



ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 28 за 2013 г.



Корнеев Б.А., [Левченко В.Д.](#)

Моделирование уравнений
газовой динамики
разрывным методом
Галёркина с помощью
алгоритмов LRnLA

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Корнеев Б.А., Левченко В.Д. Моделирование уравнений газовой динамики разрывным методом Галёркина с помощью алгоритмов LRnLA // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2013. № 28. null с. URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2013-28>

Ордена Ленина
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М. В. Келдыша
Российской академии наук

Б. А. Корнеев, В. Д. Левченко

**Моделирование уравнений
газовой динамики
разрывным методом Галёркина
с помощью алгоритмов LRnLA**

Москва
2013

УДК 519.688

Корнеев Б. А., Левченко В. Д.

Моделирование уравнений газовой динамики разрывным методом Галёркина с помощью алгоритмов LRnLA

АННОТАЦИЯ

В данной работе RKDG методом построен вариант численной схемы для решения уравнения Эйлера идеального газа в одномерном случае. Полученная схема использует кусочно-линейную аппроксимацию по пространству, имеет второй порядок точности и обладает TVDM свойством.

Проанализирован граф зависимостей полученной численной схемы и предложена реализация для неё LRnLA алгоритма. Данная реализация протестирована на ряде модельных задач. Полученные численные решения оказались достаточно качественными в сравнении с другими известными схемами того же порядка.

Ключевые слова: газовая динамика, уравнения Эйлера, RKDG метод, LRnLA алгоритмы, задача Римана.

Korneev B. A., Levchenko V. D.

A Locally Recursive non-Locally Asynchronous Algorithm to RKDG Methods for Gas Dynamics Equations

ABSTRACT

In this paper we introduce the Runge-Kutta Discontinuos Galerkin (RKDG) method for the Euler equations of the ideal gases in the one-dimentional case. Due to a piecewise-linear space approximation and a special Runge-Kutta time discretization, the second-order TVDM numerical scheme is obtained.

After analyzing the scheme dependency graph, we construct a locally recursive non-locally asynchronous algorithm (LRnLA) of its computation. The results of carried out tests are comparable with the numerical solutions by the other well-known methods of the same order.

Keywords: gas dynamics, Euler equations, RKDG method, LRnLA algorithms, Riemann problem.

Работа выполнена при поддержке грантов РФФИ 12-01-00490-а и 12-01-00708-а.

1 Введение

Уравнения газовой динамики — одна из моделей механики сплошной среды. С их помощью поддаётся количественному и качественному описанию множество процессов, будь то обтекание тел жидкостью или газом, истечение газа из сопла [1]. Дополненные уравнениями Максвелла, так называемые уравнения радиационной газовой динамики с успехом применяются в моделировании некоторых задач физики плазмы, астрофизики, космологии. Также газодинамические модели и подходы применяются в моделировании климатических процессов [2], транспортных потоков [3] и многих других.

В силу своей сложности, связанной главным образом с нелинейностью, для большинства из этих задач не найдено точного решения, более того, в общем случае для уравнений Навье-Стокса не доказана теорема существования и единственности решения [4].

Ввиду этого, а также в связи с развитием вычислительной математики и ЭВМ, большую популярность получили методы численного решения этих уравнений, их создано большое количество. Существующие численные методы решения различаются, во-первых, по способу пространственной дискретизации: конечно-разностные методы [5], методы конечного объема, конечных элементов [6] и др., во-вторых, по способу аппроксимации конвективных, вязких и источниковых членов, т. е. использующие центрально-разностные [7][8] или противопоточные (upwind schemes) [9][10] монотонные или монотонизированные (TVD [11], ENO [12]) схемы. В третьих, по способу дискретизации по времени применяются явные, неявные и комбинированные явно-неявные алгоритмы [1].

Метод RKDG (Рунге-Кутты разрывный метод Галеркина) [13] для численного решения уравнений газовой динамики, рассматриваемый в данной работе, представляет собой некое обобщение метода конечных объемов и метода Галёркина, относящегося к методу конечных элементов. Для аппроксимации потоков используется метод, основанный на приближенном решении задачи Римана о распаде разрыва, что роднит его с противопоточным методом. RKDG метод является монотонизированным и явным по времени.

Однако следует отметить, что универсального метода, предназначенного для расчета произвольных течений и имеющего заметные преимущества перед другими, не существует. Решение каждой конкретной задачи о течении вязкого высокотемпературного газа, особенно в трехмерном случае, является весьма трудоёмкой проблемой, требующей кроме всего прочего больших вычислительных ресурсов при численном расчете.

Можно сказать, что реализация любого численного метода на ЭВМ есть реализация алгоритма преобразования некой структуры данных, соответ-

ствующей численной области, рассчитываемому временному интервалу и начальным условиям, при этом в структуре данных обычно хранятся тем или иным способом значения численных функций в вычислительной области, а алгоритм преобразования соответствует численной схеме. Следует отметить, что выбор структуры данных и алгоритма не определяется однозначно численной схемой, но от их выбора зависит скорость расчета, удобство представления данных и их адекватность. Это, в первую очередь, связано со сложным устройством современных ЭВМ, особенно распределенных вычислительных систем и систем с гибридной архитектурой, требующей возможности распараллеливания алгоритма на множество вычислительных узлов. Основная проблема состоит в том, что эффективность расчета при неудачной реализации может оказаться значительно меньше теоретически возможной, что влечет за собой большие потери времени, электроэнергии и другие неудобства.

LRnLA (локально рекурсивные нелокально асинхронные алгоритмы) [14] применимы для любой численной схемы с локальным шаблоном вычислений. Их замечательное свойство состоит в том, что при их помощи достигается высокая локальность расчета (отношение числа операций к числу загружаемых в память данных), а так же они адаптированы к применению на многопроцессорных вычислительных системах, в том числе и с гибридной архитектурой. Опыт их применения как к тестовым задачам [15], так и к реальным задачам численного моделирования физических процессов [16] показывает, что LRnLA позволяет добиваться эффективности расчета, близкую к теоретически возможной.

2 Построение численной схемы RKDG метода

2.1 Система дифференциальных уравнений

Определим метод RKDG (Рунге Кутты разрывный метод Галёркина) для системы уравнений Эйлера, описывающих поведение невязкого газа. В одномерном случае она допускает запись в виде

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{U})}{\partial x} = 0, \quad x \in (0, L), \quad t \in (0, T); \quad (1)$$

Будем решать эту систему в прямоугольной области $(x, t) \in [0, L] \times [0, T]$ с заданными начальными и граничными условиями

$$\mathbf{U}(x, 0) = \mathbf{U}_0(x), \quad x \in (0, L), \quad \mathbf{U}(0, t) = \mathbf{U}_L(t), \quad \mathbf{U}(L, t) = \mathbf{U}_R(t), \quad t \in [0, T]. \quad (2)$$

2.2 Пространственная дискретизация

Вводим разбиение отрезка $(0, L)$ узлами $x_{i+1/2}, i = \overline{0, N}$ и обозначим $I_j = (x_{j-1/2}, x_{j+1/2}), j = \overline{1, N}$. Приближенное решение U_h в каждой ячейке I_j представим в виде разложения

$$\mathbf{U}_h = \sum_{i=1}^k \mathbf{U}_i(t) \varphi_i(x), \{\varphi_i(x)\}_{i=1}^k$$

по базисным функциям конечномерного пространства V_k размерности k

$$\mathbf{U}_i(t) = [u_i^1(t), \dots, u_i^n(t)]^T$$

- зависящий только от времени векторный коэффициент размерности n ; для одномерной области $n = 3$. Наконец, покомпонентно будем иметь

$$u_h^s = \sum_{i=1}^k u_i^s(t) \varphi_i(x); \quad s = 1, 2, 3. \quad (3)$$

Подставим (3) в (1) и (2), для получившейся невязки поставим условие ортогональности базисным функциям. Получим систему ОДУ для определения неизвестных $\mathbf{U}_i(t)$ для каждого отрезка $I_j, i = \overline{1, k}, j = \overline{1, N}$:

$$\sum_{i=1}^k \frac{\partial u_i^m(t)}{\partial t} \int_{I_j} \varphi_i(x) \varphi_l(x) dx + \int_{I_j} \mathbf{F}^m(\mathbf{U}) \frac{\partial \varphi_l(x)}{\partial x} dx + \mathbf{F}^m(\mathbf{U}) \varphi_l(x) \Big|_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} = 0, \quad (4)$$

$$\sum_{i=1}^k u_i^m(0) \int_{I_j} \varphi_i(x) \varphi_l(x) dx = \int_{I_j} \mathbf{U}_0(x) \varphi_l(x) dx, \quad m = 1, 2, 3 \quad (5)$$

Заметим, что функция $\mathbf{F}^m(\mathbf{U}(x))$, вообще говоря, не определена при $x = x_{j\pm 1/2}$, поэтому необходимо заменить её численным потоком $h^m(x)$, зависящим от предельных значений функции \mathbf{U}_h слева и справа от точек $x_{j\pm 1/2}$, и определённым тем или иным способом [13][17]. После этого получим

$$\sum_{i=1}^k \frac{\partial u_i^m(t)}{\partial t} \int_{I_j} \varphi_i(x) \varphi_l(x) dx + \int_{I_j} \mathbf{F}^m(\mathbf{U}(x)) \frac{\partial \varphi_l(x)}{\partial x} dx + h^m(x) \varphi_l(x) \Big|_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} = 0, \quad (6)$$

$$\sum_{i=1}^k u_i^m(0) \int_{I_j} \varphi_i(x) \varphi_l(x) dx = \int_{I_j} \mathbf{U}_0(x) \varphi_l(x) dx, \quad m = 1, 2, 3; \quad (7)$$

Интегралы в (6) и (7) заменяем квадратурными формулами нужного порядка. Если базис выбран ортонормированный, $\int_{I_j} \varphi_i(x) \varphi_l(x) dx = \delta_{il}$ можно переписать данную систему в виде

$$\begin{aligned} \frac{du(t)}{dt} &= Lu(t) \\ u(0) &= u_0 \end{aligned} \quad (8)$$

2.3 Временная дискретизация

Данную систему (8) будем решать явным методом Рунге-Кутты, применяя на каждой стадии специальный ограничитель-монотонизатор.

1. $u^0 = \Lambda\Pi_h P(u_0)$
2. $\forall n = 0, \dots, M - 1$:
 - $u^{(0)} = u^n$
 - $\forall i = 1, \dots, K + 1 : u^{(i)} = \Lambda\Pi_h \left\{ \sum_{l=0}^{i-1} \alpha_{il} u^{(l)} + \beta_{il} \Delta t^n L(u^{(l)}) \right\}$;
 - $u^{n+1} = u^{K+1}$

P — проектор начальных условий на дискретное пространство. Коэффициенты α_{il} , β_{il} должны удовлетворять условиям аппроксимации порядка $k + 1$, поэтому в общем случае число стадий $K > k$.

2.4 Построение ограничителя

$\Lambda\Pi_h$ — специальный ограничитель-монотонизатор. Необходимость его использования обусловлена тем, что в отсутствие ограничителя явный метод оказывался устойчивым при $\tau = O(h^2)$, что является слишком жёстким условием для уравнений гиперболического типа [13]. «Идеальным» является такой ограничитель, который удовлетворяет следующим требованиям:

1. Если $u_h = \Lambda\Pi_h(v_h)$, то $\bar{u}_j = \bar{v}_j \forall j$ (сохранение «массы»)
2. TVDM свойство (если $u_h = \Lambda\Pi_h(v_h)$, $w_h = u_h + \delta L_h(u_h)$, то для достаточно малого δ выполняется неравенство $|\bar{w}_h|_{TV(0,L)} \leq |\bar{u}_h|_{TV(0,L)}$, $|\cdot|_{TV(0,L)}$ — полная вариация на отрезке $(0, L)$)
3. Точность метода не снижается [17].

2.5 Окончательное определение численного метода

В данной работе применяется кусочно-линейная аппроксимация решения в ячейке, то есть $\varphi_1(x) = \frac{1}{\sqrt{h}}$, $\varphi_2(x) = \frac{2}{h\sqrt{h}}(x - x_j)$ при $x \in I_j$, интегралы считаются по формуле трапеций. В качестве численного потока выбран поток

HLLC [18], определяемый следующим образом:

$$\mathbf{F}^{hllc}(x^{-0}, x^{+0}) = \begin{cases} \mathbf{F}_L, & s_L > 0 \\ \mathbf{F}_{*L}, & s_L \leq 0 < s_* \\ \mathbf{F}_{*R}, & s_* \leq 0 < s_R \\ \mathbf{F}_R, & 0 \geq s_R \end{cases}$$

$s_{L,R}$ — скорости звука слева и справа от точки x ,

$$s_* = \frac{p_R - p_L + \rho_L u_L (s_L - u_L) - \rho_R u_R (s_R - u_R)}{\rho_L (s_L - u_L) - \rho_R (s_R - u_R)};$$

$$\mathbf{F}_{*k} = \frac{s_*(s_k \mathbf{U}_k - \mathbf{F}_k) + s_k(p_k + \rho_k(s_k - u_k)(s_* - u_k))\mathbf{D}_*}{s_k - s_*}, \quad \mathbf{D}_* = [0, 1, s_*]^T, \quad k = L, R$$

Для численного решения получаемой системы дифференциальных уравнений вида (8) используем метод Рунге-Кутты 2-го порядка:

1. $u^0 = \Lambda \Pi_h P(u_0)$
2. $\forall n = 0, \dots, M - 1$:
 - $\tilde{u} = u^n$
 - $\tilde{u} = \Lambda \Pi_h \left\{ u^n + \frac{\tau}{2} L(u^n) \right\}$ — первая стадия
 - $u^{n+1} = \Lambda \Pi_h \left\{ u^n + \tau L(\tilde{u}) \right\}$ — вторая стадия

Определим, как строится ограничитель-монотонизатор [17]. В каждой ячейке в каждый момент времени мы ищем решение в виде кусочно-линейной функции

$$v|_{I_j} = v_{1,j} + (x - x_j)v_{2,j}, \quad j = 1, \dots, N$$

Тогда положим

$$u|_{I_j} = v_{1,j} + (x - x_j)m\left(v_{2,j}, \frac{v_{1,j+1} - v_{1,j}}{h/2}, \frac{v_{1,j} - v_{1,j-1}}{h/2}\right), \quad \text{где}$$

$$m(x, y, z) = \begin{cases} s \min(|x|, |y|, |z|), & s = \text{sign}(x) = \text{sign}(y) = \text{sign}(z) \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

3 Реализация метода — LRnLA алгоритм

3.1 Граф зависимостей RKDG метода

Метод RKDG, рассматриваемый в данной работе, является явным. Более того, все значения в ячейке u_m^{n+1} на временном слое $n+1$ определяются

только значениями в нескольких соседних по пространству ячейках временного слоя n . Действительно, в каждой ячейке хранятся значения базисных коэффициентов для всех трех компонент вектора $\mathbf{U} = (\rho, \rho v, E)^T$. На каждом временном шаге сперва считаются значения численного потока HLLC, которые для границ каждой ячейки определяются только по её значениям и значениям её ближайших соседей. Далее идет первая стадия Рунге-Кутты, которая использует данные лишь самой ячейки и численных потоков. Затем мы применяем ограничитель, который опять же использует данные самой ячейки и её ближайших соседей. Потом снова считаем поток HLLC, проводится вторая стадия Рунге-Кутты и, наконец, второй раз применяется ограничитель.

Наглядно представить вышеописанный ход расчета можно с помощью графа зависимостей.

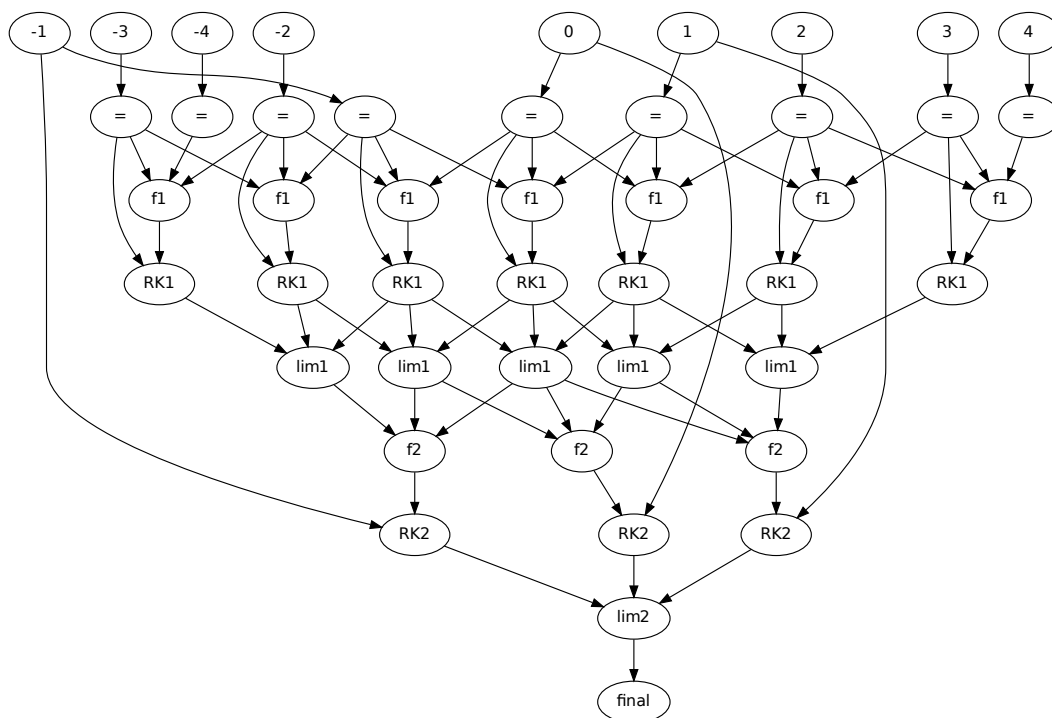


Рис. 1: Граф зависимостей RKDG метода

Нетрудно видеть, что для определения значений одной ячейки следующего временного слоя требуется девять вычислительных ячеек.

3.2 Построение LRnLA алгоритма

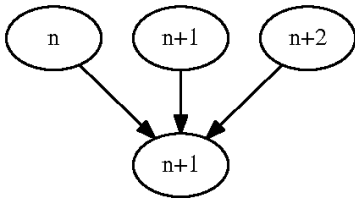


Рис. 2: Шаблон LRnLA

Объединим четыре вычислительных ячейки в один вычислительный узел. Тогда для определения значений одного узла следующего временного слоя требуется три вычислительных узла (рис. 2). Получившийся шаблон по виду совпадает с шаблоном трехточечной двуслойной схемы для уравнения теплопроводности. Для такого шаблона вычислений разработан LRnLA алгоритм, его описание можно найти, например, в [14].

4 Тестирование RKDG метода и его реализации на решении задачи Римана о распаде разрыва

4.1 Задача Римана о распаде разрыва

Задачей Римана о распаде разрыва называют обобщённую задачу Коши для уравнения (1) с начальными условиями

$$U(x \leq x_0) = V_L = const, \quad U(x > x_0) = V_R = const \quad (9)$$

Для уравнений газовой динамики известно аналитическое решение этой задачи при любых начальных условиях, причем оно всегда представимо в виде комбинации трёх автомодельных решений

- Контактного разрыва
- Волны разрежения
- Ударной волны

Кроме этого, многие существующие вычислительные методы хорошо справляются с решением этой задачи.

Вышесказанное дает возможность взять задачу Римана в качестве тестовой задачи для тестирования изучаемого метода и сравнить численные решения, полученные RKDG методом, с решениями, полученными по другим численным схемам.

4.2 Постановки вычислительных задач и их решения

Будем решать систему (1) с начальными условиями типа (9) на отрезке $[0, 1]$, $x_0 = \frac{1}{2}$, временном промежутке $t \in [0, 1]$. V_L и V_R будем задавать так, чтобы при решении получались следующие конфигурации:

- Контактный разрыв,
- Ударная волна – ударная волна (УВ – УВ),
- Волна разрежения – волна разрежения (ВР – ВР),
- Ударная волна – контактный разрыв – волна разрежения (УВ – КР – ВР).

Графики полученных методом RKDG решений будут сравниваться с решениями на равномерных сетках с числом узлов по пространству $N = 100$ и $N = 1000$, вычисленными по монотонной схеме 2 порядка аппроксимации, полученной из симбиоза схем Лакса-Вендроффа и Бима-Уорминга для газовой динамики [19]. Реализация этой схемы и графики (рис. 3а – 10а) построены с помощью лабораторной работы выполненной в пакете «Wolfram Mathematica» в рамках курса «Нелинейные вычислительные процессы», который читался студентам 4 курса ФУПМ МФТИ в 8 семестре. Графики численных решений методом RKDG (рис. 3б – 10б) получены с помощью пакета gnuplot.

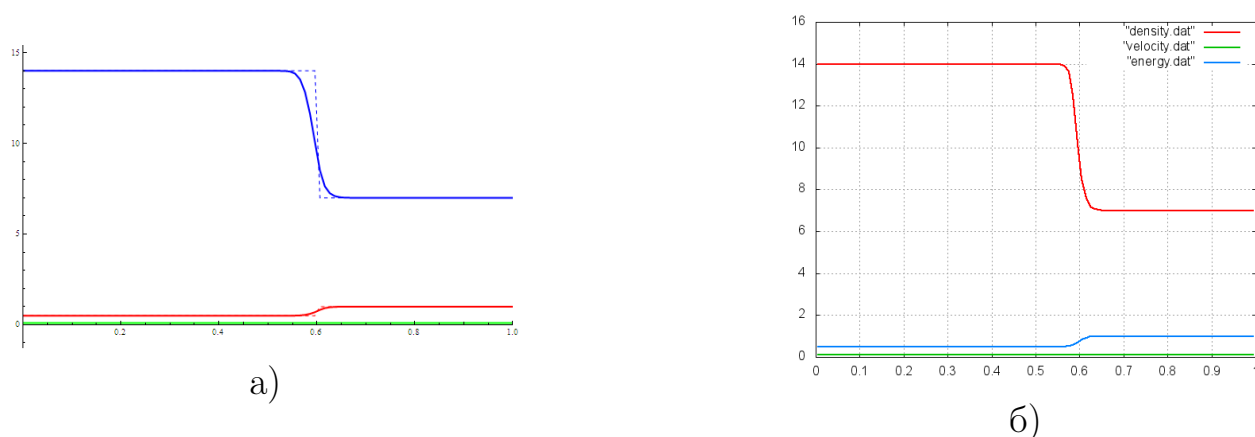
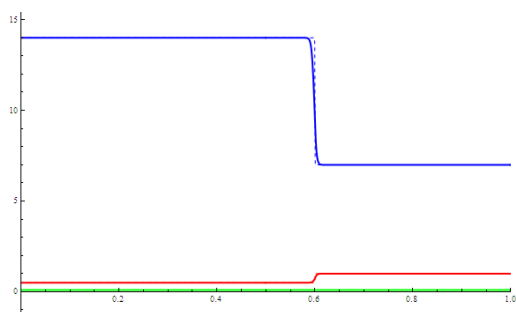
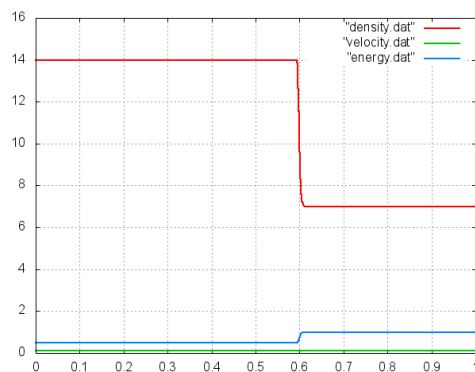


Рис. 3: Контактный разрыв, $V_L = (14, 0.1, 0.5)^T$, $V_R = (7, 0.1, 1)^T$, $V = (\rho, v, \varepsilon)^T$, момент времени $T = 1$: а) $N = 100$; б) $N = 100$, RKDG метод

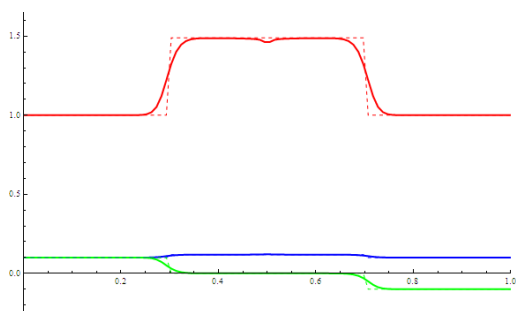


а)

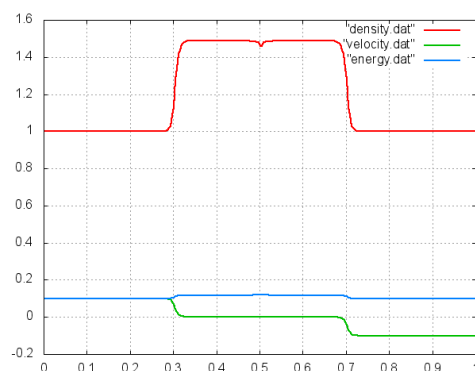


б)

Рис. 4: Контактный разрыв, $V_L = (14, 0.1, 0.5)^T$, $V_R = (7, 0.1, 1)^T$, $V = (\rho, v, \varepsilon)^T$, момент времени $T = 1$: а) $N = 1000$; б) $N = 1000$, RKDG метод

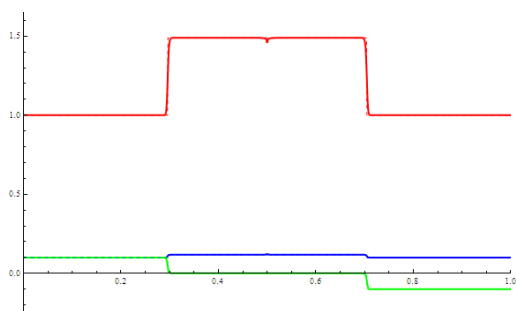


а)

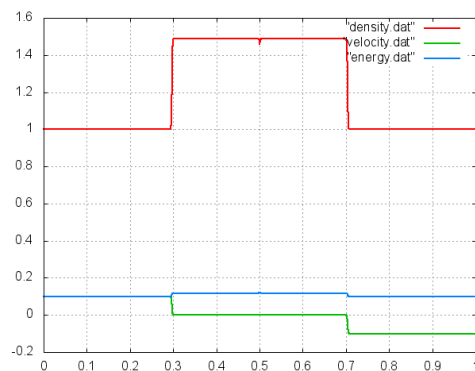


б)

Рис. 5: УВ–УВ, $V_L = (1, 0.1, 0.1)^T$, $V_R = (1, -0.1, 0.1)^T$, $V = (\rho, v, \varepsilon)^T$, момент времени $T = 1$: а) $N = 100$; б) $N = 100$, RKDG метод

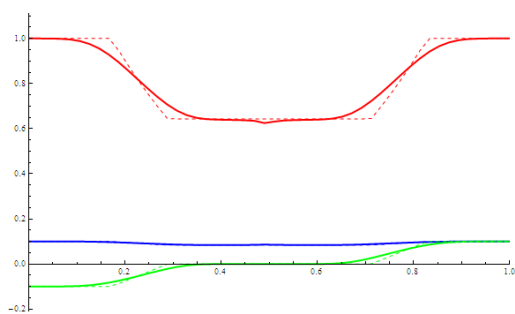


а)

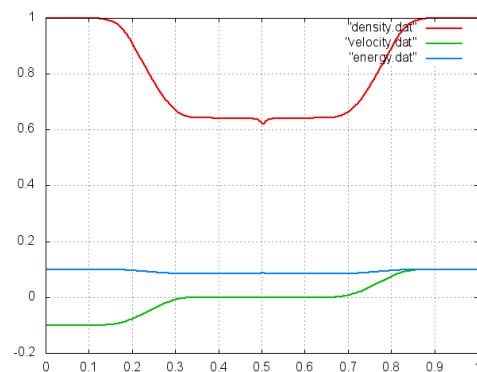


б)

Рис. 6: УВ–УВ, $V_L = (1, 0.1, 0.1)^T$, $V_R = (1, -0.1, 0.1)^T$, $V = (\rho, v, \varepsilon)^T$, момент времени $T = 1$: а) $N = 1000$; б) $N = 1000$, RKDG метод

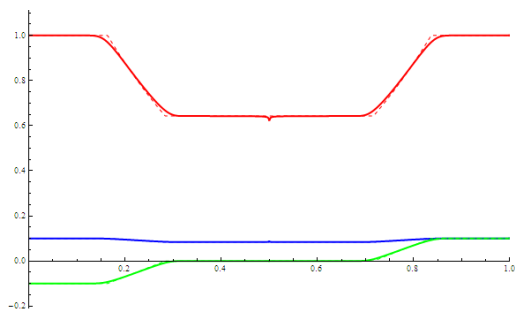


а)

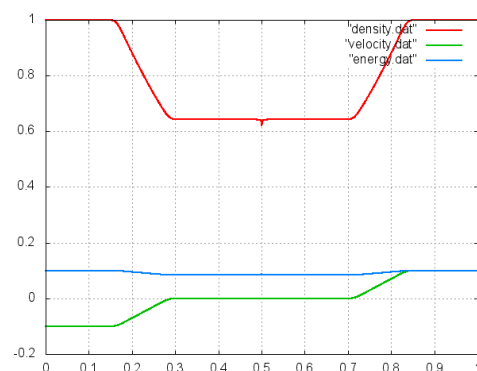


б)

Рис. 7: ВР–ВР, $V_L = (1, -0.1, 0.1)^T$, $V_R = (1, 0.1, 0.1)^T$, $V = (\rho, v, \varepsilon)^T$, момент времени $T = 1$: а) $N = 100$; б) $N = 100$, RKDG метод

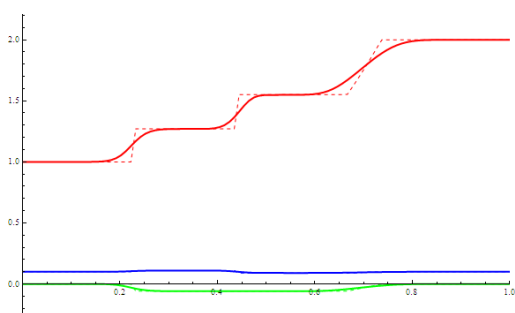


а)

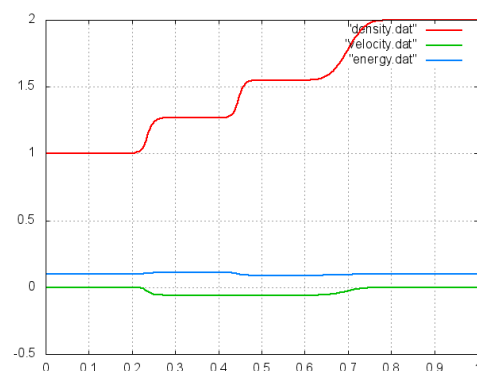


б)

Рис. 8: ВР–ВР, $V_L = (1, -0.1, 0.1)^T$, $V_R = (1, 0.1, 0.1)^T$, $V = (\rho, v, \varepsilon)^T$, момент времени $T = 1$: а) $N = 1000$; б) $N = 1000$, RKDG метод

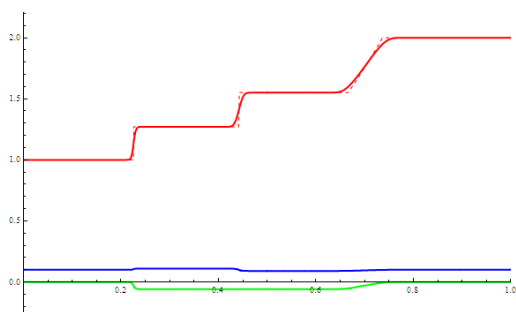


а)

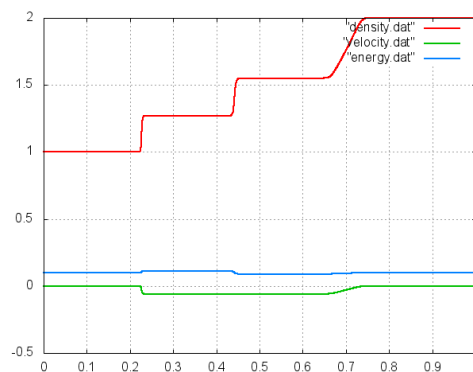


б)

Рис. 9: УВ–КР–ВР, $V_L = (1, 0, 0.1)^T$, $V_R = (2, 0, 0.1)^T$, $V = (\rho, v, \varepsilon)^T$, момент времени $T = 1$: а) $N = 100$; б) $N = 100$, RKDG метод



а)



б)

Рис. 10: УВ–КР–ВР, $V_L = (1, 0, 0.1)^T$, $V_R = (2, 0, 0.1)^T$, $V = (\rho, v, \varepsilon)^T$, момент времени $T = 1$: а) $N = 1000$; б) $N = 1000$, RKDG метод

5 Заключение

5.1 Основные результаты

В данной работе построена численная схема RKDG метода для одномерного уравнения Эйлера идеального газа. Метод использует кусочно-линейную аппроксимацию по пространству. В качестве численного потока был выбран поток HLLC. Получаемая система обыкновенных дифференциальных уравнений решалась явным методом Рунге-Кутты второго порядка, на каждой его стадии применялся специальный ограничитель-монотонизатор, подавляющий нефизические осцилляции на разрывах решения.

Для реализации построенной численной схемы был построен алгоритм LRnLA путем сведения шаблона вычислений схемы RKDG метода к уже изученному шаблону, соответствующему трёхточечной двуслойной схеме для уравнения теплопроводности.

Реализация данной схемы RKDG метода протестирована на задаче Римана о распаде разрыва. Был проведен сравнительный анализ решений по данной схеме с решениями, полученными другими методами, который показал состоятельность разработанной реализации RKDG метода. Разрывы в решениях оказываются размытыми на 4-8 численных ячеек, нефизические осцилляции практически отсутствуют.

5.2 Перспективы

Описанный метод обладает важными чертами. А именно, во-первых, он является методом повышенного порядка, во-вторых, его вычислительный

шаблон — локален. Локальность вычислительного шаблона допускает применение теории LRnLA алгоритмов для создания высокоэффективного параллельного кода.

Данный метод легко обобщается как на двумерное или трёхмерное пространство, так и на уравнения Навье-Стокса для вязкого сжимаемого теплопроводного газа. Построение эффективных солверов для таких уравнений — очень заманчивая, важная и сложная задача. Есть основания полагать, что применение вышеизложенных подходов к построению таких программных комплексов даст интересные результаты.

Список литературы

- [1] Гиперзвуковая аэродинамика и тепломассообмен спускаемых космических аппаратов и планетных зондов / Под ред. Г. А. Тирский. — М.: Физматлит, 2011.
- [2] Математическое моделирование конвективного тепломассообмена на основе уравнений Навье-Стокса / Под ред. В. С. Авдудевский. — М.: Наука, 1987.
- [3] Введение в математическое моделирование транспортных потоков: Учебное пособие / Под ред. А. В. Гасников. — М.: МЦНМО, 2012.
- [4] Попов, Ю. П. Разностные методы решения задач газовой динамики: Учеб. пособие для вузов по спец. прикл. математика / Ю. П. Попов, А. А. Самарский. — М.: Наука, 1992.
- [5] Pulliam, T. N. Implicit finite-difference simulations of three-dimensional compressible flow / T. N. Pulliam, J. I. Steger // AIAA Journal. — 1980. — Vol. 18. — P. 159–167.
- [6] Reddy, J. N. The finite element method in heat transfer and fluid dynamics / J. N. Reddy, J. I. Gartling // C.R.C. Press. — 1994.
- [7] Yoon, S. Lower-upper symmetric-gauss-seidel method for the euler and navier-stokes equations / S. Yoon, A. Jameson // AIAA Journal. — 1988. — Vol. 26. — P. 1025–1026.
- [8] Van Leer, B. Towards the ultimate conservative difference scheme v. a second order sequel to godunov's method / B. Van Leer // Computational Physics. — 1979. — Vol. 32. — P. 101–136.
- [9] Liou, M.-S. A sequel to ausrm: Ausrm+ / M.-S. Liou // Computational Physics. — 1996. — Vol. 129. — P. 364–382.

- [10] Osher, S. Upwind difference schemes for hyperbolic system of conservation laws / S. Osher, F. Solomon // *Math. Comp.* — 1982. — Vol. 38. — P. 339–374.
- [11] Yee, H. Implicit tvd schemes for hyperbolic conservation laws in curvilinear coordinates / H. Yee, A. Harten // *AIAA Journal.* — 1987. — Vol. 25. — P. 266–274.
- [12] Caper, J. A finite-volume high-order eno scheme for two-dimensional hyperbolic systems / J. Caper, H. Atkins // *Computational Physics.* — 1993. — Vol. 106. — P. 62–76.
- [13] Runge-kutta discontinuous galerkin methods for convection-dominated problems: Rep. / NASA; Executor: B. Cockburn, C. Shu: 2000.
- [14] Левченко, В. Д. Асинхронные параллельные алгоритмы как способ достижения эффективности вычислений / В. Д. Левченко // *Информационные технологии и вычислительные системы.* — 2005. — Т. 1. — С. 68–87.
- [15] Горячев, И. А. Оценка вычислительной производительности локально-рекурсивных нелокально-асинхронных алгоритмов на гетерогенных системах / И. А. Горячев // *Тезисы докладов Международной суперкомпьютерной конференции «Научный сервис в сети Интернет: поиск новых решений».* — 2012.
- [16] Горячев, И. А. Трехмерная полностью кинетическая численная модель замагниченной плазмы канала холловского двигателя / И. А. Горячев, В. Д. Левченко, А. Ю. Перепелкина // *Тезисы докладов XXXIX международной Звенигородской конференции по физике плазмы и управляемому термоядерному синтезу.* — 2011.
- [17] Галанин, М. П. Решение задач газовой динамики с ударными волнами rkdg-методом / М. П. Галанин, Е. Б. Савенков, С. А. Токарева // *Матем. моделирование.* — 2008. — Т. 20:11. — С. 55–56.
- [18] Toro, E. *Riemann Solvers And Numerical Methods for Fluid Dynamics: A Practical Introduction* / E.F. Toro. — Springer, 2009.
- [19] Магомедов, К. М. *Сеточно-характеристические численные методы:* / К. М. Магомедов, А. С. Холодов, О. М. Белоцерковский. — Наука, 1988.

Содержание

1	Введение	3
2	Построение численной схемы RKDG метода	4
2.1	Система дифференциальных уравнений	4
2.2	Пространственная дискретизация	5
2.3	Временная дискретизация	6
2.4	Построение ограничителя	6
2.5	Окончательное определение численного метода	6
3	Реализация метода — LRnLA алгоритм	7
3.1	Граф зависимостей RKDG метода	7
3.2	Построение LRnLA алгоритма	9
4	Тестирование RKDG метода и его реализации на решении задачи Римана о распаде разрыва	9
4.1	Задача Римана о распаде разрыва	9
4.2	Постановки вычислительных задач и их решения	9
5	Заключение	13
5.1	Основные результаты	13
5.2	Перспективы	13