в $\mathscr{A}_s$, и антицепи T_2', T_2'', очевидно, состоят из наборов с весом не меньшим, чем $\lfloor n/2 \rfloor$. Тем самым лемма доказана.

Лемма 6. *Для любого $s > n/2$ в $\mathscr{A}_s$ существует имеющая максимальную мощность пара антицепей таких, что вес всех входящих в эти антицепи наборов, кроме набора $\widetilde{\gamma}_s$, не больше, чем $(n+3)/2$, и не меньше, чем $\lfloor n/2 \rfloor$.*

Доказательство. Согласно лемме 5, в $\mathscr{A}_s$ существует некоторая имеющая максимальную мощность пара антицепей (T', T''), состоящих из наборов с весом не меньшим, чем $\lfloor n/2 \rfloor$. Предположим, что максимальный вес содержащихся в этих антицепях наборов, отличных от $\widetilde{\gamma}_s$, равен $r > (n+3)/2$. Отметим, что из $r > (n+3)/2$, очевидно, вытекает $r \geqslant n/2+2$. Чтобы доказать лемму 6, достаточно показать, что тогда найдется имеющая максимальную мощность пара антицепей таких, что вес всех входящих в эти антицепи наборов, кроме набора $\widetilde{\gamma}_s$, не меньше, чем $\lfloor n/2 \rfloor$, и не больше, чем $r-1$. Для этого расмотрим верхнее исправление (T_0', T_0'') пары (T', T''). Поскольку антицепи T_0', T_0'' состоят в совокупности из тех же наборов, что и антицепи T', T'', пара антицепей (T_0', T_0'') также имеет максимальную мощность в $\mathscr{A}_s$ и вес всех входящих в эти антицепи наборов, кроме набора $\widetilde{\gamma}_s$, не меньше, чем $\lfloor n/2 \rfloor$, и не больше, чем r. Кроме того, все входящие в эти антицепи наборы, отличные от $\widetilde{\gamma}_s$ и имеющие максимальный вес r, содержатся в T_0''. Обозначим множество всех таких наборов через U. Кроме того, обозначим через V множество всех наборов веса $r-1$, содержащихся в T_0' и отличных от $\widetilde{\gamma}_s$. Обозначим также через $\mathscr{D}(U)$ и $\mathscr{D}(V)$ множества $\{\mathscr{D}(\widetilde{\alpha}) \mid \widetilde{\alpha} \in U\}$ и $\{\mathscr{D}(\widetilde{\alpha}) \mid \widetilde{\alpha} \in V\}$ соответственно. Из леммы 2 вытекает, что $|\mathscr{D}(U)| = |U|$ и $|\mathscr{D}(V)| = |V|$. Кроме того, поскольку T_0' и T_0'' являются антицепями, множество $\mathscr{D}(V)$ не пересекается с T_0', а множество $\mathscr{D}(U)$ не пересекается с T_0''. Положим $T_1' = (T_0' \setminus V) \cup \mathscr{D}(V)$ и $T_1'' = (T_0'' \setminus U) \cup \mathscr{D}(U)$. Пользуясь леммой 3, нетрудно проверить, что множество T_1' является антицепью, содержащей набор $\widetilde{\gamma}_s$. Кроме того, очевидно, что T_1'' также является антицепью. В силу леммы 3 никакой набор $\widetilde{\alpha}$ из T_1'' не может удовлетворять соотношению $\widetilde{\alpha} \leqslant \widetilde{\gamma}_s$. Учитывая этот факт, нетрудно убедиться, что $T_1' < T_2''$. Таким образом, $(T_1', T_1'') \in \mathscr{A}_s$. Из равенств $|\mathscr{D}(U)| = |U|$, $|\mathscr{D}(V)| = |V|$ вытекает, что $|T_1'| = |T_0'|$, $|T_1''| = |T_0''|$, поэтому пара антицепей (T_1', T_1'') также имеет максимальную мощность в $\mathscr{A}_s$. Для завершения доказательства леммы остается только отметить, что вес любого отличного от $\widetilde{\gamma}_s$ набора из $T_1' \cup T_1''$ не меньше, чем $\lfloor n/2 \rfloor$, и не больше, чем $r-1$.

Т е о р е м а 1. *При $s > n/2$ мощность любой пары антицепей из $\mathscr{A}_s$ не превосходит* $1 + \binom{n+1}{\lfloor n/2 \rfloor + 1} - \binom{s+1}{\lfloor n/2 \rfloor + 1}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим сначала случай, когда n четно, т. е. $n = 2k$. Тогда, согласно лемме 6, в $\mathscr{A}_s$ существует имеющая максимальную мощность пара антицепей (T', T'') таких, что все наборы из $|T' \cup T''|$, кроме набора $\widetilde{\gamma}_s$, имеют вес равный либо k, либо $k+1$. Заметим, что тогда ни для какого набора $\widetilde{\alpha}$ множества T'' не может быть выполнено соотношение $\widetilde{\alpha} \geqslant \widetilde{\gamma}_s$, поскольку вес набора $\widetilde{\gamma}_s$ равен $s \geqslant k+1$. Следовательно, никакой набор из T'' не может быть сравнимым с $\widetilde{\gamma}_s$. Поскольку T' является антицепью, никакой набор из T' также не может быть сравнимым с $\widetilde{\gamma}_s$. Таким образом, все наборы из $T' \cup T'' \setminus \{\widetilde{\gamma}_s\}$ являются несравнимыми с $\widetilde{\gamma}_s$. Очевидно, что существует $\binom{n}{k+1} - \binom{s}{k+1}$ несравнимых с $\widetilde{\gamma}_s$ наборов веса $k+1$ и $\binom{n}{k} - \binom{s}{k}$ наборов веса k. Поэтому

$$|T' \cup T'' \setminus \{\widetilde{\gamma}_s\}| \leqslant \left(\binom{n}{k+1} - \binom{s}{k+1}\right) + \left(\binom{n}{k} - \binom{s}{k}\right) = \binom{n+1}{k+1} - \binom{s+1}{k+1}.$$

Следовательно, $|T' \cup T''| \leqslant 1 + \binom{n+1}{k+1} - \binom{s+1}{k+1}$. Поскольку пара (T', T'') имеет максимальную мощность в $\mathscr{A}_s$, получаем, что в этом случае мощность любой пары антицепей из $\mathscr{A}_s$ не превосходит $1 + \binom{n+1}{k+1} - \binom{s+1}{k+1} = 1 + \binom{n+1}{\lfloor n/2 \rfloor + 1} - \binom{s+1}{\lfloor n/2 \rfloor + 1}$.

Рассмотрим теперь случай, когда n нечетно, т. е. $n = 2k+1$. Согласно лемме 6 в этом случае в $\mathscr{A}_s$ существует имеющая максимальную мощность пара антицепей (T', T'') таких, что все наборы из $T' \cup T''$, кроме набора $\widetilde{\gamma}_s$, имеют вес, равный либо k, либо $k+1$, либо $k+2$. Пусть (T_0', T_0'') — верхнее исправление пары (T', T''). Поскольку $T_0' \cup T_0'' = T' \cup T''$, пара антицепей (T_0', T_0'') также имеет максимальную мощность в $\mathscr{A}_s$, и все наборы из $T_0' \cup T_0''$, кроме набора $\widetilde{\gamma}_s$, имеют вес, равный либо k, либо $k+1$, либо $k+2$. Кроме того, все наборы из $T_0' \cup T_0'' \setminus \{\widetilde{\gamma}_s\}$, имеющие вес $k+2$, содержатся в T_0''. Обозначим множество всех таких наборов через U. Положим $\mathscr{D}(U) = \{\mathscr{D}(\widetilde{\alpha}) \mid \widetilde{\alpha} \in U\}$, $V = \mathscr{D}(U) \cap T_0'$ и $\mathscr{D}(V) = \{\mathscr{D}(\widetilde{\alpha}) \mid \widetilde{\alpha} \in V\}$. Поскольку T_0', T_0'' являются антицепями, имеем $\mathscr{D}(U) \cap T_0'' = \varnothing$, $\mathscr{D}(V) \cap T_0' = \varnothing$. Обозначим через T_1' множество $(T_0' \setminus V) \cup \mathscr{D}(V)$ и через T_1'' множество $(T_0'' \setminus U) \cup \mathscr{D}(U)$. Нетрудно заметить, что $T_1' \cap T_1'' = \varnothing$ и любой набор из $T_1' \cup T_1'' \setminus \{\widetilde{\gamma}_s\}$ имеет вес либо k, либо $k+1$. Учитывая, что вес набора $\widetilde{\gamma}_s$ равен $s \geqslant k+1$, получаем, что ни для какого набора $\widetilde{\alpha}$ из $T_1' \cup T_1'' \setminus \{\widetilde{\gamma}_s\}$ не может быть выполнено соотношение $\widetilde{\alpha} \geqslant \widetilde{\gamma}_s$. Кроме того, соотношение $\widetilde{\alpha} \leqslant \widetilde{\gamma}_s$ также не может быть выполнено ни для какого набора $\widetilde{\alpha}$ из T_1'' в силу леммы 3 и ни для какого набора $\widetilde{\alpha}$ из $T_1' \setminus \{\widetilde{\gamma}_s\}$ в силу леммы 4. Таким образом, никакой набор из $T_1' \cup T_1'' \setminus \{\widetilde{\gamma}_s\}$ не является сравнимым с $\widetilde{\gamma}_s$. Поэтому, аналогично рассмотренному ранее случаю для четного n, получаем, что $|T_1' \cup T_1'' \setminus \{\widetilde{\gamma}_s\}| \leqslant \binom{n+1}{k+1} - \binom{s+1}{k+1}$. Следовательно, $|T_1' \cup T_1''| \leqslant 1 + \binom{n+1}{k+1} - \binom{s+1}{k+1} = 1 + \binom{n+1}{\lfloor n/2 \rfloor + 1} - \binom{s+1}{\lfloor n/2 \rfloor + 1}$. Из справедливых в силу леммы 2 равенств $|\mathscr{D}(U)| = |U|$, $|\mathscr{D}(V)| = |V|$ вытекает, что $|T_1'| = |T_0'|$, $|T_1''| = |T_0''|$, поэтому $|T_0' \cup T_0''| = |T_1' \cup T_1''|$. Следовательно, $|T_0' \cup T_0''| \leqslant 1 + \binom{n+1}{\lfloor n/2 \rfloor + 1} - \binom{s+1}{\lfloor n/2 \rfloor + 1}$. Поскольку пара антицепей (T_0', T_0'') имеет максимальную мощность в $\mathscr{A}_s$, получаем, что теорема 1 справедлива и в этом случае.

Следствие 4. *При $s > n/2$ пара антицепей (T', T''), где T' состоит из набора $\widetilde{\gamma}_s$ и всех наборов с весом $\lfloor n/2 \rfloor$, несравнимых с $\widetilde{\gamma}_s$, а T'' состоит из всех наборов с весом $\lfloor n/2 \rfloor + 1$, несравнимых с $\widetilde{\gamma}_s$, имеет максимальную мощность в множестве $\mathscr{A}_s$.*

Для $t \leqslant \lfloor n/2 \rfloor + 1$ обозначим через $\mathscr{A}'_t$ множество всех пар (T', T'') непересекающихся и состоящих из наборов с весом не большим, чем t, антицепей в B^n таких, что $T' < T''$.

Теорема 2. *При $t \leqslant \lfloor n/2 \rfloor + 1$ мощность любой пары антицепей из $\mathscr{A}'_t$ не превосходит $\binom{n+1}{t}$.*

Доказательство. Пусть (T', T'') — произвольная пара антицепей из $\mathscr{A}'_t$. Рассмотрим сначала случай $t \leqslant \dfrac{n+1}{2}$. В множестве B^n имеется $n!$ максимальных цепей и каждая из этих цепей содержит не более одного набора из T' и не более одного набора из T''. Поэтому если для каждого набора из $T' \cup T''$ рассмотреть множество всех содержащих этот набор максимальных цепей, то суммарная мощность этих множеств не превосходит $2n!$. Упорядочим все наборы из $T' \cup T''$ в порядке возрастания числа содержащих эти наборы максимальных цепей. Набор веса p содержится в $p!(n-p)!$ максимальных цепях, поэтому среди наборов из $T' \cup T''$ может быть не более $\binom{n}{t}$ наборов, содержащихся в $t!(n-t)!$ максимальных цепях, и каждый из остальных наборов должен содержаться в не менее чем $(t-1)!(n-t+1)!$ максимальных цепях. Следовательно, суммарная мощность множеств всех максимальных цепей, содержащих первые $\binom{n}{t}$ наборов из $T' \cup T''$, не меньше, чем $n!$, а каждый из остальных наборов из $T' \cup T''$ содержится в не менее чем $(t-1)!(n-t+1)!$ максимальных цепях. Таким образом, суммарная мощность множеств всех максимальных цепей, содержащих остальные наборы из $T' \cup T''$, не превосходит $n!$ и, следовательно, число таких наборов не превосходит $\binom{n}{t-1}$. Поэтому $|T' \cup T''| \leqslant \binom{n}{t} + \binom{n}{t-1} = \binom{n+1}{ts}$. Для случая $t = n/2 + 1$, возможного только при четном n, теорему 2 можно доказать аналогичным образом, принимая во внимание, что в этом случае в $T' \cup T''$ имеется не более чем $\binom{n}{n/2}$ наборов, содержащихся в $((n/2)!)^2$ максимальных цепях, а каждый из остальных наборов содержится в не менее чем $(n/2-1)!(n/2+1)!$ максимальных цепях.

Следствие 5. *При $s \leqslant \lfloor n/2 \rfloor + 1$ пара антицепей (T', T''), где T' состоит из всех наборов с весом $t-1$, а T'' состоит из всех наборов с весом t, имеет максимальную мощность в множестве $\mathscr{A}'_t$.*

§ 4. Оценка сложности

В данном параграфе получим оценки сложности решения задачи (1) мажоритарным методом ветвей и границ, основываясь на утверждениях, доказанных в § 2 и теоремах 1, 2. Обозначим через T_0 (T_1) 0-антицепь (1-антицепь) для задачи (1). Определим величины t и s следующим образом:

$$t = \min \left\{ k \in N : \sum_{i=n-k+1}^{n} w_i > C \right\}, \quad s = t - 1. \tag{5}$$

Справедливо следующее утверждение.

Утверждение 9. *Вес любого элемента 0-антицепи T_0 и любого элемента 1-антицепи T_1 не превосходит t и $\widetilde{\gamma}_s \in T_1$.*

Доказательство. Рассмотрим 1-набор $\widetilde{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$. Согласно утверждению 2 справедливо неравенство $\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i w_i \leqslant C$. Так как $w_1 \geqslant \ldots \geqslant w_n$, то $\sum\limits_{i=n-\|\widetilde{\alpha}\|+1}^{n} w_i \leqslant \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i w_i$, поэтому $\sum\limits_{i=n-\|\widetilde{\alpha}\|+1}^{n} w_i \leqslant C$. Следовательно, $\|\widetilde{\alpha}\| < t$. Рассмотрим теперь 0-набор $\widetilde{\beta} = (\beta_1, \ldots, \beta_n)$. Пусть $j = \max\{i \in N : \beta_i = 1\}$. Согласно определению 0-набора имеем $\sum\limits_{i=1}^{j-1} \beta_i w_i \leqslant C$. Из неравенств $w_1 \geqslant \ldots \geqslant w_n$ вытекает, что $\sum\limits_{i=n-\|\widetilde{\beta}\|+2}^{n} w_i \leqslant \sum\limits_{i=1}^{j-1} \beta_i w_i$. Поэтому $\sum\limits_{i=n-\|\widetilde{\beta}\|+2}^{n} w_i \leqslant C$. Следовательно, $\|\widetilde{\beta}\| - 1 < t$, т. е. $\|\widetilde{\beta}\| \leqslant t$.

Докажем теперь принадлежность набора $\widetilde{\gamma}_s$ множеству T_1. Рассмотрим подзадачу P с множеством фиксированных переменных $I = \{1, \ldots, n-s-1\}$ и набором значений фиксированных переменных $\{\theta_i |\, i \in I\}$ таким, что $\theta_i = 0$ для любого $i \in I$. Для данной подзадачи имеем

$$\sum_{i\in I}(1-\theta_i)w_i = \sum_{i=1}^{n-s-1} w_i = W - \sum_{i=n-t+1}^{n} w_i < W - C.$$

Таким образом, подзадача P не удовлетворяет условию **C1**. Очевидно, что P также не удовлетворяет условию **C0**. Таким образом, соответствующая данной подзадаче вершина содержится в дереве ветвления, но не является концевой. Рассмотрим теперь подзадачу P' с множеством фиксированных переменных $I' = \{1, \ldots, n-s\}$ и набором значений фиксированных переменных $\{\theta'_i |\, i \in I'\}$ таким, что $\theta'_i = 0$ для любого $i \in I'$. Для данной подзадачи имеем

$$\sum_{i\in I'}(1-\theta'_i)w_i = \sum_{i=1}^{n-s} w_i = W - \sum_{i=n-s+1}^{n} w_i \geqslant W - C.$$

Таким образом, подзадача P' удовлетворяет условию **C1** и, очевидно, содержится в разбиении подзадачи P. Следовательно, подзадача P' соответствует концевой вершине дерева ветвления, удовлетворяющей условию **C1**. Набор $\widetilde{\gamma}_s$ является 1-дополнением набора значений фиксированных переменных подзадачи P'. Тем самым $\widetilde{\gamma}_s$ является 1-набором, т. е. принадлежит множеству T_1.

Из утверждения 9, учитывая утверждение 7, получаем, что пара антицепей (T_1, T_0) принадлежит множеству $\mathscr{A}_s$ в случае, если $t > \lfloor n/2 \rfloor + 1$, и множеству $\mathscr{A}'_t$ в случае, если $t \leqslant \lfloor n/2 \rfloor + 1$. Поэтому из теорем 1, 2 вытекает

Теорема 3. *Сложность $\mathscr{S}$ решения задачи* (1) *мажоритарным методом ветвей и границ удовлетворяет следующим соотношениям:*

$$\begin{aligned} \mathscr{S} &\leqslant \binom{n+1}{t}, \ \text{при } t \leqslant \lfloor n/2 \rfloor + 1, \\ \mathscr{S} &\leqslant 1 + \binom{n+1}{\lfloor n/2 \rfloor + 1} - \binom{t}{\lfloor n/2 \rfloor + 1}, \ \text{при } t > \lfloor n/2 \rfloor + 1, \end{aligned}$$

где t определяется согласно (5).

§ 5. Другие работы

Вопрос оценки числа шагов метода ветвей и границ, которому посвящена данная работа, исследовался как у нас в стране, так и за рубежом. В работе [10] построен пример задачи максимизации булевой функции при ограничении типа равенства. Рассмотрен достаточно широкий класс алгоритмов типа ветвей и границ и показано, что сложность работы любого алгоритма из этого класса при решении данной задачи составляет не менее $2^{n/2}$, где n — число переменных задачи. Аналогичный по конструкции пример сложной задачи о ранце приведен в работе [6]. Доказано, что дерево ветвления для этого примера имеет не менее $\binom{n+1}{\lfloor n/2\rfloor+1}$ вершин, где n — число переменных задачи. Предложенные в [6, 10] постановки имеют симметричную структуру: коэффициенты при переменных одинаковы. Такие задачи, представляющие значительные вычислительные трудности для стандартного метода ветвей и границ, быстро решаются модифицированным вариантом, использующим отношение доминирования [8]. Для модифицированного таким образом варианта метода ветвей и границ тоже существуют постановки, требующие экспоненциального по порядку числа ветвлений. Такие примеры приводятся в работе [8], в которой также получены различные усредненные нижние оценки максимальной сложности. В работе [3] рассмотрен распространенный [5, 9] вариант метода ветвей и границ, в котором разбиение на подзадачи производится по дробной переменной, полученной при решении задачи линейной релаксации. Построена бесконечная серия примеров для задачи о ранце, сложность которых асимптотически в 1,5 раза превосходит сложность примера, предложенного в [6]. Тем самым показано, что верхняя оценка максимальной сложности для этого варианта метода ветвей и границ существенно превосходит нижнюю оценку, полученную в работе [6].

Естественным образом возникает вопрос о точности полученных нижних оценок максимальной сложности. В работе [1] получена верхняя оценка сложности решения задачи о булевом ранце для метода ветвей и границ при условии выбора переменной с максимальным весом в качестве переменной ветвления. Эта оценка совпадает со сложностью решения примера, предложенного в [6], что показывает точность этой оценки для рассматриваемого варианта метода ветвей и границ. Альтернативное более простое доказательство этого факта получено в [2]. В работе [4] получены верхние оценки максимальной сложности метода ветвей и границ при ветвлении по произвольной переменной, зависящие от коэффициентов задачи о ранце, выделены полиномиальные подслучаи.

Вопросы числа операций метода ветвей и границ исследовались также по отношению к задаче о т. н. целочисленном ранце, в которой переменные могут принимать любые целые положительные значения. В работе [7] для задачи о целочисленном ранце с ограничением типа равенства строится серия примеров, для которых теоретически и экспериментально подтверждается высокая вычислительная сложность. Более детальное исследование числа операций метода ветвей и границ для задач рассматриваемого класса проведено в работе [12]. В ней получены верхние и нижние оценки максимальной сложности решения, подтверждающие ожидаемый вывод об экспоненциальной зависимости максимальной сложности решения методом ветвей и границ от числа переменных для задач рассматриваемого класса.

§ 6. Заключение

В работе получена верхняя оценка сложности решения задачи о сумме подмножеств методом ветвей и границ с ветвлением по переменной с максимальным весом. Эта оценка зависит от соотношения ограничения по весу и коэффициентов задачи, тем самым позволяя оценивать максимальное число необходимых операций до начала решения задачи на основании ее исходных данных. Подобные оценки могут применяться при планировании распределенных вычислений, априорной оценке требуемых для решения той или иной задачи аппаратных ресурсов. В дальнейшем планируется уточнение полученных оценок для задачи о булевом ранце, получение нижних оценок и рассмотрение других задач дискретной оптимизации.

Для полученных в работе верхних оценок сложности решения задачи о сумме подмножеств естественно также задать вопрос о том, насколько точными являются эти оценки. Можно убедиться, что полученные оценки являются точными для $t \leqslant \lfloor n/2 \rfloor + 2$. В частности, для $t \leqslant \lfloor n/2 \rfloor + 1$ данные оценки достигаются на задаче о сумме подмножеств с параметрами $w_1 = w_2 = \ldots = w_n = 2$ и $C = 2t - 1$ (см., например, [3]). Для $t = \lfloor n/2 \rfloor + 2$ данные оценки достигаются на задаче с параметрами $w_1 = w_2 = \ldots = w_{n-k-1} = 3k$, $w_{n-k} = w_{n-k+1} = \ldots = w_n = 3k - 2$, $C = 3k^2 + k - 1$, где $k = \lfloor n/2 \rfloor$. С другой стороны, можно показать, что при $n = 7$ и $t = 6$ сложность решения задачи о сумме подмножеств не превосходит 53, в то время как из теоремы 3 для этого случая вытекает верхняя оценка сложности решения задачи (1), равная 56. Таким образом, для $t = \lfloor n/2 \rfloor + 3$ полученные в работе верхние оценки сложности решения задачи о сумме подмножеств уже не являются точными. Поэтому еще одним из направлений дальнейших исследований является уточнение данных оценок для случая $t > \lfloor n/2 \rfloor + 2$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гришухин В.П. Эффективность метода ветвей и границ в задачах с булевыми переменными // Исследования по дискретной оптимизации. — 1976. — С. 203–230.
2. Колпаков Р.М., Посыпкин М.А., Сигал И.Х. О сложности решения задачи о булевом ранце // Дискретные модели в теории управляющих систем: VII Междунар. конф. — М.: МАКС Пресс. — 2006. — С. 166–171
3. Колпаков Р.М., Посыпкин М.А. Асимптотическая оценка сложности метода ветвей и границ с ветвлением по дробной переменной для задачи о ранце // Дискретн. анализ и исслед. опер. — 2008. — Т. 15, № 1. — С. 58–81.
4. Колпаков Р.М., Посыпкин М.А. Верхняя и нижняя оценки трудоемкости метода ветвей и границ для задачи о ранце // Труды ИСА РАН. — 2008. — Т. 32. — С. 137–158.
5. Сигал И.Х., Иванова А.П. Введение в прикладное дискретное программирование. — М.: Физматлит, 2002.
6. Финкельштейн Ю.Ю. Приближенные методы и прикладные задачи дискретного программирования. — М.: Наука, 1976.
7. Aardal K., Lenstra A.K. Hard equality constrained integer knapsacks // Mathematics of Operations Research. — 2004. — 29 (3). — P. 724–738.
8. Vasek Chvatal. Hard knapsack problems // Operations Research. — 1980. — 28 (6). — P. 1402–1411.
9. Greenberg H., Hegerich R.L. A branch search algorithm for the knapsack problem // Management Science. — 1970. — V. 16, № 5. — P. 237–332.
10. Robert G. Jeroslow. Trivial integer programs unsolvable by branch-and-bound // Mathematical Programming. — 1974. — V. 6. — P. 105–109.
11. Kellerer H., Pfershy U., Pisinger D. Knapsack Problems. — Springer Verlag, 2004.
12. Krishnamoorth B. Bounds on the size of branch-and-bound proofs for integer knapsacks // OR Letters. — 2008. — V. 36, № 1. — P. 19–25.

Поступило в редакцию 25.IX.2012.