



ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 15 за 2013 г.



**Березин А.В., Воронцов А.С.,
Воропаев И.Д., Марков М.Б.,
Садовничий Д.Н.**

Дифракция плоской
электромагнитной волны:
постановка задачи

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Дифракция плоской электромагнитной волны: постановка задачи / А.В.Березин [и др.] // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2013. № 15. 18 с. URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2013-15>

**Ордена Ленина
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М.В.Келдыша
Российской академии наук**

**А.В. Березин, А.С. Воронцов, И.Д. Воропаев,
М.Б. Марков, Д.Н. Садовничий**

**Дифракция плоской электромагнитной
волны: постановка задачи**

Москва — 2013

А.В. Березин, А.С. Воронцов, И.Д. Воропаев, М.Б. Марков, Д.Н. Садовничий

Дифракция плоской электромагнитной волны: постановка задачи

Рассмотрена постановка задачи Коши для уравнений Максвелла, описывающих дифракцию плоской волны на трехмерном объекте. Построена эффективная плотность тока, излучающего заданную плоскую волну. Показана единственность решения задачи Коши. Сформулированы граничные условия для начально-краевой задачи, показана единственность ее решения. Выбрана явная разностная схема для численного решения, построены разностные граничные условия.

Ключевые слова: электромагнитное поле, уравнения Максвелла, задача Коши, начально-краевая задача, граничное условие, разностная схема.

A.V. Berezin, A.S. Vorotsov, I.D. Voropaev, M.B. Markov, D.N. Sadovnichii

Plane electromagnetic wave diffraction: problem definition

Cauchy problem definition is considered for Maxwell equations which describe plane electromagnetic wave diffraction on object. The effective current density is constructed for given plane wave radiation. The unicity of Cauchy problem solution is shown. Boundary conditions for initial-boundary problem are formulated; the unicity of problem solution is shown. The implicit finite-difference scheme is chosen, finite-difference boundary conditions are constructed.

Key words: electromagnetic field, Maxwell equations, Cauchy problem, initial-boundary problem, boundary condition, finite-difference scheme.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект 11-01-00342-а

Оглавление

Введение	3
1 Постановка задачи Коши для уравнений Максвелла	3
2 Постановка начально-краевой задачи	8
3 Разностная схема	11
4 Разностная аппроксимация граничных условий	13
5 Тестовый расчет.....	15
Заключение.....	17
Список использованных источников	18

Введение

Исследование взаимодействия электромагнитного излучения с техническими объектами является важной практической задачей. Электромагнитное поле наводит паразитные токи и создает импульсы напряжения в радиоэлектронной аппаратуре, способно вызывать электрический пробой диэлектриков [1-3]. Это приводит к нарушению функционирования и повреждению объектов.

Математическая модель воздействия электромагнитного поля, генерируемого некоторым источником, на объект в дальней зоне на основе численного решения уравнений Максвелла в полной постановке имеет специфику. В качестве воздействующего импульса приходится использовать плоскую электромагнитную волну, падающую на объект из «бесконечности». Математическая модель дифракции, основывающаяся на полной системе уравнений Максвелла, при этом теряет физический смысл. Дело в том, что фронт электромагнитного излучения источника конечного размера имеет на «бесконечности» сферическую форму. Задачу Коши для уравнений Максвелла, имеющую своим решением плоскую волну, сформулировать невозможно без утраты физического содержания.

Математическому моделированию взаимодействия электромагнитного излучения с техническими объектами на основе уравнений Максвелла посвящено множество работ. Традиционным подходом является вычитание плоской волны из решения и постановка задачи для разности. Это приводит к тому, что в уравнениях Максвелла появляется плотность «магнитного тока», отличная от нуля в магнитных материалах. Свойства уравнений меняются, а алгоритм численного решения усложняется.

В данной работе изложен подход, требующий подобного вычитания только в вакуумоподобной среде. Уравнения Максвелла с магнитным током рассматриваются только при анализе постановки задачи. Численному решению подвергаются уравнения Максвелла классического вида.

1 Постановка задачи Коши для уравнений Максвелла

Рассмотрим задачу Коши для уравнений Максвелла в постановке, рассматривающей плотность электрического заряда как неизвестную функцию наряду с напряженностями электрического и магнитного поля:

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \varepsilon \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} (\sigma \mathbf{E} + \mathbf{j}), \operatorname{rot} \mathbf{E} = -\mu \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}, \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} (\sigma \mathbf{E} + \mathbf{j}) = 0, \quad (1)$$

$$\mathbf{E}|_{r=0} = \mathbf{H}|_{r=0} = \rho|_{r=0} = 0$$

где: $\mathbf{E} = \mathbf{E}(t, \mathbf{r})$ – напряженность электрического поля, $\mathbf{H} = \mathbf{H}(t, \mathbf{r})$ – напряженность магнитного поля, $\rho = \rho(t, \mathbf{r})$ – плотность электрического заря-

да, $\mathbf{j} = \mathbf{j}(t, \mathbf{r}) = \varphi(t)(\delta(z), 0, 0)$ – плотность электрического тока, $\varepsilon = \varepsilon(\mathbf{r})$ – диэлектрическая проницаемость материалов объекта, $\mu = \mu(\mathbf{r})$ – магнитная проницаемость, $\sigma = \sigma(\mathbf{r})$ – проводимость, t – лабораторное время, $\mathbf{r} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, $\delta(z)$ – δ -функция Дирака, ставящая в соответствие функции основного пространства значение ее интеграла по плоской поверхности $z = 0$.

Пусть объект расположен в полупространстве $z > 0$. В силу конечности размеров объекта, функции $\varepsilon = \varepsilon(\mathbf{r})$ и $\mu = \mu(\mathbf{r})$ могут быть отличны от единицы только в некоторой ограниченной замкнутой области D . Граница области D совпадает с внешней поверхностью корпуса объекта. Функция $\sigma = \sigma(\mathbf{r})$ может быть отлична от нуля также только в области D . Отсчет лабораторного времени начинается с момента времени $t = 0$, причем $\varphi(0) = 0$.

Представим решение задачи (1) в виде суммы:

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_{ref} + \mathbf{H}_{pl}, \quad \mathbf{E} = \mathbf{E}_{ref} + \mathbf{E}_{pl}, \quad \rho = \rho_{ref} + \rho_{pl}.$$

Пусть функции \mathbf{H}_{pl} , \mathbf{E}_{pl} , ρ_{pl} являются решением задачи Коши:

$$\begin{aligned} \text{rot } \mathbf{H}_{pl} &= \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}_{pl}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}, & \text{rot } \mathbf{E}_{pl} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{H}_{pl}}{\partial t}, & \frac{\partial \rho_{pl}}{\partial t} &= 0, \\ \mathbf{E}_{pl} \Big|_{t=0} &= \mathbf{H}_{pl} \Big|_{t=0} = \rho_{pl} \Big|_{t=0} = 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Тогда для функций \mathbf{H}_{ref} , \mathbf{E}_{ref} , ρ_{ref} справедлива следующая задача Коши:

$$\begin{aligned} \text{rot } \mathbf{H}_{ref} &= \varepsilon \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}_{ref}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \sigma \mathbf{E}_{ref} + \mathbf{J}_e, \\ \text{rot } \mathbf{E}_{ref} &= -\mu \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{H}_{ref}}{\partial t} + \mathbf{J}_m, \\ \frac{\partial \rho_{ref}}{\partial t} + \text{div } \sigma \mathbf{E}_{ref} + \text{div } \sigma \mathbf{E}_{pl} &= 0, \\ \mathbf{E}_{ref} \Big|_{t=0} &= \mathbf{H}_{ref} \Big|_{t=0} = \rho_{ref} \Big|_{t=0} = 0, \end{aligned} \quad (3)$$

где $\mathbf{J}_e = \frac{\varepsilon - 1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}_{pl}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \sigma \mathbf{E}_{pl}$, $\mathbf{J}_m = -(\mu - 1) \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{H}_{pl}}{\partial t}$.

Рассмотрим задачу (2). Поскольку $\text{div } \mathbf{j} = 0$, из (2) следует, что $\rho_{pl} = 0$. Если функция \mathbf{E}_{pl} является решением задачи Коши (2), то $\text{div } \mathbf{E}_{pl} = 0$. Тогда, для \mathbf{E}_{pl} , с учетом $\varphi(0) = 0$, (2) сводится к задачам Коши для волнового уравнения относительно каждой компоненты \mathbf{E}_{pl} :

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}_{pl}}{\partial t^2} - \Delta \mathbf{E}_{pl} = -\frac{4\pi}{c} \frac{\partial \mathbf{j}}{\partial t}, \quad \mathbf{E}_{pl} \Big|_{t=0} = \frac{\partial \mathbf{E}_{pl}}{\partial t} \Big|_{t=0} = 0, \quad (4)$$

причем задачи (4) имеют единственное решение.

Из (4) и вида правой части задачи (1) следует, что $\mathbf{E}_{pl} = (E_{pl}^x, 0, 0)$.

Если функция \mathbf{H}_{pl} является решением задачи Коши (2), то $\operatorname{div} \mathbf{H}_{pl} = 0$. Тогда, для \mathbf{H}_{pl} , с учетом $\varphi(0) = 0$, задача (2) сводится к задачам Коши для волнового уравнения относительно каждой компоненты \mathbf{H}_{pl} :

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{H}_{pl}}{\partial t^2} - \Delta \mathbf{H}_{pl} = \frac{4\pi}{c} \operatorname{rot} \mathbf{j}, \quad \mathbf{H}_{pl} \Big|_{t=0} = \frac{\partial \mathbf{H}_{pl}}{\partial t} \Big|_{t=0} = 0. \quad (5)$$

Заметим, что однородные начальные условия на производные в задачах (4), (5) следуют из начальных условий задачи (2) и условия $\varphi(0) = 0$.

Правая часть уравнений (2) не зависит от координат x и y . Поэтому $\mathbf{H}_{pl} = (0, H_{pl}^y, 0)$.

Тогда в декартовой системе координат уравнения (2) имеют вид:

$$-\frac{\partial H_{pl}^y}{\partial z} = \frac{1}{c} \frac{\partial E_{pl}^x}{\partial t} + j^x, \quad \frac{\partial H_{pl}^y}{\partial x} = 0, \quad -\frac{\partial E_{pl}^x}{\partial z} = \frac{1}{c} \frac{\partial H_{pl}^y}{\partial t}, \quad \frac{\partial E_{pl}^x}{\partial y} = 0. \quad (6)$$

Из того, что $\operatorname{div} \mathbf{H}_{pl} = 0$, $\operatorname{div} \mathbf{E}_{pl} = 0$ и из уравнений (6) следует, что

$$\mathbf{E}_{pl} = (E_{pl}^x(t, z), 0, 0), \quad \mathbf{H}_{pl} = (0, H_{pl}^y(t, z), 0),$$

то есть, решение не зависит от переменных x и y .

Таким образом, для ненулевых компонент справедливы задачи Коши для одномерных волновых уравнений [4]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 E_{pl}^x}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 E_{pl}^x}{\partial z^2} &= -4\pi \frac{\partial \varphi}{\partial t} \delta(z), & E_{pl}^x \Big|_{t=0} &= \frac{\partial E_{pl}^x}{\partial t} \Big|_{t=0} = 0, \\ \frac{\partial^2 H_{pl}^y}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 H_{pl}^y}{\partial z^2} &= 4\pi c \varphi \frac{\partial}{\partial z} \delta(z), & H_{pl}^y \Big|_{t=0} &= \frac{\partial H_{pl}^y}{\partial t} \Big|_{t=0} = 0. \end{aligned} \quad (7)$$

Решения задач (7) единственно и, согласно формуле Даламбера [4], представляют собой суммы волн, распространяющихся перпендикулярно плоскости $z = 0$:

$$E_{pl}^x = -\frac{2\pi}{c} \left[\varphi(t+z/c)(1-\Theta(z))\Theta(t+z/c) + \varphi(t-z/c)\Theta(z)\Theta(t-z/c) \right],$$

$$H_{pl}^y = \frac{2\pi}{c} \left[\varphi(t+z/c)\Theta(t+z/c)(1-\Theta(z)) - \varphi(t-z/c)\Theta(t-z/c)\Theta(z) \right].$$

Введем обозначение:

$$\varphi(t+z/c)\Theta(t+z/c) \equiv \varphi\Theta(t+z/c),$$

$$\varphi(t-z/c)\Theta(t-z/c) \equiv \varphi\Theta(t-z/c).$$

Тогда:

$$E_{pl}^x = -\frac{2\pi}{c} \left[\varphi\Theta(t+z/c)(1-\Theta(z)) + \varphi\Theta(t-z/c)\Theta(z) \right],$$

$$H_{pl}^y = \frac{2\pi}{c} \left[\varphi\Theta(t+z/c)(1-\Theta(z)) - \varphi\Theta(t-z/c)\Theta(z) \right].$$
(8)

Если справедливо условие $\varphi(t) = 0$ при $t < 0$, то:

$$E_{pl}^x = H_{pl}^y = -\frac{2\pi}{c} \varphi(t-z/c), \quad z > 0, \quad E_{pl}^x = -H_{pl}^y = -\frac{2\pi}{c} \varphi(t+z/c), \quad z < 0.$$

Для уравнений задачи (2) справедлив закон сохранения энергии:

$$-\text{div}[\mathbf{E}_{pl}, \mathbf{H}_{pl}] = \frac{1}{2c} \frac{\partial}{\partial t} (E_{pl}^2 + H_{pl}^2) + \frac{4\pi}{c} \langle \mathbf{j}, \mathbf{E}_{pl} \rangle.$$
(9)

Для (8) справедливы соотношения:

$$\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (E_{pl}^2 + H_{pl}^2) = \left(\frac{2\pi}{c} \right)^2 \frac{\partial}{\partial t} \left[\varphi^2\Theta(t+z/c)(1-\Theta(z)) + \varphi^2\Theta(t-z/c)\Theta(z) \right],$$

$$-\text{div}[\mathbf{E}_{pl}, \mathbf{H}_{pl}] = \left(\frac{2\pi}{c} \right)^2 \frac{\partial}{\partial z} \left[\varphi^2\Theta(t+z/c)(1-\Theta(z)) - \varphi^2\Theta(t-z/c)\Theta(z) \right],$$

$$\frac{4\pi}{c} \langle \mathbf{j}, \mathbf{E}_{pl} \rangle = -2 \left(\frac{2\pi}{c} \right)^2 \varphi^2(t) \delta(z), \quad \frac{\partial}{\partial z} \varphi^2\Theta(t+z/c) = \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \varphi^2\Theta(t+z/c),$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \varphi^2\Theta(t-z/c) = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \varphi^2\Theta(t-z/c).$$

Из этих соотношений следует, что решения (8) удовлетворяют закону сохранения энергии (9).

Таким образом, задача Коши (2) имеет единственное решение, являющееся плоской волной, распространяющейся в направлении нормали к поверхности $z = 0$. Задача Коши (2) ставит в соответствие заданному плоскому электромагнитному импульсу (8) генерирующий его импульс плотности тока $\mathbf{j} = \varphi(t)(\delta(z), 0, 0)$ на бесконечной плоской поверхности.

Рассмотрим задачу Коши (3). Функции

$$\mathbf{J}_e = \frac{\varepsilon - 1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}_{pl}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \sigma \mathbf{E}_{pl}, \quad \mathbf{J}_m = -(\mu - 1) \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{H}_{pl}}{\partial t}$$

являются финитными в силу финитности функций $\varepsilon - 1$, $\mu - 1$ и σ . Носитель функций $\mathbf{J}_e \equiv \mathbf{J}_e(t, \mathbf{r})$ и $\mathbf{J}_m \equiv \mathbf{J}_m(t, \mathbf{r})$ сосредоточен в ограниченной замкнутой области D , граница которой соответствует внешней поверхности объекта воздействия. Вне области D уравнения задачи (3) сводятся к уравнениям Максвелла в свободном пространстве:

$$\text{rot } \mathbf{H}_{ref} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}_{ref}}{\partial t}, \quad \text{rot } \mathbf{E}_{ref} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{H}_{ref}}{\partial t}, \quad \frac{\partial \rho_{ref}}{\partial t} = 0. \quad (10)$$

Вне области D $\text{div } \mathbf{E}_{ref} = 0$, уравнения (10) сводятся к волновым уравнениям. В силу конечности скорости света отсюда следует, что решение задачи (3) финитно для любого конечного момента времени. Носитель функций \mathbf{E}_{ref} и \mathbf{H}_{ref} в момент времени t обозначим D_t .

Из уравнений задачи (3) следует следующий закон сохранения для плотности энергии электромагнитного поля:

$$\begin{aligned} -\text{div} [\mathbf{E}_{ref}, \mathbf{H}_{ref}] &= \frac{1}{2} \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (\varepsilon E_{ref}^2 + \mu H_{ref}^2) + \\ &+ \frac{4\pi}{c} (\sigma E_{ref}^2) + \langle \mathbf{J}_e, \mathbf{E}_{ref} \rangle + \langle \mathbf{J}_m, \mathbf{H}_{ref} \rangle \end{aligned} \quad (11)$$

Заметив, что $\mathbf{J}_e = \mathbf{J}_m = 0$ при $\mathbf{E}_{pl} = \mathbf{H}_{pl} = 0$, рассмотрим соотношение (11) для однородной задачи (3):

$$-\text{div} [\mathbf{E}_{ref}, \mathbf{H}_{ref}] = \frac{1}{2} \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (\varepsilon E_{ref}^2 + \mu H_{ref}^2) + \frac{4\pi}{c} (\sigma E_{ref}^2). \quad (12)$$

Проинтегрируем (12) по \mathbb{R}^3 в момент времени t . При выполнении интегрирования учтем, что для финитных функций:

$$\iiint_{\mathbb{R}^3} \operatorname{div}[\mathbf{E}_{ref}, \mathbf{H}_{ref}] d\mathbf{r} = \iiint_S \operatorname{div}[\mathbf{E}_{ref}, \mathbf{H}_{ref}] d\mathbf{r} = \oint_{\partial S} \langle [\mathbf{E}_{ref}, \mathbf{H}_{ref}], \mathbf{n} ds \rangle = 0,$$

где S – шар в пространстве \mathbb{R}^3 , такой, что $D_i \subset S$, а ∂S – его граница. \mathbf{n} – единичный вектор в направлении внешней нормали к поверхности ∂S .

С учетом этого обстоятельства, в силу финитности решения и начальных условий однородной задачи (3):

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint_{D_i} d\mathbf{r} \left(\varepsilon E_{ref}^2 + \mu H_{ref}^2 + 8\pi\sigma \int_0^t E_{ref}^2(t', \mathbf{r}) dt' \right) = 0.$$

В силу начальных условий задачи (3):

$$\iiint_{D_i} d\mathbf{r} \left(\varepsilon E_{ref}^2 + \mu H_{ref}^2 + 8\pi\sigma \int_0^t E_{ref}^2(t', \mathbf{r}) dt' \right) = 0. \quad (13)$$

Величины ε , μ строго положительны, а проводимость σ неотрицательна в \mathbb{R}^3 . Справедливо соотношение [5]:

$$\int_0^t E_{ref}^2(t', \mathbf{r}) dt' = E_{ref}^2(\bar{t}, \mathbf{r}) \bar{t}, \quad \bar{t} \in [0, t].$$

Поскольку $t \geq 0$, подынтегральное выражение в (13) равно нулю:

$$\varepsilon E_{ref}^2 + \mu H_{ref}^2 + 8\pi\sigma \int_0^t E_{ref}^2(t', \mathbf{r}) dt' = 0. \quad (14)$$

Равенство (14) выполнимо, только если $\mathbf{E}_{ref} = \mathbf{H}_{ref} = 0$. Это означает, что однородная задача (3) имеет только нулевое решение. Решение задачи (3) единственно.

Рассмотрим однородную задачу (1), то есть случай $\varphi(t) = 0$. Решение задачи (1), в том числе однородной, является суммой решений задач (2) и (3). Решение однородной задачи (2) равно нулю. Тогда равна нулю правая часть задачи (3). Решение однородной задачи (3) равно нулю. Следовательно, решение однородной задачи (1) равно нулю.

2 Постановка начально-краевой задачи

Рассмотрим задачу для уравнений Максвелла (1) в ограниченной области $\Omega = \{x, y, z : x \in [x_{\min}, x_{\max}], y \in [y_{\min}, y_{\max}], z \in [z_{\min}, z_{\max}]\}$ с границей $\partial\Omega$. Будем

считать, что $z_{\min} < 0 < z_{\max}$, а ε или μ по-прежнему могут быть отличны от единицы или σ отлична от нуля только в подобласти D области Ω , причем $D \subset \Omega$, $\text{dist}(\partial\Omega, D) = d > 0$.

На границе области Ω считается выполненным условие

$$\oint_{\partial\Omega} \langle [\mathbf{E}, \mathbf{H}] \cdot \mathbf{n} \rangle ds \geq 0, \quad (15)$$

где \mathbf{n} – единичный вектор в направлении внешней нормали к поверхности $\partial\Omega$.

Условие (15) запрещает приток электромагнитной энергии в область Ω извне.

Решение начально-краевых задач [5] для уравнений (1) с однородными начальными данными и граничными условиями, удовлетворяющими неравенству (15), единственно. Действительно, из уравнений Максвелла следует энергетическое соотношение:

$$-\text{div}[\mathbf{E}, \mathbf{H}] = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (\varepsilon E^2 + \mu H^2) + \frac{4\pi}{c} (\sigma E^2 + \langle \mathbf{j}, \mathbf{E} \rangle). \quad (16)$$

Для однородной задачи имеет место соотношение:

$$\frac{1}{2c} \frac{\partial}{\partial t} \iiint_D d\mathbf{r} (\varepsilon E^2 + \mu H^2) + \iint_{\partial D} dS \langle \mathbf{n}, [\mathbf{E}, \mathbf{H}] \rangle + \frac{4\pi}{c} \iiint_D d\mathbf{r} \sigma E^2 = 0. \quad (17)$$

В силу положительности ε и μ и неотрицательности σ , из (17) следует, что $\mathbf{E} = \mathbf{H} = 0$.

Рассмотрим в области D следующую начально-краевую задачу:

$$\begin{aligned} \text{rot } \mathbf{H}_{pl} &= \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}_{pl}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}, & \text{rot } \mathbf{E}_{pl} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{H}_{pl}}{\partial t}, & \frac{\partial \rho_{pl}}{\partial t} &= 0, \\ \mathbf{E}_{pl} \Big|_{t=0} &= \mathbf{H}_{pl} \Big|_{t=0} = \rho_{pl} \Big|_{t=0} = 0, \\ E_{pl}^y &= E_{pl}^z = 0 \quad \text{при } x = x_{\min}, x = x_{\max}, \\ H_{pl}^x &= H_{pl}^z = 0 \quad \text{при } y = y_{\min}, y = y_{\max}, \\ E_{pl}^x &= -H_{pl}^y \quad \text{при } z = z_{\min}, \quad E_{pl}^x = H_{pl}^y \quad \text{при } z = z_{\max}, \\ & t \geq 0, \quad \mathbf{r} \in \Omega. \end{aligned} \quad (18)$$

Решение задачи Коши (2) удовлетворяет граничным условиям задачи (18) при любых $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Граничные условия задачи (18) удовлетворяют неравенству (15). Отсюда следует, что решением начально-краевой задачи для уравнений Максвелла (3) с граничными условиям (18) является плоская волна

(8). Условия задачи (18) являются точными граничными условиями, поскольку удовлетворяют задаче Коши (3).

Граничные условия задачи (18) будем называть «условиями плоской волны».

Рассмотрим в области D следующую начально-краевую задачу:

$$\begin{aligned}
 \operatorname{rot} \mathbf{H}_{ref} &= \varepsilon \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}_{ref}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \sigma \mathbf{E}_{ref} + \mathbf{J}_e, & \operatorname{rot} \mathbf{E}_{ref} &= -\mu \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{H}_{ref}}{\partial t} + \mathbf{J}_m, \\
 \frac{\partial \rho_{ref}}{\partial t} + \operatorname{div} \sigma \mathbf{E}_{ref} + \operatorname{div} \sigma \mathbf{E}_{pl} &= 0, & \mathbf{E}_{ref} \Big|_{t=0} &= \mathbf{H}_{ref} \Big|_{t=0} = \rho \Big|_{t=0} = 0, \\
 E_{ref}^y &= H_{ref}^z & E_{ref}^z &= -H_{ref}^y & \text{при } x &= x_{\max}, \\
 E_{ref}^y &= -H_{ref}^z & E_{ref}^z &= H_{ref}^y & \text{при } x &= x_{\min}, \\
 E_{ref}^z &= H_{ref}^x & E_{ref}^x &= -H_{ref}^z & \text{при } y &= y_{\max}, \\
 E_{ref}^z &= -H_{ref}^x & E_{ref}^x &= H_{ref}^z & \text{при } y &= y_{\min}, \\
 E_{ref}^x &= H_{ref}^y & E_{ref}^y &= -H_{ref}^x & \text{при } z &= z_{\max}, \\
 E_{ref}^x &= -H_{ref}^y & E_{ref}^y &= H_{ref}^x & \text{при } z &= z_{\min}, \\
 & & & & & t \geq 0, \mathbf{r} \in \Omega.
 \end{aligned} \tag{19}$$

Правая часть задачи (19) отличается от нуля только в подобласти области Ω , не пересекающейся с ее границей. В качестве приближенных граничных условий используется равенство на границе тангенциальных компонент электрического и магнитного поля. Это условие удовлетворяет неравенству (15). Оно обеспечивает совпадение направлений вектора Пойнтинга и внешней нормали к границе, разрешая отток электромагнитной энергии из области Ω и запрещая приток. Будем считать, что погрешность, вносимая этим приближением, допустима при решении задачи (1). Граничные условия задачи (19) называют «условиями излучения энергии».

На основе этого приближения формулируются граничные условия для полной начально-краевой задачи:

$$\begin{aligned}
 \operatorname{rot} \mathbf{H} &= \varepsilon \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} (\sigma \mathbf{E} + \mathbf{j}), & \operatorname{rot} \mathbf{E} &= -\mu \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}, \\
 \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} (\sigma \mathbf{E} + \mathbf{j}) &= 0, & \mathbf{E} \Big|_{t=0} &= \mathbf{H} \Big|_{t=0} = \rho \Big|_{t=0} = 0, \\
 E^y &= H^z & E^z &= -H^y + H_{pl}^y & \text{при } x &= x_{\max}, \\
 E^y &= -H^z & E^z &= H^y - H_{pl}^y & \text{при } x &= x_{\min}, \\
 E^z &= H^x & E^x - E_{pl}^x &= -H^z & \text{при } y &= y_{\max}, \\
 E^z &= -H^x & E^x - E_{pl}^x &= H^z & \text{при } y &= y_{\min},
 \end{aligned} \tag{20}$$

$$\begin{aligned}
E^x &= H^y & E^y &= -H^x & \text{при } z &= z_{\max}, \\
E^x &= -H^y & E^y &= H^x & \text{при } z &= z_{\min}, \\
\mathbf{j} &= \varphi(t)(\delta(z), 0, 0), & t &\geq 0, & \mathbf{r} &\in \Omega.
\end{aligned}$$

Граничные условия начально-краевой задачи (20) означают, что «условия излучения энергии» считаются справедливыми для электромагнитного поля с компонентами $\mathbf{E} - \mathbf{E}_{pl}$, $\mathbf{H} - \mathbf{H}_{pl}$.

Граничные условия задачи (20) не удовлетворяют неравенству (15). Имеет место равенство:

$$[\mathbf{E} - \mathbf{E}_{pl}, \mathbf{H} - \mathbf{H}_{pl}] = [\mathbf{E}, \mathbf{H}] - [\mathbf{E}_{pl}, \mathbf{H}] - [\mathbf{E}, \mathbf{H}_{pl}] + [\mathbf{E}_{pl}, \mathbf{H}_{pl}]. \quad (21)$$

Соотношение (21) показывает, что условия (20) обеспечивают подкачку электромагнитной энергии в область Ω через ее границу. Следствием этого является необходимое условие корректности рассматриваемой модели. Оно состоит в том, что при $\varepsilon = \mu = 1$, $\sigma = 0$ для всех $\mathbf{r} \in D$ решением начально-краевой задачи для уравнений (20) является плоская волна с компонентами \mathbf{E}_{pl} , \mathbf{H}_{pl} .

Несмотря на то, что условия задачи (20) не удовлетворяют неравенству (15), решение единственно. Это следует из того, что граничные условия соответствующей однородной задачи вырождаются в «условия излучения», для которых неравенство (15) справедливо.

3 Разностная схема

Алгоритм численного решения начально-краевой задачи (20) основан на разностной схеме, представленной в работах [6-8]. Рассмотрим сеточные уравнения данной схемы.

$$\begin{aligned}
& \frac{H_{i+1/2, j+1/2, k, n+1/2}^z - H_{i+1/2, j-1/2, k+1/2}^z}{\delta y_j} - \frac{H_{i+1/2, j, k+1/2, n+1/2}^y - H_{i+1/2, j, k-1/2, n+1/2}^y}{\delta z_k} = \\
& = \overset{\circ}{\mathcal{E}}_{i+1/2, j, k} \frac{E_{i+1/2, j, k, n+1}^x - E_{i+1/2, j, k, n}^x}{\Delta t_n} + \overset{\circ}{I}_{i+1/2, j, k, n+1/2}^x, \quad (22)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{H_{i, j+1/2, k+1/2, n+1/2}^x - H_{i, j+1/2, k-1/2, n+1/2}^x}{\delta_k} - \frac{H_{i+1/2, j+1/2, k, n+1/2}^z - H_{i-1/2, j+1/2, k, n+1/2}^z}{\delta_i} = \\
& = \overset{\circ}{\mathcal{E}}_{i, j+1/2, k} \frac{E_{i, j+1/2, k, n+1}^y - E_{i, j+1/2, k, n}^y}{\Delta t_n} + \overset{\circ}{I}_{i, j+1/2, k, n+1/2}^y, \quad (23)
\end{aligned}$$

$$\frac{H_{i+1/2,j,k+1/2,n+1/2}^y - H_{i-1/2,j,k+1/2,n+1/2}^y}{\delta x_i} - \frac{H_{i,j+1/2,k+1/2,n+1/2}^x - H_{i,j-1/2,k+1/2,n+1/2}^x}{\delta y_j} =$$

$$= \overset{\circ}{\mathcal{E}}_{i,j,k+1/2} \frac{E_{i,j,k+1/2,n+1}^z - E_{i,j,k+1/2,n}^z}{\Delta t_n} + I_{i,j,k+1/2,n+1/2}^{\circ z}, \quad (24)$$

$$\frac{E_{i,j+1/2,k+1,n+1}^y - E_{i,j+1/2,k,n+1}^y}{\Delta z_k} - \frac{E_{i,j+1,k+1/2,n+1}^z - E_{i,j,k+1/2,n+1}^z}{\Delta y_j} =$$

$$= \hat{\mu}_{i,j+1/2,k+1/2} \frac{H_{i,j+1/2,k+1/2,n+3/2}^x - H_{i,j+1/2,k+1/2,n+1/2}^x}{\delta t_{n+1}}, \quad (25)$$

$$\frac{E_{i+1,j,k+1/2,n+1}^z - E_{i,j,k+1/2,n+1}^z}{\Delta x_i} - \frac{E_{i+1/2,j,k+1,n+1}^x - E_{i+1/2,j,k,n+1}^x}{\Delta z_k} =$$

$$= \hat{\mu}_{i+1/2,j,k+1/2} \frac{H_{i+1/2,j,k+1/2,n+3/2}^y - H_{i+1/2,j,k+1/2,n+1/2}^y}{\delta t_{n+1}}, \quad (26)$$

$$\frac{E_{i+1/2,j+1,k,n+1}^x - E_{i+1/2,j,k,n+1}^x}{\Delta y_j} - \frac{E_{i+1,j+1/2,k,n+1}^y - E_{i,j+1/2,k,n+1}^y}{\Delta x_i} =$$

$$= \hat{\mu}_{i+1/2,j+1/2,k} \frac{H_{i+1/2,j+1/2,k,n+3/2}^z - H_{i+1/2,j+1/2,k,n+1/2}^z}{\delta t_{n+1}}, \quad (27)$$

где:

$$\overset{\circ}{\mathbf{I}}_{i+1/2,j,k} = \frac{4\pi}{c} (\overset{\circ}{\sigma}_{i+1/2,j,k} \mathbf{E}_{i+1/2,j,k} + \overset{\circ}{\mathbf{J}}_{i+1/2,j,k}), \quad \overset{\circ}{u}_{i+1/2,j,k} = \langle\langle u \rangle\rangle_{i+1/2,j,k},$$

$$\langle u \rangle_{i+1/2,j,k+1/2} = \frac{\Delta_{j-1}}{2\delta_j} u_{i+1/2,j-1/2,k-1/2} + \frac{\Delta_j}{2\delta_j} u_{i+1/2,j+1/2,k-1/2}.$$

Уравнения (22-27) рассматриваются на прямоугольной декартовой сетке:

$$x_{i+1} = x_i + \Delta_i; \quad i = 0, \dots, N_x - 1, \quad x_0 = x_{\min}, \quad x_{N_x} = x_{\max},$$

$$x_{i+1/2} = (x_i + x_{i+1}) / 2; \quad i = 0, \dots, N_x - 1, \quad x_{-1/2} = x_0, \quad x_{N_x+1/2} = x_{N_x},$$

$$\delta_i = x_{i+1/2} - x_{i-1/2}; \quad i = 0, \dots, N_x, \quad \delta_0 = \Delta_0 / 2, \quad \delta_{N_x} = \Delta_{N_x-1} / 2.$$

Разностная сетка для переменных (y, z) вводится аналогично. Разрывы коэффициентов уравнений размещаются на поверхностях $x = x_i$, $y = y_j$ и $z = z_k$, а значения задаются в точках сетки с дробными индексами. Эти точки совпадают с центрами параллелепипедов, образованных пересечением плоскостей $x = x_i, x_{i+1}$, $y = y_j, y_{j+1}$ и $z = z_k, z_{k+1}$, внутри которых все рассматриваемые функции непрерывны. Сеточные функции E^x , E^y и E^z определяются в середине соответствующих ребер указанных параллелепипедов. Сеточные функции H^x , H^y , H^z определяются в центрах граней параллелепипедов.

На интервале $t \in [t_{\min}; t_{\max}]$ сетка состоит из следующих точек:

$$\begin{aligned} t_{n+1} &= t_n + \Delta t_n; \quad n = 0, \dots, N_t - 1, \quad t_0 = t_{\min}, \quad t_{N_t} = t_{\max}; \\ t_{n+1/2} &= (t_n + t_{n+1}) / 2; \quad n = 0, \dots, N_t - 1; \\ \delta t_n &= t_{n+1/2} - t_{n-1/2}; \quad n = 2, \dots, N_t - 1. \end{aligned}$$

Сеточные функции (E^x, E^y, E^z) задаются в целые моменты времени t_n , а (H^x, H^y, H^z) и (j^x, j^y, j^z) – в полуцелые моменты $t_{n+1/2}$. Свойства аппроксимации и сходимости разностной схемы (22-27) изучены в [6-8].

4 Разностная аппроксимация граничных условий

Рассмотрим, как задается разностное граничное условие задачи (20)

$$E^x - E_{pl}^x = H^z \quad (28)$$

на грани области Ω в плоскости $y = y_{\min}$ при решении сеточных уравнений.

Для этого рассмотрим отдельно сеточные уравнения (22) и (27), содержащие разностные производные по времени от компонент E^x и H^z :

$$\begin{aligned} & \frac{H_{i+1/2, j+1/2, k, n+1/2}^z - H_{i+1/2, j-1/2, k+1/2}^z}{\delta y_j} - \frac{H_{i+1/2, j, k+1/2, n+1/2}^y - H_{i+1/2, j, k-1/2, n+1/2}^y}{\delta z_k} = \\ & = \overset{\circ}{\mathcal{E}}_{i+1/2, j, k} \frac{E_{i+1/2, j, k, n+1}^x - E_{i+1/2, j, k, n}^x}{\Delta t_n} + \overset{\circ}{I}_{i+1/2, j, k, n+1/2}^x \end{aligned} \quad (29)$$

$$\begin{aligned} & \frac{E_{i+1/2, j+1, k, n+1}^x - E_{i+1/2, j, k, n+1}^x}{\Delta y_j} - \frac{E_{i+1, j+1/2, k, n+1}^y - E_{i, j+1/2, k, n+1}^y}{\Delta x_i} = \\ & = \hat{\mu}_{i+1/2, j+1/2, k} \frac{H_{i+1/2, j+1/2, k, n+3/2}^z - H_{i+1/2, j+1/2, k, n+1/2}^z}{\delta t_{n+1}} \end{aligned} \quad (30)$$

Рассмотрим разностную сетку по переменной y :

$$\begin{aligned} y_{j+1} &= y_j + \Delta_j; \quad j = 0, \dots, N_y - 1, \quad y_0 = y_{\min}, \quad y_{N_y} = y_{\max}, \\ y_{j+1/2} &= \frac{y_j + y_{j+1}}{2}; \quad j = 0, \dots, N_y - 1, \quad y_{-1/2} = y_{\min} - \frac{\Delta_0}{2}, \quad y_{N_x+1/2} = y_{N_x} + \frac{\Delta_{N_y-1}}{2}, \\ \delta_j &= y_{j+1/2} - y_{j-1/2}; \quad j = 0, \dots, N_y. \end{aligned}$$

Пусть известно магнитное поле на слое $n+1/2$ и электрическое поле на слое n . Рассмотрим вычисление значений H^z на слое $n+3/2$ и E^x на слое $n+1$. В уравнениях (29) и (30) значения E^x заданы в точках y_j , $j = 0, \dots, N_y$, а H^z – в точках $y_{j+1/2}$, $j = -1, 0, 1, \dots, N_y$.

Для вычисления значений E^x на слое $n+1$, как это следует из уравнения (29), используются значения H^z и H^y на слое $n+1/2$ и E^x на слое n . Все эти значения известны, в том числе те, которые необходимы для вычисления $E_{i+1/2,0,k,n+1}^x$. Этот факт иллюстрирует вид уравнения (29) при $j = 0$:

$$\begin{aligned} & \frac{H_{i+1/2,1/2,k,n+1/2}^z - H_{i+1/2,-1/2,k+1/2}^z}{\delta y_j} - \frac{H_{i+1/2,0,k+1/2,n+1/2}^y - H_{i+1/2,0,k-1/2,n+1/2}^y}{\delta z_k} = \\ & = \overset{\circ}{\mathcal{E}}_{i+1/2,0,k} \frac{E_{i+1/2,0,k,n+1}^x - E_{i+1/2,0,k,n}^x}{\Delta t_n} + \overset{\circ}{I}_{i+1/2,0,k,n+1/2}^x. \end{aligned}$$

Для вычисления значений H^z на слое $n+3/2$, как это следует из уравнения (30), используются значения E^x и E^y на слое $n+1$ и H^z на слое $n+1/2$. Для вычисления $H_{i+1/2,-1/2,k,n+3/2}^z$ имеющихся значений недостаточно, поскольку величина $E_{i+1/2,-1,k,n+1}^x$ не определена. Используем для вычисления $H_{i+1/2,-1/2,k,n+3/2}^z$ условие (28), задав его на сетке так, чтобы сохранить второй порядок аппроксимации при постоянном шаге:

$$\frac{1}{2} \left(H_{i+1/2,-1/2,k,n+3/2}^z + H_{i+1/2,1/2,k,n+3/2}^z \right) = E_{i+1/2,0,k,n+1}^x - E_{pl i+1/2,0,k,n+1}^x. \quad (31)$$

Сеточные функции \mathbf{E}_{pl} и \mathbf{H}_{pl} , аппроксимирующие плоскую волну, вычисляются путем численного решения начально-краевой (18) с помощью рассмотренной разностной схемы.

Заметим следующее. Использовать для построения граничных условий точное решение для \mathbf{E}_{pl} и \mathbf{H}_{pl} нельзя. Погрешности вычисления \mathbf{E}_{pl} , \mathbf{H}_{pl} и \mathbf{E} , \mathbf{H} должны быть согласованы, иначе будут наблюдаться паразитные осцилля-

ции разностного решения. Алгоритм использует значения плоской волны только на границе расчетной области, поэтому задачу для \mathbf{E}_{pl} и \mathbf{H}_{pl} достаточно решать в одномерной постановке.

5 Тестовый расчет

Рассмотрим дифракцию электромагнитного импульса с наносекундным фронтом на диэлектрической пластине толщиной 20 см, периметром 210×210 см и относительной диэлектрической проницаемостью, равной 6.0. На рис. 1 показана привязка пластины к декартовой системе координат. Импульс генерируется током в плоскости YX при $z = -110$ см и распространяется в положительном направлении вдоль оси Z . Он поляризован так, что вектор электрического поля направлен по оси X . Шаг временной сетки определяется условием Куранта и составляет 0.01 нс. Таким образом, на фронт падающей волны приходится около 50 точек сетки по времени.

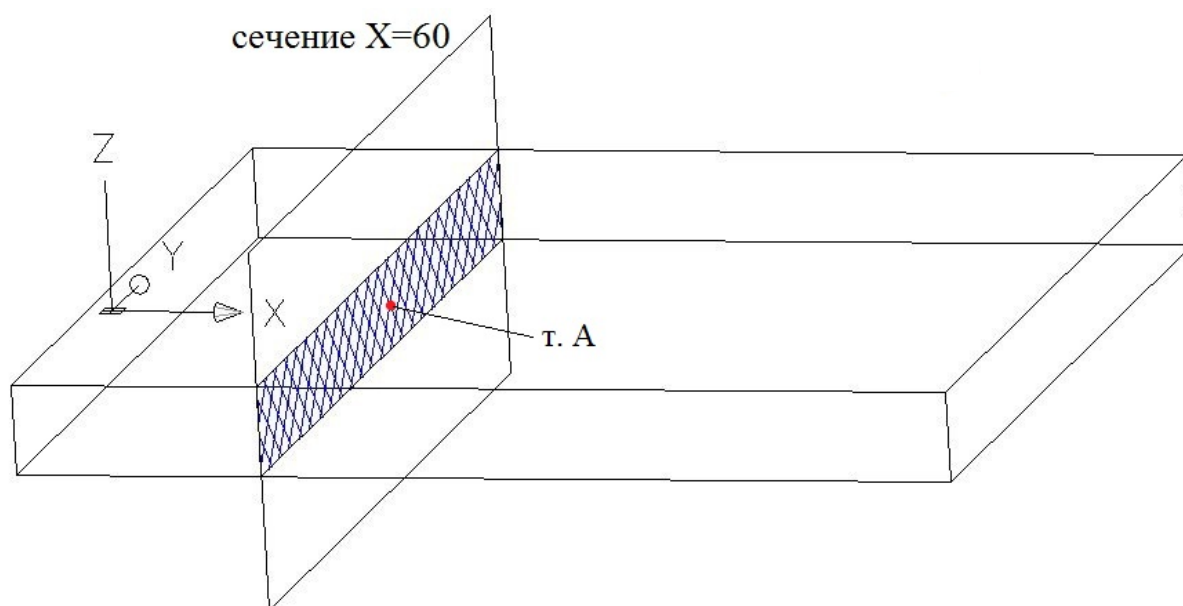


Рис. 1. Геометрия и привязка системы координат к расчету пластины толщиной 20 см

Распределения наибольших по абсолютной величине, за все время распространения ЭМИ в расчетной области, значений напряженности электрической и магнитной составляющих поля представлены на рис. 2. Все значения поля нормированы на амплитуду ЭМИ в свободном пространстве. Видно, что влияние торцевых поверхностей сказывается только на расстояниях порядка толщины пластины ~ 20 см, таким образом, в средней части пластины реализуется в достаточно хорошем приближении одномерная геометрия для распространения ЭМИ. Результаты расчетов изменения формы в средней части пластины представлены на рис. 3.

Для нормального падения волны с линейной поляризацией на плоскую границу раздела сред с различными диэлектрическими проницаемостями можно легко рассчитать амплитуду электрической составляющей поля волны в материале по формулам Френеля [9]. В рассматриваемом случае диэлектрическая проницаемость первой среды – воздуха, равна 1, а материала преграды – 6.0, амплитуда электрической составляющей ЭМИ, прошедшей через первую границу внутрь модели-пластины, составит 0,57 от падающей. Это совпадает с проведенным численным расчетом.

Как и следовало ожидать, при достижении волной второй границы раздела её амплитуда опять меняется, однако в этом случае ЭМИ распространяется из среды с большей диэлектрической проницаемости в среду меньшей ϵ , поэтому амплитуда электрической составляющей ЭМИ несколько возрастает. Важно отметить, что, как и показали численные расчеты, в одномерном приближении при нормальном падении электромагнитной волны на плоскую границу раздела сред поляризация ЭМИ не меняется и дополнительные компоненты электромагнитного поля не появляются.

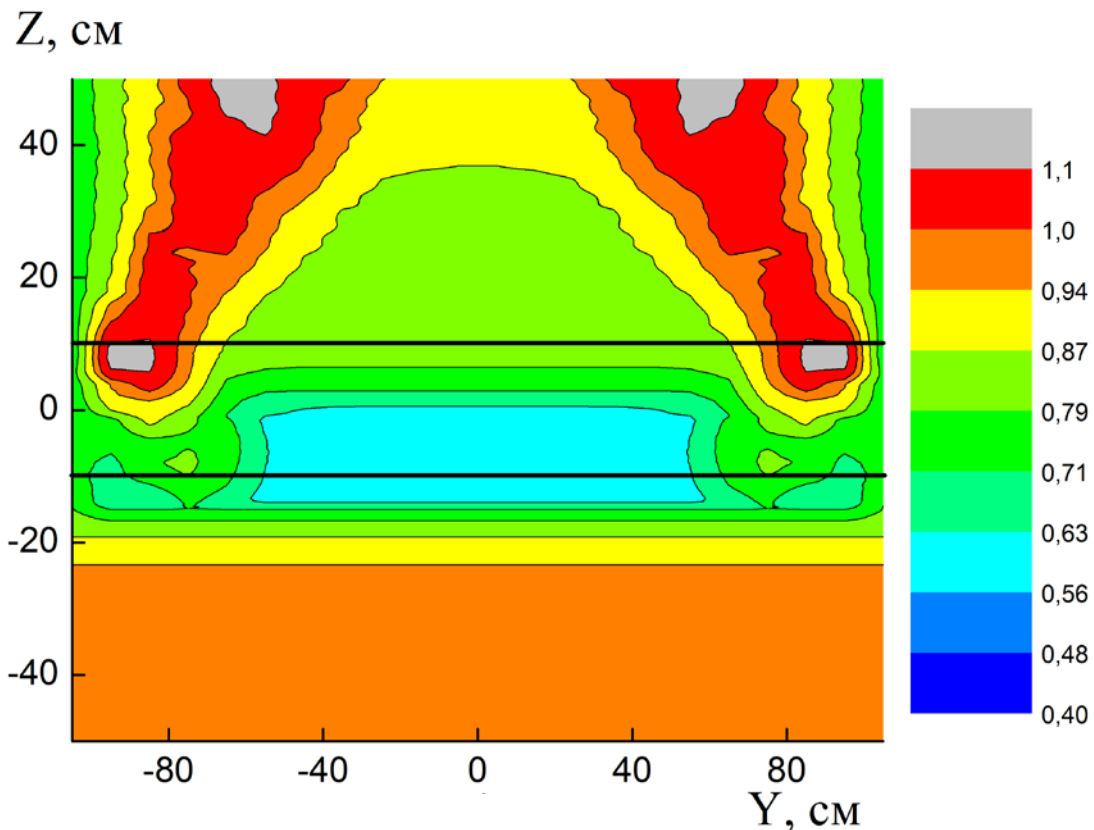


Рис. 2. Распределение наибольших по абсолютной величине значений E^x ЭМИ в пластине в плоскости YZ при $X=60$ (на четверти длины пластины).

Жирные горизонтальные прямые – границы раздела сред.

Направление распространения ЭМИ снизу вверх.

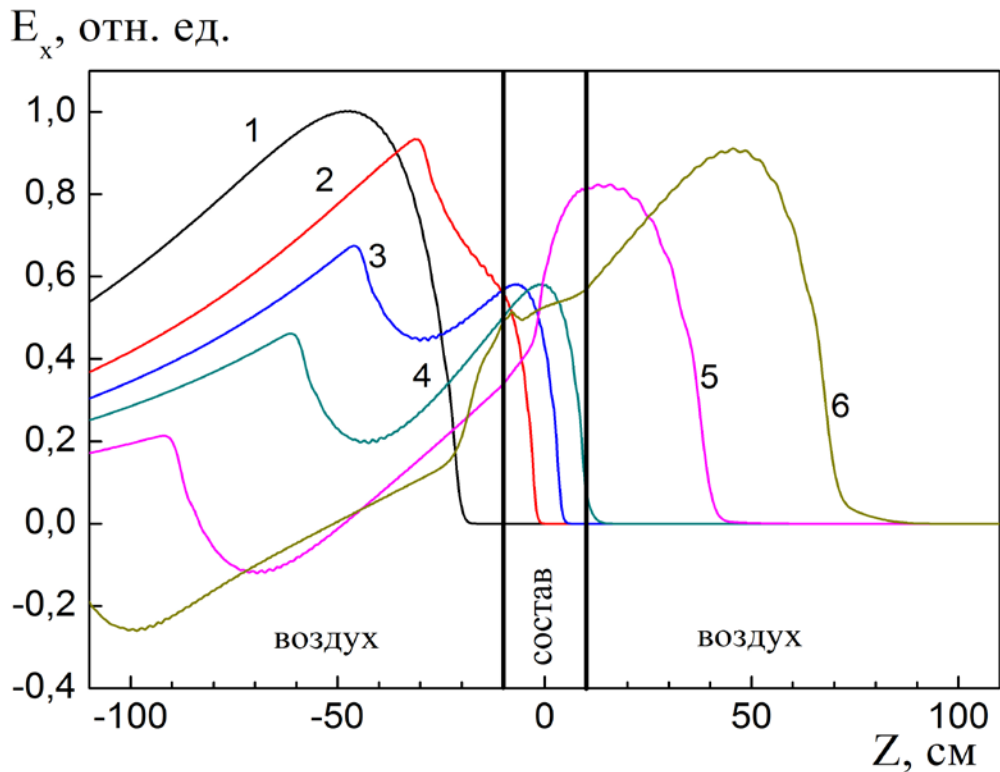


Рис. 3. Изменение формы E^x составляющей импульса ЭМИ при взаимодействии с пластиной на прямой $X=60$ см, $Y=0$ (четверть длины пластины вдоль направления распространения импульса) в различные моменты времени.

Жирные вертикальные прямые – границы раздела сред.

1- 3 нс (начальный импульс), 2- 4 нс, 3- 4,5 нс, 4- 5 нс, 5- 6 нс, 6- 7 нс.

Заключение

Задание плотности тока специального вида на бесконечной плоскости обеспечивает единственное решение задачи Коши для уравнений Максвелла в виде плоской электромагнитной волны.

Задача Коши для уравнений Максвелла с указанной плотностью тока в правой части и электрофизическими коэффициентами, отличными от вакуумоподобных в ограниченной области пространства, имеет единственное решение.

Начально-краевая задача для уравнений Максвелла со специальной правой частью и граничными условиями имеет своим решением плоскую волну в прямоугольной области.

Начально-краевая задача для уравнений Максвелла с граничными «условиями излучения энергии» для разности полной и плоской волн описывает дифракцию плоской волны на ограниченном объекте и имеет единственное решение.

Разностная аппроксимация граничного «условия излучения энергии» для разности полной и плоской волн сохраняет второй порядок точности разностной схемы.

Рассмотренная модель позволила решить ряд практических задач [10-11].

Список использованных источников

- 1 Мырова Л.О., Чепиженко А.З. Обеспечение стойкости аппаратуры связи к ионизирующим и электромагнитным излучениям. – М.: Радио и связь, 1988, 296 с.
- 2 Рикетс Л.У., Бриджес Дж.Э. Майлетта Дж. Электромагнитный импульс и методы защиты: Пер. с англ. / Под ред. Н.А. Ухина. – М.: Атомиздат, 1979, 327 с.
- 3 Вэнс Э.Ф. Влияние электромагнитных полей на экранированные кабели: Пер. с англ. / Под ред. Л.Д. Разумова. – М.: Радио и связь, 1982, 120 с. [E.F. Vance. Coupling to shielded cables. A Wiley Interscience publication. New York/London/Sydney/Toronto. 1978]
- 4 Владимиров В.С. Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1981.
- 5 Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1977.
- 6 Березин А.В., Марков М.Б., Плющенко Б.Д. Локально-одномерная разностная схема для электродинамических задач с заданным волновым фронтом // Препринты ИПМ им.М.В.Келдыша.– 2005. – № 31. – 24 с. — URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2005-31>
- 7 Березин А.В., Воронцов А.В., Марков М.Б., Плющенко Б.Д. О выводе и решении уравнений Максвелла в задачах с заданным волновым фронтом полей // Математическое моделирование, 2006, т. 18, № 4, с. 43-60.
- 8 Березин А.В., Крюков А.А., Плющенко Б.Д. Метод вычисления электромагнитного поля с заданным волновым фронтом // Математическое моделирование, 2011, т. 23, № 3, с. 109-126.
- 9 Борн М., Вольф Э. Основы оптики: Пер. с англ. / Под ред. Г.П. Мотулевич. – М.: Наука, 1973, 720 с.
- 10 Садовничий Д.Н., Марков М.Б., Воронцов А.С., Милехин Ю.М. Особенности распространения электромагнитного импульса в твердотопливной энергетической установке // Физика горения и взрыва, 2012, т. 48, № 1, с. 110-116.
- 11 Садовничий Д.Н., Марков М.Б., Воронцов А.С., Милехин Ю.М. Дифракция электромагнитного импульса на диэлектрическом градиентном цилиндре конечной длины // Журнал технической физики, 2012, т. 82, вып. 9, с. 55-62.