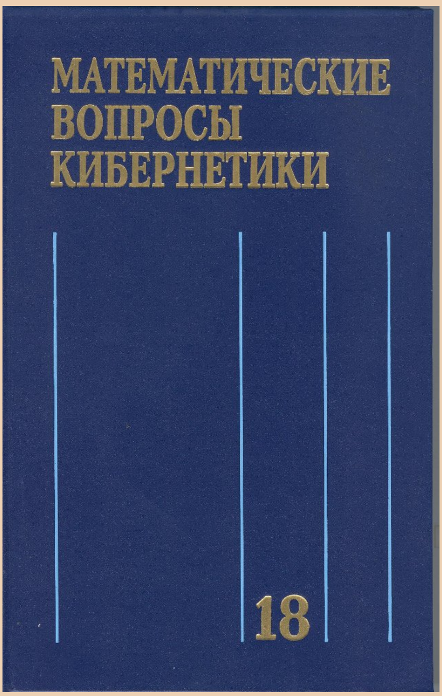

С. С. Марченков

Оператор E-замыкания на множестве частичных функций многозначной логики

ОПЕРАТОР E-ЗАМЫКАНИЯ НА МНОЖЕСТВЕ ЧАСТИЧНЫХ ФУНКЦИЙ МНОГОЗНАЧНОЙ ЛОГИКИ *)

С. С. МАРЧЕНКОВ

(МОСКВА)

Начало функциональным исследованиям в области частичных булевых функций положили работы Р. В. Фрейвалда [19, 20] (в [2] имеется ссылка на работу Ван Сянхао по частичным функциям многозначной логики, опубликованную на китайском языке в 1963 г.). В работах [19, 20] была решена проблема функциональной полноты для частичных булевых функций и построен пример замкнутого класса, не имеющего конечного базиса. Континуальность числа замкнутых классов частичных булевых функций установлена в работе [1].

Исследования по проблеме функциональной полноты для частичных функций многозначной логики проводились независимо Б. А. Ромовым [15, 16] и Ло Чжукаем [2, 3] (обе работы опубликованы на китайском языке в 1984 г.). В работах [2, 3] при любом $k \geqslant 3$ определены все предполные классы частичных функций k-значной логики. Аналогичный результат получен другим методом в работе [17]. Следует также отметить публикацию [23], где для любого $k \geqslant 4$ анонсировано решение проблемы полноты для частичных функций k-значной логики.

Все перечисленные результаты относятся к понятиям полноты и замыкания, основанным на операции суперпозиции. Однако существует ряд операторов замыкания более сильных, нежели суперпозиция. К таким операторам относятся, в частности, операторы позитивного [7] и эквационального [10] замыканий, а также оператор замыкания с разветвлением по предикату равенства (оператор E-замыкания) [8, 18]. Для этих операторов число соответствующих замкнутых классов частичных булевых функций оказывается конечным [11–14].

В настоящей работе рассматривается действие оператора E-замыкания на множестве частичных функций многозначной логики. При любом $k \geqslant 3$ находятся все E-предполные классы k-значной логики и доказывается, что любой E-замкнутый класс частичных функций k-значной логики E-порождается своими функциями от k переменных.Определяются три серии E-предполных классов частичных функций многозначной логики. На их основе устанавливается критерий функциональной полноты в классе частичных функций трехзначной логики.

Введем необходимые понятия. Пусть $k \geqslant 2$, $E_k = \{0, 1, \ldots, k-1\}$, P_k — множество всех функций на E_k (множество функций k-значной логики), P_k^* — множество всех частичных функций на E_k (множество частичных

*) Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 09–01–00701).

функций k-значной логики). Если $Q \subseteq P_k^*$, то через $Q^{(n)}$ обозначаем множество всех функций из Q, которые зависят от n переменных. Если $f(x_1, \ldots, x_n) \in P_k^*$, $(a_1, \ldots, a_n) \in E_k^n$ и функция f не определена на наборе $(a_1, \ldots, a_n)$, то этот факт будем записывать в виде $f(a_1, \ldots, a_n) = *$. Символом $*$ обозначаем также нигде не определенную функцию (от любого числа переменных).

Произвольную функцию $f(x_1, \ldots, x_n)$ из P_k^* рассматриваем также как функцию от любого большего числа переменных $x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}, \ldots, x_{n+m}$, считая переменные $x_{n+1}, \ldots, x_{n+m}$ фиктивными для функции f. На множестве P_k^* вводим операцию суперпозиции. Если $g, g_1, \ldots, g_m \in P_k^*$ и

$$f(x_1, \ldots, x_n) = g(g_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, g_m(x_1, \ldots, x_n)), \tag{1}$$

то для произвольного набора $\widetilde{a} \in E_k^n$ значение $f(\widetilde{a})$ считаем определенным в том и только том случае, когда определены все значения $g_1(\widetilde{a}), \ldots, g_m(\widetilde{a})$ и значение функции g определено на наборе $(g_1(\widetilde{a}), \ldots, g_m(\widetilde{a}))$.

Пусть $Q \subseteq P_k^*$. Замыканием Q (обозначение $[Q]$) называется множество всех функций из P_k^*, которые можно получить из функций множества Q с помощью операций введения фиктивных переменных, отождествления и перестановки переменных и суперпозиции. Множество Q называется замкнутым, если $Q = [Q]$. Замкнутые множества называем также замкнутыми классами. Понятия полного множества и предполного класса [21] относим к данным понятиям замыкания и замкнутого класса.

Пусть $g_1, g_2 \in P_k^*$. Говорим, что функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ получается из функций $g_1(x_1, \ldots, x_n), g_2(x_1, \ldots, x_n)$ с помощью операции *разветвления по предикату равенства*, если для некоторых $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ выполняется соотношение

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \begin{cases} g_1(x_1, \ldots, x_n), & \text{если } x_i = x_j, \\ g_2(x_1, \ldots, x_n) & \text{в противном случае.} \end{cases} \tag{2}$$

E-замыкание множества $Q \subseteq P_k^*$ определяем как множество всех функций из P_k^*, которые можно получить из функций множества Q с помощью операций введения фиктивных переменных, отождествления и перестановки переменных, суперпозиции и разветвления по предикату равенства. E-замыкание множества Q обозначаем через $[Q]_E$. Множество функций, которое совпадает со своим E-замыканием, называем E-замкнутым классом. Говорим, что множество $R \subseteq Q$ E-порождает E-замкнутый класс Q (E-полно в классе Q), если $[R]_E = Q$. Понятие E-предполного класса аналогично соответствующему понятия для операции суперпозиции.

Утверждение 1. *При любом $k \geqslant 2$ система всех констант $\{0, 1, \ldots, k-1\}$ E-полна в классе P_k.*

Доказательство. Пусть $a \neq 0$. Положим

$$h_a(x_1, x_2) = \begin{cases} a, & \text{если } x_1 = x_2, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Понятно, что $h_a \in [\{0, 1, \ldots, k-1\}]_E$.

Пусть f — произвольная функция из $P_k^{(1)}$, $1 \leqslant m \leqslant k$, $i_1, \ldots, i_m$ — различные элементы из E_k. Положим

$$f_{i_1 \ldots, i_m}(x) = \begin{cases} f(x), & \text{если } x \in \{i_1, \ldots, i_m\}, \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Очевидно, что функция $f_i(x)$ совпадает с функцией $h_{f(i)}(x, i)$.

Предположим, что в E-замыкании множества $\{0, 1, \ldots, k-1\}$ уже получены все функции вида $f_{i_1 \ldots i_m}(x)$, где $1 \leqslant m < k$, и пусть $i_{m+1} \notin \{i_1, \ldots, i_m\}$. Определим

$$h(x_1, x_2) = \begin{cases} f(i_{m+1}), & \text{если } x_1 = x_2, \\ f_{i_1, \ldots, i_m}(x_1) & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Тогда будем иметь

$$f_{i_1 \ldots i_{m+1}}(x) = h(x, i_{m+1}).$$

Итак, имеем включение $P_k^{(1)} \subseteq [\{0, 1, \ldots, k-1\}]_E$. Если теперь определить

$$g(x_1, x_2) = \begin{cases} x_1, & \text{если } x_1 = x_2, \\ 0 & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

то g будет являться существенной функцией, принимающей все k значений (при $k = 2$ функция $g(x_1, x_2)$ совпадает с функцией $x_1 \mathbin{\&} x_2$). Поэтому, применяя при $k = 2$ критерий Поста, а при $k \geqslant 3$ — критерий Слупецкого [21], получаем полноту системы $P_k^{(1)} \cup \{g\}$ в классе P_k. Утверждение доказано.

С л е д с т в и е. *При любом $k \geqslant 2$ система $\{0, 1, \ldots, k-1, *\}$ E-полна в классе P_k^*.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $f(x_1, \ldots, x_n)$ — произвольная функция из P_k^*. Определим в классе P_k функции $f_1(x_1, \ldots, x_n)$, $f_2(x_1, \ldots, x_n)$:

$$f_1(x_1, \ldots, x_n) = f_2(x_1, \ldots, x_n) = f(x_1, \ldots, x_n), \text{ если } f(x_1, \ldots, x_n) \neq *,$$
$$f_1(x_1, \ldots, x_n) \neq f_2(x_1, \ldots, x_n), \text{ если } f(x_1, \ldots, x_n) = *.$$

Положим

$$g(x_1, x_2) = \begin{cases} x_1, & \text{если } x_1 = x_2, \\ * & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Очевидно, что $g \in [\{0, 1, \ldots, k-1, *\}]_E$. Далее получаем

$$f(x_1, \ldots, x_n) = g(f_1(x_1, \ldots, x_n), f_2(x_1, \ldots, x_n)).$$

Следствие доказано.

Пусть D — непустое подмножество множества E_k, отличное от E_k. Обозначим через T_D множество всех функций из P_k, сохраняющих множество D (сохраняющих предикат $x \in D$). Хорошо известно, что множество T_D является замкнутым классом. Нетрудно проверить, что множество T_D также и E-замкнуто.

Пусть π — перестановка на E_k и $f(x_1, \ldots, x_n) \in P_k$. Функция

$$f^{\pi}(x_1, \ldots, x_n) = \pi^{-1}(f(\pi(x_1), \ldots, \pi(x_n)))$$

называется *двойственной* к функции f относительно перестановки π (здесь π^{-1} есть перестановка, обратная к перестановке π). Функция f называется *самодвойственной* относительно перестановки π, если $f = f^{\pi}$.

Множество всех функций из P_k, самодвойственных относительно перестановки π, обозначим через S_π. Хорошо известно, что для любой перестановки π множество S_π является замкнутым классом. Нетрудно убедиться в том, что множество S_π также и E-замкнуто.

Л е м м а 1. *Пусть $k \geqslant 2$, Q — замкнутый класс функций из P_k, который целиком не содержится ни в одном из классов вида T_D. Тогда для любых $a, b \in E_k$ в класс Q входит такая функция $h_{ab}(x)$, что $h_{ab}(a) = b$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Согласно условиям леммы, для любых попарно различных элементов $a_1, \ldots, a_m$ из E_k $(1 \leqslant m < k)$ в класс Q входит функция $g'_{a_1 \ldots a_m}$, не сохраняющая множество $\{a_1, \ldots, a_m\}$. Отождествляя и переставляя, если необходимо, переменные в функции $g'_{a_1 \ldots a_m}$, получим такую функцию $g_{a_1 \ldots a_m}(x_1, \ldots, x_m)$, что

$$g_{a_1 \ldots a_m}(a_1, \ldots, a_m) \notin \{a_1, \ldots, a_m\}.$$

Возьмем произвольное a из E_k. Если $g_a(a) = b_1$, то в качестве функции h_{ab_1} можно выбрать функцию g_a. Пусть $g_{ab_1}(a, b_1) = b_2$. Тогда можно положить

$$h_{ab_2}(x) = g_{ab_1}(x, h_{ab_1}(x)).$$

Вообще, если уже получены функции $h_{ab_1}, \ldots, h_{ab_m}$, где $m < k - 1$ и элементы $a, b_1, \ldots, b_m$ попарно различны, и $g_{ab_1 \ldots b_m}(a, b_1, \ldots, b_m) = b_{m+1}$, то полагаем

$$h_{ab_{m+1}}(x) = g_{ab_1 \ldots b_m}(x, h_{ab_1}(x), \ldots, h_{ab_m}(x)).$$

Таким образом, для любого $b \neq a$ в класс Q входит функция h_{ab}. Чтобы теперь получить функцию h_{aa}, достаточно заметить, что по доказанному классу Q принадлежит функция $h_{b_1 a}$ и, следовательно, будет принадлежать функция

$$h_{b_1 a}(h_{ab_1}(x)) = h_{aa}(x).$$

Лемма доказана.

Т е о р е м а 1. *При любом $k \geqslant 2$ все E-предполные в P_k классы исчерпываются классами вида T_D и S_π, где перестановка π разлагается в произведение циклов одной и той же простой длины.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Сначала установим, что любой E-предполный в P_k класс Q содержит тождественную функцию x. Это очевидно для классов Q, которые целиком содержат один из классов T_D или S_π (напомним, что классы T_D, S_π E-замкнуты и потому E-неполны).

Пусть теперь E-замкнутый класс Q (не обязательно E-предполный) целиком не входит ни в один из классов T_D. Тогда согласно лемме 1 он содержит все функции вида h_{ab}. Положим $h_1(x) = h_{00}(x)$. Если функция $h_1(x)$ отлична от тождественной функции x, то пусть a — такой элемент из E_k, что $h_1(a) \neq a$. Определим в классе Q функции g и h_2:

$$g(x_1, x_2) = \begin{cases} h_1(x_1), & \text{если } x_1 = x_2, \\ h_{aa}(x_1) & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

$$h_2(x) = g(x, h_1(x)).$$

Из определений следует, что равенство $h_2(x)=x$ заведомо выполняется при $h_1(x)=x$ и при $x=a$.

Если функция $h_2(x)$ отлична от функции x, то поступаем с ней так же, как с функцией $h_1(x)$, и т.д. Не более чем через $k-1$ шагов этого процесса мы получим тождественную функцию x.

Имея функцию x, определим в классе Q *тернарный дискриминатор* $p(x,y,z)$:

$$p(x,y,z)=\begin{cases} z, & \text{если } x=y, \\ x & \text{в противном случае.}\end{cases}$$

Известно (см. [22] или [4]), что функция p образует базис по суперпозиции в классе H_k всех однородных (самодвойственных относительно любых перестановок) функций из P_k, сохраняющих множество E_{k-1}. В работе [6] показано, что класс H_k целиком содержится лишь в конечном числе замкнутых классов, причем максимальными из них (по включению) и отличными от P_k являются классы T_D и S_π указанного в условиях теоремы вида. Следовательно, произвольный E-предполный в P_k класс совпадает с одним из классов вида T_D, S_π, и теорема доказана.

Теорема 2 обобщает теорему 1 из [11] на случай функций многозначной логики.

Теорема 2. *При любом $k\geqslant 3$ любой E-замкнутый класс в P_k^* E-порождается множеством всех своих функций, зависящих не более чем от k переменных.*

Доказательство. Пусть Q — E-замкнутый класс в P_k^*, $f(x_1,\ldots,x_n)\in Q$ и $n>k$. Покажем, что функцию f можно определить с помощью операции разветвления по предикату равенства через функции, полученные из f отождествлением переменных. Поскольку все дальнейшие построения одинаковы при любых $n>k$, рассмотрим случай $n=k+1$.

Пусть $m=\binom{k+1}{2}$. Рассмотрим следующую схему определения функции f через m функций от k переменных, образованных из функции f всевозможными отождествлениями двух переменных:

$$f_1(x_1,\ldots,x_{k+1})=\begin{cases} f(x_1,x_1,x_3,\ldots,x_{k+1}), & \text{если } x_1=x_2, \\ f(x_1,x_2,x_1,x_4,\ldots,x_{k+1}) & \text{в противном случае,}\end{cases}$$

$$f_2(x_1,\ldots,x_{k+1})=\begin{cases} f(x_1,x_2,x_3,x_1,x_5,\ldots,x_{k+1}), & \text{если } x_1=x_4, \\ f_1(x_1,\ldots,x_{k+1}) & \text{в противном случае,}\end{cases}$$

. . . .

$$f_{k-1}(x_1,\ldots,x_{k+1})=\begin{cases} f(x_1,\ldots,x_{k-1},x_k,x_1), & \text{если } x_1=x_{k+1}, \\ f_{k-2}(x_1,\ldots,x_{k+1}) & \text{в противном случае,}\end{cases}$$

$$f_k(x_1,\ldots,x_{k+1})=\begin{cases} f(x_1,x_2,x_2,x_4,\ldots,x_{k+1}), & \text{если } x_2=x_3, \\ f_{k-1}(x_1,\ldots,x_{k+1}) & \text{в противном случае,}\end{cases}$$

. . . .

$$f_{m-2}(x_1,\ldots,x_{k+1})=\begin{cases} f(x_1,\ldots,x_{k-1},x_k,x_{k-1}), & \text{если } x_{k-1}=x_{k+1}, \\ f_{m-3}(x_1,\ldots,x_{k+1}) & \text{в противном случае,}\end{cases}$$

$$f(x_1,\ldots,x_{k+1})=\begin{cases} f(x_1,\ldots,x_{k-1},x_k,x_k), & \text{если } x_k=x_{k+1}, \\ f_{m-2}(x_1,\ldots,x_{k+1}) & \text{в противном случае.}\end{cases}$$

Докажем корректность определения функции f с помощью данной схемы. Заметим, прежде всего, что функция f_1 совпадает с функцией f при выполнении условия

$$x_1 = x_2 \vee (x_1 \neq x_2) \,\&\, (x_1 = x_3),$$

что равносильно условию $x_1 = x_2 \vee x_1 = x_3$. Далее, функция f_2 совпадает с функцией f, если выполняется условие

$$x_1 = x_4 \vee (x_1 \neq x_4) \,\&\, (x_1 = x_2 \vee x_1 = x_3),$$

что равносильно условию

$$x_1 = x_4 \vee x_1 = x_2 \vee x_1 = x_3.$$

Продолжая «спускаться» вниз по схеме, для функции f_{k-1} будем иметь условие

$$x_1 = x_2 \vee x_1 = x_3 \vee \ldots \vee x_1 = x_{k+1},$$

для функции f_k — условие

$$x_1 = x_2 \vee x_1 = x_3 \vee \ldots \vee x_1 = x_{k+1} \vee x_2 = x_3,$$

а для функции f_{m-2} — условие

$$\bigvee_{\substack{1 \leqslant i < j \leqslant k+1, \\ (i,j) \neq (k,k+1)}} x_i = x_j.$$

Наконец, правая часть последнего равенства схемы задает функцию, которая совпадает с функцией f при выполнении условия

$$\bigvee_{1 \leqslant i < j \leqslant k+1} x_i = x_j.$$

Однако последнее условие тожественно истинно, поскольку среди произвольных $k+1$ элементов $x_1, \ldots, x_{k+1}$ из E_k, по крайней мере, два элемента совпадают. Это означает, что последнее равенство определяет функцию f «без всяких условий». Теорема доказана.

Следствие. *При любом $k \geqslant 3$ число E-замкнутых классов в P_k^* конечно.*

Определим в P_k^* ряд E-замкнутых классов.

Пусть D — непустое подмножество множества E_k, отличное от множества E_k. Обозначим через T_D^* множество всех функций из P_k^*, которые сохраняют множество D (сохраняют предикат $x \in D$). Иными словами, функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ принадлежит множеству T_D^* в том и только том случае, когда для любого набора $(a_1, \ldots, a_n) \in E_k^n$ значение $f(a_1, \ldots, a_n)$ либо не определено, либо принадлежит множеству D.

Пусть π — перестановка на множества E_k и $(a_1, \ldots, a_n) \in E_k^n$. Назовем *$\pi$-орбитой* набора $(a_1, \ldots, a_n)$ (конечное) множество всех наборов вида $(\pi^i(a_1), \ldots, \pi^i(a_n))$, где π^i — i-кратная композиция перестановки π, для $i = 1, 2 \ldots$.

Пусть D — подмножество множества E_k, содержащее не менее двух элементов, π — перестановка на множестве D. Обозначим через $S_{D,\pi}^*$ множество всех функций $f(x_1, \ldots, x_n)$ из P_k^*, которые обладают следующим свойством. Для любого набора $(a_1, \ldots, a_n)$ из D^n функция f либо не определена на некотором наборе, принадлежащем π-орбите набора $(a_1, \ldots, a_n)$, либо при любом i удовлетворяет равенству

$$f(\pi^{i+1}(a_1), \ldots, \pi^{i+1}(a_n)) = \pi(f(\pi^i(a_1), \ldots, \pi^i(a_n))) \qquad (3)$$

(самодвойственна на π-орбите набора $(a_1, \ldots, a_n)$).

Для любого непустого подмножества D множества E_k (случай $D = E_k$ не исключается) обозначим через I_D^* множество всех функций f из P_k^*, которые обладают следующим свойством: либо для некоторого $a \in D$ значение $f(a, \ldots, a)$ не определено, либо для всех $a \in D$ выполняется равенство $f(a, \ldots, a) = a$.

Отметим, что для одноэлементного множества D множество I_D^* совпадает с множеством T_D^*.

Нетрудно показать, что все определенные множества $T_D^*, S_{D,\pi}^*, I_D^*$ являются E-замкнутыми классами. Проделаем это, например, для множеств $S_{D,\pi}^*$.

Пусть функция f определяется через функции $g, g_1, \ldots, g_m$ согласно равенству (1) и $g, g_1, \ldots, g_m \in S_{D,\pi}^*$. Возьмем произвольный набор $\widetilde{a} = (a_1, \ldots, a_n)$ из D^n. Если на π-орбите набора $\widetilde{a}$ не определена полностью хотя бы одна из функций $g_1, \ldots, g_m$, то аналогичное утверждение будет, очевидно, справедливо и для функции f. Пусть, напротив, все функции $g_1, \ldots, g_m$ полностью определены на π-орбите набора $\widetilde{a}$. Тогда в силу условия (3), справедливого для каждой из функций $g_1, \ldots, g_m$, набор функций $(g_1, \ldots, g_m)$ переводит π-орбиту набора $\widetilde{a}$ в π-орбиту набора $(g_1(\widetilde{a}), \ldots, g_m(\widetilde{a}))$. Пользуясь включением $g \in S_{D,\pi}^*$, приходим к выводу, что функция g либо не определена на некотором наборе из π-орбиты набора $(g_1(\widetilde{a}), \ldots, g_m(\widetilde{a}))$, либо при любом i удовлетворяет условию

$$g(\pi^{i+1}(g_1(\widetilde{a})), \ldots, \pi^{i+1}(g_m(\widetilde{a}))) = \pi(g(\pi^i(g_1(\widetilde{a})), \ldots, \pi^i(g_m(\widetilde{a})))). \tag{4}$$

Поскольку условие (3) выполняется для каждой из функций $g_1, \ldots, g_m$, равенство (4) можно переписать в виде

$$g(g_1(\pi^{i+1}(\widetilde{a})), \ldots, g_m(\pi^{i+1}(\widetilde{a}))) = \pi(g(g_1(\pi^i(\widetilde{a})), \ldots, g_m(\pi^i(\widetilde{a})))),$$

где $\pi^i(\widetilde{a}) = (\pi^i(a_1), \ldots, \pi^i(a_n))$. А это, в свою очередь, в силу равенства (1) эквивалентно равенству (3).

Пусть теперь функция f определяется через функции g_1, g_2 согласно равенству (2) и $g_1, g_2 \in S_{D,\pi}^*$. Понятно, что для произвольного набора $(a_1, \ldots, a_n)$ из D^n значения функции f на π-орбите набора $(a_1, \ldots, a_n)$ будет совпадать либо с соответствующими значениями функции g_1 (случай $a_i = a_j$), либо с соответствующими значениями функции g_2 (случай $a_i \neq a_j$). Отсюда сразу следует, что $f \in S_{D,\pi}^*$.

Утверждение 2. *Класс P_k и классы T_D^* E-предполны в классе P_k^*.*

Доказательство. Очевидно, что класс P_k E-замкнут. Если $f(x_1, \ldots, x_n) \notin P_k$, то найдется такой набор $(a_1, \ldots, a_n)$, что $f(a_1, \ldots, a_n) = *$. Подставляя в функцию f константы $a_1, \ldots, a_n$ (которые принадлежат классу P_k), получим функцию $*$. Далее пользуемся следствием из утверждения 1.

Известно (см. [2, 3, 17, 23]), что классы T_D^* предполны в P_k^* (относительно операции суперпозиции). Поэтому из E-замкнутости классов T_D^* вытекает их E-предполнота в классе P_k^*. Утверждение доказано.

Утверждение 3. *Класс $S_{D,\pi}^*$ E-предполон в P_k^*, если перестановка π разлагается в произведение циклов одной и той же простой длины.*

Доказательство. Пусть $f(x_1, \ldots, x_n) \notin S_{D,\pi}^*$. Тогда найдется такой набор $\widetilde{a} = (a_1, \ldots, a_n) \in D^n$, что функция f определена на всех наборах π-орбиты набора $\widetilde{a}$ и равенство (3) не выполняется при некотором i. Если функция f не всюду определена, то выберем в классе $S^*_{D,\pi}$ такие всюду определенные функции $g_1(x_1,\ldots,x_n)$, $g_2(x_1,\ldots,x_n)$, что для любого набора $\widetilde{b}\in E_k^n$ имеем $g_1(\widetilde{b})=g_2(\widetilde{b})$, если набор $\widetilde{b}$ не входит в π-орбиту набора $\widetilde{a}$, и $g_1(\widetilde{b})\neq g_2(\widetilde{b})$ в противном случае (последнему условию можно удовлетворить, поскольку π — неединичная перестановка на D).

Определим функции g и f':

$$g(x_1,\ldots,x_n,y_1,y_2)=\begin{cases} g_1(x_1,\ldots,x_n), & \text{если } y_1=y_2,\\ f(x_1,\ldots,x_n) & \text{в противном случае,}\end{cases}$$

$$f'(x_1,\ldots,x_n)=g(x_1,\ldots,x_n,g_1(x_1,\ldots,x_n),g_2(x_1,\ldots,x_n)).$$

Тогда функции g, f' всюду определены, принадлежат множеству $[S^*_{D,\pi}\cup\{f\}]_E$ и функция f' совпадает с функцией f на π-орбите набора $\widetilde{a}$.

Таким образом, можно предполагать, что f — всюду определенная функция. Кроме того, из определения следует, что функция f' при любом i удовлетворяет равенству вида (3) для любого набора, не входящего в π-орбиту набора $\widetilde{a}$. Это свойство мы будем предполагать и у функции f. Далее рассмотрим два случая.

1. Функция f сохраняет множество D.

Рассмотрим ограничения на множество D функций из $S^*_{D,\pi}\cap P_k$ (это будут все функции, самодвойственные относительно перестановки π) и функции f (это будет функция, несамодвойственная относительно перестановки π). Применим к этим ограничениям известный результат (см. [5, 9, 24]) о предполноте класса S_π, когда перестановка π разлагается в произведение циклов одной и той же простой длины. Согласно этому результату суперпозициями функций из $S^*_{D,\pi}\cap P_k$ и функции f можно получить такую функцию $f_1(x)$, которая на множестве D есть константа $d\in D$.

Возьмем теперь в классе $S^*_{D,\pi}$ такие всюду определенные функции $g_3(x)$ и $g_4(x)$, что $g_3(x)=g_4(x)=d$, если $x\notin D$, и $g_3(x)\neq g_4(x)$ при $x\in D$ (еще раз напомним, что на множестве D перестановка π не имеет «неподвижных» точек). Тогда функции

$$g_5(x,y_1,y_2)=\begin{cases} g_3(x), & \text{если } y_1=y_2,\\ f_1(x) & \text{в противном случае,}\end{cases}$$

$$f_2(x)=g_5(x,g_3(x),g_4(x))$$

принадлежат множеству $[S^*_{D,\pi}\cup\{f\}]_E$ и, кроме того, функция f_2 есть константа d.

Понятно, что для любого $e\in E_k$ в класс $S^*_{D,\pi}$ входит функция $h_{de}(x)$, которая определена только в точке d и $h_{de}(d)=e$.

Итак, в множестве $[S^*_{D,\pi}\cup\{f\}]_E$ содержатся все константы. Поскольку в класс $S^*_{D,\pi}$ входит не всюду определенная функция, на основании следствия из утверждения 1 получаем, что система $S^*_{D,\pi}\cup\{f\}$ E-полна в классе P_k^*.

2. Функция f не сохраняет множество D.

Этот случай сводится к случаю 1. Действительно, возьмем такую всюду определенную функцию $f_3(x)$ из $S^*_{D,\pi}$, что f_3 принимает только значения из множества D, $f_3(x)=x$ при $x\in D$ и функция $f_3(f(x_1,\ldots,x_n))$ не принадлежит классу $S^*_{D,\pi}$. Это сделать можно, поскольку множество D содержит не менее двух элементов. Утверждение доказано.

Утверждение 4. *Классы вида I^*_D E-предполны в P_k^*.*

Доказательство. Пусть $f \notin I_D^*$. Тогда функция $f_1(x) = f(x, \ldots, x)$ определена при всех $x \in D$ и для некоторого $a \in D$ выполняется неравенство $f_1(a) \neq a$. Можно считать, что функция f_1 всюду определена. В самом деле, в противном случае возьмем в классе I_D^* такие всюду определенные функции $g_1(x), g_2(x)$, что $g_1(x) = g_2(x) = x$ при $x \in D$ и $g_1(x) \neq g_2(x)$ при $x \notin D$, и положим

$$g(x, y_1, y_2) = \begin{cases} f_1(x), & \text{если } y_1 = y_2, \\ g_1(x) & \text{в противном случае}, \end{cases}$$

$$f_1'(x) = g(x, g_1(x), g_2(x)).$$

Тогда функция f_1' всюду определена и совпадает с функцией f на множестве D.

Предположим, что функция $f_1(x)$ отлична от функции x всюду на множестве D. Для любого $c \in E_k$ выберем в классе I_D^* такую функцию $h_c(x_1, x_2)$, что $h_c(x, x) = x$ при $x \in D$ и $h_c(x_1, x_2) = c$ для остальных наборов (x_1, x_2). Тогда функция $h_c(x, f_1(x))$ есть константа c. Далее подстановкой подходящих констант в не всюду определенную функцию из I_D^* получаем функцию $*$ и применяем следствие из утверждения 1.

Пусть теперь для некоторых x из D функция f_1 удовлетворяет равенству $f_1(x) = x$. Выберем в классе I_D^* не всюду определенную функцию $g_3(x)$, чтобы при любом $x \in D$ из соотношения $f_1(x) = x$ следовало бы неравенство $g_3(x) \neq x$. Положим

$$g_4(x_1, x_2) = \begin{cases} g_3(x), & \text{если } x_1 = x_2, \\ f_1(x) & \text{в противном случае}. \end{cases}$$

Тогда функция $g_4(x, f_1(x))$ определена на множестве D и всюду на этом множестве отлична от функции x. Этот случай рассмотрен выше. Утверждение доказано.

В теореме 3 в обозначениях перестановок $x+1, 2x, 2x+1, 2x+2$ сложение и умножение рассматриваются по модулю 3. Кроме того, для некоторых одноместных функций f из P_3 используем векторное обозначение $(f(0)f(1)f(2))$.

Теорема 3. *Система функций из P_3^* E-полна в классе P_3^* тогда и только тогда, когда она целиком не содержится ни в одном из E-замкнутых классов*

$$\begin{gathered} P_3,\ T_0^*,\ T_1^*,\ T_2^*,\ T_{\{0,1\}}^*,\ T_{\{0,2\}}^*,\ T_{\{1,2\}}^*,\ S_{E_3,x+1}^*, \\ S_{\{0,1\},2x+1}^*,\ S_{\{0,2\},2x+2}^*,\ S_{\{1,2\},2x}^*,\ I_{\{0,1\}}^*,\ I_{\{0,2\}}^*,\ I_{\{1,2\}}^*,\ I_{E_3}^*. \end{gathered} \tag{5}$$

Доказательство. Необходимость условий теоремы вытекает из E-замкнутости классов (5) и несовпадении их с классом P_3^*.

Установим достаточность условий теоремы. Пусть система функций $Q \subseteq P_3^*$ целиком не содержится ни в одном из классов (5). Можно считать, что Q — E-замкнутый класс функций. Заметим, что доказательство леммы 1 проходит и для классов вида T_D^*. Поэтому далее будем предполагать, что для любых $a, b \in E_3$ класс Q содержит функцию вида $h_{ab}(x)$.

Возьмем в классе Q функцию f_1', не входящую в класс $I_{E_3}^*$. Тогда отождествлением всех переменных из нее можно получить всюду определенную функцию $f_1(x)$, которая отлична от тождественной функции x. Далее рассмотрим четыре возможности для функции f_1.

1. f_1 — константа.

Подстановкой функции f_1 в подходящие функции h_{ab} получаем остальные две константы. Затем образуем функцию $*$ подстановкой констант в функцию из Q, не входящую в класс P_3. Согласно следствию из утверждения 1 приходим к E-полной в P_3^* системе.

2. $f_1(x)\in\{x+1, x+2\}$.

Тогда, очевидно, $x\in Q$. Как и доказательстве теоремы 1, из функции x получаем тернарный дискриминатор p. Значит, в класс Q целиком входит класс H_3 всех однородных функций из P_3, сохраняющих множество E_2. Согласно результатам из [6] класс H_3 вместе с функцией f_1 порождает множество S_{x+1} всех функций из P_3, самодвойственных относительно перестановки $x+1$.

Пусть $g\in Q\setminus S^*_{E_3,x+1}$. Так же, как при доказательстве E-предполноты классов вида $S^*_{E_k,\pi}$, из функции g и функций множества S_{x+1} получаем функцию из множества $P_3\setminus S_{x+1}$. Поскольку класс S_{x+1} предполон в классе P_3 [5, 9, 24], приходим к соотношению $P_3\subseteq Q$. Остается выбрать функцию из множества $Q\setminus P_3$ и получить из нее функцию $*$.

3. Функция f_1 принимает ровно два значения.

Тогда суперпозициями функции f_1 можно получить идемпотентную функцию $f_2(x)$ (функцию, удовлетворяющую тождеству $f_2(f_2(x))=f_2(x)$). Все идемпотентные функции, отличные от константы (и принимающие два значения), суть

$$(010),\ (011),\ (002),\ (022),\ (112),\ (212).$$

Мы рассмотрим лишь функции (010) и (011), поскольку доказательства для остальных функций получаются соответствующей заменой значений 0,1 на 0,2 или 1,2. Кроме того, функции (010), (011) легко трансформируются друг в друга. Например, функция (010) получается из функции (011):

$$g_1(x_1,x_2)=\begin{cases}(011)(x_1), & \text{если } x_1=x_2,\\ h_{20}(x_1) & \text{в противном случае,}\end{cases}$$

$$(010)(x)=g_1(x,(011)(x)).$$

Поэтому далее в качестве функции f_2 рассматриваем только функцию (010).

Из функции $f_3'\in Q\setminus S_{\{0,1\},2x+1}$ отождествлением и, возможно, перестановкой переменных получаем функцию $f_3(x_1,x_2)$ такую, что значения $f_3(0,1), f_3(1,0)$ определены и отличны от значений 0,1 и 1,0. Из функции $f_4'\in Q\setminus I^*_{\{0,1\}}$ отождествлением переменных получаем функцию $f_4(x)$ такую, что значения $f_4(0), f_4(1)$ определены и выполняется хотя бы одно из неравенств $f_4(0)\neq 0, f_4(1)\neq 1$.

Функцию f_4 можно считать всюду определенной. В самом деле, если $f_4(2)=*$, то определим для любого $b\in E_3$ функцию g_2:

$$g_2(x_1,x_2)=\begin{cases}f_4(x_1), & \text{если } x_1=x_2,\\ h_{2b}(x_1) & \text{в противном случае.}\end{cases}$$

Тогда функция $g_2(x, f_2(x))$ совпадает с функцией f_4 на множестве $\{0,1\}$ и равна b при $x=2$.

Если $f_4(0)=f_4(1)$, то суперпозиция $f_4(f_2(x))$ дает константу — этот случай рассмотрен в п. 1. Если $f_4(0), f_4(1)\in\{0,2\}$, то, предполагая, что $f_4(2)\in\{0,2\}$, получаем константу 0 подстановкой функции f_4 в функцию f_2. Аналогично, если $f_4(0), f_4(1)\in\{1,2\}$, то предполагаем, что $f_4(2)\in\{1,2\}$ и получаем константу 1, подставляя функцию f_4 в функцию (011) (напомним, что функция (011) получается из функции (010)).

Остается исследовать возможность, когда $f_4(0)=1$ и $f_4(1)=0$. В этом случае положим

$$f_5(x)=f_3(x, f_4(x)).$$

Тогда функция f_5 определена на множестве $\{0,1\}$ и принимает на нем пару значений, отличную от (0,1) и (1,0). К функции f_5 можно применить рассуждения, проведенные для функции f_4, и получить константу.

4. $f_1(x)\in\{2x, 2x+1, 2x+2\}$.

Этот случай можно свести к случаю 3. В самом деле, считая, например, что $f_1(x)=2x$, образуем функции

$$g_3(x_1,x_2)=\begin{cases} h_{01}(x_1), & \text{если } x_1=x_2,\\ x_1 & \text{в противном случае,}\end{cases}$$

$$f_6(x)=g_3(x,2x).$$

Тогда функция f_6 идемпотентна и принимает ровно два значения. Теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Алексеев В.Б., Вороненко А.А. О некоторых замкнутых классах в частичной двузначной логике // Дискретная математика. — 1994. — Т. 6, № 4. — С. 58–79.
2. Ло Чжукай. Максимальные замкнутые классы в множестве частичных функций многозначной логики // Кибернетический сборник. Вып. 25. — М.: Мир, 1988. — С. 131–141.
3. Ло Чжукай. Теория полноты для частичных функций многозначной логики // Кибернетический сборник. Вып. 25. — М.: Мир, 1988. — С. 142–161.
4. Марченков С.С. Однородные алгебры // Проблемы кибернетики. Вып. 39. — М.: Наука, 1982. — С. 85–106.
5. Марченков С.С. Предполнота замкнутых классов в P_k: предикатный подход // Математические вопросы кибернетики. Вып. 6. — М.: Наука, 1996. — С. 117–132.
6. Марченков С.С. Клоновая классификация дуально дискриминаторных алгебр с конечным носителем // Математические заметки. — 1997. — Т. 61, № 3. — С. 359–366.
7. Марченков С.С. О выразимости функций многозначной логики в некоторых логико-функциональных языках // Дискретная математика. — 1999. — Т. 11, № 4. — С. 110–126.
8. Марченков С.С. Операторы замыкания с разветвлением по предикату // Вестник Московского университета. Серия 1. Математика, механика. — 2003. — № 6. — С. 37–39.
9. Марченков С.С. Функциональные системы с операцией суперпозиции. — М.: Физматлит, 2004.
10. Марченков С.С. Эквациональное замыкание // Дискретная математика. — 2005. — Т. 17, № 2. — С. 117–126.
11. Марченков С.С. Оператор замыкания с разветвлением по предикату равенства на множестве частичных булевых функций // Дискретная математика. — 2008. — Т. 20, № 3. — С. 80–88.
12. Марченков С.С. Сильные операторы замыкания на множестве частичных булевых функций // Доклады РАН. — 2008. — Т. 419, № 5. — С. 599–600.
13. Марченков С.С. Эквационально замкнутые классы частичных булевых функций // Дискретный анализ и исследование операций. — 2008. — Т. 15, № 1. — С. 82–97.
14. Марченков С.С., Попова А.А. Позитивно замкнутые классы частичных булевых функций // Вестник Московского университета. Серия 15. Вычислительная математика и кибернетика. — 2008. — № 3. — С. 30–34.
15. Ромов Б.А. О максимальных подалгебрах алгебры частичных функций многозначной логики // Кибернетика. — 1980. — № 1. — С. 28–36.
16. Ромов Б.А. Алгебры частичных функций и их инварианты // Кибернетика. — 1981. — № 2. — С. 1–11.
17. Ромов Б.А. О проблеме полноты в алгебре частичных функций конечнозначной логики // Кибернетика. — 1990. — № 1. — С. 102–106.

18. Соловьев В.Д. Замкнутые классы в k-значной логике с операцией разветвления по предикатам // Дискретная математика. — 1990. — Т. 2, № 4. — С. 18–25.
19. Фрейвалд Р.В. Критерий полноты для частичных функций алгебры логики и многозначных логик // Доклады АН СССР. — 1966. — Т. 167, № 6. — С. 1249–1250.
20. Фрейвалд Р.В. Функциональная полнота для не всюду определенных функций алгебры логики // Дискретный анализ. — 1966. — № 8. — С. 55–68.
21. Яблонский С.В. Введение в дискретную математику. — М.: Наука, 1986.
22. Ganter B., Plonka J., Werner H. Homogeneous algebras are simple // Fund. Math. — 1973. — V. 79, № 3. — P. 217–220.
23. Haddad L., Rosenberg I. Critère général de completude pour le algebrés partiellés finies // C. r. Acad. sci. — 1987. — V. 304, № 17. — P. 507–509.
24. Rosenberg I.G. Über die funktionale Vollständigkeit in den mehrwertigen Logiken // Rozpravy Československe Akad. Věd. Řada Math. Přir. Věd. — Praha, 1970. — Bd. 80. — S. 3–93.

Поступило в редакцию 03.II.2009.