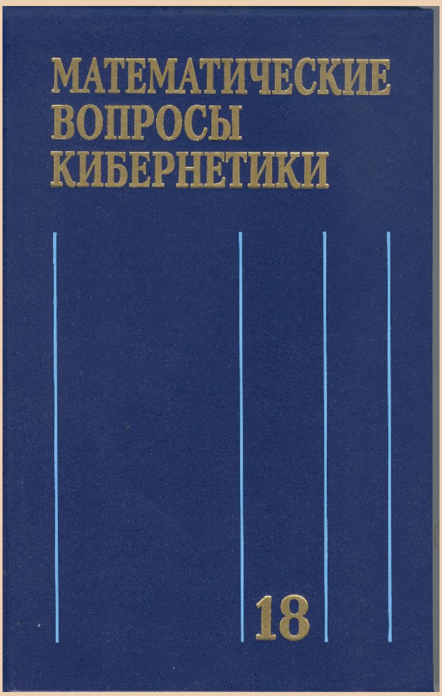

Е. В. Михайлец

О ранге неявных представлений функций k-значной логики над классом монотонных функций

О РАНГЕ НЕЯВНЫХ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ ФУНКЦИЙ k-ЗНАЧНОЙ ЛОГИКИ НАД КЛАССОМ МОНОТОННЫХ ФУНКЦИЙ *)

Е. В. МИХАЙЛЕЦ

(МОСКВА)

Понятие неявной выразимости функций k-значной логики введено А. В. Кузнецовым как одно из обобщений понятия выразимости функций суперпозициями [2].

Пусть A — произвольная система функций k-значной логики, $A \subseteq P_k$. *Системой неявных уравнений* над системой функций A будем называть всякую систему уравнений вида

$$\begin{cases} \Phi_1(x_1, \ldots, x_n, y) = \Psi_1(x_1, \ldots, x_n, y), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \Phi_q(x_1, \ldots, x_n, y) = \Psi_q(x_1, \ldots, x_n, y), \end{cases} \tag{1}$$

где $\Phi_1, \ldots, \Phi_q$, $\Psi_1, \ldots, \Psi_q$ — или некоторые формулы над системой функций A, содержащие символы переменных $x_1, \ldots, x_n, y$ (возможно, не все) или сами символы указанных переменных.

Говорят, что функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ k-значной логики *неявно выразима* над системой функций A, если существует система неявных уравнений над A вида (1), имеющая при любых фиксированных значениях $x_1, \ldots, x_n$ единственное решение $y = f(x_1, \ldots, x_n)$. При этом соответствующую систему уравнений называют *неявным представлением* функции $f(x_1, \ldots, x_n)$ над A.

Множество всех функций f, $f \in P_k$, неявно выразимых над системой функций A, называется *неявным расширением* системы A и обозначается через $I(A)$. Благодаря очевидному соотношению $I(A) = I([A])$, где $[A]$ обозначает замыкание по суперпозиции, при исследовании неявных расширений можно ограничиться рассмотрением только замкнутых относительно суперпозиции классов функций k-значной логики. Соответственно без ограничения общности можно рассматривать только такие неявные представления вида (1), в которых все Φ_i, Ψ_i являются функциями из замыкания $[A \cup \{x\}]$.

Если любая функция k-значной логики неявно выразима над A, т. е. $I(A) = P_k$, то систему функций A называют *неявно полной* в P_k.

*) Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 08–01–00863), Программы поддержки ведущих научных школ РФ (проект НШ-4470.2008.1) и Программы фундаментальных исследований ОМН РАН «Алгебраические и комбинаторные методы математической кибернетики» (проект «Синтез и сложность управляющих систем»).

Рассмотрим произвольную функцию f из неявного расширения некоторой системы A функций k-значной логики, $f \in I(A)$. Назовем *рангом* функции f над системой A и будем обозначать через $m_A^k(f)$ наименьшее число уравнений, достаточное для построения неявного представления f над A.

Введем функцию Шеннона $m_A^k(n) = \max m_A^k(f)$, которую будем называть *ранговой функцией* системы A (максимум берется по всем функциям k-значной логики, принадлежащим неявному расширению системы A и существенно зависящим не более чем от n переменных).

Подробнее об этих и других используемых в работе понятиях см. [1–3].

О.М. Касим-Заде в работе [1] исследовал поведение ранговой функции $m_A^2(n)$ для всех замкнутых классов булевых функций. Для классов D_2 и F_i^{μ}, где $i = 2, 3, 6, 7$ и $\mu = 2, 3, \ldots, \infty$, в работе [1] получены порядки роста величины $m_A^2(n)$. Для всех остальных замкнутых классов найден точный вид ранговой функции. В частности, для класса монотонных булевых функций О. М. Касим-Заде доказал следующую теорему.

Теорема 1. *Для ранговой функции $m_A^2(n)$ класса A всех монотонных функций в P_2 при всех натуральных n имеет место равенство*

$$m_A^2(n) = \left\lceil \frac{n+2}{2} \right\rceil .$$

При $k \geqslant 3$ ближайшим аналогом класса монотонных булевых функций является класс всех функций в P_k, монотонных относительно стандартного линейного порядка. В настоящей работе получено явное выражение для ранговой функции указанного класса монотонных функций P_k. Оказывается, ранговая функция для данного класса не зависит от k и при любых натуральных $k \geqslant 2$ определяется формулой из теоремы 1.

Будем считать, что множество E_k, $E_k = \{0, 1, \ldots, k-1\}$, естественным образом линейно упорядочено: $0 < 1 < \ldots < k-1$. Множество всех n-разрядных наборов $\sigma = (\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$, таких, что $\sigma_i \in E_k$, $1 \leqslant i \leqslant n$, будем обозначать через E_k^n.

В данной работе будем называть функцию $f(x_1, \ldots, x_n)$ k-значной логики *монотонной*, если для любых наборов $\widetilde{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ и $\widetilde{\beta} = (\beta_1, \ldots, \beta_n)$, $\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta} \in E_k^n$, таких, что $\widetilde{\alpha} \leqslant \widetilde{\beta}$, выполняется неравенство $f(\widetilde{\alpha}) \leqslant f(\widetilde{\beta})$.

Известно, что при любом k, $k \geqslant 2$, рассматриваемый класс монотонных функций является неявно полным в P_k.

Весом набора $\widetilde{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, $\widetilde{\alpha} \in E_k^n$, будем называть сумму его компонент (как целых чисел) и обозначать эту величину через $|\widetilde{\alpha}|$, $|\widetilde{\alpha}| = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i$.

Вес l любого набора из E_k^n удовлетворяет неравенствам $0 \leqslant l \leqslant n(k-1)$.

Будем называть *l-м слоем* в E_k^n множество всех n-разрядных наборов $\widetilde{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, $\widetilde{\alpha} \in E_k^n$, имеющих вес l.

Будем говорить, что набор $\widetilde{\alpha}' = (\alpha_1', \ldots, \alpha_n')$ *непосредственно предшествует* набору $\widetilde{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, где $\widetilde{\alpha}', \widetilde{\alpha} \in E_k^n$, если он совпадает с набором $\widetilde{\alpha}$ во всех компонентах, кроме одной, которая меньше соответствующей компоненты набора $\widetilde{\alpha}$ на единицу, или, другими словами, существует номер i, $1 \leqslant i \leqslant n$, такой, что $\alpha_i' = \alpha_i - 1$ и $\alpha_j' = \alpha_j$ при $1 \leqslant j \leqslant n$, $j \neq i$. Также говорят, что $\widetilde{\alpha}'$ и $\widetilde{\alpha}$ являются *соседними* наборами.

Теорема 2. *При любом натуральном $k \geqslant 2$ для ранговой функции $m_A^k(n)$ класса A всех монотонных функций в P_k при всех натуральных n имеет место равенство*

$$m_A^k(n) = \left\lceil \frac{n+2}{2} \right\rceil .$$

Доказательство. Доказательство теоремы разбивается на две части: получение верхней и нижней оценки для ранговой функции.

Докажем сначала верхнюю оценку. Рассмотрим произвольную систему неявных уравнений над A вида:

$$\begin{cases} \varphi_1(x_1,\ldots,x_n,y)=\psi_1(x_1,\ldots,x_n,y), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \varphi_q(x_1,\ldots,x_n,y)=\psi_q(x_1,\ldots,x_n,y), \end{cases}$$

где $\varphi_1,\ldots,\varphi_q,\psi_1,\ldots,\psi_q$ — некоторые монотонные функции.

Каждому $(n+1)$-разрядному набору $(\widetilde{\alpha},\beta)=(\alpha_1,\ldots,\alpha_n,\beta)$ соответствуют два q-разрядных набора значений: $\Phi(\widetilde{\alpha},\beta)=(\varphi_1(\widetilde{\alpha},\beta),\ldots,\varphi_q(\widetilde{\alpha},\beta))$, $\Psi(\widetilde{\alpha},\beta)=(\psi_1(\widetilde{\alpha},\beta),\ldots,\psi_q(\widetilde{\alpha},\beta))$. Тем самым заданы две $(n+1,q)$-*вектор-функции* $\Phi(\widetilde{x},y)$ и $\Psi(\widetilde{x},y)$.

При этом вектор-функции $\Phi(\widetilde{x},y)$ и $\Psi(\widetilde{x},y)$ монотонны в следующем смысле: если $(\widetilde{\alpha},\beta)\leqslant(\widetilde{\gamma},\delta)$, где $(\widetilde{\alpha},\beta),(\widetilde{\gamma},\delta)\in E_k^{n+1}$, то для каждого i, $1\leqslant i\leqslant q$, выполняются соотношения $\varphi_i(\widetilde{\alpha},\beta)\leqslant\varphi_i(\widetilde{\gamma},\delta)$ и $\psi_i(\widetilde{\alpha},\beta)\leqslant\psi_i(\widetilde{\gamma},\delta)$.

Пусть $f(x_1,\ldots,x_n)$ — произвольная функция от n переменных в P_k. Наборы вида $(\widetilde{\alpha},f(\widetilde{\alpha}))$ из куба E_k^{n+1} будем называть *точками графика* функции f.

Опишем способ, которым мы будем задавать систему уравнений в монотонных функциях, реализующую функцию f. Зафиксируем некоторое достаточно большое натуральное число m (более точно о выборе числа m будет сказано позже). Достаточно задать вектор-функции $\Phi(\widetilde{x},y)$ и $\Psi(\widetilde{x},y)$, действующие из E_k^{n+1} в E_k^m, монотонные и удовлетворяющие следующим условиям. В точках графика функции f должно выполняться равенство $\Phi(\widetilde{\alpha},f(\widetilde{\alpha}))=\Psi(\widetilde{\alpha},f(\widetilde{\alpha}))$, а в остальных точках $(\widetilde{\alpha},\beta)$, $(\widetilde{\alpha},\beta)\in E_k^{n+1}$, для которых $\beta\neq f(\widetilde{\alpha})$, — неравенство $\Phi(\widetilde{\alpha},\beta)\neq\Psi(\widetilde{\alpha},\beta)$. Тогда система $\Phi(\widetilde{x},y)=\Psi(\widetilde{x},y)$, состоящая из m уравнений, задает неявное представление функции f над A.

В кубе E_k^m зафиксируем некоторую максимальную цепь Σ_m. Она имеет длину $m(k-1)$. Обозначим наборы этой цепи следующим образом:

$$\widetilde{0}=\widetilde{\sigma}_0\leqslant\widetilde{\sigma}_1\leqslant\ldots\leqslant\widetilde{\sigma}_{m(k-1)}=\widetilde{(k-1)}.$$

Здесь $\widetilde{(k-1)}$ обозначает набор, все компоненты которого одинаковы и равны $k-1$, и для любого i, $0\leqslant i\leqslant m(k-1)$, имеет место равенство $|\widetilde{\sigma}_i|=i$.

Далее, для любой функции $f(\widetilde{x})$ из P_k зададим вектор-функции $\Phi(\widetilde{x},y)$ и $\Psi(\widetilde{x},y)$ таким образом, чтобы они принимали только значения, которые принадлежат цепи Σ_m, т. е. значения $\widetilde{\sigma}_i$, $0\leqslant i\leqslant m(k-1)$.

Будем задавать $\Phi(\widetilde{x},y)$ и $\Psi(\widetilde{x},y)$ индуктивно, проводя индукцию по номеру слоя в кубе E_k^{n+1}. Для удобства записи введем вспомогательные вектор-функции $\Phi'(\widetilde{x},y)$ и $\Psi'(\widetilde{x},y)$, действующие из E_k^{n+1} в E_k^m. Зададим их также индуктивно. В нулевом слое куба E_k^{n+1} содержится единственный набор $(\widetilde{0},0)$. Положим

$$\Phi'(\widetilde{0},0)=\Psi'(\widetilde{0},0)=\widetilde{\sigma}_0.$$

Далее положим

$$\begin{cases} \Phi(\widetilde{0},0)=\Phi'(\widetilde{0},0), \\ \Psi(\widetilde{0},0)=\begin{cases} \Psi'(\widetilde{0},0), & \text{если } f(\widetilde{0})=0, \\ \widetilde{\sigma}_1 & \text{в противном случае.} \end{cases} \end{cases}$$

Пусть на наборах l-го слоя куба E_k^{n+1}, $0 \leqslant l \leqslant (n+1)(k-1)-1$, значения вектор-функций $\Phi(\widetilde{x}, y)$ и $\Psi(\widetilde{x}, y)$ уже заданы. Зададим их значения на наборах $(l+1)$-го слоя.

Рассмотрим набор $(\widetilde{\alpha}, \beta)$, принадлежащий $(l+1)$-му слою куба E_k^{n+1}. Зададим сначала значения $\Phi'(\widetilde{\alpha}, \beta)$ и $\Psi'(\widetilde{\alpha}, \beta)$. Положим $\Phi'(\widetilde{\alpha}, \beta)$ равным максимуму значений вектор-функции $\Phi(\widetilde{x}, y)$ по всем наборам, непосредственно предшествующим набору $(\widetilde{\alpha}, \beta)$. Аналогично, $\Psi'(\widetilde{\alpha}, \beta)$ положим равным максимуму значений вектор-функции $\Psi(\widetilde{x}, y)$ по всем наборам, непосредственно предшествующим набору $(\widetilde{\alpha}, \beta)$.

Другими словами, для любого набора $(\widetilde{\alpha}, \beta)$, принадлежащего $(l+1)$-му слою куба E_k^{n+1}, $0 \leqslant l \leqslant (n+1)(k-1)-1$, положим $\Phi'(\widetilde{\alpha}, \beta) = \max \Phi(\widetilde{\alpha}', \beta')$, $\Psi'(\widetilde{\alpha}, \beta) = \max \Psi(\widetilde{\alpha}', \beta')$, где оба максимума берутся по всем наборам $(\widetilde{\alpha}', \beta')$, непосредственно предшествующим набору $(\widetilde{\alpha}, \beta)$.

Из способа задания легко видеть, что $\Phi(\widetilde{x}, y)$ и $\Psi(\widetilde{x}, y)$ принимают значения только из множества наборов цепи Σ_m, следовательно, все значения вектор-функций $\Phi(\widetilde{x}, y)$ и $\Psi(\widetilde{x}, y)$ сравнимы между собой и взятие максимума по ним имеет смысл. Таким образом, вектор-функции $\Phi'(\widetilde{x}, y)$ и $\Psi'(\widetilde{x}, y)$ определены корректно.

Легко видеть, что заданные таким образом значения $\Phi'(\widetilde{\alpha}, \beta)$ и $\Psi'(\widetilde{\alpha}, \beta)$ принадлежат цепи Σ_m.

Пусть $\Phi'(\widetilde{\alpha}, \beta) = \widetilde{\sigma}_i$ для некоторого i, $0 \leqslant i \leqslant m(k-1)$.

В случае $\Phi'(\widetilde{\alpha}, \beta) = \Psi'(\widetilde{\alpha}, \beta)$ положим

$$\begin{cases} \Phi(\widetilde{\alpha}, \beta) = \Phi'(\widetilde{\alpha}, \beta), \\ \Psi(\widetilde{\alpha}, \beta) = \begin{cases} \Psi'(\widetilde{\alpha}, \beta), & \text{если } f(\widetilde{\alpha}) = \beta, \\ \widetilde{\sigma}_{i+1} & \text{в противном случае.} \end{cases} \end{cases}$$

В случае $\Phi'(\widetilde{\alpha}, \beta) \neq \Psi'(\widetilde{\alpha}, \beta)$ положим

$$\begin{cases} \Phi(\widetilde{\alpha}, \beta) = \begin{cases} \widetilde{\sigma}_{i+1}, & \text{если } f(\widetilde{\alpha}) = \beta, \\ \Phi'(\widetilde{\alpha}, \beta) & \text{в противном случае,} \end{cases} \\ \Psi(\widetilde{\alpha}, \beta) = \Psi'(\widetilde{\alpha}, \beta). \end{cases}$$

Таким образом последовательно задаются значения вектор-функций $\Phi(\widetilde{x}, y)$ и $\Psi(\widetilde{x}, y)$ на всех слоях куба E_k^{n+1}, начиная с нулевого слоя, состоящего из единственного набора $\widetilde{\sigma}_0 = \widetilde{0}$. На наборах одного слоя значения $\Phi(\widetilde{x}, y)$ и $\Psi(\widetilde{x}, y)$ задаются в произвольном порядке, при заполнении l-го слоя переходим к наборам $(l+1)$-го слоя и так далее, пока не зададим вектор-функции $\Phi(\widetilde{x}, y)$ и $\Psi(\widetilde{x}, y)$ на всем кубе E_k^{n+1}.

Если в индуктивном процессе на некотором этапе номер набора $\widetilde{\sigma}_i$, присваиваемого вектор-функции $\Phi(\widetilde{x}, y)$ или $\Psi(\widetilde{x}, y)$, окажется больше, чем $m(k-1)$, то возьмем в качестве m большее натуральное число и заново проведем построение $\Phi(\widetilde{x}, y)$ и $\Psi(\widetilde{x}, y)$. Из описанного построения видно, что во всех случаях найдется достаточно большое натуральное число m, при котором вектор-функции $\Phi(\widetilde{x}, y)$ и $\Psi(\widetilde{x}, y)$ будут определены корректно всюду в E_k^{n+1}.

Отметим несколько важных свойств вектор-функций $\Phi(\widetilde{x}, y)$ и $\Psi(\widetilde{x}, y)$.

Лемма 1. *Пусть $f(\widetilde{x})$ — произвольная функция от n переменных в P_k и $(\widetilde{\alpha}, \beta)$ — произвольный набор в E_k^{n+1}. Если $\beta = f(\widetilde{\alpha})$, т. е. набор $(\widetilde{\alpha}, \beta)$ является точкой графика функции $f(\widetilde{x})$, то $\Phi(\widetilde{\alpha}, \beta) = \Psi(\widetilde{\alpha}, \beta)$.*

Если $\beta \neq f(\widetilde{\alpha})$, то $\Phi(\widetilde{\alpha}, \beta) \neq \Psi(\widetilde{\alpha}, \beta)$. При этом найдется номер i, $0 \leqslant i \leqslant m(k-1)-1$, такой, что $\Phi(\widetilde{\alpha}, \beta) = \widetilde{\sigma}_i$, $\Psi(\widetilde{\alpha}, \beta) = \widetilde{\sigma}_{i+1}$.

Доказательство. При доказательстве леммы используем индукцию по номеру слоя в кубе E_k^{n+1}.

На нулевом наборе по определению при $f(\widetilde{0})=0$ выполняются равенства $\Phi(\widetilde{0},0)=\Psi(\widetilde{0},0)=\widetilde{\sigma}_0$, а при $f(\widetilde{0})\neq 0$ — равенства $\Phi(\widetilde{0},0)=\widetilde{\sigma}_0$, $\Psi(\widetilde{0},0)=\widetilde{\sigma}_1$. Следовательно, для нулевого слоя утверждение верно.

Допустим, что для наборов l-го слоя в E_k^{n+1}, $0\leqslant l\leqslant(n+1)(k-1)-1$, утверждение леммы верно. Докажем, что оно верно и для наборов $(l+1)$-го слоя.

Рассмотрим произвольный набор $(\widetilde{\alpha},\beta)$ $(l+1)$-го слоя. Пусть $(\widetilde{\alpha}',\beta')$ и $(\widetilde{\alpha}'',\beta'')$ — наборы, непосредственно предшествующие набору $(\widetilde{\alpha},\beta)$, такие что $\Phi(\widetilde{\alpha}',\beta')=\Phi'(\widetilde{\alpha},\beta)$, $\Psi(\widetilde{\alpha}'',\beta'')=\Psi'(\widetilde{\alpha},\beta)$. По предположению индукции $\Phi(\widetilde{\alpha}',\beta')\leqslant\Psi(\widetilde{\alpha}',\beta')$, т. е. $\Phi'(\widetilde{\alpha},\beta)\leqslant\Psi(\widetilde{\alpha}',\beta')$. Следовательно, $\Phi'(\widetilde{\alpha},\beta)\leqslant\Psi'(\widetilde{\alpha},\beta)$, так как $\Psi'(\widetilde{\alpha},\beta)$ есть максимум значений вектор-функции $\Psi(\widetilde{x},y)$ по всем наборам, непосредственно предшествующим $(\widetilde{\alpha},\beta)$.

По определению значения вектор-функций $\Phi'(\widetilde{x},y)$ и $\Psi'(\widetilde{x},y)$, а также вектор-функций $\Phi(\widetilde{x},y)$ и $\Psi(\widetilde{x},y)$ принадлежат цепи Σ_m.

Рассмотрим случай $\Phi'(\widetilde{\alpha},\beta)=\widetilde{\sigma}_{m(k-1)}$. Набор $\widetilde{\sigma}_{m(k-1)}$ является наибольшим набором цепи Σ_m, следовательно, $\Psi'(\widetilde{\alpha},\beta)\leqslant\widetilde{\sigma}_{m(k-1)}$, $\Phi(\widetilde{\alpha},\beta)\leqslant\widetilde{\sigma}_{m(k-1)}$, $\Psi(\widetilde{\alpha},\beta)\leqslant\widetilde{\sigma}_{m(k-1)}$. С другой стороны, по доказанному выше $\Psi'(\widetilde{\alpha},\beta)\geqslant\Phi'(\widetilde{\alpha},\beta)$ и по построению вектор-функций $\Phi(\widetilde{x},y)$ и $\Psi(\widetilde{x},y)$ $\Phi(\widetilde{\alpha},\beta)\geqslant\Phi'(\widetilde{\alpha},\beta)$, $\Psi(\widetilde{\alpha},\beta)\geqslant\Psi'(\widetilde{\alpha},\beta)$.

Отсюда получаем равенства $\Phi'(\widetilde{\alpha},\beta)=\Psi'(\widetilde{\alpha},\beta)=\widetilde{\sigma}_{m(k-1)}$ и $\Phi(\widetilde{\alpha},\beta)=\Psi(\widetilde{\alpha},\beta)=\widetilde{\sigma}_{m(k-1)}$. При построении вектор-функций $\Phi(\widetilde{x},y)$ и $\Psi(\widetilde{x},y)$ данные равенства могут возникнуть только в случае $\beta=f(\widetilde{\alpha})$, что соответствует утверждению леммы.

Пусть $\Phi'(\widetilde{\alpha},\beta)=\widetilde{\sigma}_i$ для некоторого i, $0\leqslant i\leqslant m(k-1)-1$. Из доказанного выше следует $\Psi'(\widetilde{\alpha},\beta)\geqslant\widetilde{\sigma}_i$. С другой стороны, из определения вектор-функции $\Phi'(\widetilde{x},y)$ вытекает неравенство $\Phi(\widetilde{\alpha}'',\beta'')\leqslant\Phi'(\widetilde{\alpha},\beta)$, т. е. выполняется $\Phi(\widetilde{\alpha}'',\beta'')\leqslant\widetilde{\sigma}_i$. Отсюда, используя предположение индукции, получаем $\Psi(\widetilde{\alpha}'',\beta'')\leqslant\widetilde{\sigma}_{i+1}$.

Таким образом, если $\Phi'(\widetilde{\alpha},\beta)=\widetilde{\sigma}_i$, то $\widetilde{\sigma}_i\leqslant\Psi'(\widetilde{\alpha},\beta)\leqslant\widetilde{\sigma}_{i+1}$.

Если $f(\widetilde{\alpha})=\beta$, то по определению при $\Phi'(\widetilde{\alpha},\beta)=\Psi'(\widetilde{\alpha},\beta)$ имеем $\Phi(\widetilde{\alpha},\beta)=\Phi'(\widetilde{\alpha},\beta)$, $\Psi(\widetilde{\alpha},\beta)=\Psi'(\widetilde{\alpha},\beta)$, т. е. $\Phi(\widetilde{\alpha},\beta)=\Psi(\widetilde{\alpha},\beta)$.

Пусть $\Phi'(\widetilde{\alpha},\beta)\neq\Psi'(\widetilde{\alpha},\beta)$. В этом случае $\Phi'(\widetilde{\alpha},\beta)=\widetilde{\sigma}_i$, $\Psi'(\widetilde{\alpha},\beta)=\widetilde{\sigma}_{i+1}$. Тогда по определению $\Phi(\widetilde{\alpha},\beta)=\widetilde{\sigma}_{i+1}$, $\Psi(\widetilde{\alpha},\beta)=\Psi'(\widetilde{\alpha},\beta)$, откуда вытекает равенство $\Phi(\widetilde{\alpha},\beta)=\Psi(\widetilde{\alpha},\beta)$.

Теперь рассмотрим случай $f(\widetilde{\alpha})\neq\beta$. В соответствии с определением при $\Phi'(\widetilde{\alpha},\beta)=\Psi'(\widetilde{\alpha},\beta)$ верны равенства $\Phi(\widetilde{\alpha},\beta)=\Phi'(\widetilde{\alpha},\beta)=\widetilde{\sigma}_i$, $\Psi(\widetilde{\alpha},\beta)=\widetilde{\sigma}_{i+1}$.

Если $\Phi'(\widetilde{\alpha},\beta)\neq\Psi'(\widetilde{\alpha},\beta)$, то по определению $\Phi(\widetilde{\alpha},\beta)=\Phi'(\widetilde{\alpha},\beta)$, $\Psi(\widetilde{\alpha},\beta)=\Psi'(\widetilde{\alpha},\beta)$, что в силу доказанного выше означает выполнение равенств $\Phi(\widetilde{\alpha},\beta)=\widetilde{\sigma}_i$, $\Psi(\widetilde{\alpha},\beta)=\widetilde{\sigma}_{i+1}$. Лемма 1 доказана.

Лемма 2. *Построенные описанным способом вектор-функции* $\Phi(\widetilde{x},y)=(\varphi_1(\widetilde{x},y),\ldots,\varphi_m(\widetilde{x},y))$ *и* $\Psi(\widetilde{x},y)=(\psi_1(\widetilde{x},y),\ldots,\psi_m(\widetilde{x},y))$ *задают неявное представление функции* $f(\widetilde{x})$ *над классом* A *монотонных функций в* P_k, *имеющее вид:*

$$\begin{cases}\varphi_1(\widetilde{x},y)=\psi_1(\widetilde{x},y),\\ \dots\dots\dots\dots\dots\\ \varphi_m(\widetilde{x},y)=\psi_m(\widetilde{x},y).\end{cases}\tag{2}$$

Доказательство. Докажем монотонность вектор-функций $\Phi(\widetilde{x},y)$ и $\Psi(\widetilde{x},y)$.

Рассмотрим два произвольных набора $(\widetilde{\alpha},\beta)$ и $(\widetilde{\gamma},\delta)$ в кубе E_k^{n+1}, удовлетворяющие условию $(\widetilde{\alpha},\beta)\leqslant(\widetilde{\gamma},\delta)$. Если наборы $(\widetilde{\alpha},\beta)$ и $(\widetilde{\gamma},\delta)$ — соседние, то $\Phi(\widetilde{\alpha},\beta)\leqslant\Phi(\widetilde{\gamma},\delta)$ и $\Psi(\widetilde{\alpha},\beta)\leqslant\Psi(\widetilde{\gamma},\delta)$ по построению.

Пусть $(\widetilde{\alpha},\beta)$ и $(\widetilde{\gamma},\delta)$ не являются соседними, тогда построим цепочку последовательно возрастающих соседних наборов, соединяющих наборы $(\widetilde{\alpha},\beta)$

и $(\widetilde{\gamma}, \delta)$:

$$(\widetilde{\alpha}, \beta) = \widetilde{\tau}_0 \leqslant \widetilde{\tau}_1 \leqslant \ldots \leqslant \widetilde{\tau}_s = (\widetilde{\gamma}, \delta)$$

(здесь $\widetilde{\tau}_j$ и $\widetilde{\tau}_{j+1}$ — соседние для любого j, $0 \leqslant j \leqslant s-1$).

По определению вектор-функций $\Phi(\widetilde{x}, y)$ и $\Psi(\widetilde{x}, y)$ справедливы неравенства $\Phi(\widetilde{\tau}_j) \leqslant \Phi(\widetilde{\tau}_{j+1})$ и $\Psi(\widetilde{\tau}_j) \leqslant \Psi(\widetilde{\tau}_{j+1})$ для любого j, $0 \leqslant j \leqslant s-1$. Следовательно, $\Phi(\widetilde{\alpha}, \beta) \leqslant \Phi(\widetilde{\gamma}, \delta)$ и $\Psi(\widetilde{\alpha}, \beta) \leqslant \Psi(\widetilde{\gamma}, \delta)$.

Для того чтобы система (2) была неявным представлением функции $f(\widetilde{x})$, достаточно, чтобы в точках графика функции $f(\widetilde{x})$ выполнялось равенство $\Phi(\widetilde{x}, y) = \Psi(\widetilde{x}, y)$, а в остальных точках куба E_k^{n+1} — неравенство $\Phi(\widetilde{x}, y) \neq \Psi(\widetilde{x}, y)$. Но это непосредственно следует из леммы 1. Лемма 2 доказана.

Стоит отметить, что с помощью леммы 2 попутно доказана неявная полнота класса A монотонных функций в P_k при любом $k \geqslant 2$.

Для каждого l, $0 \leqslant l \leqslant (n+1)(k-1)$, положим $\Phi_{\max}(l) = \max \Phi(\widetilde{\alpha}, \beta)$, где максимум берется по всем наборам $\widetilde{\alpha}, \beta$, принадлежащим l-му слою куба E_k^{n+1}. Соответственно $\Psi_{\max}(l) = \max \Psi(\widetilde{\alpha}, \beta)$ по всем наборам $\widetilde{\alpha}, \beta$, принадлежащим l-му слою куба E_k^{n+1}. Величины $\Phi_{\max}(l)$ и $\Psi_{\max}(l)$ будем рассматривать как значения $(1, m)$-вектор-функции от переменной l, $l \in E_k$. Докажем несколько важных соотношений для вектор-функций $\Phi_{\max}(l)$ и $\Psi_{\max}(l)$.

Л е м м а 3. *Для любого l, $1 \leqslant l \leqslant (n+1)(k-1)$, имеют место неравенства*

$$|\Phi_{\max}(l-1)| \leqslant |\Phi_{\max}(l)| \leqslant |\Phi_{\max}(l-1)| + 1,$$
$$|\Psi_{\max}(l-1)| \leqslant |\Psi_{\max}(l)| \leqslant |\Psi_{\max}(l-1)| + 1.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Проведем доказательство для вектор-функции $\Phi_{\max}(l)$.

Допустим, что для некоторого l, $1 \leqslant l \leqslant (n+1)(k-1)$, выполняется

$$|\Phi_{\max}(l-1)| > |\Phi_{\max}(l)|.$$

Пусть $(\widetilde{\alpha}', \beta')$ — набор $(l-1)$-го слоя куба E_k^{n+1}, на котором достигается равенство $\Phi(\widetilde{\alpha}', \beta') = \Phi_{\max}(l-1)$. Очевидно, что на l-м слое куба E_k^{n+1} найдется набор $(\widetilde{\alpha}'', \beta'')$, для которого $(\widetilde{\alpha}', \beta')$ является непосредственно предшествующим набором. В силу монотонности вектор-функции $\Phi(\widetilde{x}, y)$ выполняется неравенство $\Phi(\widetilde{\alpha}'', \beta'') \geqslant \Phi(\widetilde{\alpha}', \beta')$ и, следовательно, неравенство $|\Phi(\widetilde{\alpha}'', \beta'')| \geqslant |\Phi(\widetilde{\alpha}', \beta')|$.

Таким образом, для набора $(\widetilde{\alpha}'', \beta'')$ l-го слоя выполняется соотношение $|\Phi(\widetilde{\alpha}'', \beta'')| > |\Phi_{\max}(l)|$. Приходим к противоречию с определением вектор-функции $\Phi_{\max}(l)$. Следовательно, для любого l, $1 \leqslant l \leqslant (n+1)(k-1)$, справедливо неравенство

$$|\Phi_{\max}(l-1)| \leqslant |\Phi_{\max}(l)|.$$

Допустим, что для некоторого l, $1 \leqslant l \leqslant (n+1)(k-1)$, выполняется

$$|\Phi_{\max}(l)| > |\Phi_{\max}(l-1)| + 1.$$

Рассмотрим набор $(\widetilde{\alpha}, \beta)$ l-го слоя куба E_k^{n+1}, на котором достигается равенство $\Phi(\widetilde{\alpha}, \beta) = \Phi_{\max}(l)$. Для некоторого i, $0 \leqslant i \leqslant m(k-1)$, имеем $\Phi(\widetilde{\alpha}, \beta) = \widetilde{\sigma}_i$, так как значения вектор-функции $\Phi(\widetilde{x}, y)$ принадлежат цепи Σ_m.

Для $(\widetilde{\alpha}, \beta)$ найдется непосредственно предшествующий набор $(\widetilde{\alpha}', \beta')$ такой, что $\Phi(\widetilde{\alpha}', \beta') = \Phi'(\widetilde{\alpha}, \beta)$. Из определения вектор-функции $\Phi(\widetilde{x}, y)$ следует, что $\Phi'(\widetilde{\alpha}, \beta)$ либо совпадает с $\Phi(\widetilde{\alpha}, \beta)$, либо принимает непосредственно предшествующее значение из цепи Σ_m. Отсюда вытекает неравенство

$\Phi'(\widetilde{\alpha}, \beta) \geqslant \widetilde{\sigma}_{i-1}$ при $i \neq 0$ и неравенство $\Phi'(\widetilde{\alpha}, \beta) \geqslant \widetilde{\sigma}_0$ при $i = 0$. Следовательно, $|\Phi(\widetilde{\alpha}', \beta')| \geqslant |\Phi(\widetilde{\alpha}, \beta)| - 1$.

Получаем, что для набора $(\widetilde{\alpha}', \beta')$ $(l-1)$-го слоя куба E_k^{n+1} имеет место соотношение $|\Phi(\widetilde{\alpha}', \beta')| > |\Phi_{\max}(l-1)|$, что невозможно в силу определения вектор-функции $\Phi_{\max}(l)$. Приходим к противоречию.

Таким образом, для всех l, $1 \leqslant l \leqslant (n+1)(k-1)$, выполняется неравенство

$$|\Phi_{\max}(l)| \leqslant |\Phi_{\max}(l-1)| + 1.$$

Утверждение леммы для вектор-функции $\Psi_{\max}(l)$ доказывается аналогично. Лемма 3 доказана.

Лемма 4. *Для любого l, $0 \leqslant l \leqslant (n+1)(k-1)$, имеет место соотношение*

$$|\Phi_{\max}(l)| \leqslant |\Psi_{\max}(l)| \leqslant |\Phi_{\max}(l)| + 1.$$

Доказательство. Из леммы 1 непосредственно вытекает следующий факт: для любого набора $(\widetilde{\alpha}, \beta) \in E_k^{n+1}$

$$|\Phi(\widetilde{\alpha}, \beta)| \leqslant |\Psi(\widetilde{\alpha}, \beta)| \leqslant |\Phi(\widetilde{\alpha}, \beta)| + 1. \tag{3}$$

Зафиксируем некоторое l, $0 \leqslant l \leqslant (n+1)(k-1)$. Рассмотрим набор $(\widetilde{\alpha}', \beta')$, принадлежащий l-му слою куба E_k^{n+1} такой, что $\Phi(\widetilde{\alpha}', \beta') = \Phi_{\max}(l)$. Из соотношения (3) следует $|\Phi(\widetilde{\alpha}', \beta')| \leqslant |\Psi(\widetilde{\alpha}', \beta')|$. В то же время из определения вектор-функции $\Psi_{\max}(l)$ вытекает неравенство $|\Psi(\widetilde{\alpha}', \beta')| \leqslant |\Psi_{\max}(l)|$. Следовательно, $|\Phi_{\max}(l)| \leqslant |\Psi_{\max}(l)|$.

Теперь рассмотрим набор $(\widetilde{\alpha}'', \beta'')$ l-го слоя куба E_k^{n+1} такой, что $\Phi(\widetilde{\alpha}'', \beta'') = \Psi_{\max}(l)$. Из (3) вытекает $|\Psi(\widetilde{\alpha}'', \beta'')| \leqslant |\Phi(\widetilde{\alpha}'', \beta'')| + 1$. Учитывая, что $|\Phi(\widetilde{\alpha}'', \beta'')| \leqslant |\Phi_{\max}(l)|$, получаем $|\Psi_{\max}(l)| \leqslant |\Phi_{\max}(l)| + 1$. Лемма 4 доказана.

Из леммы 3 следует, что при переходе с $(l-1)$-го на l-й слой куба E_k^{n+1}, $1 \leqslant l \leqslant (n+1)(k-1)$, значения $|\Phi_{\max}(l-1)|$ и $|\Psi_{\max}(l-1)|$ увеличиваются не более, чем на единицу. Еще одним важным свойством функций $|\Phi_{\max}(l)|$ и $|\Psi_{\max}(l)|$ является то, что при увеличении номера слоя на единицу значения $|\Phi_{\max}(l)|$ и $|\Psi_{\max}(l)|$ не могут одновременно возрасти на единицу, т. е. имеет место следующее утверждение.

Лемма 5. *Для любого l, $1 \leqslant l \leqslant (n+1)(k-1)$, из равенства $|\Phi_{\max}(l)| = |\Phi_{\max}(l-1)| + 1$ следует равенство*

$$|\Psi_{\max}(l)| = |\Psi_{\max}(l-1)|.$$

В свою очередь, из равенства $|\Psi_{\max}(l)| = |\Psi_{\max}(l-1)| + 1$ вытекает

$$|\Phi_{\max}(l)| = |\Phi_{\max}(l-1)|.$$

Доказательство. Зафиксируем l, $1 \leqslant l \leqslant (n+1)(k-1)$. Сначала докажем, что в l-м слое куба E_k^{n+1} найдется такой набор $(\widetilde{\alpha}, \beta)$, что $\Phi(\widetilde{\alpha}, \beta) = \Phi_{\max}(l)$, $\Psi(\widetilde{\alpha}, \beta) = \Psi_{\max}(l)$.

Рассмотрим все наборы l-го слоя, на которых вектор-функция $\Phi(\widetilde{x}, y)$ равна $\Phi_{\max}(l)$. Выберем среди них набор $(\widetilde{\alpha}, \beta)$, на котором $\Psi(\widetilde{x}, y)$ принимает наибольшее значение. Покажем, что $\Psi(\widetilde{\alpha}, \beta) = \Psi_{\max}(l)$.

Допустим, что $\Psi(\widetilde{\alpha}, \beta) < \Psi_{\max}(l)$. По лемме 1 $\Phi_{\max}(l) = \Phi(\widetilde{\alpha}, \beta) \leqslant \Psi(\widetilde{\alpha}, \beta)$, следовательно, $|\Phi_{\max}(l)| < |\Psi_{\max}(l)|$. В силу леммы 4 это означает, что $|\Psi_{\max}(l)| = |\Phi_{\max}(l)| + 1$. Рассмотрим набор $(\widetilde{\gamma}, \delta)$ l-го слоя, для которого $\Psi(\widetilde{\gamma}, \delta) = \Psi_{\max}(l)$. По лемме 1 имеет место неравенство $|\Psi(\widetilde{\gamma}, \delta)| \leqslant |\Phi(\widetilde{\gamma}, \delta)| + 1$, из которого вытекает, что $|\Phi_{\max}(l)| + 1 \leqslant |\Phi(\widetilde{\gamma}, \delta)| + 1$. Отсюда и из определения вектор-функции $\Phi_{\max}(l)$ следует равенство $|\Phi(\widetilde{\gamma}, \delta)| = |\Phi_{\max}(l)|$.

Вектор-функции $\Phi(\widetilde{x}, y)$ и $\Phi_{\max}(l)$ принимают значения в множестве наборов цепи Σ_m в E_k^m, т. е. любые их значения попарно сравнимы между собой как наборы. Следовательно, равенство $|\Phi(\widetilde{\gamma}, \delta)| = |\Phi_{\max}(l)|$ влечет равенство $\Phi(\widetilde{\gamma}, \delta) = \Phi_{\max}(l)$, откуда в силу выбора набора $(\widetilde{\alpha}, \beta)$ вытекает неравенство $\Psi(\widetilde{\alpha}, \beta) \geqslant \Psi(\widetilde{\gamma}, \delta) = \Psi_{\max}(l)$. Пришли к противоречию с предположением $\Psi(\widetilde{\alpha}, \beta) < \Psi_{\max}(l)$.

Таким образом, в l-м слое куба E_k^{n+1} найдется набор $(\widetilde{\alpha}, \beta)$ такой, что $\Phi(\widetilde{\alpha}, \beta) = \Phi_{\max}(l)$, $\Psi(\widetilde{\alpha}, \beta) = \Psi_{\max}(l)$.

Пусть для некоторого l, $1 \leqslant l \leqslant (n+1)(k-1)$, выполняется условие леммы

$$|\Phi_{\max}(l)| = |\Phi_{\max}(l-1)| + 1. \tag{4}$$

Докажем, что в этом случае $|\Psi_{\max}(l)| = |\Psi_{\max}(l-1)|$.

Рассмотрим набор $(\widetilde{\alpha}, \beta)$ l-го слоя куба E_k^m, для которого

$$\begin{cases} \Phi(\widetilde{\alpha}, \beta) = \Phi_{\max}(l), \\ \Psi(\widetilde{\alpha}, \beta) = \Psi_{\max}(l). \end{cases} \tag{5}$$

Легко видеть, что

$$\Phi'(\widetilde{\alpha}, \beta) \leqslant \Phi_{\max}(l-1), \tag{6}$$

так как $\Phi_{\max}(l-1)$ есть максимум значений вектор-функции $\Phi(\widetilde{x}, y)$ по всем наборам $(l-1)$-го слоя в кубе E_k^{n+1}, а $\Phi'(\widetilde{\alpha}, \beta)$ — максимум значений $\Phi(\widetilde{x}, y)$ лишь по тем наборам $(l-1)$-го слоя, которые непосредственно предшествуют набору $(\widetilde{\alpha}, \beta)$.

Аналогично,

$$\Psi'(\widetilde{\alpha}, \beta) \leqslant \Psi_{\max}(l-1). \tag{7}$$

Из (4), (5) и (6) следует неравенство

$$|\Phi(\widetilde{\alpha}, \beta)| \geqslant |\Phi'(\widetilde{\alpha}, \beta)| + 1.$$

С другой стороны, из определения вектор-функции $\Phi(\widetilde{x}, y)$ вытекают соотношения

$$|\Phi'(\widetilde{\alpha}, \beta)| \leqslant |\Phi(\widetilde{\alpha}, \beta)| \leqslant |\Phi'(\widetilde{\alpha}, \beta)| + 1.$$

Таким образом,

$$|\Phi(\widetilde{\alpha}, \beta)| = |\Phi'(\widetilde{\alpha}, \beta)| + 1.$$

По определению вектор-функций $\Phi(\widetilde{x}, y)$ и $\Psi(\widetilde{x}, y)$ в случае, если $\Phi(\widetilde{\alpha}, \beta) \neq \Phi'(\widetilde{\alpha}, \beta)$, справедливо равенство

$$\Psi(\widetilde{\alpha}, \beta) = \Psi'(\widetilde{\alpha}, \beta). \tag{8}$$

Далее, из (5), (7) и (8) следует неравенство

$$|\Psi_{\max}(l)| \leqslant |\Psi_{\max}(l-1)|. \tag{9}$$

С другой стороны, по лемме 3 имеем

$$|\Psi_{\max}(l)| \geqslant |\Psi_{\max}(l-1)|. \tag{10}$$

Объединяя результаты (9) и (10), получаем

$$|\Psi_{\max}(l)| = |\Psi_{\max}(l-1)|,$$

что и требовалось доказать.

Доказательство того, что из равенства $|\Psi_{\max}(l)| = |\Psi_{\max}(l-1)| + 1$ следует $|\Phi_{\max}(l)| = |\Phi_{\max}(l-1)|$, проводится аналогично. Лемма 5 доказана.

Далее докажем основную лемму, используемую при выводе верхней оценки.

Лемма 6. *Для любого* l, $2 \leqslant l \leqslant (n+1)(k-1)$, *имеют место неравенства*

$$|\Phi_{\max}(l)| \leqslant |\Phi_{\max}(l-2)| + 1,$$
$$|\Psi_{\max}(l)| \leqslant |\Psi_{\max}(l-2)| + 1.$$

Доказательство. Будем рассуждать от противного. Допустим, что для некоторого l, $2 \leqslant l \leqslant (n+1)(k-1)$, выполняется неравенство

$$|\Phi_{\max}(l)| \geqslant |\Phi_{\max}(l-2)| + 2. \tag{11}$$

Из леммы 3 следует, что

$$|\Phi_{\max}(l)| \leqslant |\Phi_{\max}(l-1)| + 1,$$
$$|\Phi_{\max}(l-1)| \leqslant |\Phi_{\max}(l-2)| + 1.$$

В силу предположения (11) данные соотношения обращаются в равенства

$$|\Phi_{\max}(l)| = |\Phi_{\max}(l-1)| + 1,$$
$$|\Phi_{\max}(l-1)| = |\Phi_{\max}(l-2)| + 1.$$

Отсюда по лемме 5 получаем, что

$$|\Psi_{\max}(l)| = |\Psi_{\max}(l-1)|,$$
$$|\Psi_{\max}(l-1)| = |\Psi_{\max}(l-2)|.$$

Таким образом, имеют место соотношения

$$|\Phi_{\max}(l)| = |\Phi_{\max}(l-2)| + 2,$$
$$|\Psi_{\max}(l)| = |\Psi_{\max}(l-2)|.$$

В то же время по лемме 4 справедливо неравенство $|\Psi_{\max}(l)| \geqslant |\Phi_{\max}(l)|$. Следовательно,

$$|\Psi_{\max}(l-2)| \geqslant |\Phi_{\max}(l-2)| + 2.$$

С другой стороны, по лемме 4

$$|\Psi_{\max}(l-2)| \leqslant |\Phi_{\max}(l-2)| + 1.$$

Приходим к противоречию.

Таким образом, для любого натурального l, $2 \leqslant l \leqslant (n+1)(k-1)$, справедливо неравенство $|\Phi_{\max}(l)| \leqslant |\Phi_{\max}(l-2)| + 1$. Аналогично доказывается неравенство $|\Psi_{\max}(l)| \leqslant |\Psi_{\max}(l-2)| + 1$. Лемма 6 доказана.

Из монотонности функций $|\Phi_{\max}(l)|$ и $|\Psi_{\max}(l)|$, а также из соотношения $|\Phi_{\max}(l)| \leqslant |\Psi_{\max}(l)|$, справедливого при любых l, $2 \leqslant l \leqslant (n+1)(k-1)$, следует, что $|\Psi_{\max}((n+1)(k-1))|$ — наибольшее возможное значение и для функции $|\Phi_{\max}(l)|$, и для функции $|\Psi_{\max}(l)|$.

Пользуясь утверждением леммы 6, оценим сверху значение величины $|\Psi_{\max}((n+1)(k-1))|$.

Пусть число $(n+1)(k-1)$ четно. В этом случае получаем:

$$|\Psi_{\max}((n+1)(k-1))| \leqslant |\Psi_{\max}(0)| + \frac{(n+1)(k-1)}{2}.$$

Пусть $(n+1)(k-1)$ нечетно. Тогда

$$|\Psi_{\max}((n+1)(k-1))| \leqslant |\Psi_{\max}(1)| + \frac{(n+1)(k-1)-1}{2}.$$

Покажем, что $|\Psi_{\max}(0)| \leqslant 1$ и $|\Psi_{\max}(1)| \leqslant 1$.

Нулевой слой куба E_k^{n+1} состоит из единственного набора $(\widetilde{0}, 0)$. Из определения вектор-функций $\Phi(\widetilde{x}, y)$ и $\Psi(\widetilde{x}, y)$ получаем, что выполнены соотношения $\Phi_{\max}(0) = \Phi(\widetilde{0}, 0) = \widetilde{0}$, $\Psi_{\max}(0) = \Psi(\widetilde{0}, 0) \leqslant \widetilde{\sigma}_1$, где $\widetilde{\sigma}_1$ — набор цепи Σ_m, принадлежащий первому слою куба E_k^m. Таким образом, $|\Psi_{\max}(0)| \leqslant 1$.

Далее, для любого набора $(\widetilde{\alpha}, \beta)$ первого слоя куба E_k^{n+1} выполняются равенства $\Phi'(\widetilde{\alpha}, \beta) = \Phi(\widetilde{0}, 0)$ и $\Psi'(\widetilde{\alpha}, \beta) = \Psi(\widetilde{0}, 0)$. Если $\Psi(\widetilde{0}, 0) = \widetilde{0}$, то из определения вектор-функции $\Psi(\widetilde{x}, y)$ следует $\Psi(\widetilde{\alpha}, \beta) \leqslant \widetilde{\sigma}_1$. Если $\Psi(\widetilde{0}, 0) = \widetilde{\sigma}_1$, то, учитывая, что $\Phi(\widetilde{0}, 0) = \widetilde{0}$, из определения $\Phi(\widetilde{x}, y)$ и $\Psi(\widetilde{x}, y)$ получаем $\Phi(\widetilde{\alpha}, \beta) \leqslant \widetilde{\sigma}_1$, $\Psi(\widetilde{\alpha}, \beta) = \widetilde{\sigma}_1$.

Следовательно, для любого набора $(\widetilde{\alpha}, \beta)$ первого слоя куба E_k^{n+1} справедливо неравенство $|\Psi(\widetilde{\alpha}, \beta)| \leqslant 1$, откуда вытекает оценка $|\Psi_{\max}(1)| \leqslant 1$.

Таким образом, приходим к соотношению

$$|\Psi_{\max}((n+1)(k-1))| \leqslant \left\lceil \frac{(n+1)(k-1)+1}{2} \right\rceil.$$

Вектор $\Psi_{\max}((n+1)(k-1))$ имеет длину m. Легко видеть, что способ построения вектор-функций $\Phi(\widetilde{x}, y)$ и $\Psi(\widetilde{x}, y)$ накладывает на выбор числа m единственное ограничение: $|\Psi_{\max}((n+1)(k-1))| \leqslant m(k-1)$. Таким образом, не нарушая общности можно считать, что m — наименьшее целое число, удовлетворяющее указанному условию, т. е.

$$(m-1)(k-1) < |\Psi_{\max}((n+1)(k-1))| \leqslant m(k-1).$$

Отсюда получаем следующее неравенство:

$$(m-1)(k-1) < \left\lceil \frac{(n+1)(k-1)+1}{2} \right\rceil,$$

или

$$m \leqslant \left\lceil \frac{(n+1)(k-1)+1}{2(k-1)} \right\rceil. \tag{12}$$

Итак, для любой функции от n переменных в P_k найдется неявное представление над классом A всех монотонных функций, содержащее не более, чем m уравнений, где m удовлетворяет неравенству (12). Следовательно,

$$m_A^k(n) \leqslant \left\lceil \frac{(n+1)(k-1)+1}{2(k-1)} \right\rceil. \tag{13}$$

Верхняя оценка доказана. Перейдем к доказательству нижней оценки. Зафиксируем натуральное число n. Возьмем некоторую максимальную цепь Ω_n в кубе E_k^n вида $\widetilde{0} = \widetilde{\alpha}^0 \leqslant \widetilde{\alpha}^1 \leqslant \ldots \leqslant \widetilde{\alpha}^{n(k-1)} = \widetilde{(k-1)}$. Она имеет длину $n(k-1)$, т. е. состоит из $n(k-1)+1$ различных наборов. Рассмотрим функцию $f(x_1, \ldots, x_n)$ k-значной логики, заданную следующим образом. На цепи Ω_n она принимает значения: $f(\widetilde{\alpha}^0) = 1$, $f(\widetilde{\alpha}^1) = 2$, $\ldots$, $f(\widetilde{\alpha}^{k-2}) = k-1$, $f(\widetilde{\alpha}^{k-1}) = k-2$, далее $f(\widetilde{\alpha}^{k+i}) = k-1$ при четных значениях i, $f(\widetilde{\alpha}^{k+i}) = k-2$ при нечетных значениях i, где $0 \leqslant i \leqslant n(k-1)-k$.

Пусть $0 \leqslant l \leqslant n(k-1)$. Для любого набора $\widetilde{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ на l-м слое куба E_k^n положим $f(\widetilde{\alpha}) = f(\widetilde{\alpha}^l)$, где $\widetilde{\alpha}^l$ — набор цепи Ω_n, принадлежащий l-му слою.

На основе цепи Ω_n построим цепь Ω'_{n+1} в кубе E_k^{n+1}, состоящую из расширенных наборов:

$$(\widetilde{\alpha}^0, 0) \leqslant (\widetilde{\alpha}^0, 1) \leqslant (\widetilde{\alpha}^1, 1) \leqslant (\widetilde{\alpha}^1, 2) \leqslant \ldots \leqslant (\widetilde{\alpha}^{k-2}, k-2) \leqslant \\ \leqslant (\widetilde{\alpha}^{k-2}, k-1) \leqslant (\widetilde{\alpha}^{k-1}, k-1) \leqslant (\widetilde{\alpha}^{k}, k-1) \leqslant \ldots \leqslant (\widetilde{\alpha}^{n(k-1)}, k-1).$$

Легко видеть, что цепь Ω'_{n+1} имеет длину $(n+1)(k-1)$, т. е. является максимальной цепью в E_k^{n+1}. Для удобства обозначим наборы цепи Ω'_{n+1} следующим образом: $\widetilde{\beta}^0 = (\widetilde{\alpha}^0, 0)$, $\widetilde{\beta}^1 = (\widetilde{\alpha}^0, 1), \ldots, \widetilde{\beta}^{(n+1)(k-1)} = (\widetilde{\alpha}^{n(k-1)}, k-1)$.

Заметим, что каждый набор $\widetilde{\beta}^i$ цепи Ω'_{n+1} с нечетным номером i является точкой графика функции f, а каждый набор $\widetilde{\beta}^i$ с четным номером i не является точкой графика функции f, $0 \leqslant i \leqslant (n+1)(k-1)$.

Рассмотрим произвольное неявное представление функции $f(x_1, \ldots, x_n)$ над классом A монотонных функций в P_k (m обозначает число уравнений в этом неявном представлении):

$$\begin{cases} \varphi_1(x_1, \ldots, x_n, y) = \psi_1(x_1, \ldots, x_n, y), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \varphi_m(x_1, \ldots, x_n, y) = \psi_m(x_1, \ldots, x_n, y). \end{cases}$$

Введем вектор-функцию $\Phi(\widetilde{x}, y) = (\varphi_1(\widetilde{x}, y), \ldots, \varphi_m(\widetilde{x}, y))$ и вектор-функцию $\Psi(\widetilde{x}, y) = (\psi_1(\widetilde{x}, y), \ldots, \psi_m(\widetilde{x}, y))$, где $\widetilde{x} = (x_1, \ldots, x_n)$. Непосредственно из определения неявного представления следует, что в точках $(\widetilde{\alpha}, f(\widetilde{\alpha}))$, $(\widetilde{\alpha}, f(\widetilde{\alpha})) \in E_k^{n+1}$, графика функции $f(\widetilde{x})$ имеет место равенство $\Phi(\widetilde{\alpha}, f(\widetilde{\alpha})) = \Psi(\widetilde{\alpha}, f(\widetilde{\alpha}))$, в остальных точках $(\widetilde{\alpha}, \delta)$, $(\widetilde{\alpha}, \delta) \in E_k^{n+1}$, где $\delta \neq f(\widetilde{\alpha})$, — неравенство $\Phi(\widetilde{\alpha}, \delta) \neq \Psi(\widetilde{\alpha}, \delta)$. Кроме того, вектор-функции $\Phi(\widetilde{x}, y)$ и $\Psi(\widetilde{x}, y)$ монотонны.

Таким образом, на цепи Ω'_{n+1} вектор-функции $\Phi(\widetilde{x}, y)$ и $\Psi(\widetilde{x}, y)$ монотонно не убывают, причем на наборах $\widetilde{\beta}^i$ с четными номерами $\Phi(\widetilde{\beta}^i) \neq \Psi(\widetilde{\beta}^i)$, а на наборах $\widetilde{\beta}^i$ цепи Ω'_{n+1} с нечетными номерами $\Phi(\widetilde{\beta}^i) = \Psi(\widetilde{\beta}^i)$ при всех i, $0 \leqslant i \leqslant (n+1)(k-1)$.

Отсюда и из монотонности вектор-функций Φ и Ψ следует, что при всех нечетных значениях i из промежутка $0 \leqslant i \leqslant (n+1)(k-1) - 2$ справедливы неравенства

$$|\Phi(\widetilde{\beta}^{i+2})| \geqslant |\Phi(\widetilde{\beta}^i)| + 1,$$
$$|\Psi(\widetilde{\beta}^{i+2})| \geqslant |\Psi(\widetilde{\beta}^i)| + 1.$$

Пусть число $(n+1)(k-1)$ нечетно. Тогда набор $\widetilde{\beta}^{(n+1)(k-1)} = \widetilde{(k-1)}$ — точка графика функции f. В этом случае получаем

$$\begin{cases} |\Phi(\widetilde{\beta}^{(n+1)(k-1)})| \geqslant |\Phi(\widetilde{\beta}^1)| + ((n+1)(k-1) - 1)/2, \\ |\Psi(\widetilde{\beta}^{(n+1)(k-1)})| \geqslant |\Psi(\widetilde{\beta}^1)| + ((n+1)(k-1) - 1)/2. \end{cases} \tag{14}$$

Пусть $(n+1)(k-1)$ четно. Тогда, аналогично,

$$\begin{cases} |\Phi(\widetilde{\beta}^{(n+1)(k-1)-1})| \geqslant |\Phi(\widetilde{\beta}^1)| + ((n+1)(k-1) - 2)/2, \\ |\Psi(\widetilde{\beta}^{(n+1)(k-1)-1})| \geqslant |\Psi(\widetilde{\beta}^1)| + ((n+1)(k-1) - 2)/2. \end{cases} \tag{15}$$

Так как в четном случае набор $\widetilde{\beta}^{(n+1)(k-1)} = \widetilde{(k-1)}$ не является точкой графика, то на нем выполнено $\Phi(\widetilde{\beta}^{(n+1)(k-1)}) \neq \Psi(\widetilde{\beta}^{(n+1)(k-1)})$, в то время как

$\Phi(\widetilde{\beta}^{(n+1)(k-1)-1})=\Psi(\widetilde{\beta}^{(n+1)(k-1)-1})$. Учитывая эти соотношения и монотонность Φ и Ψ, заключаем, что справедливо, по крайней мере, одно из неравенств

$$|\Phi(\widetilde{\beta}^{(n+1)(k-1)})|\geqslant|\Phi(\widetilde{\beta}^{(n+1)(k-1)-1})|+1$$

или

$$|\Psi(\widetilde{\beta}^{(n+1)(k-1)})|\geqslant|\Psi(\widetilde{\beta}^{(n+1)(k-1)-1})|+1.$$

Не нарушая общности, будем считать, что имеет место неравенство

$$|\Phi(\widetilde{\beta}^{(n+1)(k-1)})|\geqslant|\Phi(\widetilde{\beta}^{(n+1)(k-1)-1})|+1.$$

В этом случае из (15) следует, что

$$|\Phi(\widetilde{\beta}^{(n+1)(k-1)})|\geqslant|\Phi(\widetilde{\beta}^{1})|+(n+1)(k-1)/2. \tag{16}$$

Так как набор $\widetilde{\beta}^0=\widetilde{0}$ не является точкой графика функции f, то $\Phi(\widetilde{\beta}^0)\neq\Psi(\widetilde{\beta}^0)$. При этом $\Phi(\widetilde{\beta}^1)=\Psi(\widetilde{\beta}^1)$. В силу монотонности вектор-функций Φ и Ψ заключаем, что $|\Phi(\widetilde{\beta}^1)|\geqslant 1$ и $|\Psi(\widetilde{\beta}^1)|\geqslant 1$. Учитывая этот факт и объединяя (14) и (16), в конечном счете получаем

$$|\Phi(\widetilde{k-1})|\geqslant\left\lceil\frac{(n+1)(k-1)+1}{2}\right\rceil.$$

С другой стороны, $|\Phi(\widetilde{k-1})|\leqslant m(k-1)$, следовательно,

$$m\geqslant\left\lceil\frac{(n+1)(k-1)+1}{2(k-1)}\right\rceil. \tag{17}$$

Итак, для каждого натурального n в P_k найдется функция $f(x_1,\ldots,x_n)$, неявное представление которой над классом A всех монотонных функций содержит не менее m уравнений, где m удовлетворяет неравенству (17). Это означает, что

$$m_A^k(n)\geqslant\left\lceil\frac{(n+1)(k-1)+1}{2(k-1)}\right\rceil. \tag{18}$$

Легко видеть, что при всяком k, $k\geqslant 2$, справедливо тождество

$$\left\lceil\frac{(n+1)(k-1)+1}{2(k-1)}\right\rceil=\left\lceil\frac{n+2}{2}\right\rceil.$$

Следовательно, из соотношений (13) и (18) вытекает равенство

$$m_A^k(n)=\left\lceil\frac{n+2}{2}\right\rceil,$$

что завершает доказательство теоремы 2.

Автор выражает благодарность научному руководителю О.М. Касим-Заде за всестороннее внимание к данной работе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Касим-Заде О.М. Об одной метрической характеристике неявных и параметрических представлений булевых функций // Математические вопросы кибернетики. Вып. 6. — М.: Наука. Физматлит, 1996. — С. 133–188.
2. Кузнецов А.В. О средствах для обнаружения невыводимости или невыразимости // Логический вывод. — М.: Наука, 1979. — С. 5–33.
3. Яблонский С.В. Функциональные построения в k-значной логике // Труды МИАН СССР. — Т. 51. — М.: Изд-во АН СССР, 1958. — С. 5–142.

Поступило в редакцию 10.XII.2008.