



ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 23 за 2013 г.



Попов М.В., Елизарова Т.Г.

Моделирование трехмерных
МГД-течений в рамках
магнитной
квазигазодинамики

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Попов М.В., Елизарова Т.Г. Моделирование трехмерных МГД-течений в рамках магнитной квазигазодинамики // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2013. № 23. 32 с. URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2013-23>

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
ОРДЕНА ЛЕНИНА
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М. В. КЕЛДЫША

М. В. Попов, Т. Г. Елизарова

Моделирование трехмерных МГД-течений
в рамках магнитной квазигазодинамики

Москва 2013

М. В. Попов, Т. Г. Елизарова

**Моделирование трехмерных МГД-течений
в рамках магнитной квазигазодинамики**

Аннотация

Представлен новый конечно-разностный метод для численного моделирования сжимаемых МГД-течений, применимый к широкому классу задач. Метод состоит в использовании магнитных квазигазодинамических уравнений (КМГД уравнений), которые, по сути, являются системой уравнений Навье-Стокса и уравнений Фарадея, к которым была применена процедура усреднения на малом интервале по времени. КМГД уравнения дискретизируются на расчетной сетке с помощью центральных разностей. Усреднение позволяет стабилизировать численное решение и не использовать дополнительные ограничивающие процедуры (лимитеры и пр.). Бездивергентность магнитного поля обеспечивается применением теоремы Стокса. Представлены результаты расчетов тестовых 3D задач: центральный взрыв в магнитном поле, взаимодействие ударной волны с облаком и трехмерный тест Орсага-Танга. Также продемонстрированы предварительные расчеты плазменного пинча, удерживаемого магнитным полем в ловушке.

Ключевые слова: Магнитная квазигазодинамика, КМГД, МГД-течения, конечно-разностный алгоритм, центрально-разностная аппроксимация

M. V. Popov, T. G. Elizarova

Simulation of 3D MHD flows in magneto quasi-gasdynamics

Abstract

A new finite-difference method for simulation of compressible MHD flows applicable to a very large class of problems is presented. The method is based on using of magnetic quasi-gasdynamics equations (QMHD equations) which are actually Navier-Stokes equations supplemented by Faraday equations, to which an averaging procedure over a small time interval has been applied. QMHD equations are discretized on a computational grid by central differences. The averaging allows to stabilize a numerical solution without application of additional limiting functions. Non-divergence constraint on magnetic field is provided by application of the Stokes theorem. The numerical solution of 3D test problems are presented. Among them there is a blast wave propagation through magnetized medium, interaction of a shock wave with a cloud and Orszag-Tang vortex problem, extended for 3D case. Also the preliminary simulations of magnetically confined plasma pinch are presented.

Key words: magnetic quasi-gasdynamics, QMHD, MHD flows, finite difference algorithm, central difference approximations

1 Введение

Квазигазодинамические уравнения (КГД уравнения) выражают законы сохранения для усредненных по малому временному интервалу газодинамических переменных – плотности, компонентов импульса и энергии. При этом делается предположение, что усредненная величина является гладкой функцией времени, которую можно разложить в ряд Тейлора в окрестности каждого момента времени t , т.е.

$$\bar{f}(r, t) = \frac{1}{\tau} \int_t^{t+\tau} f(r, t') dt' \approx f(r, t) + \tau \frac{\partial f(r, t)}{\partial t} + \dots \quad (1)$$

Закон сохранения для усредненной величины $\bar{f}(r, t)$ должен содержать в себе слагаемые, отражающие как сохранение $f(r, t)$, так и сохранение поправки, пропорциональной малому параметру τ , имеющему размерность времени. Таким образом, КГД уравнения представляют собой уравнения Навье-Стокса, содержащие дополнительные диссипативные слагаемые. Эти слагаемые играют стабилизирующую роль при численном решении уравнений, т.к. являются причиной дополнительной вязкости. Исследованию КГД уравнений и численным методам для расчета вязких течений, построенным на их основе, посвящены монографии [1, 2, 3].

КГД уравнения, в которых учтено влияние магнитных полей, впервые были рассмотрены в [3] для описания течений вязкого газа и жидкости. При этом влияние поля учитывалось в виде магнитных сил и диссипативных τ -поправок в части газодинамики, а само поле описывалось уравнениями Максвелла без коррекции с помощью τ -поправок. Для этой системы было построено уравнение баланса энтропии, выписано точное решение задачи Гартмана, проведен расчет течения электропроводного расплава в безиндукционном приближении.

Однако описанную выше процедуру усреднения можно применить и

к уравнениям для магнитной индукции, записанным в рамках единой системы магнитной гидродинамики. Этот подход позволит описывать магнитные вязкие течения с помощью квазигазодинамических уравнений для магнитной гидродинамики (КМГД уравнений) самосогласованным образом. Такие уравнения впервые рассмотрены в работах [4, 5, 6], где выполнено их исследование на некоторых стандартных 1D и 2D тестах: задаче Римана, задаче о распространении магнитных волн, задаче о диссипации и распаде альфвеновской волны, задаче о взрывной волне в замагниченной среде, задаче о вихре Орзага-Танга и задаче о взаимодействии ударной волны с облаком. Во всех случаях была продемонстрирована хорошая сходимость решения к точному при сгущении разностной сетки.

В данной работе мы приведем систему КМГД уравнений для 3D случая, записанную покомпонентно и представим результаты расчетов тестовых 3D задач: центральный взрыв в магнитном поле, взаимодействие ударной волны с облаком и трехмерный тест Орзага-Танга. Также будут продемонстрированы предварительные расчеты плазменного пинча, удерживаемого продольным магнитным полем. Проблема устойчивости пинча является важнейшей в технологической задаче удержания плазмы в магнитных ловушках.

2 КМГД уравнения

Запишем КМГД уравнения в декартовой системе координат с использованием стандартных обозначений для независимых переменных:

ρ – плотность,

u_x, u_y, u_z – компоненты скорости,

B_x, B_y, B_z – компоненты магнитной индукции,

E – полная энергия единицы объема.

Будем также использовать краткие обозначения для квадратов модулей векторов скорости и магнитной индукции:

$$u^2 = u_x^2 + u_y^2 + u_z^2,$$

$$B^2 = B_x^2 + B_y^2 + B_z^2.$$

Множитель $\sqrt{1/4\pi}$ мы включили в определение вектора магнитной индукции \mathbf{B} . В этих обозначениях полная энергия единицы объема записывается как

$$E = \rho\varepsilon + \frac{\rho u^2}{2} + \frac{B^2}{2},$$

где ε – удельная внутренняя энергия. Для замыкания системы уравнений потребуется уравнение состояния. Для случая идеального газа оно имеет вид

$$p = (\gamma - 1)\rho\varepsilon,$$

где p – газодинамическое давление, γ – показатель адиабаты. Уравнение состояния, выраженное через температуру, есть

$$p = \frac{\rho R T}{\eta},$$

где R – универсальная газовая постоянная, η – средний молекулярный вес газа. Отсюда температура T выражается как

$$T = \frac{p\eta}{\rho R}.$$

Комбинация E , p и ρ дает полную удельную энтальпию:

$$H = \frac{E + p}{\rho}.$$

Малый параметр, имеющий размерность времени, по которому проводится усреднение, обозначим τ (см. (1)). Для удобства второе слагаемое в разложении Тейлора в (1) обозначим как приращение Δ :

$$\bar{f} = f + \Delta f.$$

Выпишем приращения всех величин, которые будут использованы в дальнейшем. Данные выражения получены из МГД уравнений для невязкой и нетеплопроводной квазинейтральной плазмы [7].

$$\begin{aligned}\Delta \frac{1}{\rho} &= -\tau \left(\mathbf{u} \operatorname{grad} \frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho} \operatorname{div} \mathbf{u} \right), \\ \Delta \varepsilon &= -\tau \left(\mathbf{u} \operatorname{grad} \varepsilon + \frac{p}{\rho} \operatorname{div} \mathbf{u} \right), \\ \Delta p &= -\tau \left(\mathbf{u} \operatorname{grad} p + \gamma p \operatorname{div} \mathbf{u} \right), \\ \Delta u_i &= -\tau \left[\mathbf{u} \operatorname{grad} u_i + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial i} \left(p + \frac{B^2}{2} \right) - \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial B_i B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_i B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_i B_z}{\partial z} \right) \right], \\ \Delta B_i &= \tau \left[\frac{\partial}{\partial x} (u_i B_x - u_x B_i) + \frac{\partial}{\partial y} (u_i B_y - u_y B_i) + \frac{\partial}{\partial z} (u_i B_z - u_z B_i) \right],\end{aligned}$$

где $i = x, y, z$, \mathbf{u} – вектор скорости. Скалярное произведение скорости на градиент величины f и дивергенция скорости есть соответственно

$$\begin{aligned}\mathbf{u} \operatorname{grad} f &= u_x \frac{\partial f}{\partial x} + u_y \frac{\partial f}{\partial y} + u_z \frac{\partial f}{\partial z}, \\ \operatorname{div} \mathbf{u} &= \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z}.\end{aligned}$$

Закон сохранения массы в рамках системы КМГД записывается как

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial j_x}{\partial x} + \frac{\partial j_y}{\partial y} + \frac{\partial j_z}{\partial z} = 0, \quad (2)$$

где в качестве потоков выступают скорректированные компоненты плотности потока массы

$$j_i = \rho(u_i - w_i), \quad i = x, y, z.$$

Величина коррективы пропорциональна τ и записывается через пространственные производные, являющиеся, по сути, производными от потоков в уравнении Эйлера для МГД:

$$w_x = \frac{\tau}{\rho} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left(\rho u_x^2 + p + \frac{B^2}{2} - B_x^2 \right) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho u_x u_y - B_x B_y) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho u_x u_z - B_x B_z) \right\},$$

$$w_y = \frac{\tau}{\rho} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} (\rho u_x u_y - B_x B_y) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\rho u_y^2 + p + \frac{B^2}{2} - B_y^2 \right) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho u_y u_z - B_y B_z) \right\},$$

$$w_z = \frac{\tau}{\rho} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} (\rho u_x u_z - B_x B_z) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho u_y u_z - B_y B_z) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\rho u_z^2 + p + \frac{B^2}{2} - B_z^2 \right) \right\}.$$

Законы сохранения компонент импульса имеют вид

$$\frac{\partial \rho u_i}{\partial t} + \frac{\partial T_{ix}}{\partial x} + \frac{\partial T_{iy}}{\partial y} + \frac{\partial T_{iz}}{\partial z} = \frac{\partial \Pi_{ix}}{\partial x} + \frac{\partial \Pi_{iy}}{\partial y} + \frac{\partial \Pi_{iz}}{\partial z}, \quad (3)$$

где $i = x, y, z$. Компоненты тензора T_{ij} ($i, j = x, y, z$) выражают действие силы, связанной с потоком скорректированного импульса, газодинамическим и магнитным давлением вдоль каждого направления:

$$T_{ij} = \begin{pmatrix} j_x u_x + p + \frac{1}{2} B^2 - B_x^2 & j_x u_y - B_x B_y & j_x u_z - B_x B_z \\ j_y u_x - B_x B_y & j_y u_y + p + \frac{1}{2} B^2 - B_y^2 & j_y u_z - B_y B_z \\ j_z u_x - B_x B_z & j_z u_y - B_y B_z & j_z u_z + p + \frac{1}{2} B^2 - B_z^2 \end{pmatrix}.$$

Здесь и далее первый индекс обозначает номер столбца, второй – номер строки. Тензор Π_{ij} ($i, j = x, y, z$) включает в себя тензор вязких напряжений Навье-Стокса Π_{ij}^{ns} , пропорциональный коэффициенту динамической вязкости μ , и тензор Π_{ij}^{qmh} , связанный с поправками КМГД, пропорциональными коэффициенту τ :

$$\Pi_{ij} = \Pi_{ij}^{ns} + \Pi_{ij}^{qmh}, \quad (4)$$

где

$$\Pi_{ij}^{ns} = \begin{pmatrix} \frac{4}{3} \frac{\partial u_x}{\partial x} - \frac{2}{3} \frac{\partial u_y}{\partial y} - \frac{2}{3} \frac{\partial u_z}{\partial z} & \frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial y} & \frac{\partial u_z}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial z} \\ \frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial y} & \frac{4}{3} \frac{\partial u_y}{\partial y} - \frac{2}{3} \frac{\partial u_x}{\partial x} - \frac{2}{3} \frac{\partial u_z}{\partial z} & \frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} \\ \frac{\partial u_z}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial z} & \frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} & \frac{4}{3} \frac{\partial u_z}{\partial z} - \frac{2}{3} \frac{\partial u_x}{\partial x} - \frac{2}{3} \frac{\partial u_y}{\partial y} \end{pmatrix}.$$

Заметим, что $\Pi_{ij}^{ns} = \Pi_{ji}^{ns}$, а диагональные члены есть

$$\Pi_{ii}^{ns} = \mu \left(2 \frac{\partial u_i}{\partial i} - \frac{2}{3} \operatorname{div} \mathbf{u} \right), \quad i = x, y, z.$$

Тензор Π_{ij}^{qmhhd} в (4) записывается как

$$\Pi_{ij}^{qmhhd} = \begin{pmatrix} -\rho u_x \Delta u_x - \Delta p - \frac{\Delta(B^2)}{2} + \Delta(B_x^2) & -\rho u_x \Delta u_y + \Delta(B_x B_y) & -\rho u_x \Delta u_z + \Delta(B_x B_z) \\ -\rho u_y \Delta u_x + \Delta(B_x B_y) & -\rho u_y \Delta u_y - \Delta p - \frac{\Delta(B^2)}{2} + \Delta(B_y^2) & -\rho u_y \Delta u_z + \Delta(B_y B_z) \\ -\rho u_z \Delta u_x + \Delta(B_x B_z) & -\rho u_z \Delta u_y + \Delta(B_y B_z) & -\rho u_z \Delta u_z - \Delta p - \frac{\Delta(B^2)}{2} + \Delta(B_z^2) \end{pmatrix}.$$

К приращению Δ нужно применять правила дифференцирования, в соответствии с которыми $\Delta ab = a\Delta b + b\Delta a$.

Уравнения для магнитной индукции имеют вид

$$\frac{\partial B_i}{\partial t} + \frac{\partial T_{ix}^m}{\partial x} + \frac{\partial T_{iy}^m}{\partial y} + \frac{\partial T_{iz}^m}{\partial z} = -\frac{\partial T_{ix}^{mn}}{\partial x} - \frac{\partial T_{iy}^{mn}}{\partial y} - \frac{\partial T_{iz}^{mn}}{\partial z}, \quad i = x, y, z, \quad (5)$$

где тензор, содержащий компоненты электрического поля, есть

$$T_{ij}^m = u_j B_i - u_i B_j, \quad (6)$$

тензор, выражающий КМГД поправку, определяется через комбинацию приращений:

$$T_{ij}^{mn} = \Delta(T_{ij}^m) = B_i \Delta u_j + u_j \Delta B_i - B_j \Delta u_i + u_i \Delta B_j. \quad (7)$$

Уравнение для полной энергии имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial E}{\partial t} + \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z} + \frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + \frac{\partial Q_z}{\partial z} = \\ \frac{\partial}{\partial x} (\Pi_{xx}u_x + \Pi_{xy}u_y + \Pi_{xz}u_z) + \frac{\partial}{\partial y} (\Pi_{yx}u_x + \Pi_{yy}u_y + \Pi_{yz}u_z) + \\ \frac{\partial}{\partial z} (\Pi_{zx}u_x + \Pi_{zy}u_y + \Pi_{zz}u_z). \quad (8) \end{aligned}$$

Здесь обозначено

$$F_i = j_i \left(H + \frac{B^2}{2\rho} \right) - B_i (u_x B_x + u_y B_y + u_z B_z),$$

$$\begin{aligned} Q_i = -k \frac{\partial T}{\partial i} + \rho u_i \Delta \varepsilon + \rho u_i (p + B^2) \Delta \frac{1}{\rho} + \\ u_i (B_x \Delta B_x + B_y \Delta B_y + B_z \Delta B_z) - B_i (B_x \Delta u_x + B_y \Delta u_y + B_z \Delta u_z), \end{aligned}$$

где $i = x, y, z$; k – коэффициент теплопроводности, определяемый через коэффициент динамической вязкости μ , показатель адиабаты γ , универсальную газовую постоянную R и число Прандтля Pr :

$$k = \frac{\mu \gamma R}{(\gamma - 1) Pr}.$$

Уравнения (2-3), (5), (8) составляют систему КМГД. Параметрами системы являются:

γ – показатель адиабаты,

μ – коэффициент динамической вязкости,

Pr – число Прандтля,

η – средний молекулярный вес газа,

τ – регуляризирующий малый параметр.

для разреженных газов существует естественное определение параметра τ как

$$\tau = \alpha \frac{l}{c_f}, \quad (9)$$

где l – характерная длина свободного пробега молекул газа, $c_f = \max(c_f^x, c_f^y, c_f^z)$ – максимальное значение быстрой магнитоакустической скорости. Например, для направления x быстрая магнитоакустическая скорость вычисляется как

$$c_f^x = \sqrt{\frac{1}{2} \left(c^2 + \frac{B^2}{\rho} \right) + \frac{1}{2} \sqrt{\left(c^2 + \frac{B^2}{\rho} \right)^2 - 4c^2 \frac{B^2}{\rho}}},$$

где c – скорость звука:

$$c = \sqrt{\frac{\gamma p}{\rho}}.$$

Коэффициент пропорциональности α в (9) выбирается в диапазоне $0.1 \div 0.4$. Определение (9) означает, что τ есть время, за которое возмущение, распространяющееся с максимально возможной скоростью, проходит расстояние, равное длине свободного пробега в газе.

Параметр τ в случае разреженных газов связан с коэффициентом динамической вязкости μ как

$$\mu = \tau p S c,$$

где $S c$ – число Шмидта.

Если газ нельзя рассматривать как разреженный, то согласно (9) $\tau \rightarrow 0$. Если физические процессы слабо зависят от вязкости и теплопроводности, а газ неразреженный, то КМГД уравнения переходят в стандартные МГД уравнения для невязкого нетеплопроводного квазинейтрального газа. Эти уравнения, записанные в консервативных переменных, имеют вид [7]:

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial y} + \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial z} = 0,$$

где

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u_x \\ \rho u_y \\ \rho u_z \\ B_x \\ B_y \\ B_z \\ E \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F} = \begin{pmatrix} \rho u_x \\ \rho u_x^2 + p + \frac{B^2}{2} - B_x^2 \\ \rho u_x u_y - B_x B_y \\ \rho u_x u_z - B_x B_z \\ 0 \\ u_x B_y - u_y B_x \\ u_x B_z - u_z B_x \\ u_x \left(E + p + \frac{B^2}{2} \right) - B_x (\mathbf{u} \cdot \mathbf{B}) \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} \rho u_y \\ \rho u_x u_y - B_x B_y \\ \rho u_y^2 + p + \frac{B^2}{2} - B_y^2 \\ \rho u_y u_z - B_y B_z \\ u_y B_x - u_x B_y \\ 0 \\ u_y B_z - u_z B_y \\ u_y \left(E + p + \frac{B^2}{2} \right) - B_y (\mathbf{u} \cdot \mathbf{B}) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{H} = \begin{pmatrix} \rho u_z \\ \rho u_x u_z - B_x B_z \\ \rho u_y u_z - B_y B_z \\ \rho u_z^2 + p + \frac{B^2}{2} - B_z^2 \\ u_z B_x - u_x B_z \\ u_z B_y - u_y B_z \\ 0 \\ u_z \left(E + p + \frac{B^2}{2} \right) - B_z (\mathbf{u} \cdot \mathbf{B}) \end{pmatrix}.$$

Для течений, в которых вязкость мала, например, для течений идеальной плазмы, будем задавать τ как параметр численной схемы. В этом случае оно будет выполнять исключительно регуляризующую роль и стремиться к нулю при уменьшении размера численных ячеек.

Заметим, что рассмотренные КМГД уравнения не содержат слагаемых пропорциональных второй производной по времени вида $\sim \tau \partial^2 / \partial t^2$. Формально при усреднении исходных уравнений по времени такие слагаемые можно выписать, однако в данной работе эти слагаемые полагаются малыми и опущены [8]. Рассмотрение вторых производных по времени в

КГД уравнениях является предметом отдельного исследования [9].

3 Численный алгоритм

Для численного решения системы уравнений КМГД используется явная разностная схема с центральной аппроксимацией производных. Задается равномерная сетка, разбивающая вычислительную область на ячейки размером $\Delta x \times \Delta y \times \Delta z$, где знак Δ обозначает соответствующий шаг по сетке. Независимые переменные будем соотносить с центрами ячеек и обозначать целыми индексами i , j и k , соответствующим направлениям вдоль осей x , y и z . Полуцелые индексы будут обозначать величины, определенные на интерфейсах между ячейками. На рис. 1 в качестве примера показаны две смежные ячейки сетки с величинами, определенными в их центрах и на интерфейсе между ними.

При численном решении уравнений (2-3), (5), (8) производные по времени и пространству заменяются на разностные выражения вида

$$\frac{\partial f}{\partial t} \rightarrow \frac{\hat{f}_{i,j,k} - f_{i,j,k}}{\Delta t}, \quad \frac{\partial f}{\partial x} \rightarrow \frac{f_{i+1/2,j,k} - f_{i-1/2,j,k}}{\Delta x}, \quad (10)$$

где Δt – шаг по времени, \hat{f} обозначает неизвестные величины, соотно-

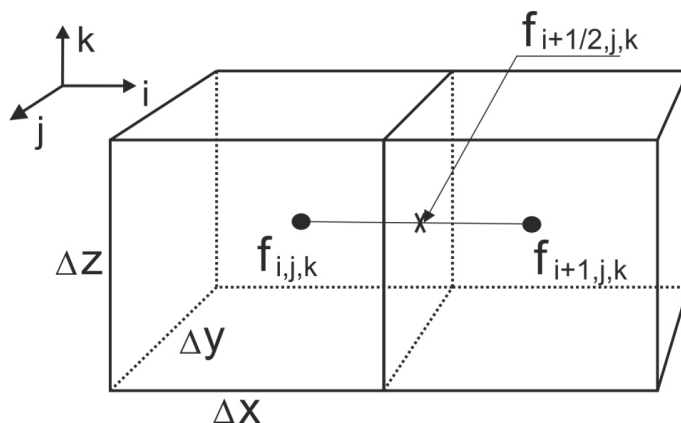


Рис. 1. Две смежные ячейки сетки с заданными в них величинами.

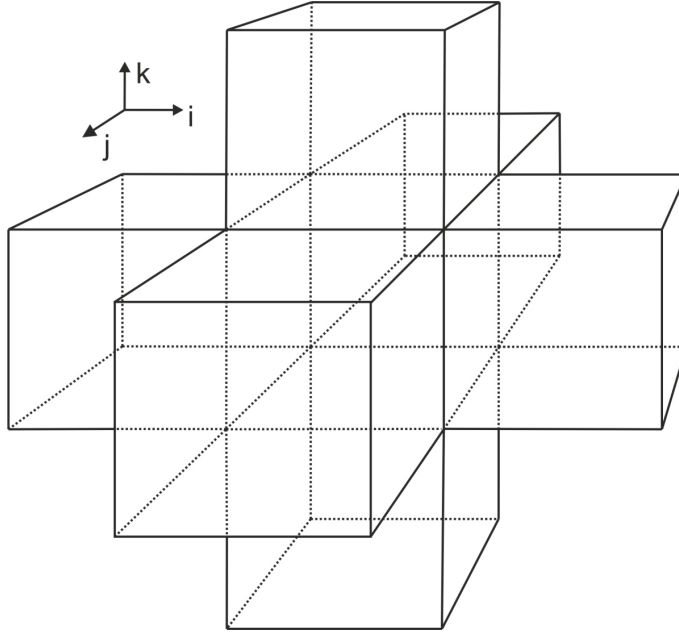


Рис. 2. Шаблон схемы.

сящиеся с новым временным слоем $t + \Delta t$, f обозначает известные величины, находящиеся на временном слое t . Правила (10) означают, что изменения величин внутри разностной ячейки определяются потоками через её грани.

Шаг по времени определяется из условия Куранта

$$\Delta t = \sigma \min_{i,j,k} \left\{ \frac{\Delta x}{|u_{x i,j,k}| + c_{f i,j,k}^x}, \frac{\Delta y}{|u_{y i,j,k}| + c_{f i,j,k}^y}, \frac{\Delta z}{|u_{z i,j,k}| + c_{f i,j,k}^z} \right\},$$

где σ – число Куранта, определяемое экспериментально и не превышающее единицы.

Т.к. под знаками пространственных производных в (2-3), (5), (8) находятся величины, сами определяемые через пространственные производные, то для их вычисления используются разности между центрами смежных ячеек:

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{i+1/2,j,k} = \frac{f_{i+1,j,k} - f_{i,j,k}}{\Delta x}.$$

Это означает, что для вычисления неизвестных величин \hat{f} , относящихся

к центру ячейки с номером (i, j, k) , используется информация также из смежных ячеек с номерами $(i \pm 1, j, k)$, $(i, j \pm 1, k)$ и $(i, j, k \pm 1)$. Таким образом, шаблон схемы – трехмерный крест (рис. 2).

Устойчивость разностной схемы обеспечивается регуляризирующими параметрами τ , μ и k , пропорциональными размеру численных ячеек:

$$\tau = \alpha \frac{h}{c_f}, \quad \mu = \tau p S c, \quad k = \frac{\mu \gamma R}{(\gamma - 1) P r},$$

где

$$h = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}.$$

4 Бездивергентность магнитного поля

Моделирование магнитных течений должно также обеспечивать бездивергентность вычисляемого магнитного поля. Для этого мы предлагаем использовать метод ограничения переноса (constrained transport method) из работы [10]. Этот же метод использовался при построении численной схемы для расчета МГД турбулентности в межзвездном газе [11]. Метод основан на выполнении теоремы Стокса:

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\text{rot } \mathbf{E}, \quad (11)$$

где \mathbf{E} – вектор напряженности электрического поля. Фактически компоненты магнитного поля, вычисленные согласно (5), заменяются на новые, полученные из (11). При этом проводится соответствующая коррекция полной энергии E .

Напряженность электрического поля в веществе, движущимся со скоростью \mathbf{u} , есть

$$\mathbf{E} = -[\mathbf{u}, \mathbf{B}],$$

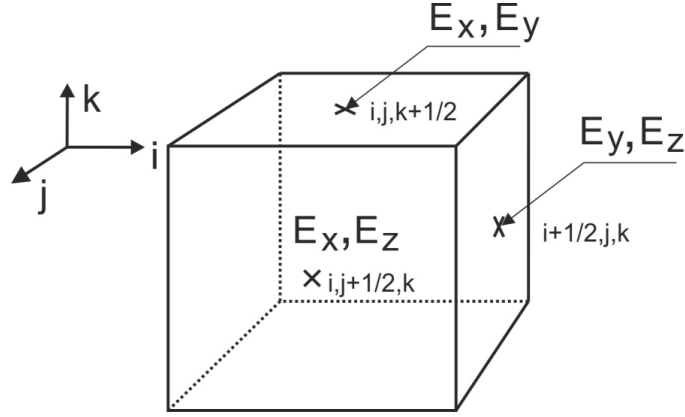


Рис. 3. Компоненты напряженности электрического поля, используемые в уравнениях для магнитной индукции системы КМГД.

поэтому компоненты электрического поля, относящиеся к соответствующим граням ячеек (см. рис. 3), записываются с учетом КМГД поправок согласно (6-7) как

$$\begin{aligned}
 E_{x i,j+1/2,k} &= T_{yz}^m + T_{yz}^{mn} , \\
 E_{x i,j,k+1/2} &= -T_{zy}^m - T_{zy}^{mn} , \\
 E_{y i,j,k+1/2} &= T_{zx}^m + T_{zx}^{mn} , \\
 E_{y i+1/2,j,k} &= -T_{xz}^m - T_{xz}^{mn} , \\
 E_{z i+1/2,j,k} &= T_{xy}^m + T_{xy}^{mn} , \\
 E_{z i,j+1/2,k} &= -T_{yx}^m - T_{yx}^{mn} ,
 \end{aligned} \tag{12}$$

Согласно методу ограничения переноса компоненты (12) переносятся на центры ребер (см. рис. 4) по формулам вида

$$\begin{aligned}
 E_{z i+1/2,j+1/2,k} &= \frac{1}{4} (E_{z i+1/2,j,k} + E_{z i+1/2,j+1,k} + E_{z i,j+1/2,k} + E_{z i+1,j+1/2,k}) + \\
 &\frac{\Delta y}{8} \left(\frac{\partial E_z}{\partial y} \Big|_{i+1/2,j+1/4,k} - \frac{\partial E_z}{\partial y} \Big|_{i+1/2,j+3/4,k} \right) + \\
 &\frac{\Delta x}{8} \left(\frac{\partial E_z}{\partial x} \Big|_{i+1/4,j+1/2,k} - \frac{\partial E_z}{\partial x} \Big|_{i+3/4,j+1/2,k} \right) ,
 \end{aligned}$$

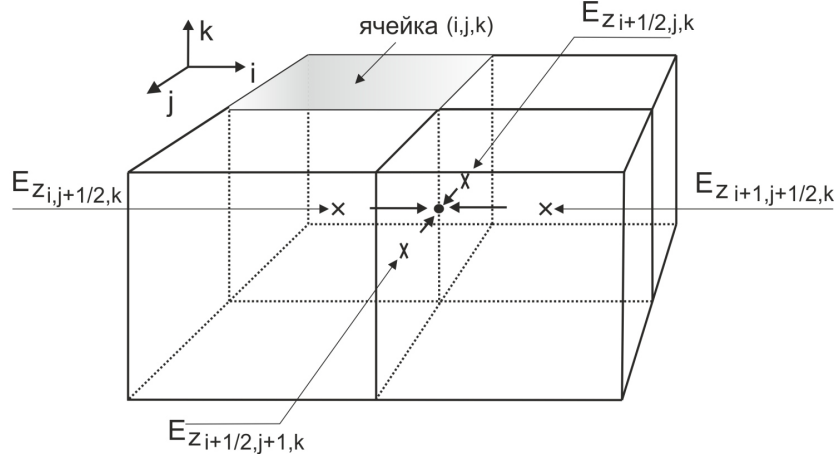


Рис. 4. Перенос компонент напряженности электрического поля с центров граней ячеек на центры ребер.

где соответствующие производные вычисляются в зависимости от знака скорости на грани

$$\frac{\partial E_z}{\partial y} \Big|_{i+1/2, j+1/4, k} = \begin{cases} \frac{\partial E_z}{\partial y} \Big|_{i, j+1/4, k}, & u_x i+1/2, j, k > 0, \\ \frac{\partial E_z}{\partial y} \Big|_{i+1, j+1/4, k}, & u_x i+1/2, j, k < 0, \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial E_z}{\partial y} \Big|_{i, j+1/4, k} + \frac{\partial E_z}{\partial y} \Big|_{i+1, j+1/4, k} \right), & \text{иначе} \end{cases}$$

с использованием разностных выражений вида

$$\frac{\partial E_z}{\partial y} \Big|_{i, j+1/4, k} = 2 \left(\frac{E_z i, j+1/2, k - E_z i, j, k}{\Delta y} \right).$$

Полученные значения компонент электрического поля на центрах ребер ячеек используются в (11) для вычисления компонент магнитного поля в центрах граней ячеек на следующем временном слое $t + \Delta t$ (см. рис. 5). Разносная аппроксимация (11) имеет вид:

$$\hat{B}_{x i+1/2, j, k} = B_{x i+1/2, j, k} - \frac{\Delta t}{\Delta y} (E_z i+1/2, j+1/2, k - E_z i+1/2, j-1/2, k) + \frac{\Delta t}{\Delta z} (E_y i+1/2, j, k+1/2 - E_y i+1/2, j, k-1/2),$$

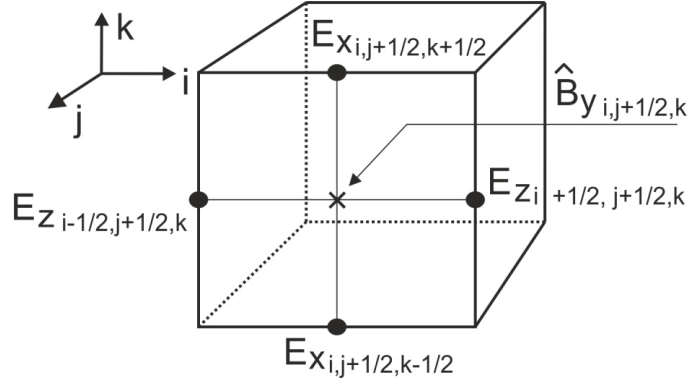


Рис. 5. Вычисление компонент магнитного поля на временном слое $t + \Delta t$ в центрах граней ячеек по теореме Стокса.

$$\hat{B}_{y i, j+1/2, k} = B_{y i, j+1/2, k} + \frac{\Delta t}{\Delta x} (E_{z i+1/2, j+1/2, k} - E_{z i-1/2, j+1/2, k}) - \frac{\Delta t}{\Delta z} (E_{x i, j+1/2, k+1/2} - E_{x i, j+1/2, k-1/2}),$$

$$\hat{B}_{z i, j, k+1/2} = B_{y i, j, k+1/2} - \frac{\Delta t}{\Delta x} (E_{y i+1/2, j, k+1/2} - E_{y i-1/2, j, k+1/2}) + \frac{\Delta t}{\Delta y} (E_{x i, j+1/2, k+1/2} - E_{x i, j-1/2, k+1/2}).$$

Значения компонент магнитного поля в центрах ячеек вычисляются простым усреднением (рис. 6):

$$\begin{aligned} \hat{B}_{x i, j, k} &= \frac{1}{2} (\hat{B}_{x i+1/2, j, k} + \hat{B}_{x i-1/2, j, k}), \\ \hat{B}_{y i, j, k} &= \frac{1}{2} (\hat{B}_{y i, j+1/2, k} + \hat{B}_{y i, j-1/2, k}), \\ \hat{B}_{z i, j, k} &= \frac{1}{2} (\hat{B}_{z i, j, k+1/2} + \hat{B}_{z i, j, k-1/2}). \end{aligned} \tag{13}$$

Магнитное поле, полученное согласно (13), обладает свойством бездивергентности. В этом можно убедиться, вычислив дивергенцию в верши-

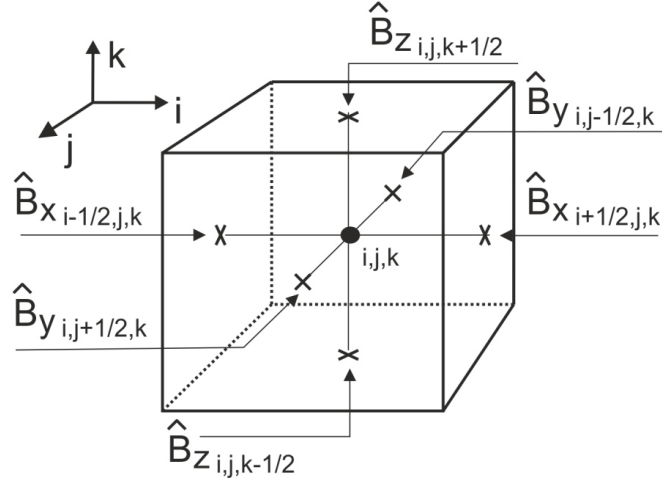


Рис. 6. Вычисление компонент магнитного поля на временном слое $t + \Delta t$ в центрах ячеек.

нах ячеек по формуле:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \hat{\mathbf{B}} \Big|_{i+1/2, j+1/2, k+1/2} &= \frac{1}{4\Delta x} \left(\hat{B}_x i+1, j, k + \hat{B}_x i+1, j+1, k - \hat{B}_x i, j, k - \hat{B}_x i, j+1, k \right) + \\ &\frac{1}{4\Delta x} \left(\hat{B}_x i+1, j, k+1 + \hat{B}_x i+1, j+1, k+1 - \hat{B}_x i, j, k+1 - \hat{B}_x i, j+1, k+1 \right) + \\ &\frac{1}{4\Delta y} \left(\hat{B}_y i, j+1, k + \hat{B}_y i+1, j+1, k - \hat{B}_y i, j, k - \hat{B}_y i+1, j, k \right) + \\ &\frac{1}{4\Delta y} \left(\hat{B}_y i, j+1, k+1 + \hat{B}_y i+1, j+1, k+1 - \hat{B}_y i, j, k+1 - \hat{B}_y i+1, j, k+1 \right) + \\ &\frac{1}{4\Delta z} \left(\hat{B}_z i, j, k+1 + \hat{B}_z i+1, j, k+1 - \hat{B}_z i, j, k - \hat{B}_z i+1, j, k \right) + \\ &\frac{1}{4\Delta z} \left(\hat{B}_z i, j+1, k+1 + \hat{B}_z i+1, j+1, k+1 - \hat{B}_z i, j+1, k - \hat{B}_z i+1, j+1, k \right). \end{aligned}$$

5 Примеры расчетов

Ниже приводятся результаты применения изложенного метода к некоторым популярным тестам магнитной гидродинамики, расширенным на трехмерный случай. Численный анализ свойств метода на одномерных и двухмерных тестах проведен в работах [4, 5, 6].

5.1 Взрыв в магнитном поле

В задаче рассчитывается структура распространяющегося возмущения, вызванного избыточным давлением в ограниченной области, в среде с наложенным магнитным полем (a blast wave problem) [12]. Расчетная область представляет собой куб с ребром $L = 1$, на котором задается равномерная сетка, состоящая из $120 \times 120 \times 120$ ячеек. В начальный момент времени пространство заполнено идеальным газом с $\gamma = 1.4$, плотностью $\rho = 1$ и давлением $p = 1$, за исключением центральной сферической области радиусом $r = 0.05$, в которой задано давление $p = 1000$. Вдоль направления x наложено однородное магнитное поле $B_x = 10$ (рис. 7). Расчет проводился с параметром $\alpha = 0.5$ и числом Куранта $\sigma = 0.1$.

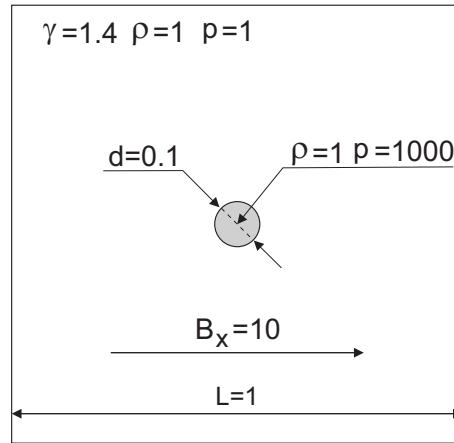


Рис. 7. Взрыв в магнитном поле. Начальные условия.

Результат расчета на момент $t = 3 \times 10^{-2}$ представлен на рис. 8. Показан логарифм плотности в виде трехмерного распределения и двухмерного разреза вдоль плоскости $y = 0$ с линиями уровней. За счет магнитного давления, направленного ортогонально к полю, течение образует вытянутую вдоль направления поля структуру. Максимальная плотность $\log \rho \sim 0.35$ достигается в областях максимального сопротивления среды. В центре достигаются минимальные значения $\log \rho \sim -0.95$.

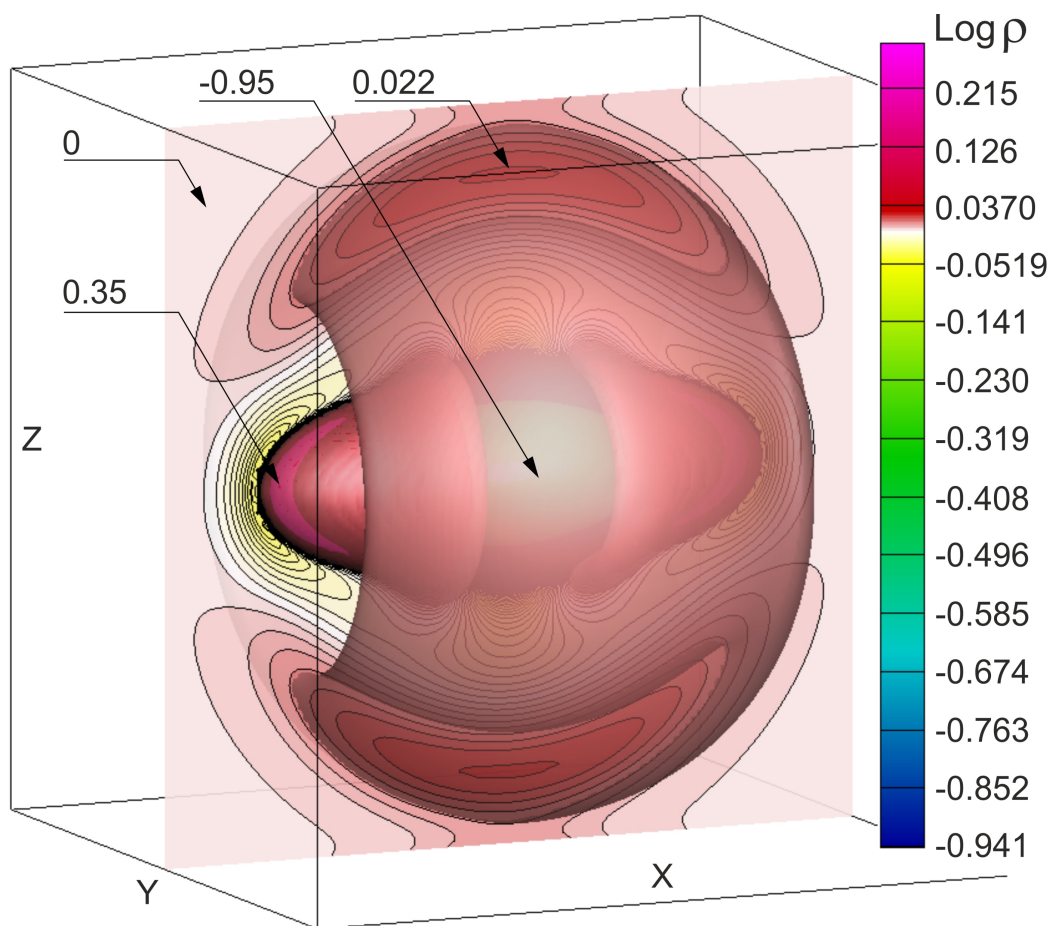


Рис. 8. Взрыв в магнитном поле. Показан логарифм плотности в виде трехмерного распределения и двухмерного разреза вдоль плоскости $y = 0$ с линиями уровней на момент $t = 3 \times 10^{-2}$. Дополнительно указаны значения в характерных областях.

5.2 Взаимодействие ударной волны с облаком

В задаче рассчитывается процесс разрушения плотного облака при взаимодействии с ударной волной [13]. Расчетная область представляет собой куб с ребром $L = 1$, на котором задается равномерная сетка, состоящая из $120 \times 120 \times 120$ ячеек. Ударная волна инициируется с помощью разрыва между двумя состояниями $\mathbf{U} = (\rho, u_x, u_y, u_z, B_x, B_y, B_z, p)$, разделенны-

ми плоскостью $x = 0.05$:

$$U^L = (3.86859, 11.2536, 0, 0, 0, 2.1826182, -2.1826182, 167.345),$$

$$U^R = (1, 0, 0, 0, 0, 0.56418958, 0.56418958, 1).$$

Облако с плотностью $\rho = 10$, находящееся в гидростатическом равновесии со средой, задавалось в виде шара радиуса $r = 0.15$ с центром в точке с $(x, y, z) = (0.3, 0.5, 0.5)$ (рис. 9). Расчет проводился с параметром $\alpha = 0.5$ и числом Куранта $\sigma = 0.1$. Показатель адиабаты $\gamma = 5/3$.

Результат расчета на момент $t = 6.09 \times 10^{-2}$ представлен на рис. 10. Показан логарифм плотности в виде трехмерного распределения и двухмерного разреза вдоль плоскости $y = 0$ с линиями уровней. Полученная конфигурация отражает гидродинамическое обтекание препятствия. Из-за сопротивления облака потоку, перед облаком возникает контактный разрыв в форме полусферы. Позади наблюдается анизотропное течение, структура которого связана с направлением магнитного поля.

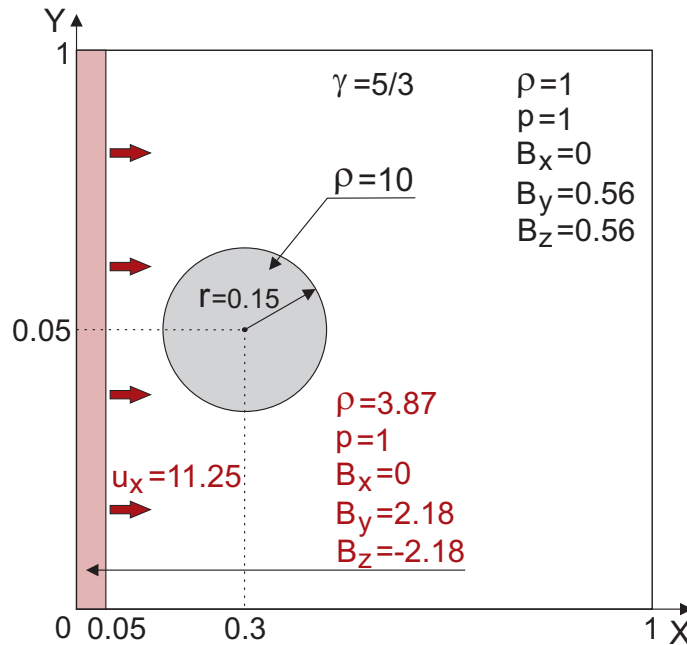


Рис. 9. Взаимодействие ударной волны с облаком. Начальные условия.

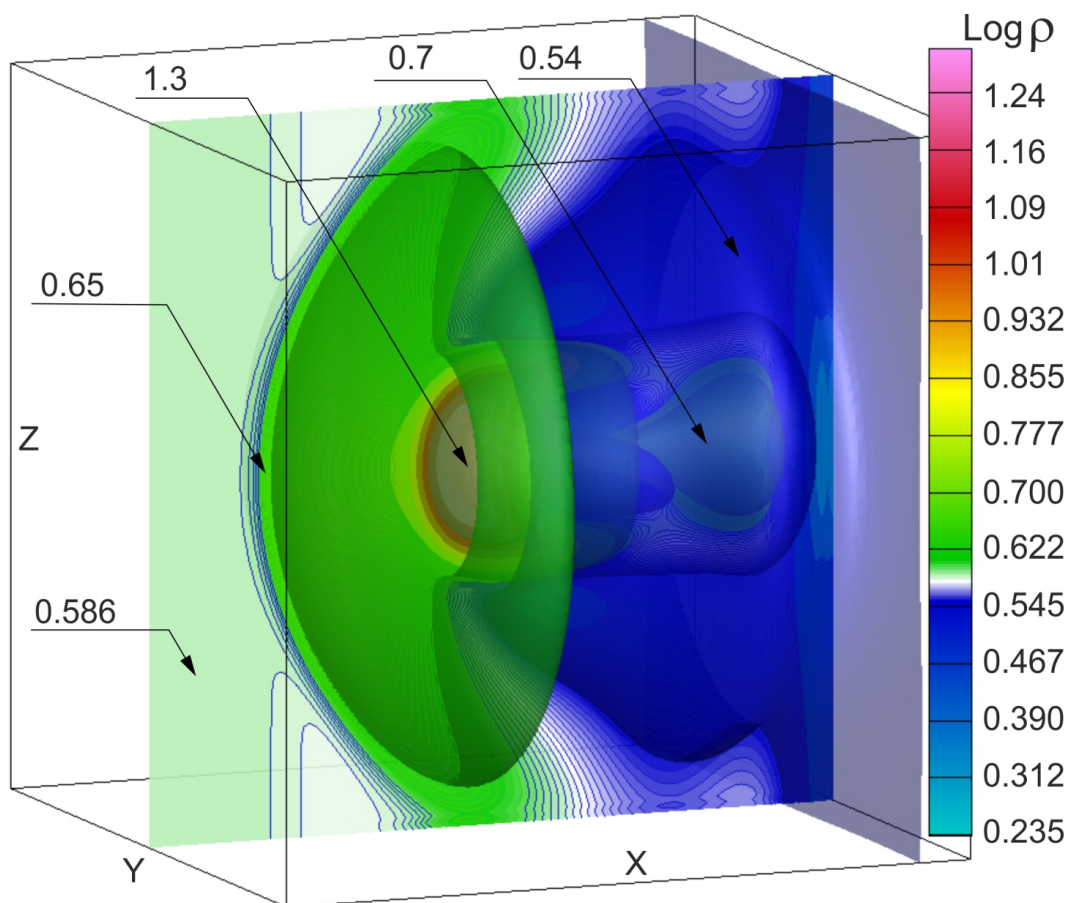


Рис. 10. Взаимодействие ударной волны с облаком. Показан логарифм плотности в виде трехмерного распределения и двухмерного разреза вдоль плоскости $y = 0$ с линиями уровней на момент $t = 6.09 \times 10^{-2}$. Дополнительно указаны значения в характерных областях.

5.3 Трехмерный вихрь Орсага-Танга

Данная задача была впервые предложена в работе [14] в двухмерной постановке для исследования процесса развития сверхзвуковой турбулентности и получила в дальнейшем название вихря Орсага-Танга (Orszag-Tang vortex). В начальный момент времени задаются гладкие начальные условия, которые дают быстрый переход к сложному течению с формированием и взаимодействием ударных волн. Задача является тяжелой для многих численных схем, т.к. возникающие градиенты величин, осо-

бенно сильные в центральной части расчетной области, могут привести к осцилляциям и отрицательным значениям плотности.

В данной работе мы впервые рассматриваем трехмерную постановку задачи. Расчетная область представляет собой куб с ребром $L = 1$, на котором задается равномерная сетка, состоящая из $120 \times 120 \times 120$ ячеек. Граничные условия задаются периодическими. Мы предлагаем следующие начальные условия для 3D случая:

$$\begin{aligned}\rho &= \frac{25}{36\pi}, \\ u_x &= -\sin(2\pi z), \\ u_y &= \sin(2\pi x), \\ u_z &= \sin(2\pi y), \\ B_x &= -\frac{1}{\sqrt{4\pi}} \sin(2\pi z), \\ B_y &= \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \sin(4\pi x), \\ B_z &= \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \sin(4\pi y), \\ p &= \frac{5}{12\pi}.\end{aligned}$$

Расчет проводился с параметром $\alpha = 0.5$ и числом Куранта $\sigma = 0.1$. Показатель адиабаты $\gamma = 5/3$.

Результат расчета на момент $t = 0.5$ представлен на рис. 11. Показана энергия магнитного поля с помощью 200 цветовых уровней в диапазоне от 0.02 до 2.25. Метод позволяет получать правильную структуру течения со всеми разрывами и выполнять расчет неограниченно долго. При продолжении счета течение постепенно распадается на мелкие структуры, кинетическая энергия диссипирует из-за вязкости.

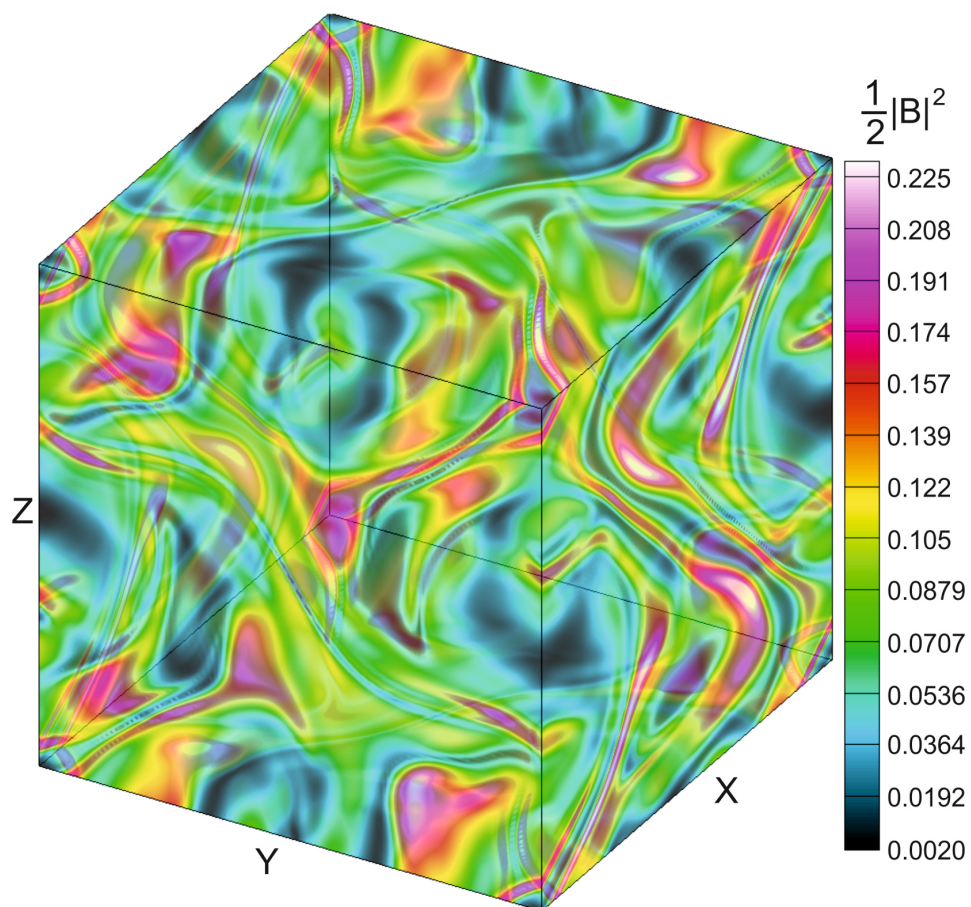


Рис. 11. Трехмерный вихрь Орсага-Танга. Показана энергия магнитного поля на момент $t = 0.5$. Заливка выполнена с помощью 200 цветовых уровней в диапазоне от 0.02 до 2.25.

5.4 Удержание плазменного пинча в магнитной ловушке

Было проведено моделирование процесса удержания горячего плазменного пинча в ловушке с помощью продольного магнитного поля. Такой пинч принято называть θ -пинчем. Эта задача представляет большой интерес для технологической проблемы создания установок термоядерного синтеза типа ТОКАМАК и является предметом исследований несколько десятилетий (см., например, [15, 16]). Время удержания пинча в стабильном состоянии, полученное в экспериментах, составляет порядка нескольких миллисекунд из-за развития гидродинамической неустойчи-

ности. Мы рассматриваем данный процесс в безразмерной постановке.

Расчетная область представляет собой куб с ребром $L = 1$, заполненный идеальным газом с $\gamma = 5/3$ (что соответствует водороду), плотностью $\rho_0 = 5 \times 10^{-6}$ и давлением $p_0 = 0.01$. Пинч задавался в центре расчетной области в виде цилиндра радиусом $r = 0.1$, внутри которого $\rho_1 = 5 \times 10^{-4}$, $p_1 = 1$. В начальный момент времени задавалось продольное магнитное поле $B_z = \sqrt{2p_1/\beta}$, где плазменное $\beta = 5$. Начальная конфигурация пинча показана на рис. 12. Использовалась равномерная сетка, состоящая из $120 \times 120 \times 120$ ячеек. Расчет проводился с параметром $\alpha = 0.5$ и числом Куранта $\sigma = 0.1$

При моделировании был получен циклический процесс расширения и сжатия плазмы под действием магнитного давления. При этом магнитное поле, равномерно распределенное в начальный момент времени, выдавливалось из области пинча. Наблюдалось несколько циклов прямого и обратного перетока энергии между энергией магнитного поля и кинетической энергией вещества пинча. Увеличение энергии поля приводило к подавлению расширения плазмы.

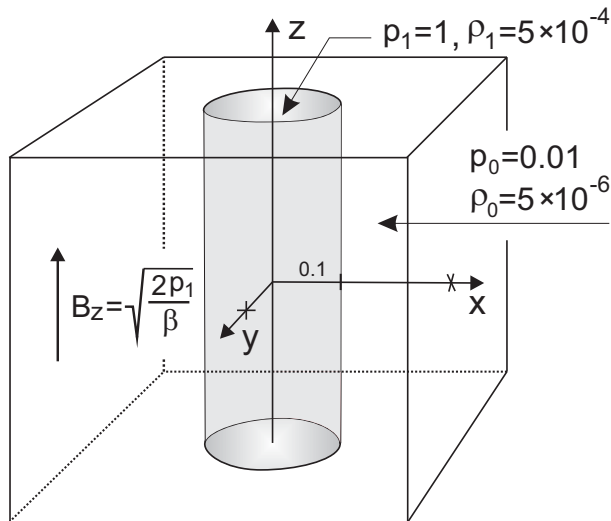


Рис. 12. Начальная конфигурация плазменного пинча в магнитной ловушке.

Для проверки устойчивости работы кода был проведен расчет пинча, наклоненного к оси z в начальный момент времени на угол $\sim 10^\circ$. В результате происходило выравнивание пинча вдоль магнитного поля через циклические колебания. Этот процесс демонстрируется на рис. 13, где представлено распределения плотности с тремя характерными уровнями 7.3×10^{-5} , 1.5×10^{-4} и 1.61×10^{-4} на некоторый момент времени. Видна деформация формы пинча при колебаниях.

Используемая довольно грубая трехмерная вычислительная сетка не позволила разрешить мелкомасштабные структуры и смоделировать раз-

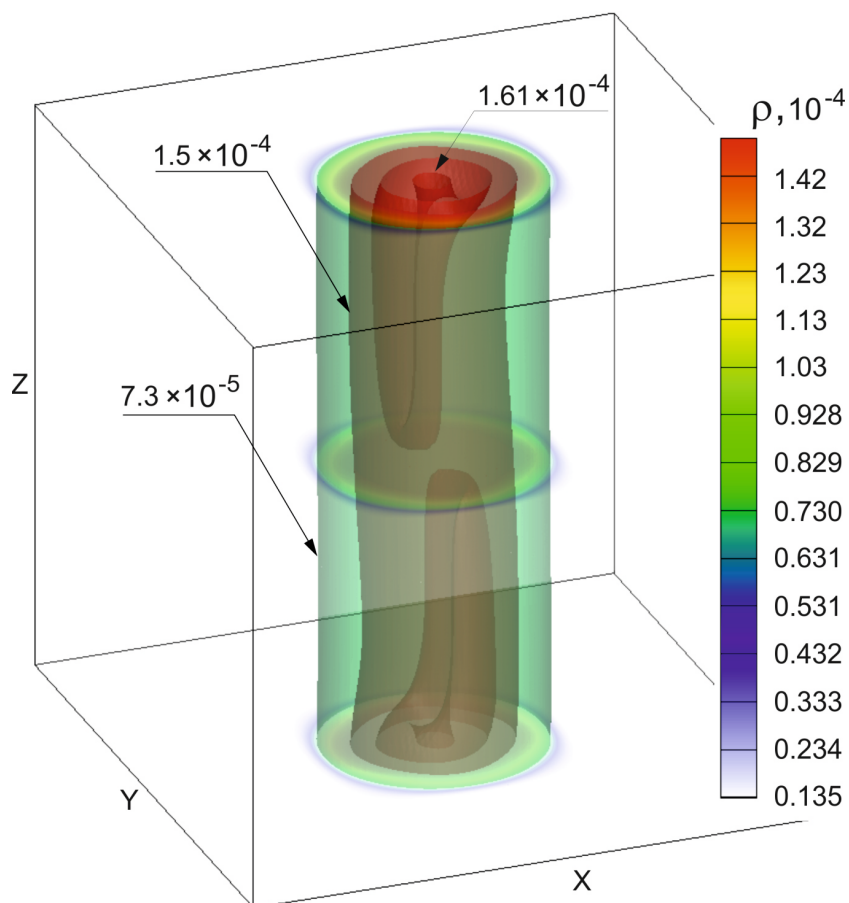


Рис. 13. Плазменный пинч в магнитной ловушке. Показано распределения плотности с тремя характерными уровнями 7.3×10^{-5} , 1.5×10^{-4} и 1.61×10^{-4} в некоторый момент времени.

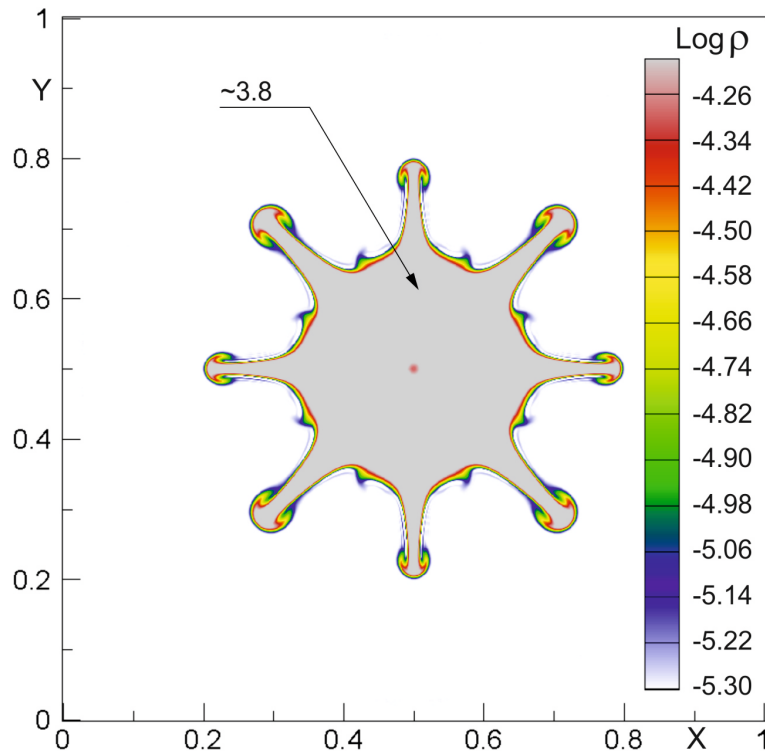


Рис. 14. Развитие гидродинамической неустойчивости пинча, рассчитанное в 2D постановке в плоскости xy на сетке 400×400 . Показано распределения плотности в логарифмическом масштабе в некоторый момент времени.

витие неустойчивости. В двумерной постановке на сетке 400×400 при моделировании среза пинча в плоскости xy такая неустойчивость была получена. Она развивалась в поперечных к полю направлениях и напоминала неустойчивость Релея-Тейлора. На рис. 14 представлено распределение плотности в логарифмическом масштабе в некоторый момент времени, демонстрирующее образующиеся в результате этого процесса структуры.

При моделировании со слабым магнитным полем циклического процесса и развития неустойчивости не наблюдалось. Пинч в этом случае распадается за счет диффузии.

6 Заключение

В работе представлен алгоритм решения квази-газодинамических (КМГД) уравнений, описывающих нестационарные сжимаемые магнитогидродинамические течения для случая идеального уравнения состояния. В отличие от более ранних работ, КМГД уравнения были записаны самосогласованно в рамках единого подхода как к уравнениям, описывающим законы сохранения в гидродинамике, так и к уравнениям Фарадея для магнитных полей.

Представленная схема является полностью трехмерной, где все физические величины рассчитываются без расщепления по пространству. Тестирование численного алгоритма на нескольких "тяжелых" трехмерных задачах магнитной гидродинамики показало исключительную стабильность работы кода. Выбранный параметр расчета $\alpha = 0.5$ и число Куранта $\sigma = 0.1$ являются универсальными для любых задач.

Алгоритм является громоздким из-за наличия дополнительных монотонизирующих поправок, пропорциональных τ , но простым в реализации. Используемая явная схема с центральными разностями позволяет распараллелить код естественным образом с помощью декомпозиции области по процессорам.

Достоинством подхода является отсутствие необходимости в традиционных монотонизирующих процедурах, таких как лимитеры, которые необходимо применять при использовании стандартных МГД уравнений. Монотонизирующие процедуры не являются универсальными, что приводит к необходимости тонкой настройки кода для каждого конкретного случая.

Недостатком метода является его первый порядок точности, что требует использования более подробных сеток для получения решения,

сравнимого по качеству с получаемым по схемам высокого порядка. Заметим, что порядок аппроксимации определяется по поведению на гладких областях, в то время как наиболее интересными являются разрывные решения.

В недавней работе [17] КМГД уравнения были обобщены на случай уравнения состояния неидеального газа при наличии внешних сил и источника тепла. Было получено уравнение теплового баланса и исследованы энтропийные свойства КМГД уравнений.

Работа выполнена при поддержке грантов РФФИ 13-01-00703-а, 12-02-31737мол_а.

Список литературы

- [1] Т. Г. Елизарова *Квазигазодинамические уравнения и методы расчета вязких течений* –М: Научный мир, 2007, 352 с.
- [2] Б. Н. Четверушкин *Кинетические схемы и квазигазодинамическая система уравнений* –М: Макс Пресс, 2004.
- [3] Ю. В. Шеретов *Динамика сплошных сред при пространственно-временном осреднении* –Москва-Ижевск: НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика", 2009, 400 с.
- [4] Т. Г. Елизарова, С. Д. Устюгов *Квазигазодинамический алгоритм решения уравнений магнитной гидродинамики. Одномерный случай*. Препринт ИПМ им. М. В. Келдыша РАН № 1, 2011, 20 с.
http://www.keldysh.ru/papers/2011/source/prep2011_01.pdf
- [5] Т. Г. Елизарова, С. Д. Устюгов *Квазигазодинамический алгоритм решения уравнений магнитной гидродинамики. Многомерный слу-*

- чай*. Препринт ИПМ им. М. В. Келдыша РАН № 30, 2011, 24 с.
http://www.keldysh.ru/papers/2011/source/prep2011_30.pdf
- [6] M. V. Popov, T. G. Elizarova, S. D. Ustyugov *Quasi-gasdynamical approach for numerical solution of magnetohydrodynamic equations*, Computers & Fluids, submitted (2013).
- [7] А. Г. Куликовский, Н. В. Погорелов, А. Ю. Семенов *Математические вопросы численного решения гиперболических систем уравнений* –М: Физматлит, 2001, 608 с.
- [8] Т. Г. Елизарова *Осреднение по времени как приближенный способ построения квазигазодинамических и квазигидродинамических уравнений*, ЖВМиМФ **51**, № 11, 2096 (2011).
<http://mi.mathnet.ru/rus/zvmmf/v51/i11/p2096>
- [9] Б. Н. Четверушкин *Пределы детализации и формулировка моделей уравнений сплошных сред*, Матем. модел. **24**, № 11, 33 (2012).
<http://mi.mathnet.ru/rus/mm/v24/i11/p33>
- [10] T. A. Gardiner, J. M. Stone *An unsplit Godunov method for ideal MHD via constrained transport in three dimensions*, J. Comput. Phys. **227**, 4123 (2008).
<http://adsabs.harvard.edu/abs/2008JCoPh.227.4123G>
- [11] S. D. Ustyugov, M. V. Popov, A. G. Kritsuk and M. L. Norman *Piecewise parabolic method on a local stencil for magnetized supersonic turbulence simulation*, J. Comput. Phys. **228**, 7614 (2009).
<http://adsabs.harvard.edu/abs/2009JCoPh.228.7614U>
- [12] W. Dai, P. Woodward *A simple finite difference scheme for multidimensional magnetohydrodynamical equations*, J. Comput. Phys.

- 142**, 331 (1998).
<http://dx.doi.org/10.1006/jcph.1998.5944>
- [13] G. Tóth *The $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ constraint in shock-capturing magnetohydrodynamics codes*, J. Comput. Phys. **161**, 605 (2000).
<http://adsabs.harvard.edu/abs/2000JCoPh.161..605T>
- [14] S. A. Orszag, C.-M. Tang *Small-scale structure of two-dimensional magnetohydrodynamic turbulence*, J. Fluid Mech. **90**, 129 (1979).
<http://adsabs.harvard.edu/abs/1979JFM....90..129O>
- [15] А. А. Веденов, Е. П. Велихов, Р. З. Сагдеев *Устойчивость плазмы*, УФН **LXXIII (73)**, вып. 4, 701 (1961).
http://ufn.ru/ufn61/ufn61_4/Russian/r614h.pdf
- [16] В. Е. Голант, А. П. Жилинский, И. Е. Сахаров *Основы физики плазмы* – Москва, Атомиздат, 1977.
- [17] B. Ducomet, A. Zlotnik *On a regularization of the magnetic gas dynamics system of equations*, 2012.
<http://arxiv.org/abs/1211.3539>

Содержание

1	Введение	3
2	КМГД уравнения	4
3	Численный алгоритм	12
4	Бездивергентность магнитного поля	14
5	Примеры расчетов	18
5.1	Взрыв в магнитном поле	19
5.2	Взаимодействие ударной волны с облаком	20
5.3	Трехмерный вихрь Орсага-Танга	22
5.4	Удержание плазменного пинча в магнитной ловушке . . .	24
6	Заключение	28