



Галанин М.П., Лукин В.В.,
Родин А.С., Семерикова М.А.

Математическое
моделирование разрушения
хрупкого материала под
действием тепловых
нагрузок

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Математическое моделирование разрушения хрупкого материала под действием тепловых нагрузок / М.П.Галанин [и др.] // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2013. № 100. 36 с. URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2013-100>

Ордена Ленина
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
им. М.В. Келдыша
Российской академии наук

М.П. Галанин, В.В. Лукин,
А.С. Родин, М.А. Семерикова

**Математическое моделирование
разрушения хрупкого материала
под действием тепловых нагрузок**

Москва — 2013

Галанин М.П., Лукин В.В., Родин А.С., Семерикова М.А.

Математическое моделирование разрушения хрупкого материала под действием тепловых нагрузок

В работе рассмотрена модель образования и эволюции трещин в хрупком материале. Использована концепция размазанных трещин, позволяющая описывать разрушение материала в рамках предположений механики сплошной среды. Учет трещин позволяет описать процесс разупрочнения материала при его деформировании. Модель рассмотрена в двумерном плоском и осесимметричном приближениях. Подход размазанных трещин применен для моделирования поведения топливных таблеток из диоксида урана. Результаты расчетов на качественном уровне соответствуют экспериментальным данным.

Ключевые слова: математическое моделирование; термоупругость; хрупкое разрушение; размазанные трещины; ядерное топливо.

Mikhail Pavlovich Galanin, Vladimir Vladimirovich Lukin, Aleksandr Sergeevich Rodin, Maria Andreevna Semerikova

Mathematical modeling of the brittle material fracture under the thermal loads

A model for the formation and evolution of cracks in brittle material is considered. The smeared cracks concept allowing to describe the fracture of the material under the assumptions of continuum mechanics is used. While taking the cracks into account the process of the material softening during the deformation can be described. The model is considered in the two-dimensional plane and axisymmetric approximations. Smeared crack approach is used to model the behavior of the uranium dioxide fuel pellets. The calculation results are qualitatively consistent with experimental data.

Key words: mathematical modeling; thermoelasticity; brittle fracture; smeared cracks; nuclear fuel.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (проекты №№ 12-01-31193, 12-01-00109). Авторы выражают благодарность А.В. Плеханову за сотрудничество в выполнении данной работы.

1. Введение

При анализе работоспособности любых конструкций ставится задача анализа их прочности, жесткости и надежности в различных условиях. Создание новой техники для эксплуатации в экстремальных условиях при больших нагрузках разной природы, статических и динамических, требует обширных знаний теории прочности и понимания условий разрушения конструкций при тех или иных нагрузках [1, 2]. Задача об исследовании разрушения той или иной конструкции является нелинейной и, в отличие от хорошо разработанных и достаточно точных методов решения линейных задач термоупругости, остается сложной и малоисследованной [2–6].

Особый интерес среди подобных задач представляет моделирование процесса разрушения топливных таблеток в твэлах ядерных реакторов [7], поскольку подобное разрушение происходит в рамках рабочего режима и является неотъемлемой частью поведения топлива. Интерес вызывает задача моделирования поведения ядерного топлива с учетом трещин после их образования и распространения, прочностных и тепловых свойств разрушенных таблеток. Экспериментально известно [7], что ядерное топливо из диоксида урана (UO_2) в реакторах растрескивается (при большом выгорании — полностью) в процессе работы под воздействием совокупности факторов. Фотография трещин в использованной топливной таблетке приведена на рис. 1 [8].

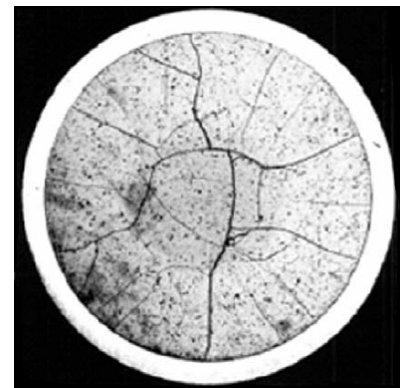


Рис. 1. Трещины в топливной таблетке

Размеры таблеток могут различаться. В исходном состоянии таблетки рассматриваемого типа имеют форму цилиндра радиусом 3,8 мм с фаской и внутренним отверстием радиусом 0,8 мм. Высота цилиндра составляет от 10 мм до 18 мм. Фото таблетки представлено на рис. 2 [9].

Цилиндрическая симметрия топливной таблетки и внешней нагрузки в твэле определяет осесимметричную постановку задачи численного моделирования. Также развитие трещин удобно исследовать в сечении таблетки горизонтальной плоскостью. В дальнейшем рассмотрим каждую из этих задач.

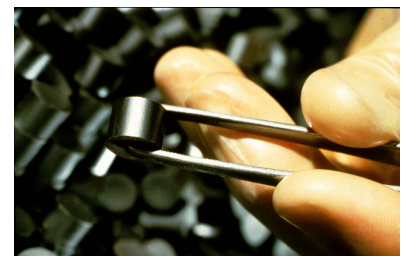


Рис. 2. Топливная таблетка

Поскольку процессы, происходящие в таблетках, необходимо знать на протяжении большей части или всего длительного срока эксплуатации, а возникающие колебания имеют большую скорость распространения, они затухают за время, малое по сравнению с временем работы топлива. Учет таких колебаний в динамической задаче возможен, но нерацionalен, так как при численном моделировании накладывает жесткие условия на временной шаг и усложняет расчет. Во избежание этого будем решать

квазистационарную задачу термомеханики в моделях, описывающих непосредственно топливную таблетку. Постановка тестовых задач будет описана отдельно.

Целью данной работы является построение и анализ математической модели разрушения хрупкого материала, позволяющей исследовать развитие трещин в теле в рамках представлений механики сплошной среды без выделения и детального описания эволюции конкретных трещин. Описанная здесь и в [10, 11] модель будет далее применяться в предметных решателях платформы Теметос [12].

2. Математическая модель

При построении моделей хрупких материалов будем отталкиваться от следующей математической модели термомеханики материала. Будем рассматривать сплошную среду в квазистационарном одно- или двумерном приближении и в качестве базовых соотношений выберем следующие (везде далее предполагается суммирование по повторяющимся индексам) [13].

- 1) Тензор малых деформаций Коши в предположении существования его аддитивного разложения

$$\varepsilon_{kl} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_l} + \frac{\partial u_l}{\partial x_k} \right) = \varepsilon_{kl}^e + \varepsilon_{kl}^0, \quad (1)$$

где $u_k = u_k(\mathbf{x}, t)$ — компоненты вектора перемещений сплошной среды в точке $\mathbf{x} = \{x_1, x_2, x_3\}^T$ (в одномерном случае $x_1 \equiv x$) в момент времени t , ε_{kl}^e — компоненты упругой составляющей тензора деформаций, ε_{kl}^0 — компоненты тензора неупругих деформаций среды. В частности, для термоупругого тела

$$\varepsilon_{kl}^0 = \varepsilon_{kl}^T = \alpha_{kl}^T \Delta T, \quad (2)$$

где α_{ij}^T — компоненты (симметричного) тензора коэффициентов температурной деформации, $T(\mathbf{x}, t)$ — температура, $\Delta T = T(\mathbf{x}, t) - T_0$ — приращение температуры относительно уровня нулевых деформаций.

- 2) Определяющее соотношение (закон Гука)

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl}^e, \quad (3)$$

или с учетом аддитивного разложения (1)

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} (\varepsilon_{kl} - \varepsilon_{kl}^0), \quad (4)$$

где σ_{ij} — компоненты тензора напряжений, C_{ijkl} — компоненты тензора упругих коэффициентов.

3) Уравнение равновесия

$$\frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial x_j} + b_i = 0, \quad i = \overline{1, 3} \quad (5)$$

вместе с граничными условиями $u_i(\mathbf{x}, t) = \tilde{u}_i(\mathbf{x}, t)$, $\mathbf{x} \in S_u$ и $\sigma_{ij}(\mathbf{x})n_j(\mathbf{x}) = \tilde{p}_i(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in S_p$, где $S = S_u \cup S_p$ — поверхность рассматриваемого тела, σ_{ji} — компоненты тензора напряжений, b_i — компоненты вектора объемных сил.

Термомеханическая задача о деформирования тела (1), (4), (5) после применения метода возможных перемещений и дискретизации по пространству методом конечных элементов (МКЭ) сводится к решению следующего матричного уравнения [14, 15]:

$$[K] \{U\} = \{R\}. \quad (6)$$

Здесь использованы стандартные обозначения МКЭ: $\{U\}$ — глобальный (узловой) вектор перемещений, $\vec{\varepsilon} = [B] \{U\}$ — вектор деформаций, $[B]$ — геометрическая матрица аппроксимации, зависящая от вида конечных элементов, $\vec{\sigma} = [C] (\vec{\varepsilon} - \vec{\varepsilon}^0)$ — вектор напряжений, $[C]$ — матрица упругих коэффициентов, $[K] = \int_V [B]^T [C] [B] dV$ — глобальная матрица жесткости,

$$\{R\} = \{R_p\} + \{R_V\} + \{R_{\varepsilon^0}\} \quad (7)$$

— глобальный вектор нагрузки, в котором составляющая $\{R_p\}$ отвечает за вклад поверхностных нагрузок, $\{R_V\}$ — за вклад объемных нагрузок, $\{R_{\varepsilon^0}\}$ — за вклад, который дают неупругие деформации ε^0 .

3. Моделирование разрушения

Разрушение тела зависит от множества факторов, многие из которых имеют случайный характер, не всегда изучены качественно или даже не всегда известны: это структура материала, характер нагрузок, внешние условия, состояние материала в процессе использования, внутренние дефекты и многое другое.

Под разрушением подразумевается исчерпание несущей способности тела, произошедшее или вследствие беспрепятственного пластического течения (неограниченного изменения формы), или вследствие накопления повреждений и развития трещин. Разрушение тел принято делить на два типа: вязкое и хрупкое [2].

Вязкое разрушение связано с теми или иными моделями течения сплошной среды (идеальная пластичность, пластичность с упрочнением, ползучесть и т.д.); *хрупкое* разрушение рассматривает механизмы накопления рассеянных повреждений и распространение изолированных трещин [2].

К видам повреждений можно относить рассеянные дефекты — малые по размерам и многочисленные — и крупные магистральные трещины, геометрические размеры которых сопоставимы с размерами исследуемой конструкции. Модели разрушения аналогичным образом разделяются на учитывающие накопление рассеянных повреждений модели и те, где исследуется образование и развитие магистральных трещин. Последние моделируются либо дискретным образом, либо учитываются эффективно.

В связи с характером решаемых задач хрупкого разрушения: множеством возникающих практически мгновенно трещин и невозможностью отслеживания развития каждой из них — интерес представляют модели, учитывающие трещины эффективным образом [3–6, 16]. Будем рассматривать модели хрупкого разрушения, которые можно условно разделить на модели, описывающие накопление повреждений до образования магистральных трещин [3, 4], и модели, рассматривающие распространение трещин [5, 6, 16].

Наиболее простым и реалистичным при исследовании разрушения и оценке прочности является анализ состояния материала на основе положений механики сплошной среды с учетом особенностей структуры материала [3, 13]. Модели, описывающие изменение механических свойств материала в рамках модели сплошной среды, рассмотрены в [3] и [4]. Будем основываться на подобных моделях, поскольку они позволяют рассмотреть развитие трещин и изменение напряженного и деформированного состояний.

3.1. Идея модели размазанных трещин

Для моделирования трещин в хрупком материале используются 2 подхода: дискретных и размазанных трещин. Подход размазанных трещин был сформулирован для бетона [5]. Для моделирования разрушения топливных таблеток из диоксида урана UO_2 применяют модели разрушения бетона или керамики. При нагружении конструкции из хрупкого материала в случае, когда значения напряжений превышают предел прочности, модель фиктивных трещин описывает растрескивание как разгрузку по всей длине балки в сочетании с дополнительным удлинением в бесконечно тонкой зоне трещины. Модель фиктивных трещин формулируется через связь напряжений и удлинений в зоне трещины [5, 6, 16]. Подход размазанных трещин является более простым для вычислений в силу того, что разрывами деформаций и перемещений, вызванными растрескиванием, пренебрегают, уделяя внимание лишь изменению свойств материала. Следовательно, при растрескивании модифицируется лишь зависимость напряжений от деформаций в интересующем элементе, что ведет к удобной численной схеме. Недостатком такого подхода является то, что вид трещин в расчетной области и даже условия их возникновения могут зависеть от шага сетки [5].

Основная идея модели размазанных трещин заключается в том, что до полного формирования трещины в материале образуется так называемая зона трещины, в которой напряжение изменяется по определенным экспери-

ментальным зависимостям. Данная модель применима для материалов, в которых замечено образование микротрещин, а также в которых пластические деформации пренебрежимо малы. Также важным требованием является линейность поведения материала до предела прочности. Примерами таких материалов являются бетон, керамика, некоторые виды пластиков и дерево [16].

Экспериментально подтверждено образование трещин в таблетке топлива из диоксида урана при относительно низких нагрузках, тепловых или механических [7, 8]. Топливная таблетка ведет себя как хрупкий материал, ее пластическими деформациями можно пренебречь. Свойства диоксида урана близки к свойствам керамических материалов, для которых характерно поведение при растяжении, изображенное на рис. 3 [16], где при напряжениях, меньших некоторого условного предела прочности при растяжении σ_f , и соответствующих ему деформациях ε_f материал ведет себя как линейно-упругий, а при превышении предела прочности имеет место разгрузка по нелинейному закону.

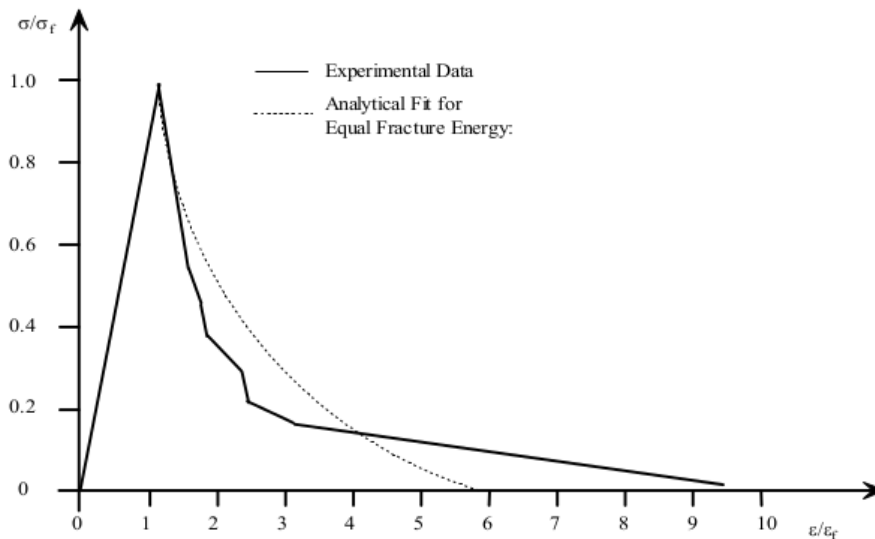


Рис. 3. Кривая нормализованного растягивающего отклика для керамических материалов

При значениях напряжений, равных пределу прочности, и соответствующих деформациях считается, что трещина инициировалась, но не сформировалась полностью до достижения значений деформаций, больших ε_f в 5-10 раз. Область нелинейного снижения напряжений при увеличении деформаций называется послепиковой [16].

Экспериментальную кривую на рис. 3 можно аппроксимировать следующей зависимостью напряжений от деформаций $\sigma(\varepsilon)$:

$$\frac{\sigma}{\sigma_f} = A + B e^{-C \frac{\varepsilon}{\varepsilon_f}}, \quad (8)$$

где $A \approx -0,024$, $B \approx 1,69$, $C = 0,5$. Считается, что данная зависимость справедлива при значении деформации $\varepsilon < \varepsilon_0$, где ε_0 — такое значение де-

формации, большее предела прочности в 5-10 раз, при котором материал не способен передавать напряжения в одномерном случае, а в многомерном — не передает напряжения в направлении, ортогональном направлению трещины [5].

3.2. Одномерная модель

Для определения напряжений в материале с описанными свойствами будем использовать подход, аналогичный подходу в моделях упругопластических материалов [13]. В качестве численного метода применим метод дополнительных деформаций [17]. Введем понятие переменного предела прочности $\sigma_f^v(\varepsilon)$, который в недеформированном состоянии материала равен пределу прочности при растяжении [2]: $\sigma_f^v(0) = \sigma_f$. Напряжения при заданных значениях деформаций не могут превышать значения переменного предела прочности, определяемого экспериментальной кривой на рис. 3. Если в процессе численного решения задачи данное условие не выполняется, то напряжения определяются из экспериментальной зависимости (8) при вычисленных значениях деформаций. Используем следующую нелинейную зависимость напряжения от деформации:

$$\sigma(\varepsilon) = \begin{cases} \sigma = E\varepsilon^e, & E\varepsilon^e < \sigma_f^v(\varepsilon), \\ \sigma_f^v(\varepsilon), \sigma_f^v(\varepsilon) = \sigma_f \left(A + B e^{-C \frac{\varepsilon^e}{\varepsilon_f}} \right), & E\varepsilon^e \geq \sigma_f^v(\varepsilon), \end{cases} \quad (9)$$

где E — модуль Юнга, ε^e — упругая деформация. Как и выше, предполагаем наличие аддитивного разложения тензора полных деформаций, поэтому значение упругой деформации определяется следующим образом:

$$\varepsilon^e = \varepsilon - \varepsilon^T - \varepsilon^{\text{crk}},$$

где ε — значение полной деформации, полученное в результате решения уравнений движения, ε^T — значение температурной деформации, ε^{crk} — значение деформации за счет трещин, вычисленное на предыдущем временном шаге:

$$\varepsilon^{\text{crk}} = \varepsilon - \varepsilon^T - \frac{\sigma(\varepsilon)}{E},$$

$\sigma(\varepsilon)$ определяется из (9). Отметим, что при первоначальном нагружении, когда материал не подвергается нагрузкам, большим предела прочности, значение деформации за счет трещин равно 0, а в послепиковой области, где материал ведет себя по нелинейным законам, $\varepsilon^{\text{crk}} > 0$. При разгрузке значение деформаций за счет трещин, полученное на предыдущем шаге нагружения, не изменяется, а материал ведет себя как линейно-упругий с пределом прочности $\sigma_f^v(\varepsilon)$ и модулем Юнга E .

3.2.1. Тестовая задача

В качестве тестовой задачи рассмотрим квазистационарную задачу теории термомеханики для одномерного стержня длиной l , закрепленного с обоих концов. Введем возрастающий параметр t , имеющий смысл времени. На каждом временном слое будем решать уравнение равновесия. Зададим свойства материала: плотность ρ , модуль Юнга E , коэффициент Пуассона ν , предел прочности σ_f , соответствующие диоксиду урана [18], и будем прикладывать знакопеременную нагрузку за счет изменения температуры по закону $T(x, t) = \tilde{T} + F(x)t \sin(t)$, где \tilde{T} — некоторая усредненная по времени температура, а $F(x)$ — некоторая функция, описывающая пространственное распределение температуры на каждом временном слое. Данной постановке задачи отвечает следующая математическая модель:

$$\begin{aligned} T(x, t) &= \tilde{T} + F(x)t \sin(t), \quad t \geq 0, \quad 0 \leq x \leq l, \\ \frac{\partial \sigma}{\partial x} &= 0, \quad 0 < x < l, \\ \sigma &= \sigma(\varepsilon - \varepsilon^0), \quad \varepsilon = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon^T = \alpha(T - T_0), \\ u(0, t) &= u(l, t) = 0, \end{aligned}$$

где u — перемещения, α — коэффициент теплового расширения, T_0 — справочная температура.

Выберем функцию $F(x)$ симметричной относительно середины стержня, например, $F(x) \sim \sin\left(\frac{\pi x}{l}\right)$. Будем решать задачу методом конечных элементов на равномерной сетке. Используем одномерные конечные элементы первого порядка [14], причем численная модель (6) в целом не изменится, а модель трещин повлияет на вид вектора нагрузок (7) следующим образом:

$$\{R_{\varepsilon^0}\} = \int_l [B]^T [C] \{\varepsilon^T + \varepsilon^{\text{crk}}\} dl. \quad (10)$$

3.2.2. Результаты

Рассмотрено поведение стержня на трех периодах нагружения. На рис. 4 изображен график зависимости напряжений от деформаций $\varepsilon - \varepsilon^T$ для крайнего конечного элемента в стержне (поскольку задача симметрична относительно центра стержня, его правый и левый концы равнозначны) при изменении температуры согласно графику, изображенному на рис. 5. Амплитуда температуры увеличивается, что позволяет исследовать поведение стержня при повторном нагружении.

На рис. 4 наблюдается характерное для послепиковой области поведение материала; при смене знака нагружения имеет место разгрузка по линейному закону с модулем Юнга, равным исходному. В области $\{\sigma < 0\}$ абсолютная величина напряжений растет линейно при заданном нагружении, поскольку

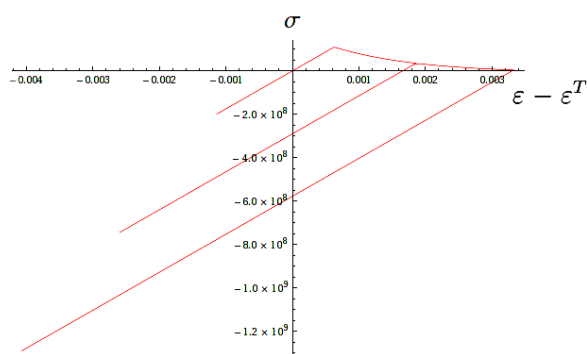


Рис. 4. Зависимость напряжений от деформаций при знакопеременном нагружении

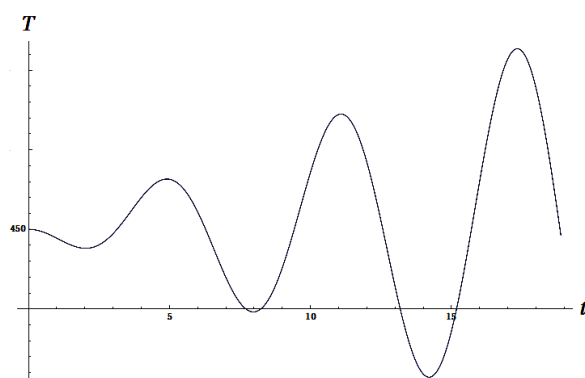


Рис. 5. Зависимость температуры от времени

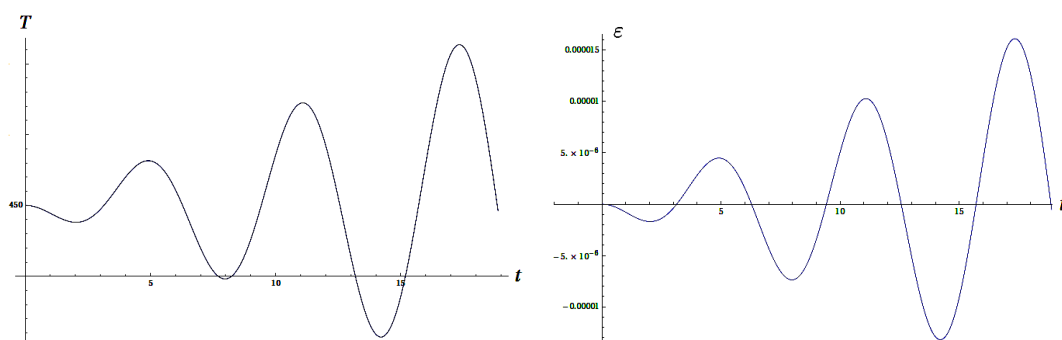
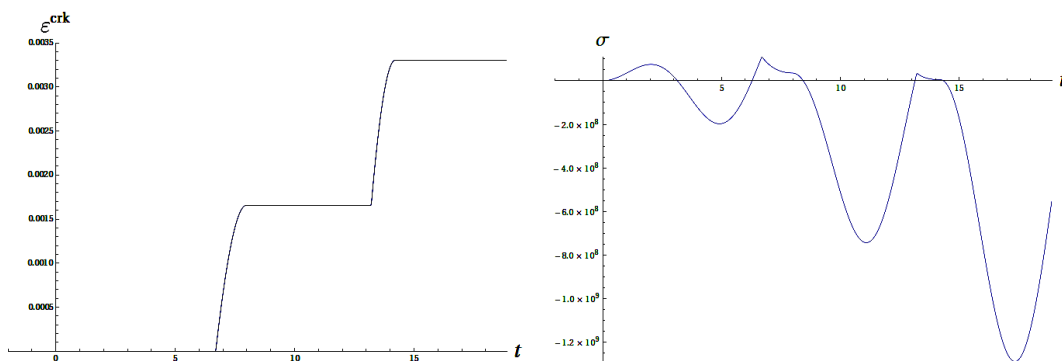


Рис. 6. Зависимость температуры (слева) и полной деформации (справа) от времени

Рис. 7. Зависимость деформации за счет трещин ε^{crk} (слева) и напряжений (справа) от времени

предел прочности материала при сжатии много больше, чем предел прочности материала при растяжении [2]. В области $\{\sigma > 0\}$ напряжения должны быть ограничены экспериментальной кривой с рис. 3, что и выполняется.

Зависимости полной деформации, деформации за счет трещин и напряжений от времени приведены на рис. 6 и 7. График зависимости деформации за счет трещин от времени имеет ступенчатый вид, причем горизонтальные участки отвечают участкам линейного изменения напряжения. Также отметим, что деформации за счет трещин не убывают по времени, что означает сохранение материалом информации о наличии трещины. На рис. 7 заметно влияние изменения характера зависимости $\sigma(\varepsilon)$: напряжения в материале не превышают значения σ_f при все большем увеличении температуры и температурной деформации.

3.3. Многомерная модель

По аналогии с [16] построим математическую модель разрушения в многомерном случае. Заметим, что (8) можно переписать в следующем виде:

$$\frac{\sigma}{\sigma_f} = \frac{\sigma}{\varepsilon} \frac{\varepsilon}{\varepsilon_f} \frac{\varepsilon_f}{\sigma_f} = A + B e^{-C \frac{\varepsilon}{\varepsilon_f}}.$$

Учитывая соотношения $\frac{\sigma}{\varepsilon} = E$ и $\frac{\sigma_f}{\varepsilon_f} = E_0$, где E и E_0 — текущий и начальный модули Юнга, получим

$$\frac{E}{E_0} \frac{\varepsilon}{\varepsilon_f} = A + B e^{-C \frac{\varepsilon}{\varepsilon_f}}.$$

В таком случае можно говорить о функции памяти $e(t)$, имеющей смысл отношения текущего модуля Юнга E к начальному модулю Юнга E_0 :

$$e(t) = \frac{E}{E_0} = \frac{\varepsilon_f}{\varepsilon} \left(A + B e^{-C \frac{\varepsilon}{\varepsilon_f}} \right). \quad (11)$$

Данная зависимость справедлива при значениях деформаций $\varepsilon_f \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0$; при $\varepsilon < \varepsilon_f$ $e(t) = 1$, при $\varepsilon > \varepsilon_0$ $e(t) = 0$. Используя построенную функцию памяти для одномерного случая, модифицируются определяющие соотношения в математической модели топливной таблетки.

Для применения понятия функции памяти необходимо выбрать такую систему координат, в которой тензор деформаций можно привести к 3 независимым компонентам — главным осям тензора деформаций. Пусть матрица перехода \hat{T} диагонализует тензор деформаций $\hat{\varepsilon}$:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \end{bmatrix} = \hat{T}^{-1} \hat{\varepsilon} \hat{T},$$

где $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ — главные значения тензора деформаций $\hat{\varepsilon}$. Из компонент матрицы \hat{T} размерности 3×3 единственным образом можно составить матрицу преобразования \hat{P} размерности 4×4 , которая приводит вектор деформаций $\vec{\varepsilon}$ в нотации Фойгта к виду $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, 0\}^T$ (здесь и далее будем обозначать векторы деформаций и напряжений, записанные в главных осях тензора деформаций, символом $\overline{\cdot}$):

$$\vec{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ 0 \end{pmatrix} = [P] \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \gamma_{12} \end{pmatrix} = \hat{P}\vec{\varepsilon}, \quad (12)$$

где $\gamma_{12} = \gamma_{21} = \varepsilon_{12} + \varepsilon_{21}$ — сдвиговая деформация.

В отличие от одномерного случая для тензора деформаций не предполагается возможности аддитивного выделения деформаций растрескивания. Вместо этого рассмотрим две конфигурации тела — без растрескивания (K_1) и с учетом образования трещин (K_2). Для конфигурации K_1 справедлив закон Гука

$$\vec{\sigma} = [C] \vec{\varepsilon}^e. \quad (13)$$

Рассмотрим в конфигурации K_1 систему координат, связанную с главными направлениями тензора деформаций. В этой системе координат перепишем закон Гука в виде

$$\vec{\sigma} = [\overline{C}] \vec{\varepsilon}^e. \quad (14)$$

Заметим, что матрица перехода \hat{P} к главным направлениям тензора деформаций является ортогональной, поэтому

$$\vec{\varepsilon}^T \vec{\sigma} = \vec{\varepsilon}^T \vec{\sigma}. \quad (15)$$

Для конфигурации K_2 закон Гука запишем в виде

$$\vec{\sigma} = \tilde{C} \vec{\varepsilon}^e = \tilde{C} (\vec{\varepsilon} - \vec{\varepsilon}^T). \quad (16)$$

Поскольку матрица перехода \hat{E} из конфигурации K_1 в конфигурацию K_2 является диагональной и поворота осей при этом не происходит, то имеют место соотношения

$$\vec{\varepsilon} = \vec{\varepsilon}, \quad \vec{\varepsilon}^T = \vec{\varepsilon}^T, \quad \vec{\sigma} = \vec{\sigma}$$

и определяющее соотношение можно записать в виде

$$\vec{\sigma} = \tilde{C} (\vec{\varepsilon} - \vec{\varepsilon}^T), \quad (17)$$

где $[\tilde{C}] = E^T \overline{C} E$.

Теперь вернемся к исходной системе координат с помощью соотношений

$$\begin{aligned}\vec{\sigma} &= \hat{P}^T \bar{\sigma}, \quad \vec{\varepsilon} = \hat{P}^{-1} \bar{\varepsilon}, \quad \vec{\varepsilon}^T = \hat{P}^{-1} \bar{\varepsilon}^T, \\ \bar{C} &= \left(\hat{P}^{-1} \right)^T [C] \hat{P}^{-1},\end{aligned}$$

откуда

$$\vec{\sigma} = \hat{P}^T \tilde{C} \hat{P} (\vec{\varepsilon} - \vec{\varepsilon}^T),$$

причем

$$\hat{P}^T \tilde{C} \hat{P} = \hat{P}^T \hat{E}^T \bar{C} \hat{E} \hat{P} = \left(\hat{P}^T \hat{E}^T \left(\hat{P}^{-1} \right)^T \right) [C] \left(\hat{P}^{-1} \hat{E} \hat{P} \right).$$

Введем обозначение $Z = P^{-1}EP$. Тогда

$$\vec{\sigma} = \hat{Z}^T \hat{C} \hat{Z} (\vec{\varepsilon} - \vec{\varepsilon}^T) = \hat{C}^{\text{crk}} (\vec{\varepsilon} - \vec{\varepsilon}^T). \quad (18)$$

Осталось определить вид матрицы \hat{E} перехода из конфигурации без растрескивания в конфигурацию с учетом существования трещин. Сделаем это, обобщив функцию памяти (11) на многомерный случай и определив аналогичным образом функцию памяти трещины, развивающейся в плоскости, перпендикулярной i -му главному направлению:

$$e_i(t) = \frac{\varepsilon_f}{\varepsilon_i} \begin{pmatrix} A + B e^{-C \frac{\varepsilon_i}{\varepsilon_f}} \\ \varepsilon_f \end{pmatrix}.$$

Тогда можно определить матрицу памяти \hat{E} , имеющую в системе координат, связанной с главными осями тензора деформаций, диагональный вид. В общем случае матрица будет иметь следующий вид:

$$\hat{E} = \begin{bmatrix} e_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e_2 e_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e_3 e_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & e_1 e_2 \end{bmatrix}.$$

Итак, значения трех функций памяти вместе с главными направлениями тензора деформаций полностью определяют состояние растрескавшегося материала в текущий момент времени. При решении двумерной задачи в случае плоской деформации имеют смысл две функции памяти, и матрица \hat{E} будет иметь вид

$$\hat{E} = \begin{bmatrix} e_1 & 0 & 0 \\ 0 & e_2 & 0 \\ 0 & 0 & e_1 e_2 \end{bmatrix}.$$

В осесимметричном случае определены все три функции памяти, однако функция, связанная с угловой координатой, определяет не зависящую от других направлений трещину. Таким образом, в осесимметричных задачах всегда существует выделенное направление развития трещин — радиальное. Матрица памяти в данном случае выглядит следующим образом:

$$\hat{E} = \begin{bmatrix} e_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e_1 e_2 \end{bmatrix}.$$

3.3.1. Конечноэлементная постановка задачи

Будем решать данную двумерную квазистационарную задачу (5) методом конечных элементов на четырехугольной сетке. Представим расчетную область Ω в виде объединения четырехугольных подобластей $\Omega = \bigcup_{i=1}^N \Omega_i$, N — количество элементов. Выберем пространство пробных функций, состоящее из билинейных финитных функций $\tilde{\varphi}_{ij}$, $i = N$, $j = 1, 4$. Будем аппроксимировать поле перемещений функциями из данного пространства. Представив поле перемещений в виде $u = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^4 u_{ij} \tilde{\varphi}_{ij}(x, y)$, где u_{ij} — перемещения в узлах, можно записать уравнения равновесия в слабой постановке и перейти к системе линейных алгебраических уравнений следующего вида [14, 15]:

$$[K(e_1, e_2, e_3)] \{U\} = \{R_U(e_1, e_2, e_3, T)\}.$$

Отметим, что вид матрицы жесткости K зависит от типа решаемой двумерной задачи и используемой в том или ином случае матрицы упругих коэффициентов. В случае плоского деформированного состояния матрица упругих коэффициентов имеет вид

$$C = E \frac{1 - \nu}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \begin{bmatrix} 1 & \frac{\nu}{1 - \nu} & 0 \\ \frac{\nu}{1 - \nu} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1 - 2\nu}{2(1 - \nu)} \end{bmatrix},$$

при решении осесимметричной задачи — вид

$$C = E \frac{1 - \nu}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \begin{bmatrix} 1 & \frac{\nu}{1 - \nu} & \frac{\nu}{1 - \nu} & 0 \\ \frac{\nu}{1 - \nu} & 1 & \frac{\nu}{1 - \nu} & 0 \\ \frac{\nu}{1 - \nu} & \frac{\nu}{1 - \nu} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1 - 2\nu}{2(1 - \nu)} \end{bmatrix}.$$

Будем рассматривать изменение перемещений, деформаций и напряжений во времени, разбив временной отрезок $[0, t_f]$ на P временных слоев с шагом $\tau = \frac{t_f}{P-1}$, на каждом из которых решается стационарная задача теории упругости с учетом температуры и влияния размазанных трещин.

3.4. Тестовая квазиодномерная задача

Рассмотрим тестовую осесимметричную квазиодномерную задачу в координатах (r, z) . В данном случае обозначим двумерный вектор перемещений $\vec{u} = (u, w)^T$. Зададим нулевые вертикальные перемещения на горизонтальных границах прямоугольной области $\Omega = [r_a, r_b] \times [0, h]$, вертикальные границы будем считать свободными:

$$\begin{aligned} w|_{z=0} &= w|_{z=h} = 0; \\ \sigma|_{r=r_a} &= \sigma|_{r=r_b} = 0 \end{aligned}$$

Расчетная схема изображена на рис. 8. Зададим линейную зависимость температуры от времени (19) на правой и левой вертикальных границах расчетной области соответственно, будем считать температурное поле на временном слое зависящим только от координаты r . Таким образом, все нагрузки не зависят от координаты z , то есть являются одномерными. Перемещения, напряжения и деформации в результате численного моделирования также должны быть зависящими только от r , ослабление материала должно быть равномерным по высоте.

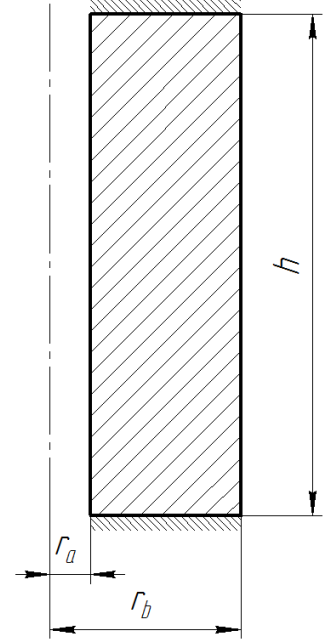


Рис. 8. Расчетная схема для квазиодномерного теста

3.4.1. Результаты

Приведем результаты численного моделирования в квазиодномерной задаче с влиянием температуры и разрушением. В данном случае главные оси совпадают с осями координат, поэтому можно говорить об однозначной связи функции памяти e_1 с координатой r , функции памяти e_2 — с z , e_3 — с φ .

До тех пор, пока все функции памяти равны единице, задача является упругой. При отклонении одной из функций памяти от единицы появляются анизотропные эффекты — происходит развитие трещины. Трещина условно считается сформировавшейся полностью в данной области, если значение одной из функций памяти в ней достигло некоторого малого значения e_0 , которое можно увеличивать для ускорения расчета и большего “размазывания” трещин или уменьшать для получения более четких границ трещин. Слишком малые значения e_0 , однако, приводят к резкому возрастанию обусловлен-

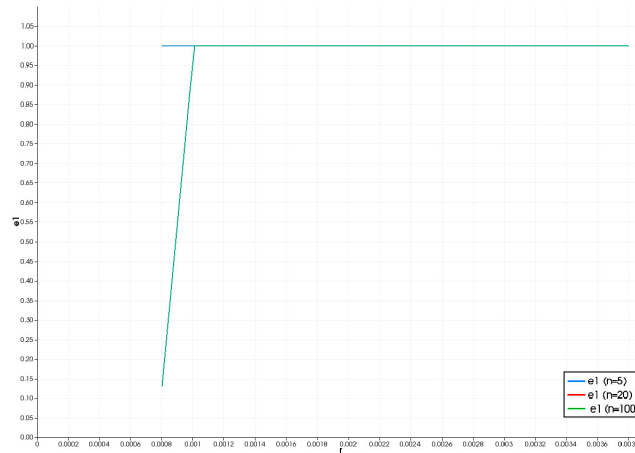


Рис. 9. Функция памяти e_1 в различные моменты времени в квазиодномерном тесте

ности матрицы жесткости системы и невозможности продолжения расчета. В этой и последующих задачах выберем $e_0 = 0,01$.

На рис. 9 и рис. 10 слева показаны распределение функции памяти e_1 и соответствующее ей напряжение σ_{11} на временных слоях, соответствующих временам $t = 0,05t_f$, $t = 0,2t_f$, $t = t_f$.

На временном слое $t = 0,05t_f$ зона трещины еще не сформировалась, напряжения соответствуют упругим напряжениям при аналогичных нагрузках (на рис. 10 кривая голубого цвета). При образовании трещин уровень напряжений σ_{11} заметно падает, они становятся близки к нулю.

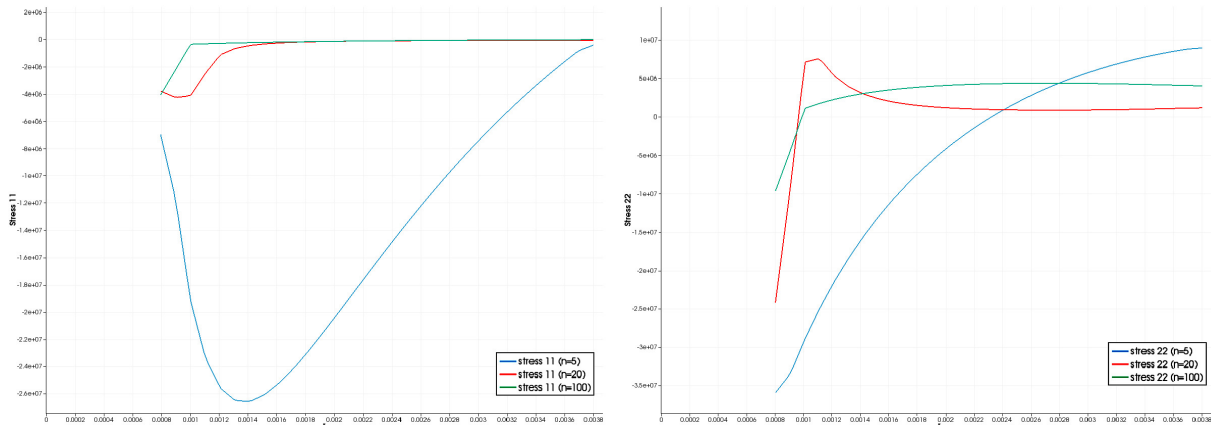


Рис. 10. Напряжение σ_{11} (слева) и σ_{22} (справа) в различные моменты времени в квазиодномерном тесте

В процессе деформирования функция памяти e_2 не изменяется в связи с наличием только сжимающих напряжений в вертикальном направлении. Это означает, что горизонтальные трещины не образуются. На рис. 10 справа изображены напряжения σ_{22} в задаче с учетом трещин.

Значительное растрескивание происходит ортогонально выделенному для осесимметричного случая полярному направлению. Изменение e_3 и σ_{33} на отрезке времени, на котором происходит образование трещины, рассмотрим

более подробно. На рис. 11 изображено распределение функции памяти e_3 в моменты времени $t = 0,05t_f$, $0,08t_f$, $0,1t_f$, $0,2t_f$, t_f . Отметим, что e_3 не зависит от координаты z , а размеры послепиковой зоны постепенно нарастают с течением времени, что и должно происходить при нагреве образца. Трещина распространяется от правой границы области к левой.

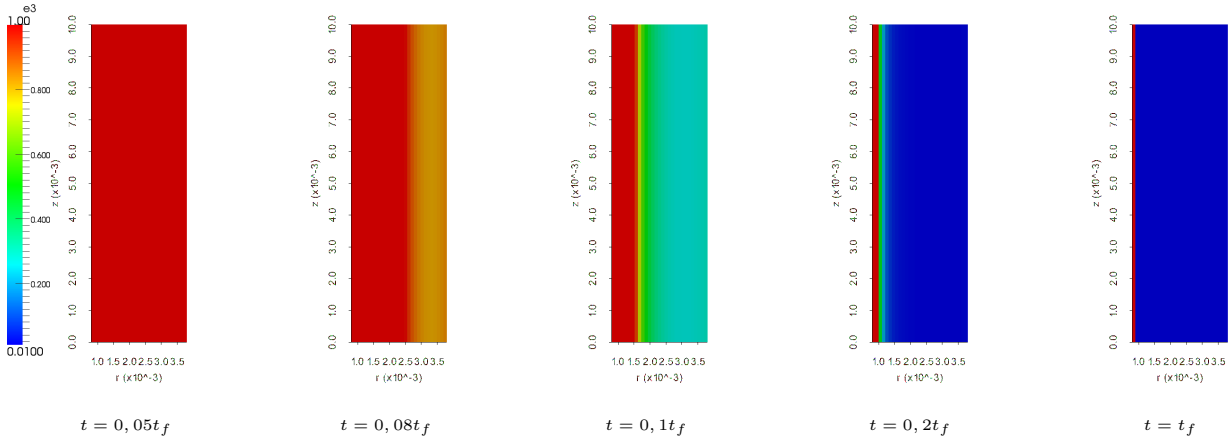


Рис. 11. Функция памяти e_3 в различные моменты времени в квазиодномерном тесте

На рис. 12 приведены распределения напряжений σ_{33} в соответствующие моменты времени. Виден фронт распространения трещины — максимум напряжения на границе послепиковой зоны, хорошо заметный начиная с момента времени $t = 0,1t_f$. Заметим, что с расширением растрескавшейся области общий уровень напряжений вне фронта распространения трещины понижается практически до нуля.

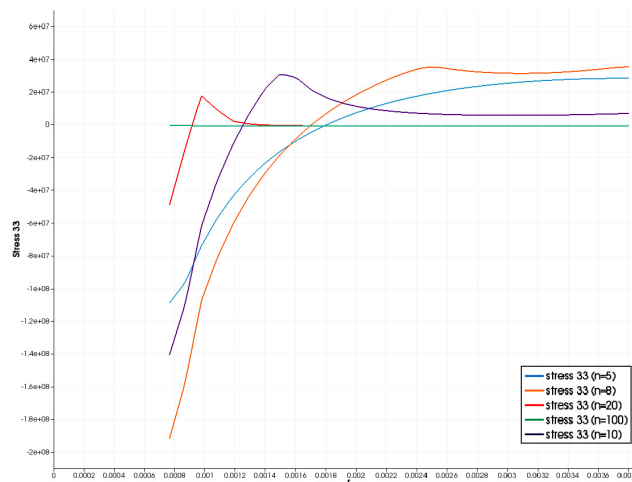


Рис. 12. Напряжения σ_{33} в различные моменты времени в квазиодномерном тесте

4. Задача о растрескивании топливной таблетки

Применим построенную модель размазанных трещин к моделированию разрушения топливной таблетки. Диоксид урана UO_2 обладает следующие

ми физическими характеристиками [18]:

- плотность $\rho = 10800 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$,
- модуль Юнга $E = 1,75 \cdot 10^{11} \text{ Па}$,
- коэффициент Пуассона $\nu \simeq 0,316$,
- теплопроводность $\lambda = 3,487 \frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot \text{К}}$,
- удельная теплоемкость $c_\varepsilon = 310 \frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot \text{К}}$,
- предел прочности $\sigma_f = 1,1 \cdot 10^8 \text{ Па}$,
- коэффициент теплового расширения $\alpha = 10^{-5} \text{ К}^{-1}$,

температуру естественного состояния примем равной $T_0 = 300 \text{ К}$.

Для полного описания трещин в таблетке недостаточно двумерной постановки, поэтому рассмотрим два сечения: сечение горизонтальной плоскостью, позволяющее проанализировать радиальные и полярные трещины, а также сечение вертикальной плоскостью, содержащей ось O_z , в котором можно отследить развитие поперечных трещин.

Будем считать, что, если не оговорено иное, при переходе на следующий временной слой температура внутри и снаружи таблетки меняется по линейному закону, причем таким образом, чтобы на внутреннем радиусе температура возрастала до $T_a = 1700 \text{ К}$, а на внешнем — до $T_b = 600 \text{ К}$ на последнем временном слое при $t = t_f$, где t_f — время окончания расчета:

$$\begin{aligned} T(r_a, z, t) &= (T_a - T_0) \frac{t}{t_f} + T_0, \\ T(r_b, z, t) &= (T_b - T_0) \frac{t}{t_f} + T_0. \end{aligned} \tag{19}$$

Зависимость температуры от пространственных координат $T(x_1, x_2, t_n)$, где $x_1, x_2 = r, z$ в осесимметричной постановке, x, y — в двумерной постановке, задается на каждом временном слое с номером n .

4.1. Распространение трещин в горизонтальном сечении

Рассмотрим сечение топливной таблетки горизонтальной плоскостью. Оно представляет собой кольцо с внутренним радиусом $r_a = 0,8 \text{ мм}$, внешним радиусом $r_b = 3,8 \text{ мм}$. Для предотвращения его вращения закрепим его в одной точке на горизонтальной оси по вертикали и на вертикальной оси по горизонтали, как показано на рис. 13. Остальные границы будем считать свободными.

Будем решать данную задачу в координатах (x, y) . Двумерный вектор перемещений обозначим $\vec{u} = (u, v)^T$. Граничные условия в данном случае имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} u(0, r_a) = v(-r_a, 0) = 0; \\ \sigma|_{x^2+y^2=r_a^2} = \sigma|_{x^2+y^2=r_b^2} = 0. \end{aligned}$$

Температуры $T_1(t)$ и $T_2(t)$ на границах выберем в соответствии с (19); будем считать ее зависящей от радиуса кольца ($r = \sqrt{x^2 + y^2}$) по следующему закону [19]:

$$T(x, y, t) = \frac{T_1(t) \ln \frac{r_b}{r} - T_2(t) \ln \frac{r_a}{r}}{\ln \frac{r_b}{r_a}}.$$

При таком задании граничных условий и нагрузок при отсутствии анизотропных эффектов для напряжений в зоне упругости (до возникновения трещин) вдали от внутренней границы должна иметь место симметрия относительно общего центра окружностей, задающих границы. Таким образом, имеем двумерную задачу в случае плоского деформированного состояния. В двумерной задаче в общей постановке нет четкого соответствия между координатами и функциями памяти, поэтому в исходной системе координат по уменьшению функции памяти можно говорить лишь о наличии трещины ортогонально одному из главных направлений тензора деформаций и общем ослаблении прочностных характеристик материала. По виду одной из функций памяти нельзя судить обо всех размазанных трещинах в области. Местоположение всех зон ослабленного материала показывает величина $\min \{e_1, e_2\} \in [0, 01, 1]$. На рис. 15 показаны распределения величины $\min \{e_1, e_2\}$ на различных временных слоях, видны зоны размазанных трещин.

На рис. 15 в центральном ряду и справа показаны напряжения σ_{11} и σ_{22} в моменты времени, соответствующие выбранным для e_1 и e_2 временным слоям. При $t \geq 0,1t_f$ видно влияние трещин на поле напряжений. Наибольшие значения напряжений возникают вблизи границ размазанных трещин, что объясняет дальнейшее увеличение ослабленной области. Напряжения имеют порядок 10^7 Па, что не превышает известный из экспериментов уровень напряжений в топливной таблетке [18].

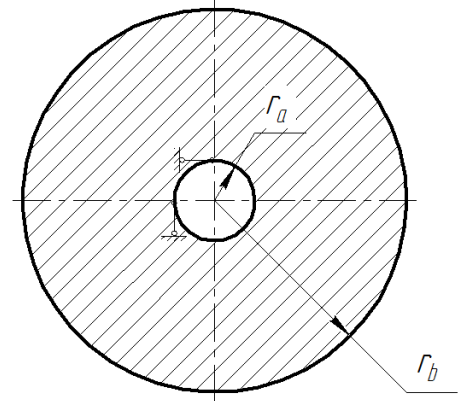


Рис. 13. Расчетная схема для задачи о растрескивании горизонтального сечения таблетки

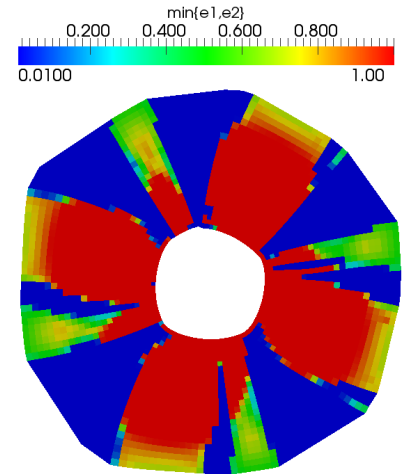


Рис. 14. Величина $\min \{e_1, e_2\}$ в деформированной области на момент окончания расчета

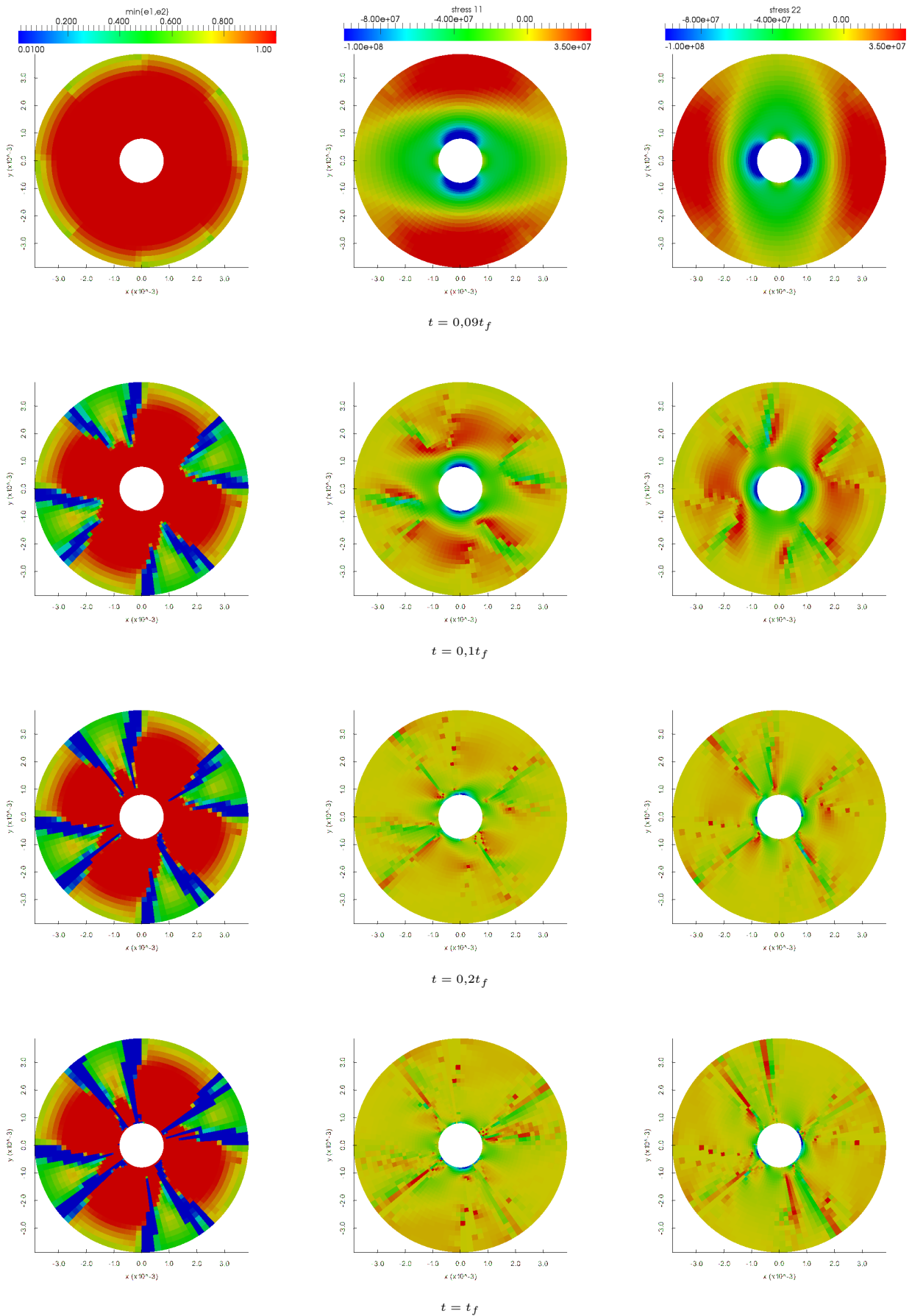


Рис. 15. Величина $\min\{e_1, e_2\}$ и напряжения σ_{11} и σ_{22} в различные моменты времени

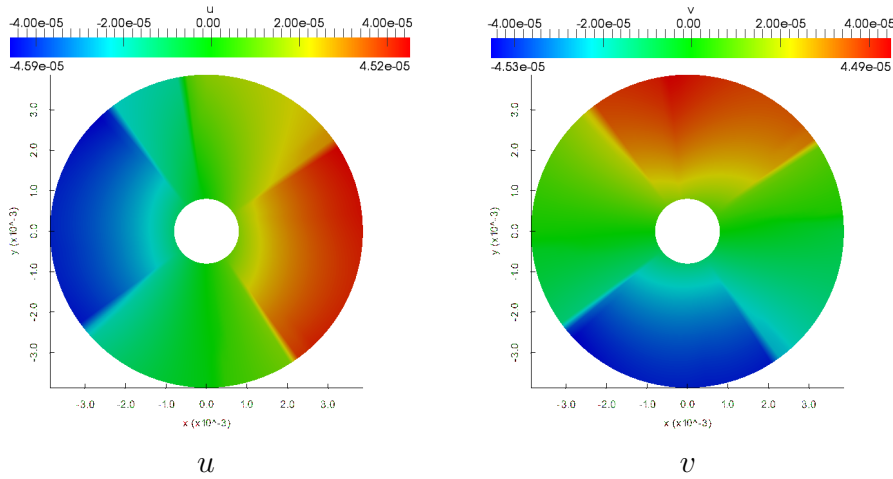


Рис. 16. Перемещения на момент окончания расчета в горизонтальном сечении таблетки

Расположение трещин хорошо видно на рис. 16 и рис. 14, где показаны перемещения u (слева) и v (справа) и приведена деформированная область с изображенными на ней размазанными трещинами на момент окончания расчета. Видны 8 радиальных трещин, которые соответствуют разрывам компонент перемещений.

4.2. Распространение трещин в вертикальном сечении

Пренебрежем наличием фаски в таблетке и будем решать осесимметричную задачу. В качестве расчетной области рассмотрим половину сечения таблетки вертикальной плоскостью, проходящей через O_z . Расчетная область изображена на рис. 17.

Зафиксируем основание таблетки по вертикали, остальные границы области будем считать свободными. Вектор перемещений, как и в квазиодномерной задаче, обозначим $\vec{u} = (u, w)^T$. Граничные условия для данной задачи в координатах (r, z) имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} w|_{z=0} &= 0; \\ \sigma|_{r=r_a} &= \sigma|_{r=r_b} = \sigma|_{z=h} = 0. \end{aligned}$$

Будем считать, что температура распределена по пространству линейно на каждом временном слое. Выберем $T_1(t)$ и $T_2(t)$ в соответствии с (19), тогда поле температуры зададим следующим образом:

$$T(r, z, t) = \frac{T_1(t) - T_2(t)}{r_a - r_b} r + \frac{T_2(t)r_a - T_1(t)r_b}{r_a - r_b}.$$

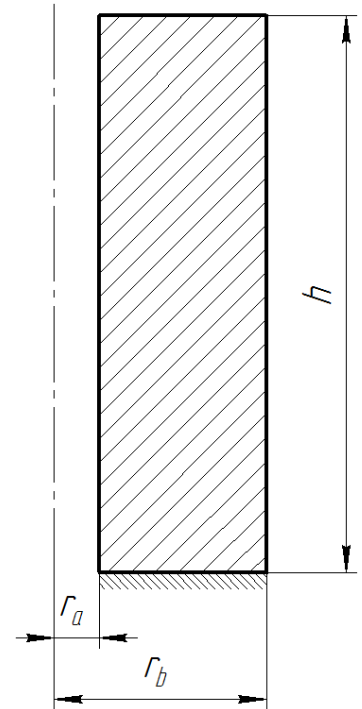


Рис. 17. Расчетная область

Вначале рассмотрим задачу в данной постановке с размерами области, соответствующими размерам топливной таблетки ($r_a = 0,8$, $r_b = 3,8$), затем будем исследовать зависимость рисунка трещин от размеров.

4.2.1. Результаты численного моделирования

На рис. 18, рис. 20, рис. 21 приведены распределения функций памяти e_1 , e_2 , e_3 в различные моменты времени (для e_1 $t = 0,25t_f$, t_f , для e_2 и e_3 $t = 0,07t_f$, $0,11t_f$, $0,17t_f$, $0,25t_f$, t_f) на сетке из 20000 точек. Заметим, что на более ранних временах функция e_1 всюду равна единице, и лишь впоследствии, когда трещина сформировалась, появляются растрескавшиеся области. Это связано с отсутствием областей растяжения в первом главном направлении тензора деформаций до тех пор, пока трещина не сформировалась полностью в данной области. В зоне ослабленного материала в одном направлении в модели размазанных трещин поле напряжения теряет гладкость, и поэтому в данном направлении возможны появление растягивающих напряжений и выполнение критерия образования трещины.

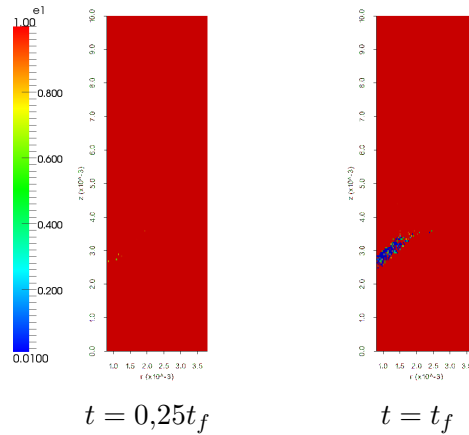


Рис. 18. Функция памяти e_1 в различные моменты времени

Функция памяти e_2 на рис. 18 показывает местоположение трещины в таблетке, серия рисунков, соответствующих разным временным слоям, позволяет проследить развитие трещины. Зона ослабленного материала вначале возникает в обширной зоне, где деформации в одном из главных направлений превышают значение деформации ε_f , соответствующее условному пределу прочности σ_f . В результате этого в данной зоне в одном из главных направлений, слабо отклоняющемся от направления вертикальной оси, возникает поле полных деформаций за вычетом температурных, имеющее глобальный максимум и близкий к нему локальный максимум, превышающие ε_f . Магистральная трещина возникает на месте этих максимумов. Деформации вдоль прямой $r = r_b$ показаны на рис. 19.

Магистральная трещина образуется при достаточно низких температурах (на левой границе $T \sim 400$ К), в дальнейшем происходит незначительный по

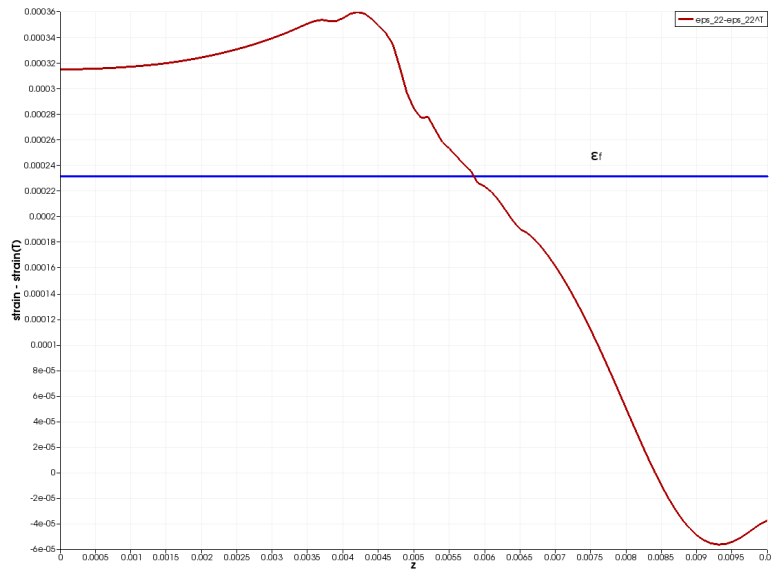


Рис. 19. Зависимость $\epsilon_{22} - \epsilon_{22}^T$ от координаты z перед образованием магистральной трещины ($t = 0,07t_f$)

сравнению с первоначальным растрескиванием рост размеров, как видно на рис. 20.

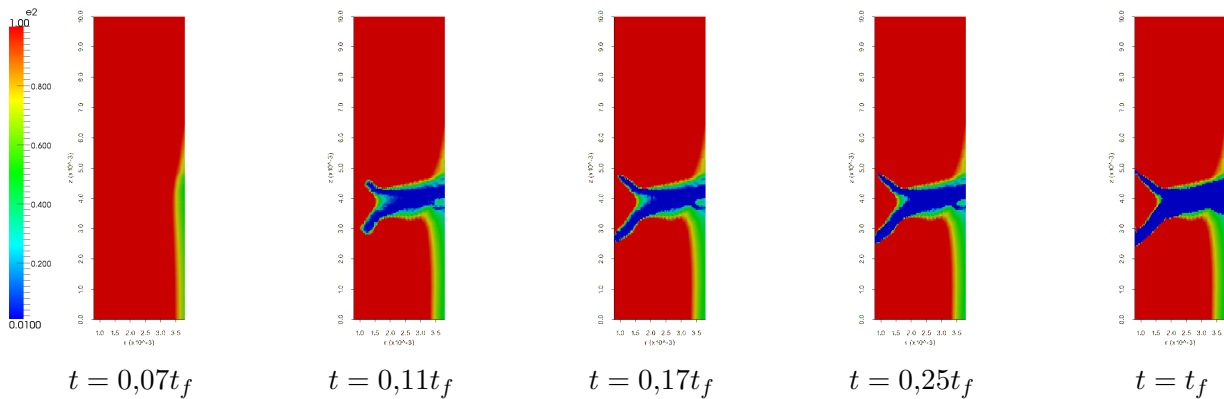
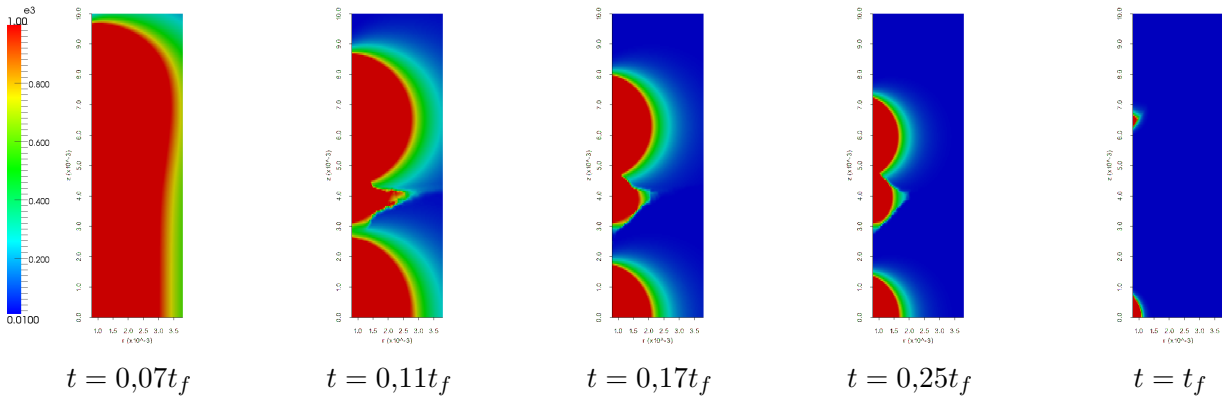


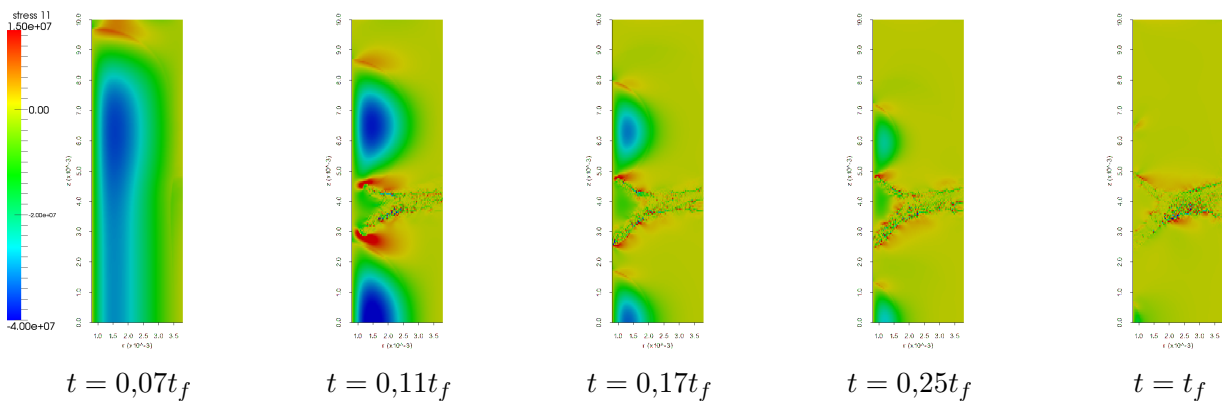
Рис. 20. Функция памяти e_2 в различные моменты времени

Полярное направление при осесимметричной постановке задачи является выделенным; здесь, как и в квазиодномерном тесте, растрескивание происходит независимо от состояния таблетки в плоскости O_{rz} , однако наличие трещины в ней, изменяя прочностные свойства материала, влияет на все деформации и напряжения, поэтому на радиальной трещине можно видеть “след” магистральной трещины в плоскости. Значение деформации ϵ_{33} всегда является главным, в связи с чем по рис. 21 можно однозначно судить о виде трещины, чего нельзя сказать о рис. 18 и рис. 20, где мы видим только элементы, “содержащие” трещину, но не направления трещин.

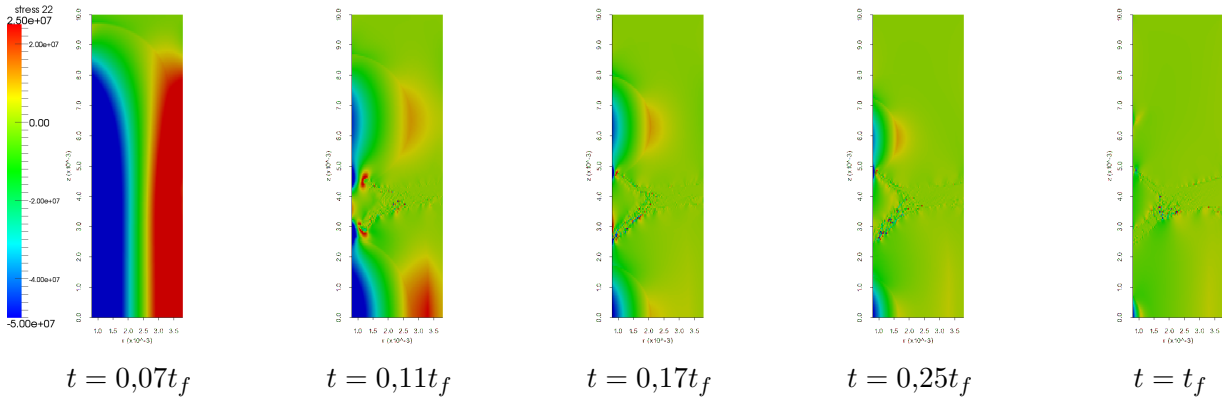
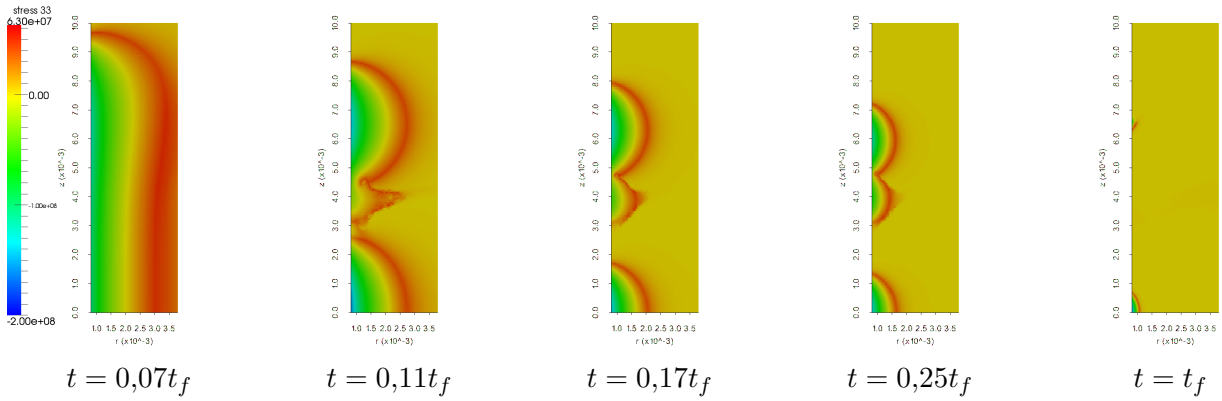
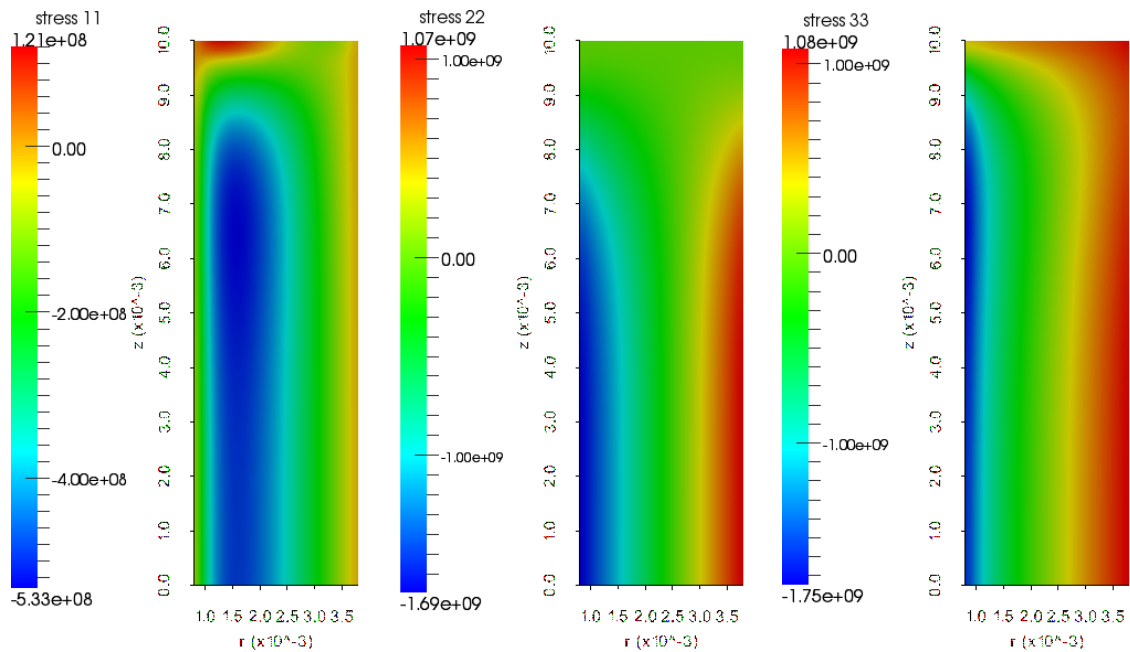
На рис. 22 и рис. 23 изображены компоненты тензора напряжений σ_{11} и σ_{22} соответственно на различных временных слоях. Отметим, что на виде полей напряжений σ_{11} и σ_{22} сказывается наличие трещин во всех направле-

Рис. 21. Функция памяти e_3 в различные моменты времени

ниях: полуокружности вблизи левой границы отделяют нерастрескавшуюся зону в направлении r , видны очертания трещины в плоскости O_{rz} . В момент времени $t = 0,07t_f$ поперечная трещина еще не сформировалась, однако уже видна граница растрескавшегося в радиальном направлении материала. При $t = 0,11t_f$ происходит активный рост поперечной трещины, вблизи ее “растущих” концов напряжения достигают наибольших значений. В дальнейшем этот рост замедляется, и наибольшие значения напряжений достигаются в концентраторах напряжений на границах обеих трещин: плоской и радиальной. Обратим внимание, что наличие трещин значительно разгружает материал. Мелкие трещины со временем сливаются с крупной. В областях, удаленных от трещин, напряжения близки к нулю, а максимумы напряжений имеют порядок 10^7 Па, что на 1-2 порядка меньше, чем без учета трещин (в дальнейшем приведем распределения напряжений в случае решения аналогичной задачи без учета трещин).

Рис. 22. Напряжения σ_{11} в различные моменты времени

На рис. 24 показаны поля напряжений σ_{33} в те же самые моменты времени. Особое внимание обратим на фронт распространения трещины — область наибольших напряжений на границе нерастрескавшейся области, заметную на всех изображениях рис. 24. Очертания фронта в силу особого статуса полярного направления совпадают с областью, где $e_3 = 1$ на рис. 21. Наличие фронта соотносится с развитием трещины при растягивающих напряжениях;

Рис. 23. Напряжения σ_{22} в различные моменты времениРис. 24. Напряжения σ_{33} в различные моменты времениРис. 25. Напряжения σ_{11} , σ_{22} , σ_{33} на момент окончания расчета в модели без учета трещин

в нерастрескавшейся области имеют место сжимающие напряжения. Радиальная трещина, как и в квазиодномерном тесте, распространяется от границы таблетки к ее центру.

Для того чтобы показать, насколько сильно трещины меняют поведение топливной таблетки качественно и количественно, на рис. 25 приведем поля напряжений σ_{11} , σ_{22} , σ_{33} для чисто упругой задачи. Полученные наибольшие напряжения в области без учета трещин являются нефизическими, так как значительно превышают предел прочности UO_2 . Наличие трещин в целом снижает уровень напряжений в области, а также смещает положения максимумов напряжений с границ области к границам трещин. Снижение напряжений в области и приведение их значений к физически возможным является главным эффектом введения математической модели материала, учитывающей наличие трещин.

Заметим, что концепция размазанных трещин позволяет продолжать расчет и после образования магистральной трещины без изменения сетки и геометрии области, когда на самом деле компоненты перемещений терпят разрыв и происходит образование новых границ. Безусловно, данная модель не способна описать саму трещину точно, однако она передает влияние трещины на состояние топливной таблетки.

4.2.2. Зависимость картины распространения трещин от размера тела

Более подробно исследуем полученную модель размазанных трещин. Будем решать осесимметричную задачу в области, где размеры r_a и r_b совпадают с предыдущими значениями, а высота больше исходной в 3 раза; зависимость температуры от времени и пространства не изменилась. Поскольку качественная зависимость от времени аналогична предыдущему случаю, приведем результаты лишь для одного временного слоя, на котором основные магистральные трещины уже сформировались (например, при $t = 0,17t_f$).

На рис. 26 показаны распределения функций памяти e_1 , e_2 , e_3 на данном временном слое. По центру изображено распределение функции памяти e_2 , по которому можно судить о наличии большого количества поперечных трещин. Аналогично предыдущему случаю, их образование связано с превышающими значение ε_f максимумами функции зависимости полных деформаций за вычетом температурных в главном направлении, которое в области начала их образования слабо отклоняется от направления вертикальной оси. Отметим, что форма верхней трещины практически совпадает с формой единственной трещины в предыдущем случае, а остальные возникают на следующем временном шаге в связи с влиянием первой на поле деформаций. На рис. 27 приведена зависимость деформаций вдоль прямой $r = r_b$ на временном слое после образования первой трещины.

В отличие от предыдущего случая, здесь мы видим наличие новых локальных максимумов, которые приводят к образованию областей ослабления материала, похожих по форме на область, возникающую первой.

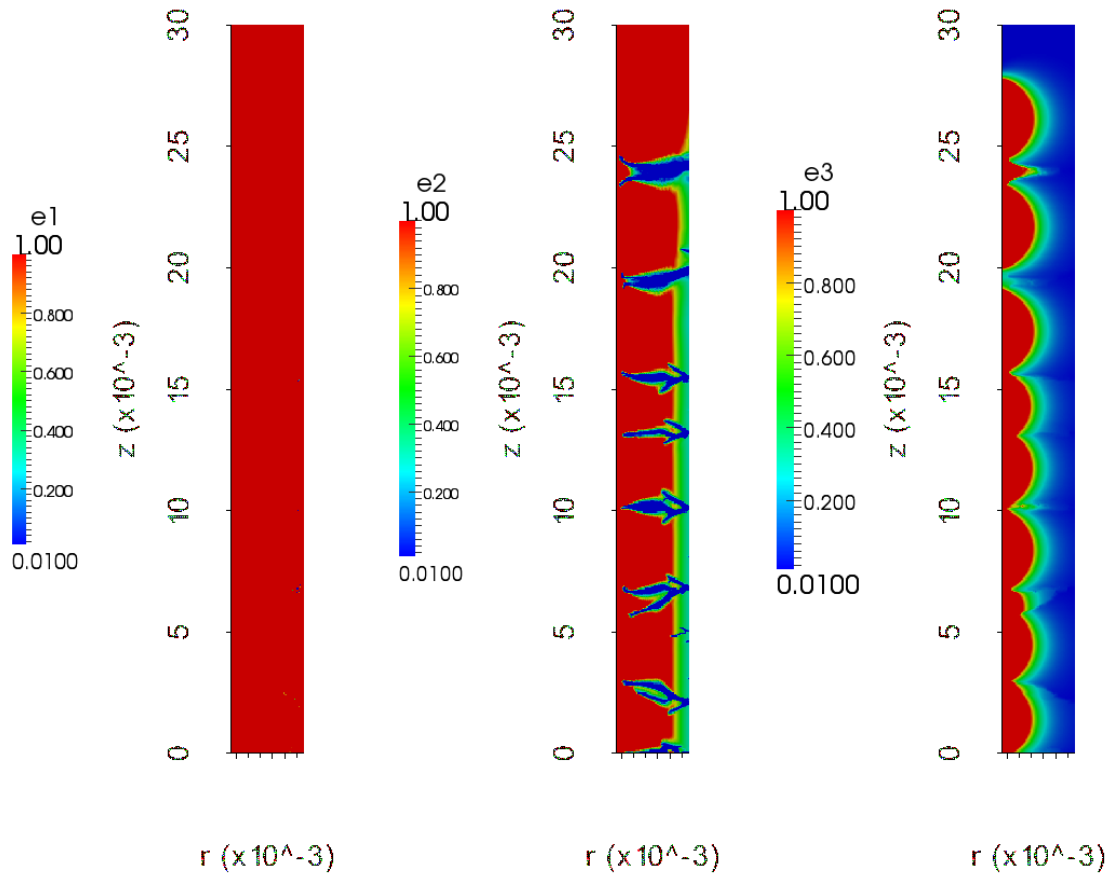


Рис. 26. Функции памяти e_1 , e_2 , e_3 в момент времени $t = 0,17t_f$

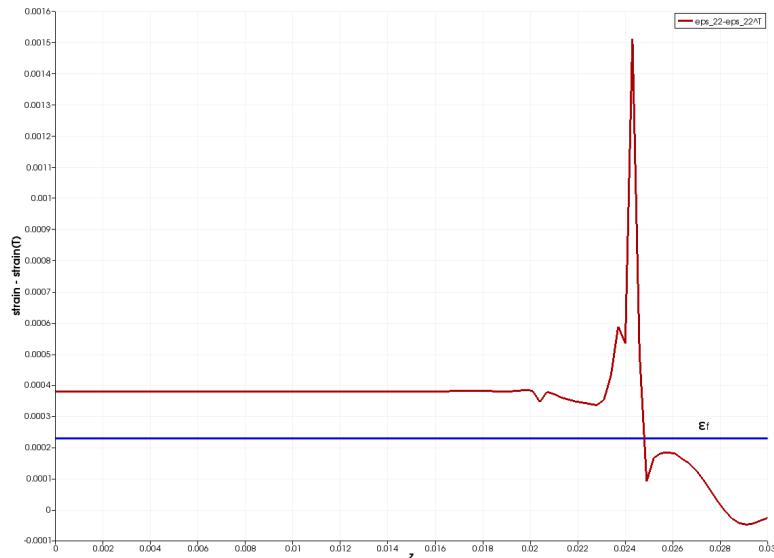


Рис. 27. Зависимость $\varepsilon_{22} - \varepsilon_{22}^T$ от координаты z после образования первой магистральной трещины ($t = 0,08t_f$)

Функция памяти e_3 , отвечающая за радиальную трещину, подвергается в связи с изменением напряжений и деформаций в области влияния поперечных трещин: нерастрескавшаяся область делится на части в местах их

возникновения.

На рис. 28 изображены компоненты тензора напряжений в тот же момент времени. Как и в случае области с размерами топливной таблетки, общий уровень напряжений уменьшается, видны “следы” поперечных трещин на рисунках, соответствующих компонентам σ_{11} (слева) и σ_{22} (справа). Области наибольшего напряжения смещены к границам трещин, а на изображении, соответствующем σ_{33} (справа), заметен фронт распространения трещины, имеющий негладкую форму, обусловленную в том числе и формой областей ослабленного материала в плоскости O_{rz} .

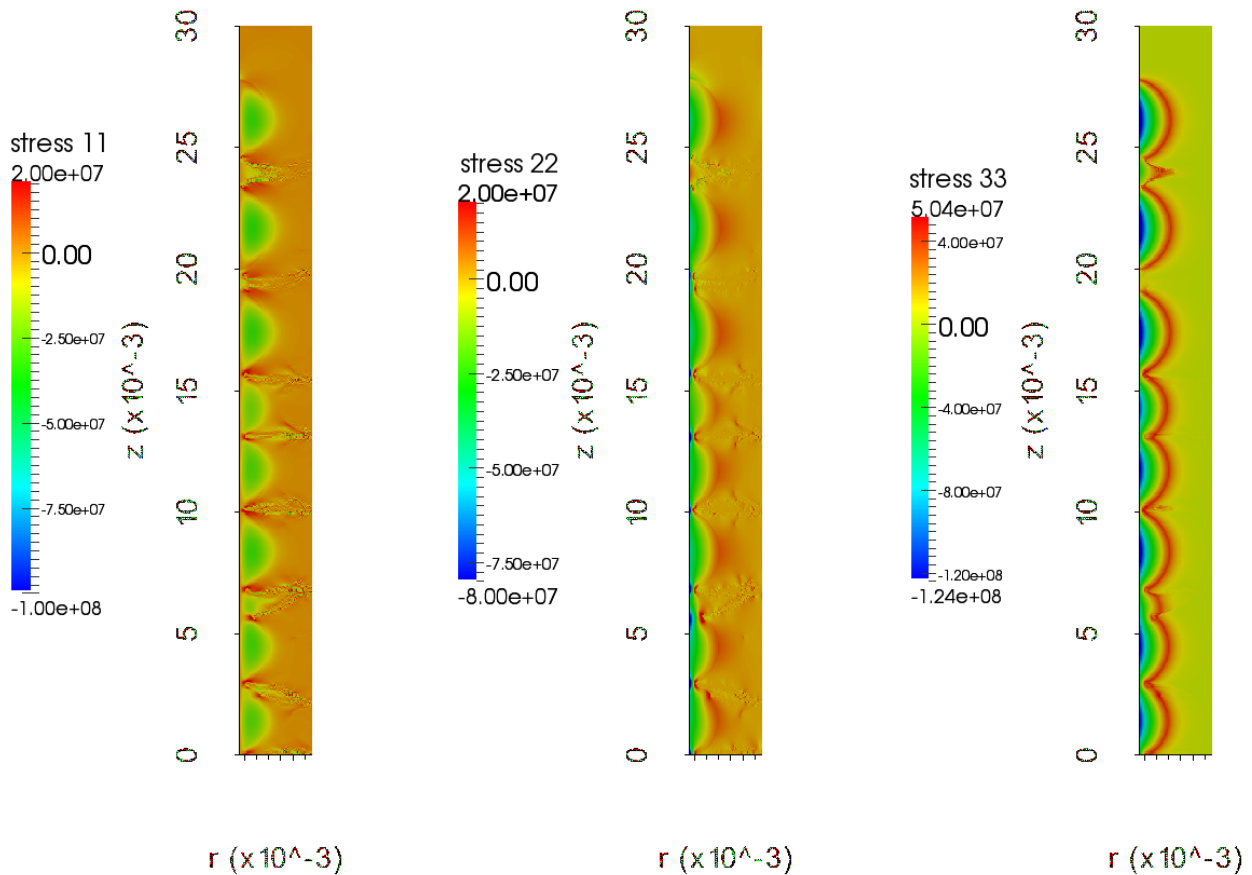


Рис. 28. Напряжения σ_{11} , σ_{22} , σ_{33} в момент времени $t = 0,17t_f$

В целом результаты математического моделирования для области с измененными размерами аналогичны результатам для исходной области.

Рассмотрим также результаты численного моделирования в области, внешний радиус которой увеличен на 3 мм по сравнению с исходной. Будем рассматривать результаты на том же временном слое, что и результаты предыдущей задачи, при $t = 0,17t_f$.

На рис. 29 изображены распределения функций памяти e_1 , e_2 , e_3 . В данном случае поперечная трещина расположена в окрестности прямой $z = 0$. Как и ранее, рассмотрим распределение деформаций в момент времени перед образованием магистральной трещины. Оно показано на рис. 30. Обратим внимание на отличную от предыдущих случаев зависимость деформаций от

координаты z : теперь зависимость деформаций достигает наибольшего значения вблизи нуля, слева от глобального максимума локальных максимумов быть не может.

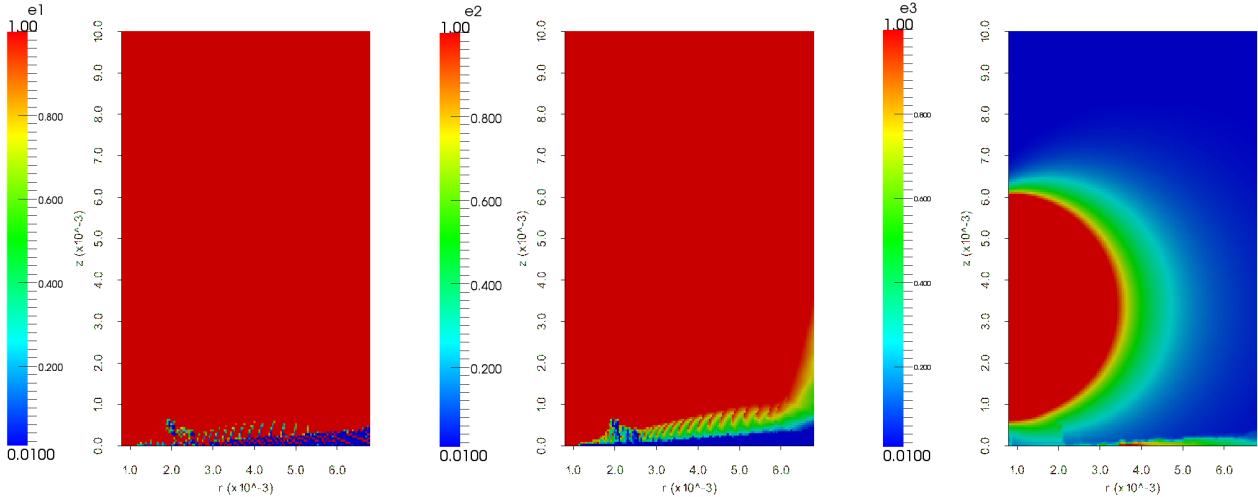


Рис. 29. Функции памяти e_1 , e_2 , e_3 в момент времени $t = 0,17t_f$

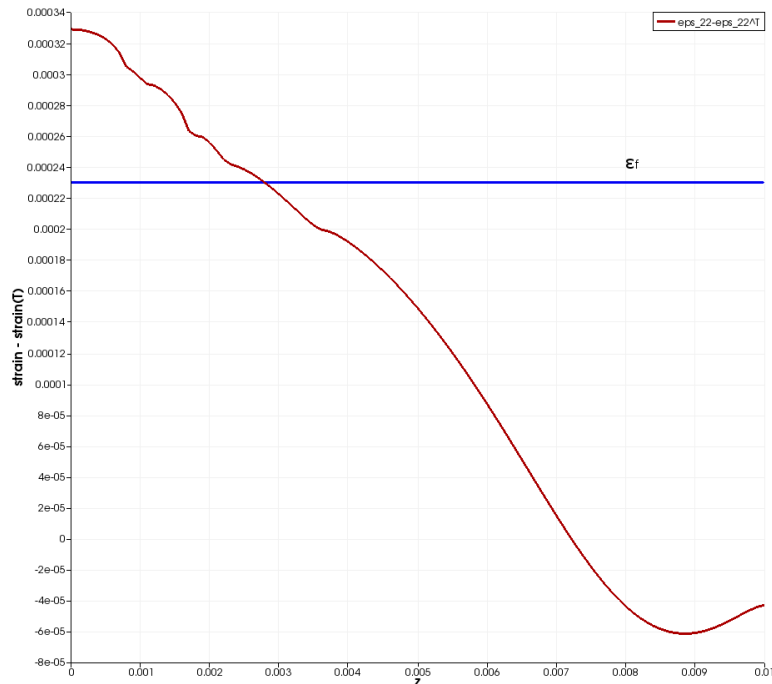


Рис. 30. Зависимость $\varepsilon_{22} - \varepsilon_{22}^T$ от координаты z после образования первой магистральной трещины ($t = 0,08t_f$)

В данном случае развивается единственная трещина вблизи нижней границы области. Если сравнить ее с трещиной в исходной постановке задачи, то можно заметить, что она подобна ее верхней половине. Также на рис. 29 (по центру) можно найти соответствие между верхней ветвью трещины на рис. 20 (по центру). Функция памяти e_3 , как и ранее, испытывает влияние функции

e_2 и имеет ожидаемый вид: нерастрескавшаяся область “делится” поперечной трещиной, однако в силу геометрии области видна ее единственная часть.

На рис. 31 приведены распределения напряжений σ_{11} , σ_{22} , σ_{33} . Их вид согласуется с видом e_1 , e_2 , e_3 , значения не превышают предел прочности материала и имеют тот же порядок, что и ранее.

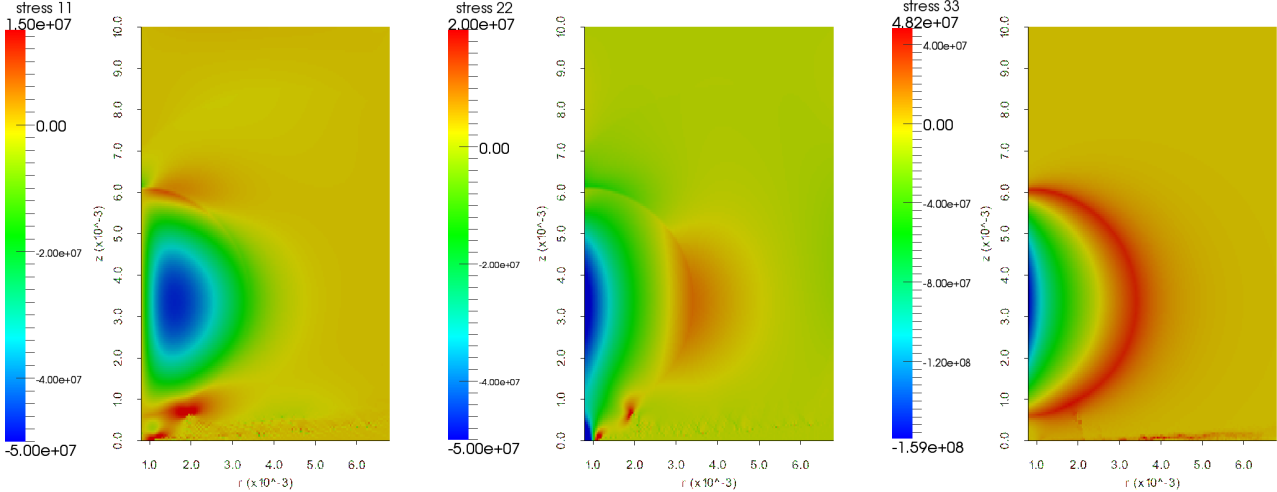


Рис. 31. Напряжения σ_{11} , σ_{22} , σ_{33} в момент времени $t = 0,17t_f$

4.2.3. Исследование зависимости результатов численного моделирования от шага сетки

Исследуем зависимость вида трещин и состояния растрескавшегося материала от шага сетки. Рассмотрим задачу в области с исходными размерами на трех сетках: крупной (число точек $M = 5000$), средней ($M = 20000$) и мелкой ($M = 80000$). Приведем результаты для одного временного слоя ($t = 0,17t_f$). Распределение e_1 имеет тот же вид, как и в предыдущих случаях, — $e_1 = 1$ почти во всей области. На рис. 32 показаны распределения e_2 на крупной (слева), средней (по центру), мелкой (справа) сетках. Отметим, что имеются качественные различия в виде распределения в зависимости от сетки. Это различие связано с эффектом “размазывания” трещин и использованием билинейных функций формы в методе конечных элементов, в связи с чем деформации и напряжения являются постоянными на элементе.

Обратим внимание, однако, что местоположение первой трещины на всех изображениях рис. 32 совпадает, отличаются лишь вторичные эффекты; при уменьшении шага сетки имеет место сходимость к некоторому состоянию, в котором присутствует одна поперечная трещина с двумя ветвями на конце.

Распределение функции памяти e_3 при $t = 0,17t_f$ показано на рис. 33. Так как вид e_3 зависит от вида e_1 и e_2 , то и здесь на крупной сетке имеется качественное отличие от остальных случаев: в области возникновения поперечной трещины вблизи внутреннего радиуса нет зоны нерастрескавшегося материала, обусловленной наличием двух ветвей поперечной трещины

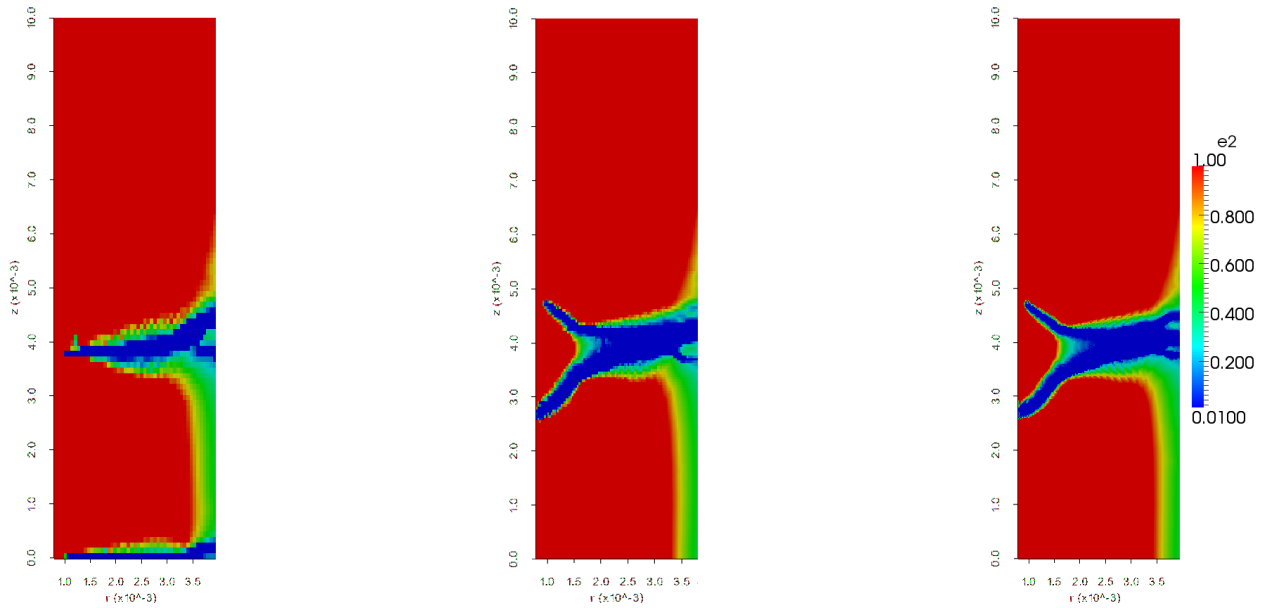


Рис. 32. Функция памяти e_2 в момент времени $t = 0,17t_f$ на различных сетках

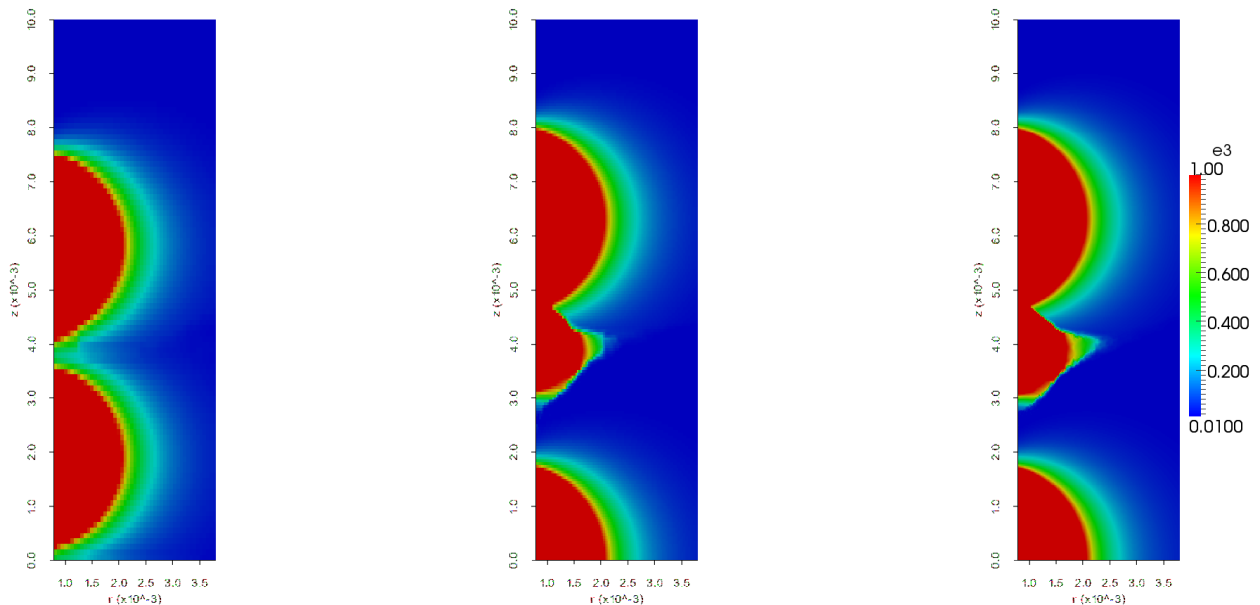


Рис. 33. Функция памяти e_3 в момент времени $t = 0,17t_f$ на различных сетках

на более мелких сетках.

На рис. 34 и рис. 35 изображены распределения компонент σ_{11} , σ_{33} соответственно тензоров напряжений на различных сетках. Поскольку напряжения σ_{11} и σ_{22} имеют похожий вид, не будем приводить результаты для σ_{22} . В связи с различным видом функций памяти вид напряжений также различается. Результаты намеренно приведены в одних масштабах для каждой сетки, чтобы показать, что значения максимумов и минимумов напряжений отличаются мало, то есть эффективный учет трещин в этом смысле приносит результаты и на крупной сетке.

Поскольку все эффекты образования и развития трещины зависят от де-

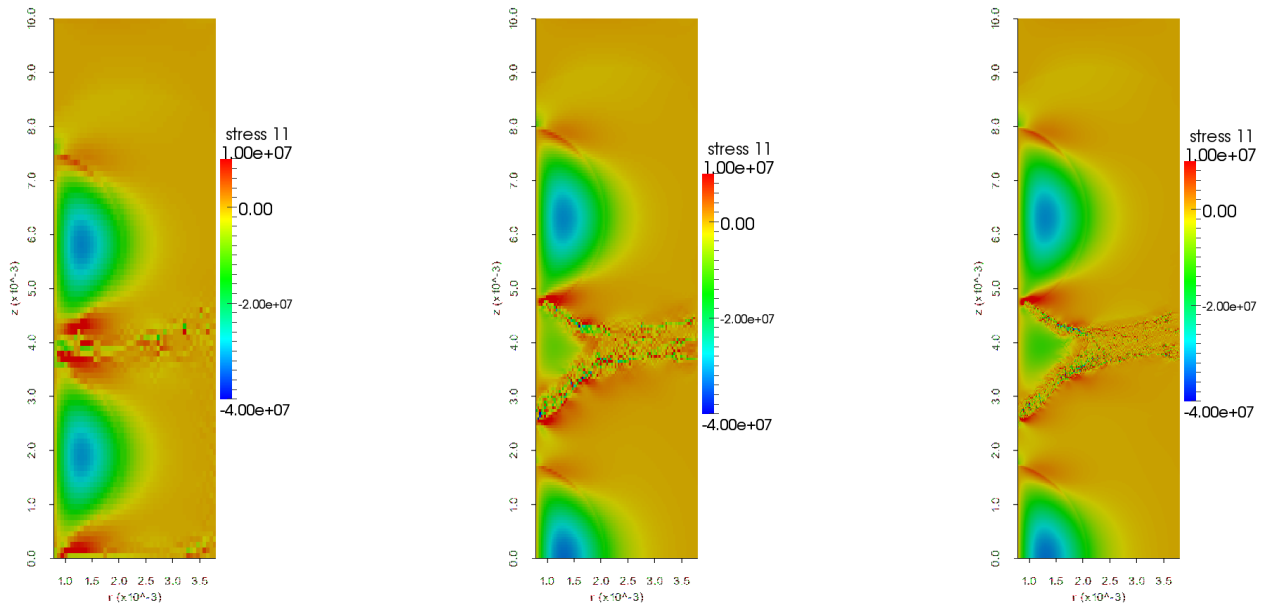


Рис. 34. Напряжения σ_{11} в момент времени $t = 0,17t_f$ на различных сетках

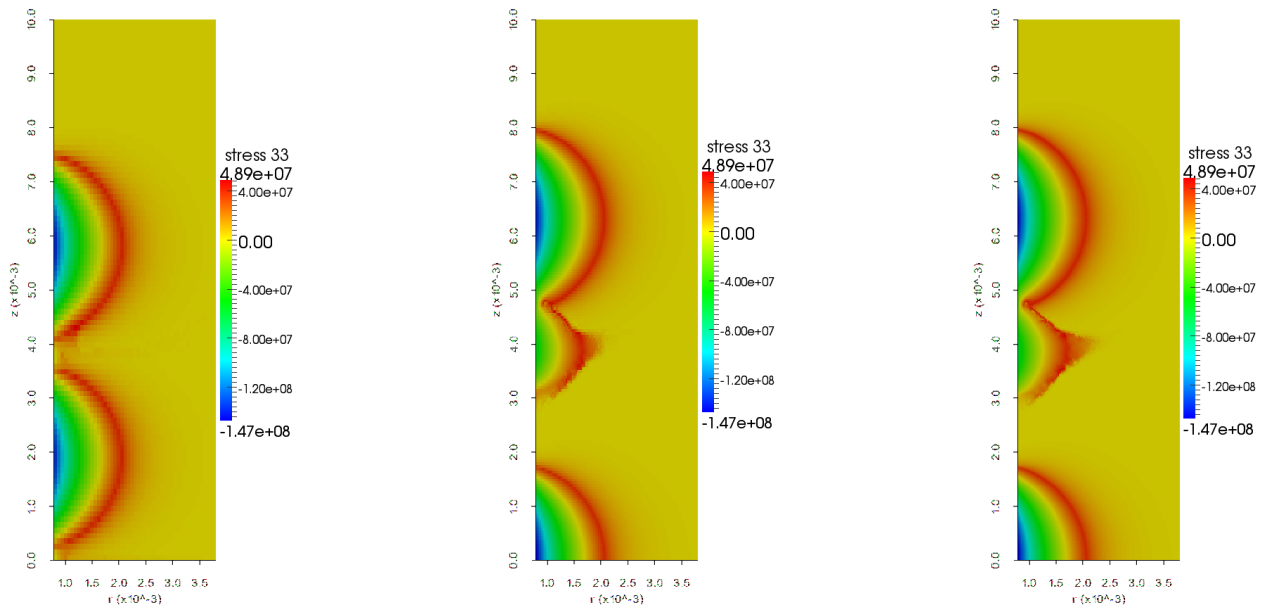


Рис. 35. Напряжения σ_{33} в момент времени $t = 0,17t_f$ на различных сетках

формаций, первый порядок в методе конечных элементов может приводить к качественным различиям результатов на крупной и более мелких сетках. Однако трещины учитываются эффективно, поэтому важно не столько их расположение, сколько их влияние на напряженно-деформированное состояние материала, и о работоспособности модели стоит судить по значениям напряжений.

На рис. 36 приведены модули перемещений $\|\vec{u}\|$ на различных сетках при $t = 0,17t_f$. Заметим, что наибольшие значения модулей перемещений совпадают с точностью до 2%, а наименьшие значительно отличаются лишь на крупной сетке (слева) в области, где присутствует вторая фиктивная трещи-

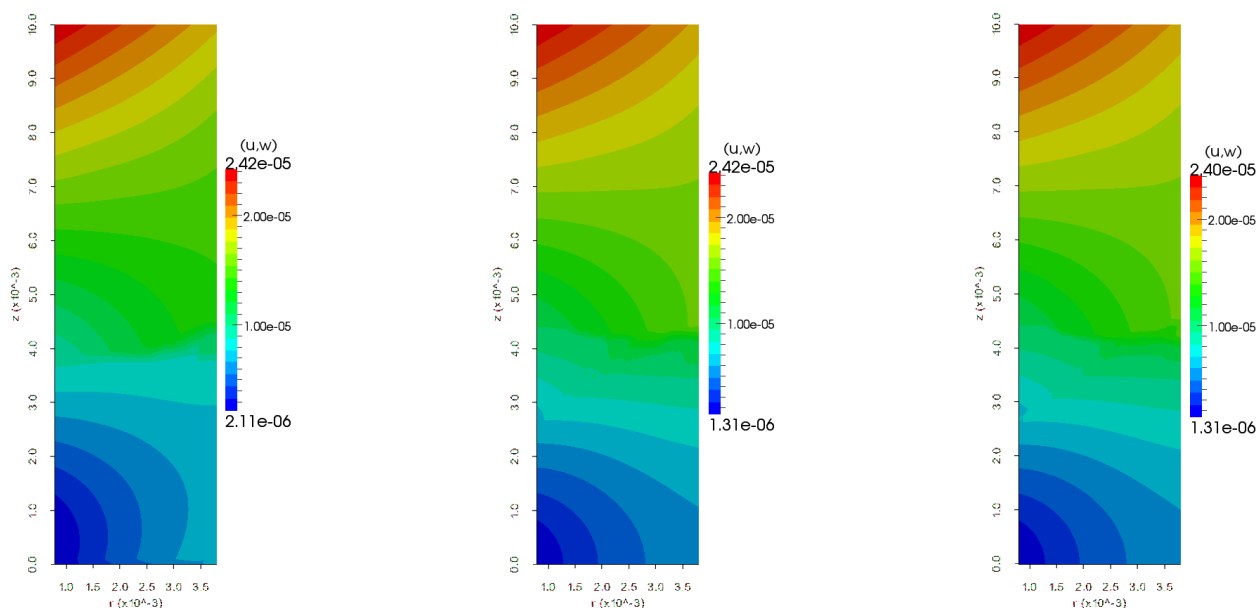


Рис. 36. Модуль перемещений $\|\vec{u}\|$ в момент времени $t = 0,17t_f$ на различных сетках

на (в окрестности $z = 0$). Вид изолиний также совпадает за исключением этой области.

5. Заключение

Для моделирования процесса разрушения ядерного топлива из диоксида урана UO_2 нами рассмотрена концепция размазанных трещин как наиболее просто интегрируемая в описание процессов с помощью математических моделей механики сплошной среды. Выбранная концепция также является более выгодной в вычислительном отношении, нежели любая из моделей, непосредственно отслеживающих развитие магистральных трещин, в силу отсутствия необходимости перестроения сетки и задания новых граничных условий.

Построенная математическая модель разрушения может быть использована при моделировании хрупких материалов, когда необходимо учесть влияние наличия трещин в материале на его прочностные характеристики: способность передавать напряжения в определенном направлении, упругие коэффициенты, предел прочности. В одномерном случае показана работоспособность данной модели при знакопеременном нагружении. Одномерная модель обобщена на многомерный случай.

Разработан конечноэлементный программный комплекс на языке программирования Fortran 90, в котором можно решать одномерные и двумерные задачи упругости, термоупругости и хрупкого разрушения по описанным механизмам в различных постановках.

Проведено математическое моделирование разрушения топливной таблетки в осесимметричной задаче, описывающей напряженно-деформированное

состояние вертикального сечения таблетки, и двумерной задаче, описывающей горизонтальное сечение. Показано, что эффективный учет трещин в горизонтальном сечении таблетки дает качественный результат, соответствующий имеющимся экспериментальным данным: размазанные трещины распространяются в радиальном направлении. Использование модели размазанных трещин в осесимметричной задаче привело к снижению уровня напряжений по сравнению с чисто термоупругим случаем примерно на 2 порядка; качественные физические эффекты, такие как наличие фронта распространения трещины и наличие концентраторов на границе трещин, присутствуют. Проведено исследование зависимости результатов вычислений от размеров области и параметров сетки, показана сходимость при уменьшении шага сетки.

Применение описанной модели размазанных трещин приводит к физически непротиворечивым результатам и позволяет эффективно учитывать наличие трещин в материале, не отслеживая разрывы физических характеристик, возникающих в реальной трещине.

Список литературы

- [1] Феодосьев В.И. Сопротивление материалов. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 1999. 592 с.
- [2] Качанов Л.М. Основы механики разрушения. М.: Наука, 1974. 312 с.
- [3] Besson J., Cailletaud G., Chaboche J.-L., Forest S., Bletry M. Non-linear Mechanics of Materials. Springer, 2010. 450 p.
- [4] Lemaitre J. A Course on Damage Mechanics. Springer, 1996. 228 p.
- [5] Dahlblom O., Ottosen N.S. Smearred Crack Analysis of Concrete Using a Nonlinear Fracture Model // Fracture Mechanics of Concrete. Nordic Seminar Held at Division of Building Materials, November 6, 1986, p. 31–46.
- [6] Hillerborg A. Application of the Fictitious Crack Model to Different Types of Materials. Lund Institute of Materials, Lund, Sweden, 1990, p. 95-102.
- [7] Фрост Б. ТВЭЛы ядерных реакторов: пер. с англ. М.: Энергоатомиздат, 1986. 248 с.
- [8] Marchal N., Campos C., Garnier C. Finite element simulation of Pellet-Cladding Interaction (PCI) in nuclear fuel rods // Computational Materials Science. 2009. 45. Pp. 821–826.
- [9] Ядерное топливо // ru.wikipedia.org: Википедия: свободная энциклопедия. 2013. URL: http://ru.wikipedia.org/wiki/Ядерное_топливо (дата обращения: 12.12.2013).

- [10] Семерикова М.А. Математическое моделирование разрушения хрупкого материала в связанной задаче термоупругости // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Естественные науки. 2012. Спец. выпуск №2 «Математическое моделирование в технике». С. 187–196.
- [11] Семерикова М.А. Математическое моделирование хрупкого материала под действием тепловых нагрузок. // Молодежный научно-технический вестник. 2013. Вып. 3. URL: <http://sntbul.bmstu.ru/doc/563884.html> (дата обращения: 05.05.2013).
- [12] Архитектура программной платформы сопровождения вычислительного эксперимента Теметос / М.П. Галанин [и др.] // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2013. № 99. 23 с. URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2013-99>.
- [13] Зарубин В.С., Кувыркин Г.Н. Математические модели термомеханики. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002. 168 с.
- [14] Bathe K.-J. Finite Element Procedures. Prentice-Hall, 1996. 1037 p.
- [15] Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике. М.: Мир, 1975. 543 с.
- [16] Fuel Analysis and Licensing Code:FALCON MOD01, Volume 1: Theoretical and Numerical Bases. Final Report, December 2004.
- [17] Малинин Н.Н. Прикладная теория пластичности и ползучести. М.: Машиностроение, 1975. 400 с.
- [18] SCDAP/RELAP5/MOD3.1 Code Manual, Volume IV: MATPRO — A Library of Materials. Properties for Light-Water-Reactor Accident Analysis, Idaho, 1993, 681 p.
- [19] Тимошенко С.П., Гудьер Дж. Теория упругости. М.: Наука, 1975. 576 с.

Содержание

1. Введение	3
2. Математическая модель	4
3. Моделирование разрушения	5
3.1. Идея модели размазанных трещин	6
3.2. Одномерная модель	8
3.2.1. Тестовая задача	9
3.2.2. Результаты	9
3.3. Многомерная модель	11
3.3.1. Конечноэлементная постановка задачи	14
3.4. Тестовая квазиодномерная задача	15
3.4.1. Результаты	15
4. Задача о растрескивании топливной таблетки	17
4.1. Распространение трещин в горизонтальном сечении	18
4.2. Распространение трещин в вертикальном сечении	21
4.2.1. Результаты численного моделирования	22
4.2.2. Зависимость картины распространения трещин от размера тела	26
4.2.3. Исследование зависимости результатов численного моделирования от шага сетки	30
5. Заключение	33
Список литературы	34