



Бахолдин И.Б.

Методы исследования,
теория и классификация
обратимых структур
разрывов в моделях
гидродинамического типа

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Бахолдин И.Б. Методы исследования, теория и классификация обратимых структур разрывов в моделях гидродинамического типа // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2013. № 30. 40 с. URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2013-30>

ОРДЕНА ЛЕНИНА
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М.В.Келдыша
РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК

И.Б. Бахолдин

МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ, ТЕОРИЯ
И КЛАССИФИКАЦИЯ ОБРАТИМЫХ СТРУКТУР РАЗРЫВОВ
В МОДЕЛЯХ ГИДРОДИНАМИЧЕСКОГО ТИПА

Москва–2013

УДК 532.59+533.6+533.95+519.6

Бахолдин И.Б. Методы исследования, теория и классификация обратимых структур разрывов в моделях гидродинамического типа

Данная работа написана как результат анализа численных решений уравнений в частных производных для различных моделей механики сплошной среды, а также решений обыкновенных дифференциальных уравнений бегущих волн для этих моделей. Даются примеры типичных моделей, основные положения теории разрывов в моделях обратимого и слабодиссипативного типа, классификация структур, типичные виды решений задачи о распаде произвольного разрыва, применяемые методы численного анализа решений обыкновенных дифференциальных уравнений, применяемые методы численного решения уравнений в частных производных. Описанная теория включает в себя такие элементы, как использование усредненных уравнений, условия эволюционности, условия полной и частичной обратимости разрыва, условия существования решения в типичном случае, получаемые на основе анализа размерности инвариантных многообразий и числа дополнительных варьируемых параметров, классификацию периодических волн, уединенных волн и кинков по числу свободных параметров.

Ключевые слова: дисперсия, нелинейность, периодическая волна, уединенная волна, кинк, структура разрыва.

Bakholdin I.B. Methods of investigation, theory and classification of reversible shock structures in models of hydrodynamic type

This paper was written as a result of the analysis of numerical solutions of partial differential equations for various models of continuum mechanics and solutions of ordinary differential equations that describe travelling waves for these models. Examples of typical models, the basic principles of the theory of reversible shocks structures, classification of structures, typical of the types of solutions of an arbitrary discontinuity decay problem, the numerical methods used for analysis of solutions of ordinary differential equations, methods used for numerical solution of partial differential equations are given. The theory includes such elements as averaged equations, conditions of evolutionality, conditions of complete and partial reversibility, conditions of existence of solution in typical case that are based on analysis of dimensions of invariant manifolds and number of additional variations, classification of periodic waves, solitary waves and kinks based on number of free parameters.

Keywords: dispersion, nonlinearity, periodic wave, solitary wave, kink, shock structure.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, номер проекта 11-01-00034-а и Президентской программы поддержки ведущих научных школ, НШ-1303.2012.1.

Содержание

1	Характерные модели	5
2	Основные положения теории	8
2.1	Базовые методические понятия, методика исследования	8
2.2	Понятие обратимой структуры, усредненные и упрощенные уравнения	9
2.3	Определение размерностей инвариантных многообразий и существование стационарной структуры	10
2.4	Эволюционность, полная и частичная обратимость	12
3	Классификация упорядоченных эволюционных структур разрывов, уединенных и периодических волн	14
3.1	Периодические и уединенные волны	16
3.1.1	Периодическое решение	16
3.1.2	Классическая уединенная волна	17
3.1.3	1:1 уединенная волна	17
3.1.4	Обобщенная уединенная волна	17
3.1.5	Обобщенная уединенная волна огибающей двухпериодного решения	18
3.1.6	Уединенная волна специального типа	18
3.1.7	Нестационарная уединенная волна огибающей	19
3.2	Полностью обратимые эволюционные структуры разрывов	19
3.2.1	Классический кинк	20
3.2.2	Разрыв с излучением	21
3.2.3	Структура с излучаемой и излучаемо-поглощаемой вол- ной	21
3.2.4	Разрыв Жуге с двумя волнами	21
3.2.5	Скачок фазовых колебаний	22
3.2.6	Структура с поглощаемой волной и излучаемой резонансной волной для систем с двумя характеристиками	22
3.2.7	Разрыв с излучаемой резонансной волной, гибридный .	23
3.2.8	Разрыв с двумя излучаемыми волнами, гибридный . .	23
3.2.9	Кинк огибающей	23
3.2.10	Нестационарный трехволновой резонанс	23
3.2.11	Нестационарный пятиволновой резонанс	24
3.3	Структуры разрывов эволюционные только для одного из взаимно обратных разрывов	24
3.3.1	Кинк с излучением.	24

3.3.2	Кинк с излучением резонансной волны для систем с двумя характеристиками	25
3.3.3	Разрыв с двумя излучаемыми волнами для систем выше четвертого порядка	25
3.3.4	Кинк с излучением для систем выше четвертого порядка	25
3.4	Итоговый комментарий	26
4	Типичные варианты решений задачи о распаде разрыва	26
4.1	Разрывы со сложной дисперсией для случая дисперсионной ветви без точки перегиба вне начала координат	27
4.2	Разрывы со сложной дисперсией для случая дисперсионной ветви с точкой перегиба вне начала координат	27
4.3	Разрывы со сложной дисперсией для случая пересечения с другой ветвью	31
4.4	Разрывы для случая сложной нелинейности и дисперсии	32
5	Методики численного анализа для поиска различных типов стационарных решений	32
6	Методика расчета уравнений в частных производных и существование решения	36
6.1	Подбор численной схемы	36
6.2	О корректности постановки нелинейных задач	37
6.3	О граничных условиях	38
6.4	Характер решений	38

Необратимые структуры разрывов, т.е. переходы между двумя однородными состояниями, в моделях с диссипацией длительное время изучались в связи с потребностями развития техники и в настоящее время относительно хорошо исследованы, см., например, [1], [2]. Здесь рассматриваются обратимые структуры (кинки), встречающиеся как в обратимых, бездиссипативных моделях, так и в слабодиссипативных, где они могут находиться внутри необратимых структур. Исследование обратимых структур началось в 60-70 гг. прошлого века, см., например, [3], где для плазмы исследуется бесстолкновительная ударная волна. Но исследовались простые, аналитически решаемые модели, приводящие к уравнениям бегущих волн второго порядка. Развитие вычислительных средств позволило в последние годы исследовать более сложные модели, приводящие к уравнениям бегущих волн четвертого порядка и выше. Для кинков в решениях этих уравнений характерно наличие волновых зон и резонансных взаимодействий волн. В связи с наличием излучаемых волн исследование таких структур представляет интерес для раннего предупреждения движущейся мощной волны, определения свойств среды по типу структуры, разработки методов трансформации волн, последнее особенно актуально в электронике и нелинейной оптике, где встречаются

похожие уравнения. При проведенном анализе были использованы результаты работ [4]-[15], а также результаты последних расчетов для уравнений электронной магнитной гидродинамики плазмы и жидкости в трубе.

1 Характерные модели

Типичные уравнения, в которых встречаются обратимые структуры разрывов, – это уравнения многокомпонентных или слоистых сред. Наиболее простые из них – аналоги уравнения Кортевега-де Вриза

$$a_t - (a^3/3)_x + b_1 a_x + b_2 a_{xxx} = 0; \quad (1.1)$$

$$a_t + (a^2/2)_x + b_1 a_x + b_2 a_{xxx} + b_5 a_{xxxxx} + [b_7 a_{xxxxxxx}] = [\varepsilon_d a_{xx}]; \quad (1.2)$$

$$a_t - (a^3/3)_x + b_1 a_x + b_2 a_{xxx} + b_5 a_{xxxxx} = 0. \quad (1.3)$$

Здесь представлены модифицированное уравнение Кортевега-де Вриза (1.1), обобщенное уравнение Кортевега-де Вриза с производной пятого порядка (1.2) (в квадратных скобках включены некоторые допустимые дополнительные члены) и обобщенное уравнение с кубической нелинейностью (1.3). Это уравнения скалярного типа. Уравнение (1.2) описывает длинные волны в слое жидкости с упругим покрытием при использовании модели пластины, в частности волны подо льдом [16].

Более сложное уравнение – обобщенное нелинейное уравнение Шредингера

$$A_t + ib_2 A_{xx} + A_{xxx} + [ib_4 A_{xxxx} + b_5 A_{xxxxx}] + i|A^2|A = 0. \quad (1.4)$$

Оно описывает комплексную огибающую слабонелинейных диспергирующих волн в различных дисперсионных моделях. После подстановки $A = ae^{i\psi}$, $W = \psi_x$ это уравнение становится эквивалентным двум уравнениям гидродинамического типа относительно неизвестных a и W

$$\begin{aligned} (a^2)_t + [b_1 a^2 - 2b_2 a^2 W + b_3 (2a a_{xx} - a_x^2 - 3a^2 W^2)]_x &= 0; \\ W_t + [b_1 W - b_2 (W^2 - \frac{a_{xx}}{a}) + b_3 (3\frac{a_{xx}}{a} W + 3\frac{a_x}{a} W_x + W_{xx} - W^3) + a^2]_x &= 0. \end{aligned} \quad (1.5)$$

Также двумя уравнениями описывается модель композитных материалов [17]

$$\begin{aligned} \rho_0 \frac{\partial v_i}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial u_i} \right) + C_m \frac{\partial^3 u_i}{\partial x^3} &= 0, \quad \frac{\partial u_i}{\partial t} = \frac{\partial v_i}{\partial x}; \quad i = 1, 2 \\ \Phi &= \frac{1}{2} C_f (u_1^2 + u_2^2) + \frac{1}{2} C_g (u_2^2 - u_1^2) - \frac{1}{4} C_\kappa (u_1^2 + u_2^2)^2, \quad u_i = w_{ix}, v_i = w_{it} \end{aligned} \quad (1.6)$$

Здесь неизвестные w_i и v_i – перемещения и скорости в ортогональном направлении, ρ_0 – плотность, C_m , C_f , C_g , C_κ – некоторые константы.

Уравнения электронной магнитной гидродинамики плазмы содержат шесть уравнений [18]

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} &= 0, & \frac{\partial \rho u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \frac{B_y^2 + B_z^2}{2} + \left[b^2 \frac{\partial \rho}{\partial x} \right] &= 0, \\
\frac{\partial \rho v}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (\rho u v - B_x B_y - R_e^{-1} \frac{dB_z}{dt}) &= 0, & \frac{\partial \rho w}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (\rho u w - B_x B_z + R_e^{-1} \frac{dB_y}{dt}) &= 0, \\
\frac{\partial B_y}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (u B_y - B_x v - R_i^{-1} \frac{dw}{dt}) &= \left[\varepsilon \frac{\partial^2 B_y}{\partial x^2} \right], & \frac{\partial B_z}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (u B_z - B_x w + R_i^{-1} \frac{dv}{dt}) &= \left[\varepsilon \frac{\partial^2 B_z}{\partial x^2} \right], \\
\frac{d}{dt} &= \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x}.
\end{aligned} \tag{1.7}$$

Здесь неизвестные n – плотность ионов, u , v , w – компоненты вектора скорости, B_x , B_y , B_z – компоненты вектора магнитной индукции, R_i , R_e – физические константы, связанные с отношением массы электрона и иона, b – коэффициент, связанный с температурами электронов и ионов, в холодной плазме он равен нулю, ε – коэффициент диссипации, связанный с ионно-электронным трением [13].

Таким образом, эти уравнения содержат либо пространственные производные пятого порядка, либо производные более низких порядков, но в нескольких уравнениях. Общим является то, что эти уравнения могут быть записаны в виде законов сохранения и после однократного интегрирования решения в виде бегущих волн описываются обыкновенными дифференциальными уравнениями четвертого порядка. Наличие дополнительного закона сохранения энергии позволяет понизить порядок системы до третьего, но усложняется нелинейность, при численном анализе удобнее исследовать уравнения четвертого порядка. Общим является также сходный вид дисперсионных ветвей. Оказывается удобным сначала отрабатывать методики исследования на уравнениях типа Кортевега-де Вриза, а затем переходить на более сложные модели.

Во все уравнения, за исключением нелинейного уравнения Шредингера, можно добавить диссипативные члены, описываемые производными второго порядка. В этом случае, т.е. при наличии члена с ε_d , уравнение (1.2) будет называться обобщенным уравнением Кортевега-Бюргерса. Для нелинейного уравнения Шредингера диссипация добавляется в виде источниковых членов.

Возможны и более сложные уравнения, приводящие к уравнениям бегущих волн шестого порядка. Например, это уравнения двухслойной жидкости с упругой пластиной сверху и разделяющей пластиной между слоями жидкости [6].

Уравнения движения для модели трубы с упругими стенками, наполненной жидкостью, имеют вид:

$$\begin{aligned}
\left(R \sigma_1 \frac{z'}{\lambda_1^2} \right)' - P r r' &= \rho R \ddot{z}, & [-C_b r'''''] + \left(R \sigma_1 \frac{r'}{\lambda_1^2} \right)' - \frac{\sigma_2}{\lambda_2} + P r z' &= \rho R \ddot{r}, \\
\rho_f [\dot{v}_f z' - v_f \dot{z} + v_f v_f'] + P' &= 0, & \dot{r} z' - r' \dot{z} + v_f r' + \frac{1}{2} r v_f' &= 0, \\
\lambda_1 &= \sqrt{r'^2 + z'^2}, & \lambda_2 &= \frac{r}{R}, & \sigma_i &= \lambda_i \hat{W}_{\lambda_i}.
\end{aligned} \tag{1.8}$$

Здесь неизвестные z - эйлерова горизонтальная координата и r - эйлерова ортогональная координата (толщина трубы); R - радиус трубы в ненапряженном состоянии, v - скорость жидкости, P - давление, \hat{W} некоторая нелинейная функция, определяющая упругие свойства материала, ρ_f - плотность жидкости, C_b - коэффициент, связанный с сопротивлением оболочки трубы на изгиб; штрих обозначает производную по начальной лагранжевой координате Z , точка обозначает производную по времени. В работе [19] исследуются эти уравнения, но в более простом варианте, без члена с производной четвертого порядка во втором уравнении, при этом бегущие волны описываются интегрируемой системой уравнений четвертого порядка. Отметим, что в отличие от предыдущих случаев второе уравнение системы не имеет вида закона сохранения.

В случае контролируемого давления [20] (газонаполненная труба) $P = const$, нет уравнений для жидкости (вторая строка в уравнениях (1.8)), система уравнений бегущих волн становится неинтегрируемой (за исключением стационарного случая) системой четвертого порядка (при однократном интегрировании первого уравнения порядок можно снизить до третьего), т.е. похожей на случаи уравнений, приведенных выше. Неинтегрируемость, очевидно, связана с отсутствием закона сохранения энергии. С физической точки зрения энергия здесь меняется за счет притока и оттока пренебрежимо легкого газа из большого резервуара, присоединенного к трубе, и общая энергия при точном описании, конечно, сохраняется.

При добавлении члена с производной четвертого порядка, связанного с сопротивлением трубы на изгиб (модель пластины), как в случае контролируемого давления, так и для трубы, наполненной жидкостью, уравнения бегущих волн - неинтегрируемая система шестого (пятого) порядка.

В случае низкого давления и малых амплитуд волн из уравнений трубы, наполненной жидкостью, можно вывести обычное или обобщенное уравнение Кортевега-де Вриза.

Все приведенные системы при отсутствии дополнительных диссипативных членов обратимы по пространству и времени, относятся к классу гамильтоновых систем и имеют вид законов сохранения (не все из уравнений трубы имеют вид законов сохранения, но их можно привести к такому виду дифференцированием по x). Из гамильтоновости следует наличие еще одного дополнительного закона сохранения, который обычно имеет физический смысл закона сохранения энергии, но не всегда. Как основной ниже подразумевается именно этот класс уравнений, но некоторые утверждения пригодны и для просто обратимых уравнений, а некоторые и для необратимых уравнений. Отдельные утверждения в п.2.3, п.3 и п.5 сформулированы безотносительно к типу системы уравнений бегущих волн, а иногда - для случая как гамильтоновой, так и не гамильтоновой системы. Кроме того, в некоторых диссипативных моделях с внешним притоком энергии (стекание жидкости по наклонной плоскости, тепловая конвекция, электролиз) система уравнений бегущих волн при нулевой фазовой скорости становится симметричной, встречаются обратимые стационарные решения типа периодических и уединенных волн и кинков, но динамика в этих моделях другая.

2 Основные положения теории

2.1 Базовые методические понятия, методика исследования

Дисперсионное соотношение. Дисперсионное соотношение получается подстановкой в линеаризованный вариант исходной системы уравнений выражения вида $\mathbf{Y} = \mathbf{Y}_0 \exp[i(kx - \omega t)]$, Y_l , $l = 1, 2, \dots$ - неизвестные величины исследуемой системы уравнений, \mathbf{Y}_0 - некоторая векторная константа, ω - циклическая частота, k - волновое число. Условием существования такого решения является дисперсионное соотношение $F(\omega, k) = 0$. Оно может содержать одну или несколько ветвей $\omega_q = \omega(k)$, $q = 1, 2, \dots$.

Уравнения бегущих волн. Исследуется система уравнений бегущих волн, описывающая решения, стационарные в некоторой системе координат, движущейся со скоростью U .

$$\frac{d}{dx} \mathbf{u} = \mathbf{f}(\mathbf{u}, U), \quad \mathbf{u} = (u_0, u_1, \dots, u_{2m-1}). \quad (2.1)$$

При выводе этой системы все высшие производные были обозначены как новые неизвестные.

Рассматриваемые в п.1 уравнения, как правило (кроме уравнений трубы), имеют вид законов сохранения

$$P_{jt} + Q_{jx} = 0, j = 1, 2, \dots$$

Поэтому целесообразно использовать систему, выведенную на базе проинтегрированного варианта уравнений.

$$-P_j U + Q_j = C_j.$$

У системы (2.1) могут быть стационарные точки. Для этих точек также делается подстановка в линеаризованный вариант уравнений $\mathbf{u} = \mathbf{u}_0 \exp[\kappa x]$ и ищутся корни уравнения $g(\kappa, U) = 0$ (собственные значения), возникающего как условие существования решения, $g(\kappa, U) \equiv F(-U i \kappa, -i \kappa)$.

В случае обратимых исходных уравнений система уравнений бегущих волн инвариантна относительно преобразования $x' \rightarrow -x$, $u'_{2j} \rightarrow u_{2j}$ (симметричные неизвестные), $u'_{2j+1} \rightarrow -u_{2j+1}$ (антисимметричные неизвестные), $j = 0, 1, \dots, m - 1$.

Ветвь периодических решений. Симметричные периодические решения системы бегущих волн в симметричных системах образуют однопараметрические семейства. Их отображения на какой-либо плоскости параметров будем называть ветвью. В неинтегрируемых по Лиувиллю гамильтоновых системах несимметричные периодические решения также образуют однопараметрические семейства (это результат распада резонансных торов [21]) и для них тоже можно построить ветви, а в интегрируемых - двухпараметрические, построение ветвей для них на плоскости нецелесообразно. Среди ветвей можно выделить первичные, однопериодные, ветви и вторичные,

двухпериодные, ветви, различия между ними см. в п.4.2 и п.5. Методика нахождения решений изложена в п.5.

Распад разрыва. Решение об эволюции начальных данных типа сглаженной ступеньки будем называть решением о распаде разрыва. Это распад разрыва в том смысле, как это принято, например, в газовой динамике. Встречаются упорядоченные решения, периодические по времени и стохастические. Это инструмент наблюдения структур разрывов, но, очевидно, в обратимом случае не все типы разрывов можно наблюдать таким способом. Можно поставить задачу и в более широком смысле – как эволюцию перехода между двумя любыми состояниями, в том числе и волновыми. В такой задаче должны наблюдаться все возможные типы разрывов, но она трудна для исследования.

Распад разрыва считается как в чисто обратимом варианте, так и в слабодиссипативном. В обратимом случае решение может содержать центрированные простые волны, волновые зоны (типа центрированной волны огибающей или хаотические) и кинки. Основное отличие слабодиссипативного случая от обратимого – волновые зоны после установления не расширяются со временем. Кроме того, если решение состоит из одной волновой зоны с примыкающей обратимой структурой разрыва или двух волновых зон и разделяющей их структурой класса 0 (классы структур см в п.3), то скорость разрыва в слабодиссипативном случае можно определить по соотношениям для слабодиссипативной структуры, полученным из законов сохранения, что значительно упрощает исследование.

2.2 Понятие обратимой структуры, усредненные и упрощенные уравнения

Под структурами разрывов здесь понимаются переходы между однородными, периодическими, двоякопериодическими, периодическими по времени, стохастическими состояниями. Предполагается, что эти состояния описываются некоторыми усредненными уравнениями. Эти структуры можно наблюдать в решениях задачи о распаде произвольного разрыва. Они могут разделять области, описываемые усредненными уравнениями. В случае обратимых уравнений волновые области расширяются со временем, их огибающая зависит от x/t , а в случае слабодиссипативных, необратимых - не расширяются. Усредненные уравнения в обратимом случае и слабодиссипативном случае отличаются только дополнительными членами.

Пример усредненных уравнений для обобщенного уравнения Кортевега-Бюргерса [6], [11]:

$$\begin{aligned} \langle a_t + (a^2/2)_x + b_3 a_{xxx} + b_5 a_{xxxxx} \rangle &= 0; \\ \langle (a^2/2)_t + [a^3/3 + b_3(aa_{xx} - a_x^2/2) + b_5(aa_{xxxx} - a_x a_{xxx} + a_{xx}^2/2)]_x \rangle &= -\varepsilon_d \langle a_x^2 \rangle; \\ \omega_x + k_t &= 0, \quad k = 1/L, \quad \omega = kU. \end{aligned} \tag{2.2}$$

Угловые скобки здесь обозначают операцию усреднения по периоду, L – длина волны. Здесь усреднено уравнение (1.2), имеющее смысл закона сохранения импульса, и уравнение, полученное умножением (1.2) на a , имеющее смысл закона изменения энергии. Последнее уравнение системы – кинематическое условие "закон сохранения числа гребней". Эти уравнения применяются для описания централизованных простых волн огибающей.

Для описания обычных централизованных простых волн, как и в случае моделей с необратимыми разрывами, применяется упрощенное уравнение, полученное отбрасыванием старших производных:

$$a_t + aa_x = 0.$$

Усредненные уравнения для волновых зон в случае, если исходное уравнение скалярное, содержит три неизвестные, т.е. на две неизвестные больше, чем было в исходном уравнении. Для нескаларных уравнений число уравнений в усредненной системе увеличивается на число неизвестных в исходной системе.

Можно предположить существование более сложных уравнений для двухволновых зон, полученных на базе усреднения нестационарных двухволновых решений. Соответственно, в скалярном случае усредненные уравнения для нестационарных двухволновых зон должны содержать пять неизвестных, трехволновых – семь и т.д.

На базе вторичных ветвей стационарных периодических решений также можно построить усредненные уравнения с тремя неизвестными. Некоторые из них соответствуют стационарным двухволновым зонам и могут рассматриваться как частный случай нестационарных двухволновых усредненных уравнений. Суперпозицию этих волн будем называть резонансной волной.

В силу свойства обратимости усредненные уравнения в обратимом случае могут быть только гиперболическими или псевдогиперболическими (с комплексной характеристической скоростью), т.е. некорректными. Заметим, что действительные стационарные решения усредненных уравнений, используемые при решении задачи о распаде разрыва в слабодиссипативном случае существуют и при некорректности, тогда как автомодельные, зависящие от x/t , используемые в случае отсутствия дополнительных диссипативных членов, – только в случае гиперболичности.

2.3 Определение размерностей инвариантных многообразий и существование стационарной структуры

Предварительная оценка возможности существования стационарной структуры разрыва. Пусть стационарная структура описывается некоторой системой обыкновенных дифференциальных уравнений. Пусть есть два состояния, стационарные или периодические. Рассмотрим множество фазовых траекторий, исходящих от состояния справа (состояние 1), т.е. при

$x \rightarrow +\infty$, и множество фазовых траекторий, сходящихся к состоянию слева (состояние 2), т.е. при $x \rightarrow -\infty$ (неустойчивое и устойчивое инвариантные многообразия). Для того чтобы в типичном случае могла существовать структура, необходимо, чтобы сумма размерностей этих многообразий (как геометрических объектов в фазовом пространстве) была равна размерности фазового пространства плюс один. Это также позволяет построить корректный (доказательный) вычислительный алгоритм по поиску такой структуры методом пристрелки и проверить, существует ли она или нет, см п.5.

$$\dim M_1 + \dim M_2 = \dim M + 1.$$

Для системы (2.1) $\dim M = 2m$. В случае, если данный критерий не выполнен, возможно существование решения в специальных случаях, например, в случае специального значения фазовой скорости. В связи с этим можно сформулировать обобщение: сумма числа дополнительных варьируемых параметров состояний 1 и 2, числа варьируемых параметров системы и размерностей неустойчивого и устойчивого инвариантного многообразий должна быть равна размерности фазового пространства плюс один.

$$N_{av1} + N_{av2} + N_{av} + \dim M_1 + \dim M_2 = \dim M + 1.$$

Под данный критерий попадают также уединенные волны в не гамильтоновых системах, рассматриваемые как частный случай структуры разрыва, у которого состояния слева и справа совпадают. В гамильтоновых системах, к классу которых относятся все рассмотренные в п.1 модели, из-за наличия дополнительного интеграла, позволяющего фактически понизить размерность фазового пространства на единицу, для существования уединенной волны в типичном случае необходимо, чтобы сумма размерностей совпадала с размерностью фазового пространства.

$$\dim M_1 + \dim M_2 = 2m.$$

Предварительная оценка возможности существования симметричных уединенных волн в обратимых моделях. Для того чтобы в типичном случае могла существовать симметричная уединенная волна, необходимо, чтобы размерность неустойчивого (или устойчивого) инвариантного многообразия была равна половине размерности фазового пространства.

$$\dim M_{1,2} = N_s.$$

Для системы (2.1) $N_s = m$. Это позволяет построить корректный (доказательный) вычислительный алгоритм по поиску такой структуры методом пристрелки и проверить, существует ли она или нет, см. п.5. Как и в предыдущих случаях, данный критерий также допускает обобщение.

Как определить размерность инвариантных многообразий. Для случая однородного состояния размерность устойчивого и неустойчивого инвариантных многообразий будем искать на основе анализа линеаризованного варианта уравнений (2.1) и корней уравнения $f(\kappa, U) = 0$ (собственных значений). Число корней с $\text{Im} \kappa > 0$ на единицу меньше размерности неустойчивого инвариантного многообразия. Число корней с $\text{Im} \kappa < 0$ на единицу меньше

размерности устойчивого инвариантного многообразия. Общее число корней равно размерности фазового пространства. В симметричных моделях каждому пересечению дисперсионной кривой и прямой $U = \omega k$ при $k > 0$ (здесь и ниже имеются ввиду только такие пересечения) соответствует по два чисто мнимых корня. В силу симметрии каждому собственному значению κ соответствует другое собственное значение $-\kappa$. Поэтому у половины оставшихся корней $\text{Im}\kappa > 0$, у другой половины $\text{Im}\kappa < 0$. Отметим также, что в силу того, что матрица системы действительная, каждому комплексному значению κ соответствует другое комплексно сопряженное значение κ^* .

В случае периодического (двойкопериодического) состояния рассматриваем линеаризацию относительно этого состояния и ищем решения, удовлетворяющие условию $\mathbf{u}(\lambda) = \mathbf{u}(0) \exp \kappa \lambda$, λ – период, и определяем размерности многообразий аналогичным образом. Следует при этом отметить, что если периодическое решение несимметрично, то предыдущее утверждение о симметрии собственных значений не выполняется, даже в симметричной модели при несимметрии периодического состояния число собственных значений $\text{Im}\kappa > 0$ может не совпадать с числом собственных значений $\text{Im}\kappa < 0$. Утверждение о комплексной сопряженности сохраняется.

В случае периодического состояния нужно рассматривать уравнения, линеаризованные относительно него. Поскольку проделать это сложнее, чем в случае однородного состояния, то для оценки характера собственных значений здесь можно рассматривать однородное состояние, ассоциированное с соответствующей точкой равновесия. Однако полученные при этом оценки будут не всегда верны. При малой амплитуде волны в периодическом состоянии, очевидно, собственные значения будут такими же, как и в однородном состоянии. Но исследования показывают, что при достаточно большой амплитуде волны часть мнимых собственных значений может быть заменена значениями с $\text{Re}\kappa \neq 0$. Эффективным методом определения типа собственных значений в этом случае для гамильтоновых систем четвертого порядка является построение картин расположения ветвей. Если ветвь пересекается другими ветвями, то она устойчивая, все собственные значения мнимые, а если нет, то неустойчивая, два мнимых собственных значения заменены. Заключить это можно, исходя из анализа результатов исследований уравнений фазовых колебаний [21], см. п.3.2.5. Еще один способ – проверка устойчивости решения непосредственным расчетом уравнения (2.1): взять начальные данные, соответствующие периодическому решению, и посмотреть, разовьется ли неустойчивость.

2.4 Эволюционность, полная и частичная обратимость

Условие эволюционности [1] состоит в том, что число граничных условий должно быть равно числу уходящих характеристик плюс одно.

$$N = N_- + 1.$$

Условие эволюционности является необходимым условием устойчивости структуры. Для состояния слева от разрыва под приходящими характери-

стиками понимаются те характеристики, у которых характеристическая скорость $c > U$, а под уходящими – те, у которых $c < U$, для области справа от разрыва смысл неравенств меняется на противоположный.

В обратимых системах, которые рассматриваются здесь, для каждой структуры разрыва всегда существует обратная. Для того чтобы эволюционным был и прямой и обратный разрыв, нужно, чтобы число уходящих характеристик было равно числу входящих.

$$N_+ = N_- .$$

Если число уходящих характеристик будет большим числа входящих, то в случае эволюционности прямой структуры обратная будет неэволюционна в смысле переопределенности, число граничных условий больше, чем нужно, что, в принципе, допустимо, структура будет наблюдаться в специальных случаях.

$$N > N_- + 1 .$$

Если число уходящих характеристик будет меньше числа входящих, то в случае эволюционности прямой структуры обратная будет неэволюционна в смысле недоопределенности, чего, видимо, быть не должно.

$$N < N_- + 1 .$$

Все условия на разрыве делятся на основные [2], получаемые из законов сохранения для упрощенной системы уравнений, если речь идет о переходах между однородными состояниями, или как константы интегрирования при получении проинтегрированной системы (2.1) ($-P_{j1,2}U + Q_{j1,2} = C_j$, $j = 1, 2, \dots$), если речь идет о структурах, содержащих периодические или двоякопериодические состояния, и дополнительные, получаемые в результате анализа решений системы (2.1).

Оценка характеристических скоростей. В случае однородного состояния характеристическая скорость определяется наклоном касательной к дисперсионной кривой в начале координат (исключение – уравнения трубы с контролируемым давлением).

$$c = \partial\omega/\partial k|_{k=0} = \lim_{k \rightarrow 0} \omega/k .$$

Будем считать (имея в виду уравнения типа КДВ), что в волновых зонах одна из характеристик связана с течением, а две характеристики связаны с волной. В случае малой амплитуды волны характеристическая скорость, связанная с течением c_1 , тоже определяется наклоном дисперсионной кривой в начале координат. Характеристические скорости, связанные с волной, в случае малой амплитуды определяются групповой скоростью

$$c_{2,3} \approx \partial\omega/\partial k .$$

т.е. также наклоном касательной к дисперсионной кривой в точке, соответствующей волновому числу волны. Можно ожидать, что и в нелинейном случае характеристические скорости будут близки к предсказываемым этим методом.

3 Классификация упорядоченных эволюционных структур разрывов, уединенных и периодических волн

Классификация составлена с учетом всех описанных выше факторов. В частности предполагается, что прямой разрыв должен быть эволюционным, а обратный – либо эволюционным, либо переопределенным.

Классификация идет по числу свободных параметров, числу волн по обе стороны разрыва, по типу полная обратимость или частичная, по минимальному порядку системы (2.1), по числу дополнительных условий. За нулевой класс принят класс аналогов обычной ударной волны. В этом случае для заданного значения скорости и заданных значений интегральных констант существует одно, конечное или счетное число решений. В классе +1 имеются аналогичные однопараметрические семейства решений. В классе –1 требуется подбор одного параметра, чтобы такие решения существовали. Аналогичным образом определяются классы –2 и +2. Помимо структур разрывов в классификацию включены солитоноподобные структуры, используемые в качестве структур разрывов или для построения структур разрывов, а также периодические волны.

Рассматривается число пересечений по обе стороны разрыва и расположение характеристик, при этом имеется в виду точка равновесия системы уравнений бегущих волн. Для случая слабодиссипативных моделей точки равновесия соответствуют однородными состояниями в задаче о распаде произвольного разрыва, в бездиссипативном случае при наличии волновой зоны они соответствуют только приблизительно.

Проводится анализ предельных переходов для получения уединенных волн и структур разрывов как предельных решений для периодических и уединенных волн. Здесь есть определенная иерархия переходов: периодическая волна – уединенная волна – структура разрыва. Это позволяет последовательно находить все более сложные типы решений. Если используется непрерывный предельный переход периодическое решение – уединенная волна или уединенная волна – структура разрыва, то класс решения понижается на единицу. Если предельный переход дискретный, т.е. как предел последовательностей решений из разных семейств, то класс не меняется. Если же делается переход уединенная волна – уединенная волна или структура – структура и переход осуществляется как удаление одной волны в каком-либо состоянии, то класс понижается сразу на 2. Если осуществляется переход обычная структура – структура Жуге, то класс снижается на 1. При переходе обычный разрыв – разрыв солитонного типа, т.е. разрыв, где в качестве структуры используется уединенная волна, класс не меняется.

О решениях не гамильтоновых систем. В не гамильтоновых системах общего вида класс базового периодического решения на единицу ниже, чем в гамильтоновых, см. п.5, в связи с этим в них могут встречаться несимметричные аналоги описанных ниже уединенных волн и структур классов 0 и выше, но их класс снизится на единицу. В симметричных не гамильтоно-

вых системах класс симметричного периодического решения не меняется, но для типичных диссипативных гидродинамических моделей симметрия уравнений бегущих волн имеет место только при $U = 0$, а это опять означает снижение класса на единицу. Специальные решения при $U = 0$ встречаются и для гамильтоновых моделей (1.4) и (1.8), см. п.3.1.6.

Учитывается то, что некоторые структуры являются элементами решений, описываемых усредненными уравнениями, полученными на базе нестационарных решений.

При рассмотрении расположения характеристик описывается случай уравнений, когда их минимальное число. То есть, если разрыв встречается для уравнений с многими характеристиками, то несущественные характеристики, входящие справа и выходящие слева и наоборот, не показываются.

При описании собственных значений линеаризованной системы уравнений бегущих волн подразумевается также система с минимальным порядком, необходимым для данного типа разрыва. Повышение порядка на 2 дает по два действительных корня с каждой стороны.

Для стационарной структуры приводится ее описание по формуле

$$(N_a; N_s; N_{i2}, N_{c2}/N_{cu2} | N_{d1}, N_{c1}/N_{cu1}; N_{av}).$$

Здесь N_a – число дополнительных условий, N_s – минимальный порядок системы, N_{i1} – число собственных значений с $\text{Re}\kappa > 0$, N_{c1} – число собственных значений с $\text{Re}\kappa = 0$ и $\text{Im}\kappa > 0$, N_{cu1} – число доступных дополнительных вариаций состояния справа (вариации амплитуды волны), $N_{c1} \geq N_{cu1}$, N_{d2} – число собственных значений с $\text{Re}\kappa < 0$, N_{c2} – число собственных значений с $\text{Re}\kappa = 0$ и $\text{Im}\kappa > 0$, N_{cu2} – число доступных дополнительных вариаций состояния слева (вариации амплитуды волны), $N_{c2} \geq N_{cu2}$; N_{av} – число дополнительных вариаций параметров системы, в типичном случае это скорость. Здесь при рассмотрении числа доступных параметров варьирования для волнового состояния учитывается, что для заданных значений постоянных интегрирования при выводе системы (2.1) для варьирования можно выбрать только один из трех параметров: амплитуду, длину волны или среднее течение. Связи между этими параметрами рассматриваются как дополнительные условия на разрыве. Наличие этих связей, а также наличие дополнительно интеграла для гамильтоновых систем позволяют в некоторых случаях найти все дополнительные условия на разрыве без анализа его структуры.

Класс решения для структур разрывов определяется по формуле

$$N_{cl} = N_{i2} + N_{cu2} + N_{d1} + N_{cu1} - \dim M - 1.$$

Ниже на рисунках в областях, ограниченных рамками, для различных типов решений приводится качественный вид графика решения для одного из неизвестных симметричного типа в зависимости от x , координатные оси не показаны, а также вид графиков дисперсионных ветвей, жирные и тонкие линии соответствуют сторонам разрыва 1 и 2, пунктирными линиями показаны прямые $U = \omega/k$. Для структур разрывов и уединенных волн,

используемых в качестве структур, показано расположение характеристик относительно линии разрыва, характеристики обозначены стрелками, их направление указывает, уходящая или приходящая характеристика, оси x и t опущены. На рисунках вертикальными линиями выделены области, соответствующие решениям разных классов. Рассматриваются только структуры с симметричными периодическими состояниями. Пример структуры с несимметричными состояниями описан в п.3.2.5 по методическим соображениям.

Общая закономерность: расположение характеристик для разнородных разрывов в одном классе может быть однотипно.

3.1 Периодические и уединенные волны

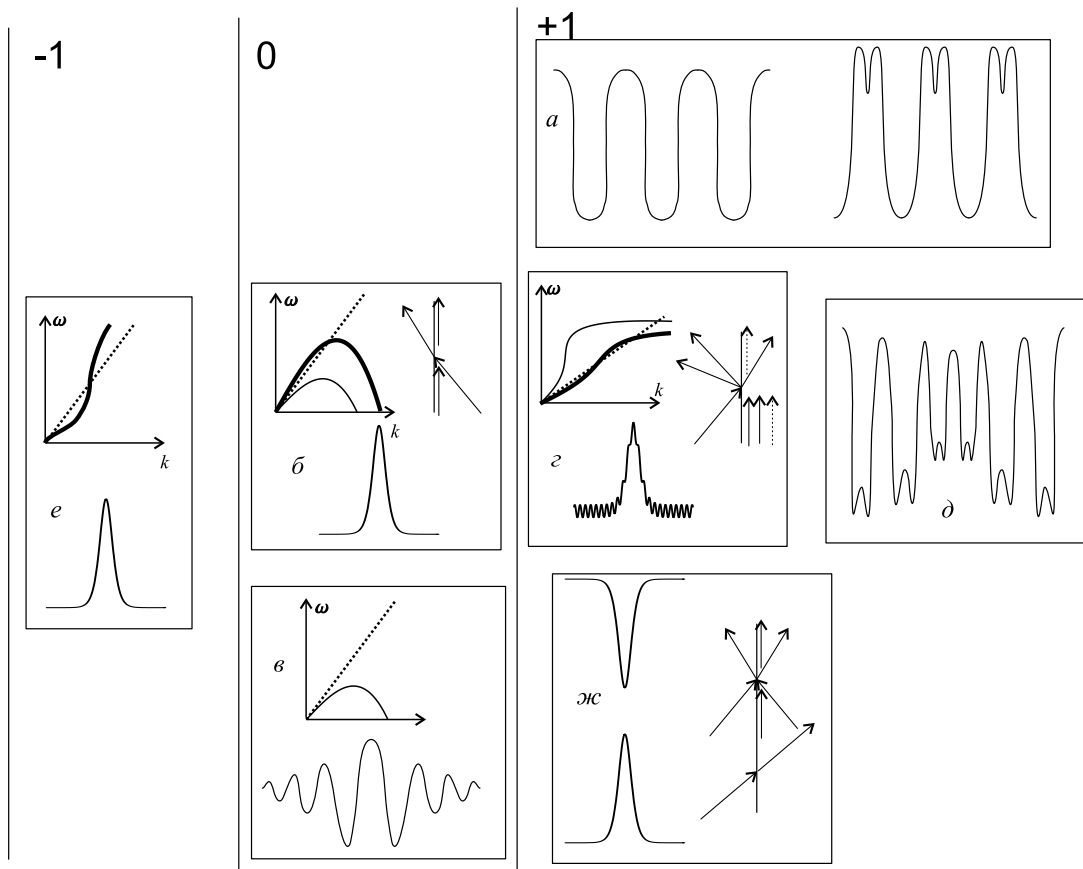


Рис. 1: Периодические и уединенные волны

3.1.1 Периодическое решение

Класс +1, рис. 1а. Имеется не менее одного пересечения. Уединенные волны класса 0 и +1 можно получить как пределы периодических решений одного семейства и как пределы последовательностей периодических решений разных семейств. Первичное, однопериодное, решение встречается для всех

уравнений п.1, вторичное, двухпериодное, - в случаях, когда возможен резонанс линейных волн, т.е. совпадение фазовых скоростей, встречается также во всех уравнениях п.1, кроме (1.1).

3.1.2 Классическая уединенная волна

Класс 0, рис. 1б. Минимальный порядок системы (2.1) равен 2. Нет пересечения для состояния, соответствующего подошве уединенной волны. Действительные корни (собственные значения). Есть одно пересечение для второй точки равновесия, эта точка не используется для оценки существования решения, но существенна при использовании его в качестве структуры. Уединенная волна этого типа используется в качестве структуры разрыва. С одной стороны имеется одна приходящая характеристика, с другой – одна приходящая и две характеристики вдоль линии разрыва. Одна из этих характеристик играет роль приходящей, а другая - уходящей. Такая структура полностью обратима. Уединенная волна получается предельным переходом из периодического решения класса +1. Решение встречается для всех уравнений п.1.

3.1.3 1:1 уединенная волна

Класс 0, рис. 1в. Минимальный порядок системы (2.1) равен 4. Нет пересечения для состояния, соответствующего подошве уединенной волны. Признаком существования уединенной волны данного типа являются комплексно-сопряженные корни. Получается предельным переходом из периодического решения. Есть одно пересечение для точки равновесия. Уединенная волна этого типа получается предельным переходом из двухпериодных решений класса +1. Уединенные волны данного типа образуют мультисолитоны. Последовательность уединенных волн этого типа используется в качестве предельной последовательности для структуры разрыва с излучением. Решение выявлено для уравнений (1.2), (1.3), (1.5), (1.7).

3.1.4 Обобщенная уединенная волна

Класс +1, рис. 1г. Минимальный порядок системы (2.1) равен 4. Два действительных и два чисто мнимых собственных значения. Решение представляет собой комбинацию из классической уединенной и периодической волны. Есть одно пересечение для точки равновесия, с которой ассоциирована периодическая составляющая (эта точка используется для оценки существования решения), и два пересечения для другой точки (пересечения не обязательно такие, как показано на рисунке, второе пересечение может быть и с другой ветвью, но это относится уже не к скалярным уравнениям). Данное решение не может быть использовано в качестве структуры при применении усредненных уравнений стационарного типа из-за отсутствия непрерывности во множестве стационарных периодических решений. На рис. 1г показано гипотетическое расположение характеристик в случае применения усредненных уравнений нестационарного типа. Расположение характеристик, показанных

сплошными линиями, получено как предельный вариант их расположения для случая структуры разрыва, описанной в п.3.2.3. С одной стороны одна приходящая характеристика и две уходящие – с другой одна уходящая характеристика и две вдоль линии разрыва, рассматриваемые как приходящие. Для двухволновой зоны добавлены еще две характеристики вдоль линии разрыва, показанные пунктирной линией, одна из которых играет роль приходящей, а другая – уходящей. В некоторых рассматриваемых ниже типах структур имеется двухпериодная зона, которую можно интерпретировать как двухволновую, при использовании усредненных уравнений нестационарного типа для этой зоны нужно тоже добавить две такие характеристики. На приведенном ниже рис. 2в, соответствующем разрыву с двухпериодной зоной, эти характеристики, связанные с переходом к усредненным уравнениям нестационарного типа, тоже показаны пунктирной линией, на остальных рисунках эти характеристики не показаны.

Данное решение получается предельным переходом из двухпериодного решения. Заметим, что данное решение, как правило, не переходит в классическую уединенную волну. При уменьшении амплитуды периодической составляющей до некоторого конечного значения оно пропадает.

Уединенные волны данного типа образуют мультисолитоны. Некоторые структуры с двухпериодными состояниями могут быть получены как пределы последовательностей таких волн.

Решение встречается также во всех уравнениях п.1, кроме (1.1).

3.1.5 Обобщенная уединенная волна огибающей двухпериодного решения

Класс $+1$, рис. 1д. Минимальный порядок системы (2.1) равен 4. Для одной из точек равновесия два пересечения. Возможно, обычные обобщенные уединенные волны и 1:1 уединенные волны являются частными решениями из этого класса решений.

Решение может быть получено предельным переходом последовательности двухпериодных решений класса $+1$.

Уединенные волны данного класса образуют мультисолитоны.

Решение должно встречаться для всех уравнений п.1, в случаях, когда возможен резонанс линейных волн, т.е. совпадение фазовых скоростей, кроме интегрируемого варианта уравнений (1.8), фактически выявлено для уравнения (1.3) [15].

Возможно, наличие уединенных волн такого типа может служить признаком того, что для двухпериодного состояния усредненные уравнения (2.2) являются частным случаем усредненных уравнений нестационарного типа.

3.1.6 Уединенная волна специального типа

Класс -1 , рис. 1е. Минимальный порядок системы (2.1) равен 4. Имеется одно пересечение для состояния, ассоциированного с подошвой уединенной волны. Два действительных и два чисто мнимых собственных значения.

Уединенные волны данного типа могут быть получены непрерывным предельным переходом из обобщенных уединенных волн класса $+1$. Уединенные волны данного типа могут образовывать мультисолитоны. Решение выявлено для уравнений (1.3) [10] и (1.6) [14].

Для уравнения (1.8) в случае контролируемого давления при $U = 0$ тоже существует уединенная волна специального типа [20], но пересечения, как и в случае классической уединенной волны, см. п.3.1.2, нет.

Обычно это неустойчивое решение. В случае уменьшения энергии уединенной волны ее неоткуда вернуть. Но последовательности таких уединенных волн могут быть использованы для построения кинков с излучением, которые, в отличие от самих уединенных волн, устойчивы.

3.1.7 Нестационарная уединенная волна огибающей

Класс $+1$, рис. 1 ж. При рассмотрении гидродинамической формы обычного и обобщенного нелинейного уравнения Шредингера имеется решение в виде классической уединенной волны. Минимальный порядок системы (2.1) для гидродинамической формы равен 2. Но при рассмотрении волновой формы это решение становится нестационарным, и появляется один дополнительный свободный параметр. На рисунке изображена огибающая волн сверху и снизу. Решение используется в качестве структуры волнового разрыва и интерпретируется в качестве трехволнового резонансного взаимодействия [4], в котором с одной стороны разрыва у волны одна уходящая и одна входящая характеристика, а с другой – две волны, у одной одна уходящая характеристика и одна характеристика вдоль линии разрыва, у другой одна входящая характеристика и одна характеристика вдоль линии разрыва. Модель НУШ не предусматривает исследование течений. Но фактически при использовании системы усредненных уравнений, выведенных из полной модели, должна быть хотя бы одна входящая с одной стороны характеристика, связанная с течением, и аналогичная характеристика, но уходящая с другой. Одна характеристика будет, например, если уравнения построены на базе уравнений типа Кортевега-де Вриза. Характеристики, связанные с течением, показаны на рис. 1 ж отдельно от остальных, ниже. Их расположение может быть и прямо противоположным.

3.2 Полностью обратимые эволюционные структуры разрывов

В связи с тем, что эволюционен и прямой и обратный разрыв, описание расположения характеристик и рисунок даются для одного из вариантов. В случае, если одна из двух взаимно обратных структур наблюдалась в расчетах уравнений в частных производных, предпочтение при описании отдается ей. Общая закономерность: решения нижних классов похожи на обычные разрывы, решения верхних классов носят волновой характер.

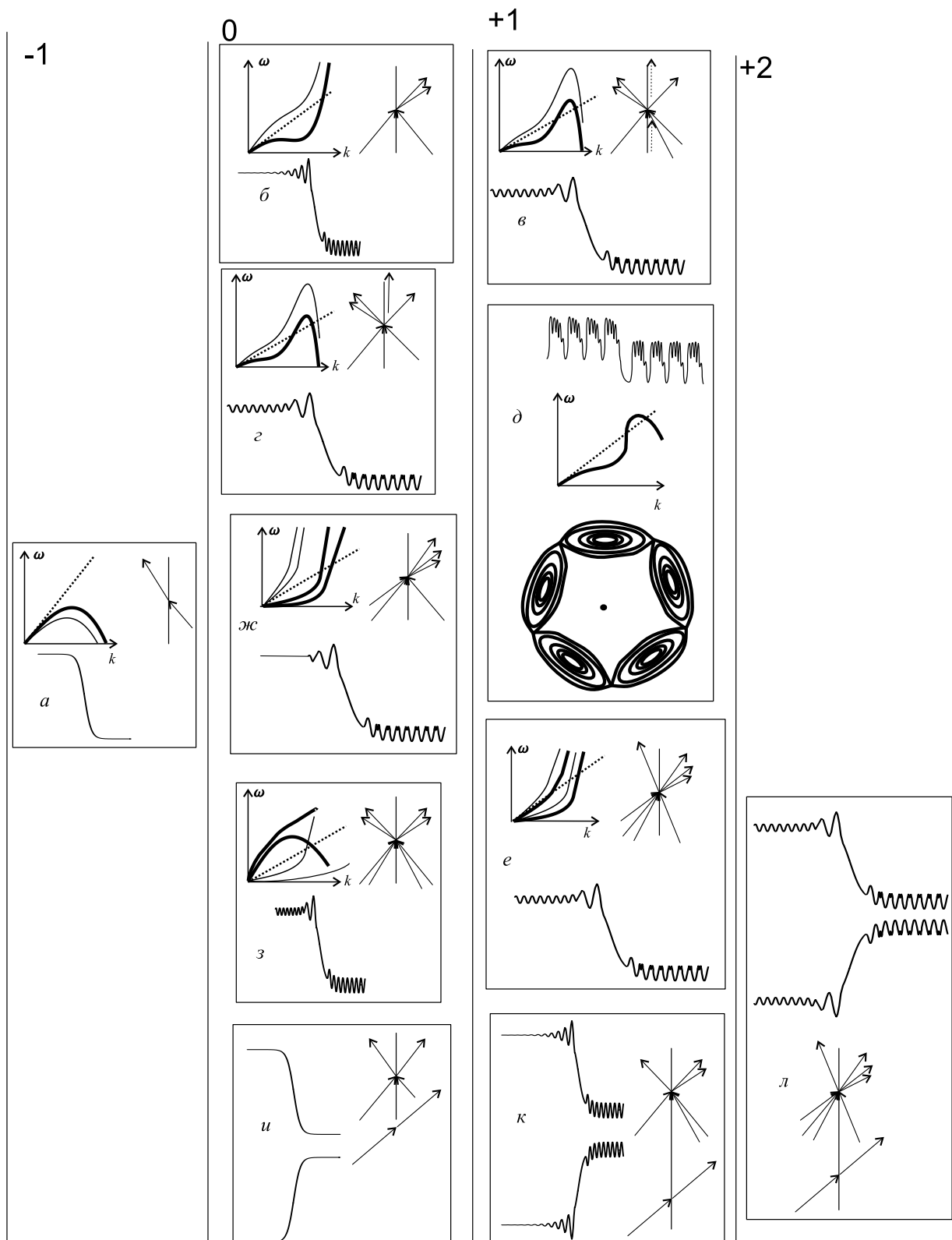


Рис. 2: Полностью обратимые структуры разрывов

3.2.1 Классический кинк

Класс -1 , рис. 2*a*, $(1; 2:1, 0/0|1, 0/0; 1)$. Для одной стороны одна приходящая характеристика, связанная с течением, для другой - одна уходящая, связан-

ная с течением. Для обеих сторон пересечения нет. В типичном случае есть еще одна точка равновесия, помимо указанных формуле, для которой собственные значения мнимые. Дополнительным варьируемым параметром является скорость. Для гамильтоновых систем из-за наличия дополнительного интеграла все соотношения для данного разрыва можно найти без анализа его структуры. Решение выявлено и наблюдалось в нестационарных расчетах для уравнений (1.1), (1.3), (1.5), (1.8) при некотором типе потенциала \hat{W} .

3.2.2 Разрыв с излучением

Класс 0, рис. 2б, $(2; 4:2, 0/0|1, 1/1; 0)$. С одной стороны от разрыва пересечения нет, а с другой – одно пересечение. Расположение характеристик такое: две характеристики, связанные с течением, проходящие, характеристики, связанные с волной, уходящие. Данная структура ищется как предельное решение для последовательности 1:1 уединенных волн, в связи с этим признаком существования данной структуры являются комплексно сопряженные корни. Для гамильтоновых систем из-за наличия дополнительного интеграла все соотношения для данного разрыва можно найти без анализа его структуры. Решение выявлено и наблюдалось в нестационарных расчетах для уравнений (1.2), (1.3), (1.5), (1.7).

3.2.3 Структура с излучаемой и излучаемо-поглощаемой волной

Класс +1, рис. 2в, $(3; 4:1, 1/1|1, 1/1; 0)$. С одной стороны одна проходящая характеристика, связанная с течением, и две уходящие характеристики, связанные с волной. С другой стороны одна проходящая характеристика, связанная с течением, одна проходящая характеристика, связанная с волной и одна уходящая характеристика, связанная с волной. Одно пересечение с одной стороны, и два – с другой. С одной из сторон состояние одноволновое, с другой – резонансное двухволновое, соответствующее вторичной ветви, с соотношением периодов волн $1/n$, $n = 2, 3, \dots$. Однако, возможно, существуют и аналогичные структуры, где оба состояния двухпериодные. Из данной структуры предельным переходом получается структура Жуге класса 0. Для гамильтоновых систем из-за наличия дополнительного интеграла все соотношения для данного разрыва можно найти без анализа его структуры. Решение выявлено для уравнения (1.2) [15].

3.2.4 Разрыв Жуге с двумя волнами

Класс 0, рис. 2г, $(4; 4:1, 1/1|0, 2/1; 0)$, при определении числа собственных значений для состояния 1 в этой формуле имеется в виду предельный переход вдоль устойчивой одноволновой ветви, см. п.4.2. С одной стороны имеется одно пересечение, а с другой – два. Находится предельным переходом из аналогичного решения класса +1 как решение с минимальной амплитудой излучаемой волны, поэтому здесь подробно не описывается. Данное решение выделено отдельно в связи с особым использованием в задаче о распаде

разрыва. Характеристика вдоль разрыва здесь играет роль уходящей характеристики, а условие Жуге - еще одного условия на разрыве. Структура будет полностью обратимой, только если при обращении эту характеристику опять рассматривать как уходящую. Если же делать обращение формально, то она станет приходящей, и обратная структура будет переопределена. Структуры Жуге, видимо, могут быть получены и предельным переходом из некоторых других типов разрывов, например, из разрыва, описанного в п.3.2.6. Для гамильтоновых систем из-за наличия дополнительного интеграла, а также в связи с тем, что разрыв соответствует известной точке соединения ветвей разного типа (этот факт был выявлен в результате дополнительного исследования, см. п.4.2), все соотношения для данного разрыва можно найти без анализа его структуры.

Решение выявлено для уравнения (1.2) [15], наблюдалось при расчете слабодиссипативного варианта этого уравнения.

3.2.5 Скачок фазовых колебаний

Класс +1, рис. 2*d*. Однородные состояния здесь могут быть несимметричными. Расположение характеристик не показано, оно может быть разным, например, аналогичным показанному на рис. 2*b*, но показан фазовый портрет усредненной системы фазовых колебаний в окрестности периодического решения из книги [21] для случая резонанса $1/5$ (отклонение решения от устойчивого чисто периодического состояния предполагается малым, при уменьшении амплитуды колебаний они переходят в периодическое решение). В центре фазового портрета находится стационарная точка, соответствующая одноволновому решению. Остальные стационарные точки расположены по кругу и соответствуют решениям с разным сдвигом по фазе между волнами. Среди этих точек есть и две точки, соответствующие симметричным двухволновым решениям. При уменьшении амплитуды фазовых колебаний эти две точки сходятся к устойчивому состоянию в центре. На этом и основан подход к определению устойчивых ветвей, используемый в п.4.2: в случае устойчивости ветвь симметричных периодических решений должна пересекаться другими аналогичными ветвями.

Здесь имеется по два пересечения с каждой стороны, но для обеих сторон собственные значения комплексные, сравним это с п.3.2.3, где замещение мнимых собственных значений происходит только для одного состояния. При сильной нелинейности периодического состояния ветвь периодических решений рвется, см. п.4.2, фазовые колебания малой амплитуды замещаются сильно нелинейными решениями, среди которых может быть и решение, описанное в п.3.2.3.

3.2.6 Структура с поглощаемой волной и излучаемой резонансной волной для систем с двумя характеристиками

Класс +1, рис. 2*e*, $(3; 4; 1, 1/1|1, 1/1; 0)$. Для одной стороны одна приходящая характеристика и одна уходящая характеристика, связанная с течением, и

две приходящие характеристики, связанные с волной, а для другой – одна уходящая и одна приходящая характеристика, связанная с течением и две уходящих, связанные с волной. Имеется одно пересечение с одной стороны и два – с другой. Для гамильтоновых систем из-за наличия дополнительного интеграла все соотношения для данного разрыва можно найти без анализа его структуры. Одно состояние одноволновое, другое – двухволновое с резонансом $1/n$. Эта структура аналогична структуре из п.3.2.3.

Решение выявлено для уравнения (1.6) [14], должно существовать для (1.5), поскольку его аналоги наблюдались в нестационарном расчете [5].

3.2.7 Разрыв с излучаемой резонансной волной, гибридный

Класс 0, рис. 2ж, $(2; 4:2, 0/0|1, 1/1; 0)$. Возникает в системах с двумя характеристиками. Две приходящие характеристики, связанные с течением, с одной стороны. С другой стороны одна приходящая и одна уходящая характеристика, связанная с течением, и две уходящие характеристики, связанные с излучаемой резонансной волной. Для одной из сторон пересечений нет, для другой – два пересечения. Обнаружен для уравнения (1.6) [14]. Решение получается как предел последовательностей уединенных волн класса 0, которые в данном случае образуют мультисолитоны. Для гамильтоновых систем из-за наличия дополнительного интеграла все соотношения для данного разрыва можно найти без анализа его структуры.

3.2.8 Разрыв с двумя излучаемыми волнами, гибридный

Класс 0, рис. 2з, $(4; 4:1, 1/1|1, 1/1; 0)$, гипотетически возможная структура в системах с двумя характеристиками. С каждой из сторон по две приходящие характеристики, связанные с течением, и по две уходящие, связанные с волной. По одному пересечению с каждой из сторон разрыва.

3.2.9 Кинк огибающей

Класс 0, рис. 2и. Для гидродинамической формы обобщенного уравнения Шредингера имеется решение типа классического кинка [5]. Минимальный порядок системы (2.1) для гидродинамической формы равен 2, но фактически классический кинк известен только для обобщенного уравнения, т.е. порядок равен 4, дополнительных условий 1. Для волновой формы появляется дополнительный свободный параметр, и решение интерпретируется как скачкообразная трансформация волны. С одной стороны у волны одна уходящая и одна приходящая характеристика, а с другой - также одна уходящая и одна приходящая.

3.2.10 Нестационарный трехволновой резонанс

Класс +1, рис. 2к. Для гидродинамической формы обобщенного уравнения Шредингера имеется решение типа разрыва с излучением п.3.2.2 [5]. Для

волновой формы появляется дополнительный свободный параметр, и решение, очевидно, как и в п.3.1.7, интерпретируется как резонанс трех волн. С одной стороны у волны одна уходящая и одна входящая характеристика, а с другой - одна волна с уходящими характеристиками и одна - с входящими.

3.2.11 Нестационарный пятиволновой резонанс

Класс +2, рис. 2л. Для гидродинамической формы обобщенного уравнения Шредингера, очевидно, имеется решение типа структуры разрыва с поглощаемой волной и излучаемой резонансной волной волной излучением п.3.2.6. Для волновой формы появляется дополнительный свободный параметр, и решение, видимо, интерпретируется как резонанс пяти волн волн. С одной стороны у волны одной уходящая и одна входящая характеристика, у другой – обе входящие, а с другой стороны имеются три уходящие характеристики и одна входящая. Область справа, видимо, интерпретируется как область резонансного трехволнового взаимодействия, а следовательно, сам разрыв можно интерпретировать как пятиволновой резонанс.

3.3 Структуры разрывов эволюционные только для одного из взаимно обратных разрывов

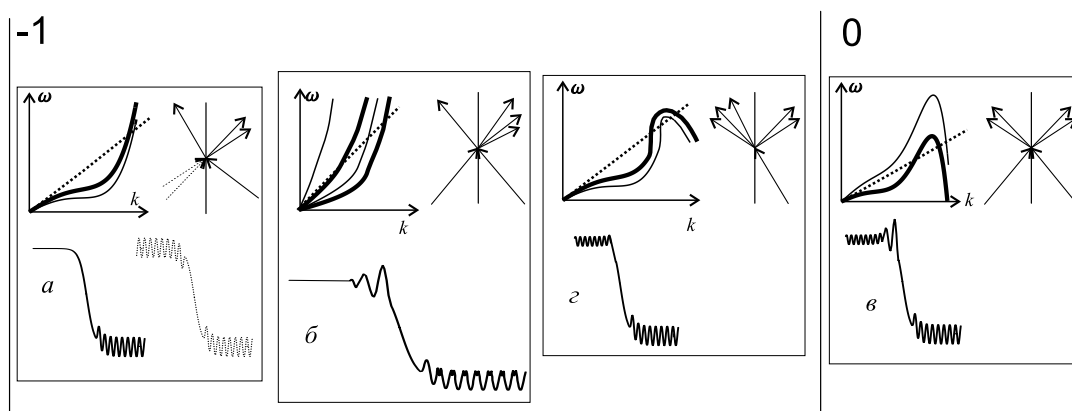


Рис. 3: Частично обратимые структуры

Расположение характеристик и рисунок даются для эволюционного варианта структуры разрыва. Общая закономерность: рассматриваемые здесь решения являются специальным случаем полностью обратимых структур.

3.3.1 Кинк с излучением.

Класс -1, рис. 3а, (3; 4: 1, 1/0|1, 1/1; 1). Для обеих сторон по одной точке пересечения. При этом в типичном случае есть еще третья точка равновесия, не участвующая в оценке существования решения, для которой имеется

две точки пересечения. Для одной стороны одна входящая характеристика, связанная с течением, и две уходящие, связанные с излучаемой волной, для другой стороны – одна уходящая характеристика, связанная с течением. В типичном случае есть еще одна точка равновесия, помимо указанных в формуле, для которой есть мнимые собственные значения. Дополнительным варьируемым параметром является скорость. Данная структура получается как предел последовательности особых уединенных волн, см. п.3.1.6, класса -1 . Другой способ – непрерывным предельным переходом из гипотетической полностью обратимой структуры разрыва с одноволновыми состояниями, $(3; 4:1, 1/1|1, 1/1; 0)$, класс $+1$, вид графика решения и дополнительные характеристики для состояния 2 показаны на рис. 3а пунктирными линиями. Структура найдена для (1.3) [10], наблюдалась также в нестационарном расчете для этого уравнения.

3.3.2 Кинк с излучением резонансной волны для систем с двумя характеристиками

Класс 0, рис. 3б, $(3; 4:1, 1/0|1, 1/1; 1)$. По обе стороны одна входящая и одна уходящая характеристика, связанная с течением. Для одной из сторон есть еще две уходящие характеристики, связанные с резонансной волной. Два пересечения с одной стороны и одно – с другой. Решение получается как предел последовательности специальных уединенных волн класса -1 . Корни действительные. Решение получается также предельным переходом из разрыва с двумя волнами класса $+1$. Решение обнаружено для уравнений (1.6) [14].

3.3.3 Разрыв с двумя излучаемыми волнами для систем выше четвертого порядка

Класс 0, рис. 3в, $(4; 6:2, 1/1|1, 2/1; 0)$. Одно пересечение с одной стороны, и два пересечения с другой. По одной входящей характеристике, связанной с течением, с каждой стороны от разрыва и по две уходящих характеристики, связанных с волной, с каждой из сторон разрыва. Возможно, может быть получен как предельное решение из нестационарных решений. Структура найдена для уравнения (1.2) с производной седьмого порядка [10], наблюдалась также в нестационарном расчете для этого уравнения.

3.3.4 Кинк с излучением для систем выше четвертого порядка

Класс -1 , рис. 3г, $(4; 6:1, 2/1|1, 2/1; 1)$. Одна входящая характеристика с одной стороны, и одна уходящая с другой. По две уходящие характеристики, связанные с волной, с каждой стороны. По два пересечения с каждой стороны. Возможно, может быть получен как предельное решение из нестационарных решений. Дополнительным варьируемым параметром является скорость. Структура найдена для уравнения (1.2) с производной седьмого порядка [10], наблюдалась также в нестационарном расчете для этого уравнения.

3.4 Итоговый комментарий

В данную классификацию включены все естественным образом предполагаемые стационарные упорядоченные структуры для случая одного или двух пересечений (случай трех и более пересечений, возможный для систем уравнений бегущих волн выше четвертого, порядка не рассматривается): найденные как решения системы уравнений бегущих волн и наблюдаемые в решениях уравнений в частных производных, найденные только как решения уравнений бегущих волн, гипотетические. Возможны в принципе их аналоги, где первичное одноволновое состояние замещается состоянием, соответствующим вторичной ветви, с тем же расположением характеристик или с перестановкой уходящих или приходящих характеристик с правой стороны на левую без изменения их суммарного числа. В этом смысле описанные выше решения можно рассматривать как первичные.

В то же время здесь рассмотрены только некоторые нестационарные структуры с целью предварительного анализа их характера и выявления связи со стационарными структурами. Например, наличие в одном классе нестационарных и стационарных трехволновых структур заставляет сделать предположение, что они могут переходить друг в друга. Указанные выше стационарные решения можно считать также первичными для построения нестационарных решений. Выше нестационарные решения рассмотрены только специального вида, резонансные. Они фактически те же, что и стационарные, но число свободных параметров на один больше, добавляется по две характеристики с каждой стороны, класс решения увеличивается на единицу. Фактически речь идет об обобщении понятия резонанса трех волн, уединенных или периодических, рассматривавшегося в [4], на более сложные случаи многоволновых резонансов. Нелинейное уравнение Шредингера отражает ситуацию, когда групповая скорость волн близка к скорости разрыва. Естественно, в случае, когда на рассмотренные выше разрывы набегают волна, групповая скорость которой существенно больше скорости разрыва, можно предположить наличие иных нестационарных решений - интерференции описанных выше стационарных разрывов с набегающей волной общего вида, у которой два независимых параметра, соответствующие структуры будут иметь на два параметра больше, класс решения повысится на два. Соответственно, добавление еще волн может дать решения более высоких классов.

4 Типичные варианты решений задачи о распаде разрыва

Описание дается в привязке к разрывам, ассоциированным с определенной ветвью. В случае не скалярной модели, например, для уравнений (1.4) и (1.7), обычно можно начать расчет распада обычным образом, а затем выделить фрагмент решения, ассоциированный с одной ветвью. В слабодиссипативном случае, например, для уравнений (1.7), для исследования внутренних

обратимых структур класса 0 необходимые соотношения между величинами слева и справа для начальных данных, порождающих разрывы, ассоциированные с одной ветвью, можно получить аналитически из законов сохранения. Общая закономерность: наблюдаются структуры классов 0 и -1 . Для наблюдения структур высших классов нужна волновая постановка задачи о распаде разрыва, упрощенный вариант такой постановки исследуется в [5].

4.1 Разрывы со сложной дисперсией для случая дисперсионной ветви без точки перегиба вне начала координат

Случай, когда пересечения при $k > 0$ прямой $U = \omega/k$ и дисперсионной ветви для одной из сторон разрыва нет, удобно иллюстрировать на примере обобщенного уравнения Кортевега-де Вриза при $b_3 b_5 < 0$. При малых амплитудах разрыва, $\Delta = a_2 - a_1 < \Delta_-^{1/1}$ (здесь индексами 1 и 2 обозначены значения справа и слева для начальных данных; для слабодиссипативного случая $U = \Delta/2$ и значение $\Delta_-^{1/1}$ не сложно найти аналитически), корни действительные и наблюдается решение с солитонной структурой, п.3.1.2. При больших амплитудах, когда $\Delta > \Delta_-^{1/1}$, корни комплексные, наблюдается решение с разрывом класса 0 с излучаемой волной, п.3.2.2. Аналогичное поведение наблюдается также для одной из ветвей уравнения (1.5), а также для магнитозвуковой ветви плазмы (1.7).

4.2 Разрывы со сложной дисперсией для случая дисперсионной ветви с точкой перегиба вне начала координат

Данный случай удобно иллюстрировать на примере обобщенного уравнения Кортевега-де Вриза при $b_3 b_5 > 0$.

Решение при больших амплитудах разрыва (для одной из сторон нет пересечения). При больших амплитудах (комплексные корни для однородного состояния) возникает решение со структурой с разрыва с излучением, п.3.2.2, как и прогнозируется. При уменьшении амплитуды и приближении к критической точке $\Delta = \Delta_+^{1/1}$, где четыре комплексных корня переходят в четыре действительных, наблюдается структура стохастического типа. Исследование показывает [8], [10], что здесь исчезает структура с монотонным ростом огибающей, но можно найти много структур с немонотонным ростом, которые, видимо, неустойчивы, либо имеют очень небольшой запас устойчивости по амплитуде возмущения. Если находить такие структуры как пределы последовательностей мультисолитонов, то они оказываются составленными из элементарных уединенных волн, разнесенных на большое расстояние друг от друга, тогда как в случае монотонной структуры элементарные уединенные волны стоят близко. Здесь просматривается интересная аналогия с взаимодействием молекул: твердое тело или жидкость и газ. В непо-

средственной близости от значения $\Delta = \Delta_+^{1/1}$ согласно [22] остается только два решения типа 1:1 уединенных волн, они представляют собой аналоги уединенной волны огибающей нелинейного уравнения Шредингера. Поэтому можно ожидать, что вблизи критической точки структур нет. Заметим также, что согласно [22] при некотором значении $\Delta_{**} > \Delta_+^{1/1}$ 1:1 уединенных волн должно стать бесконечно много, соответственно, здесь можно ожидать и появления множества структур разрывов. На рис. 4а-в показаны некоторые мультисолитоны, с которыми ассоциированы 1:1 структуры. На рис. 4г показана правильная монотонная структура, наблюдаемая в расчете.

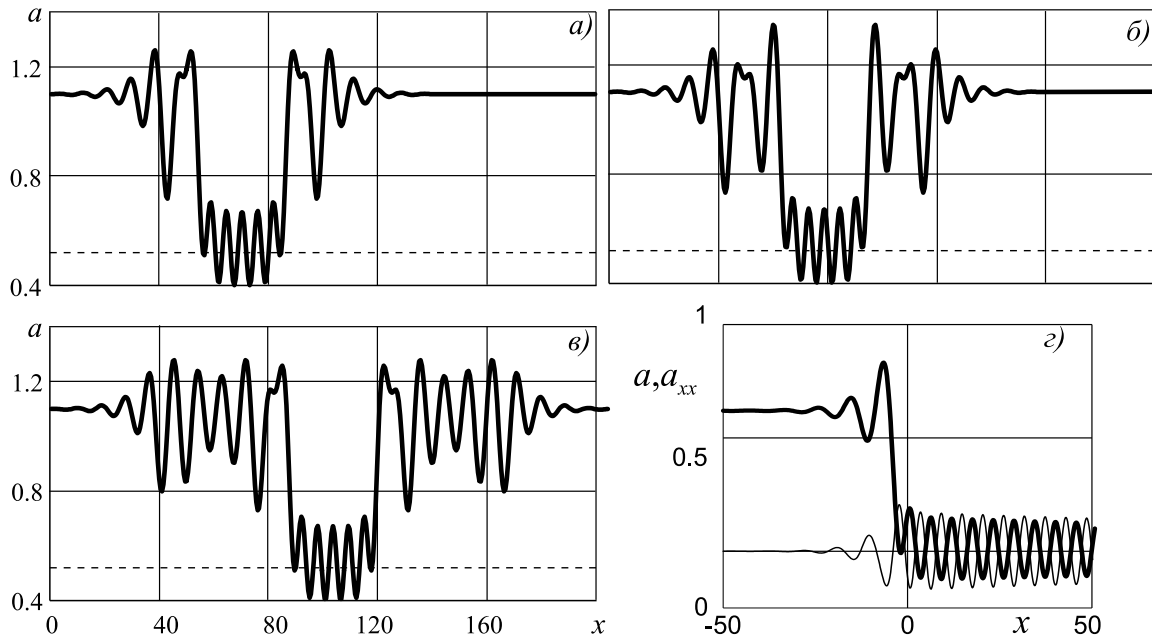


Рис. 4: Уединенные волны с немонотонной огибающей и устойчивая структура

Решение при малых и умеренных амплитудах (два пересечения для одной из сторон). В случае двух пересечений корни мнимые, в бездиссипативном случае наблюдается решение хаотического типа [8], [10]. В случае слабой диссипации при постепенном уменьшении диссипации сначала решение стационарное, затем обычно периодическое по времени [15]. Затем происходит переход к хаосу. Аналогичное поведение в слабодиссипативном случае наблюдается и при комплексных корнях для неустойчивого участка значений Δ , см. выше. Наличие периодических по времени решений в слабодиссипативном случае объясняется тем, что задача может быть аппроксимирована на конечном участке и применено разложение в ряд. Решение приблизительно описывается набором обыкновенных дифференциальных уравнений, которые могут иметь периодические решения.

Для прогноза возможного типа решения применяется метод, основанный на построении расположения ветвей периодических решений. На рис. 5 показан качественный вид расположения ветвей в переменных: z – отклонение a от состояния равновесия в точке, где $a' = 0$, w – значение второй производной в этой точке. Для удобства восприятия на левой стороне рисунка

показано большее число ветвей, чем на правой. Жирными линиями показаны длинноволновая и коротковолновая одноволновые ветви. Тонкими – резонансные ветви.

Резонансные ветви отмечены дробями, плюс обозначает синфазное взаимодействие двух волн, минус – противофазное, стрелками показано направление уменьшения потока энергии, знание этого направления необходимо при оценке возможности получения решений уравнений (2.2): эта величина для стационарных слабодиссипативных решений должна убывать с ростом x . При $\Delta > \Delta_+$ отсутствует пересечение одноволновых ветвей в начале координат и появляются спиралеобразные ветви, сходящиеся к горбам 1:1 уединенных волн. В работе [15] подробно описано, как изменяется картина расположения ветвей при изменении Δ .

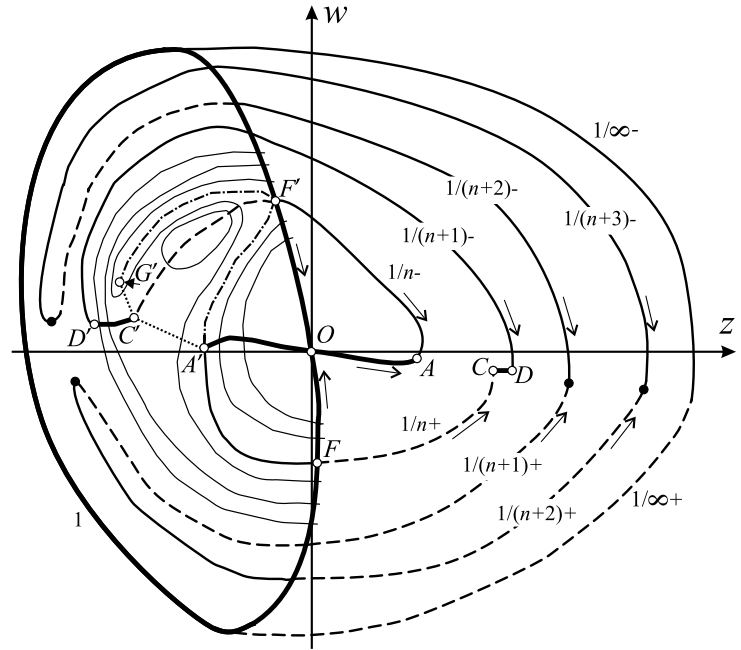


Рис. 5: Расположение ветвей

Согласно теории, основанной на анализе интегрируемых систем, при $\Delta < \Delta_+^{1/1}$, одноволновые ветви должны исходить из начала координат, а двухволновые ветви должны представлять собой аналоги окружностей. Для неинтегрируемых систем это так только в окрестности начала координат (исключение – значение Δ , соответствующее резонансу $1/2$). Длинноволновая ветвь состоит из нескольких кусков. Эти куски переходят в резонансные ветви серии $1/n$. Эти ветви неустойчивые, по крайней мере, вблизи точки перехода. На них могут находиться структуры разрывов, описанные в п.3.2.3. Это позволяет построить решение. По мере уменьшения параметра Δ последовательно пробегаются решения со структурами с резонансами $1/2, 1/3, \dots$. Наличие таких переходов между ветвями связано с тем, что ряд Фурье для длинноволновой ветви, обозначенной 1, и резонансной ветви с соотношением периодов волн $1/n$ один и тот же. Можно предполагать, что расположение ветвей носит фрактальный характер и есть аналогичные переходы между ветвями $1/n_1/n_2/\dots$ и $1/n/n_1/n_2/\dots$, n_1, n_2, \dots – целые числа, и что можно найти соответствующие структуры. Но это относится к так называемым резонансным листьям (область с кольцевыми ветвями вблизи кривой $C'F'$ на рис. 5) и не имеет отношения к рассматриваемой задаче о распаде разрыва.

Рассмотрим, когда появляется решение с резонансной структурой типа $1/n$ по мере роста Δ . Вначале ветвь типа $1/n$ пересекает длинноволновую ветвь и реализуется решение с каким-то другим резонансом. Затем по мере увеличения U длинноволновая ветвь рвется в точке пересечения с ветвью

$1/n$. Но по аналогии с $1:1$ резонансом можно ожидать, что структуры для точки соединения ветвей нет. Нас интересует именно эта точка, поскольку там разрыв Жуге, п.3.2.4, для которого можно построить решение. Затем структура должна появиться, но быть неустойчивой (при этом появляется и не Жуге структура, см. п.3.2.3, на некотором участке резонансной ветви). Структуру удастся найти как решение системы (2.1). Структур много, видимо, верно замечание о числе структур, сделанное выше для случая $1:1$ резонанса. Устойчивость, в принципе, может появиться при дальнейшем увеличении Δ . Расчет (1.2), действительно, показывает неустойчивость, стабилизация достигается за счет включения диссипации. Такое поведение может приводить к появлению двух или более решений со структурами Жуге. Одно из решений будет с резонансом $1/(n+1)$, а другое с проскакиванием перехода и структурой $1/n$. Расчеты показывают, что если постепенно уменьшать диссипативный параметр, то сначала будет второе решение, а затем первое. Причем если затем опять начать увеличивать вязкость, то первое решение сохранится. То есть имеет место гистерезис.

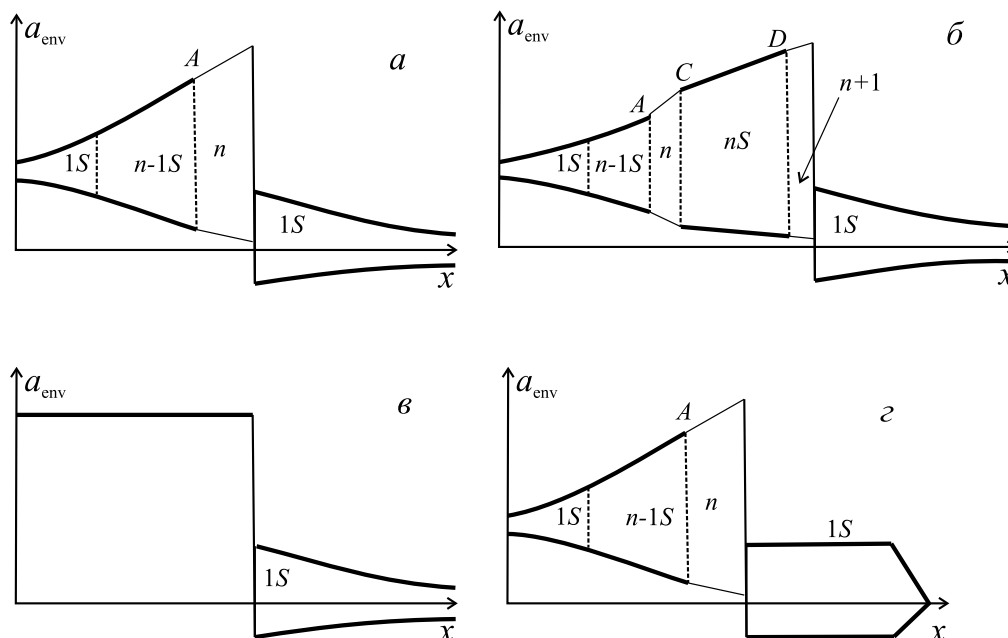


Рис. 6: Огибающие решений различного типа

На рис. 6 схематично показаны огибающие двух типов решений ($a, б$), решение с $1:1$ резонансом ($в$) и допустимое, но не наблюдаемое решение в бездиссипативном случае ($г$). Буквенные обозначения характерных участков на рис. 5 и рис. 6 согласованы. Цифрами обозначен визуально наблюдаемый тип двухпериодного решения, буква S указывает на то, что волна симметричная. На рис. 7 показаны примеры рассчитанных решений Кортевега-Бюржера с внутренними резонансными структурами $1/2$ и $1/3$. Вертикальные штриховые линии разделяют зоны с различным визуально наблюдаемым периодом волн, он коррелирует с понятием номера ветви см.п.5.

Аналогичное поведение наблюдается также для одной из ветвей уравнения (1.5), а также для магнитозвуковой ветви плазмы (1.7).

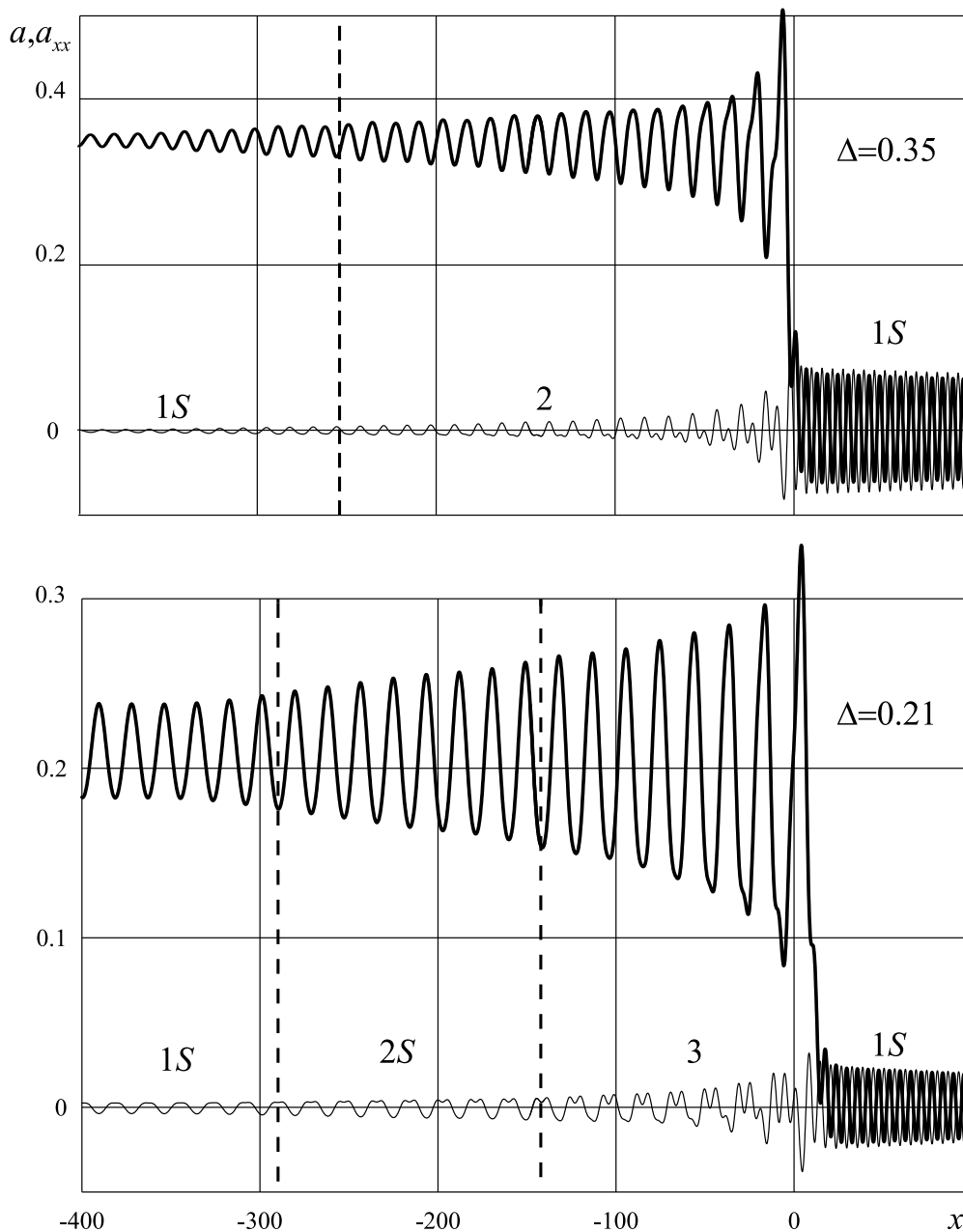


Рис. 7: Решения с резонансом $1/2$ и $1/3$

4.3 Разрывы со сложной дисперсией для случая пересечения с другой ветвью

Происходит распад на два разрыва, ассоциированных с разными ветвями. Мы будем рассматривать ту ветвь, для которой имеется пересечение с другой ветвью. Два действительных и два мнимых собственных значения для одной стороны, четыре мнимых – для другой. При малой амплитуде решение воспринимается как решение с солитонной структурой. Но в действительности в неинтегрируемом случае солитонной структуры нет, хотя это мало заметно, поскольку отклонение от нее экспоненциально мало. При увеличении амплитуды возникает структура стохастического типа. Такое поведение

наблюдалось для одной из ветвей уравнения (1.5) [5]. Аналогичное поведение можно ожидать и от уравнений (1.6).

4.4 Разрывы для случая сложной нелинейности и дисперсии

Для уравнений (1.1) и (1.3) найдены классические кинки, п.3.2.1 [8], а для (1.3) – кинки с излучением, п.3.3.1 [10]. Аналогичные решения с кинками находятся для одной из ветвей уравнения (1.5) и для уравнения (1.8).

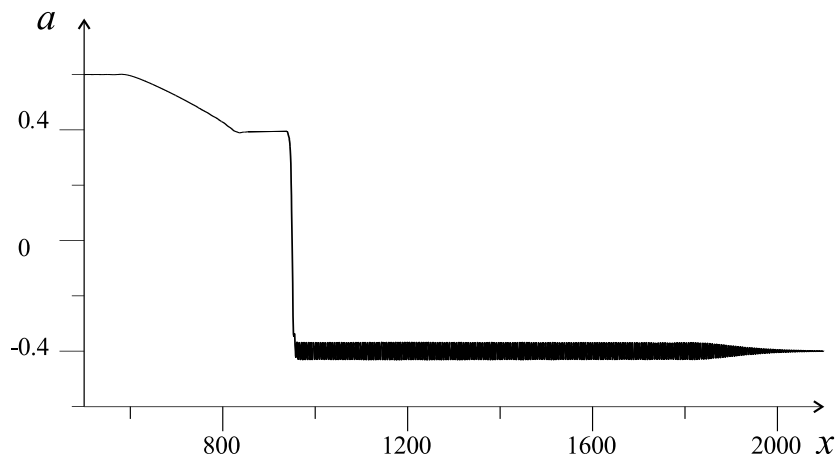


Рис. 8: Решение с простой волной и кинком с излучением

На рис. 8 показано решение с кинком с излучением, п.3.3.1, для уравнения (1.3). Характерно, что здесь наблюдается разрыв и центрированная простая волна одновременно, что невозможно в случае обычной нелинейности. Наблюдаются следующие типы решений: центрированная волна, разрыв класса 0, центрированная волна и разрыв класса -1 , разрыв класса 0 и разрыв класса -1 .

5 Методики численного анализа для поиска различных типов стационарных решений

Приведенные здесь методики следует рассматривать как примеры, иллюстрирующие построение способов (алгоритмов) поиска стационарных решений на основе условий их существования, описанных в п.2.1 и п.2.3, переход от обычных математических формулировок к конструктивистским.

Нахождение симметричной периодической волны для симметричных систем уравнений. В системе (2.1) есть симметричные и антисимметричные неизвестные. Для того чтобы найти периодическое решение, достаточно найти решение на отрезке, по краям которого антисимметричные неизвестные равны нулю. Делать это можно, например, так: возьмем начальные данные вида

$$u_{2j-1} = 0, \quad j = 1, 2, \dots, m,$$

зафиксируем, например, $u_0(x_0) = z$ как параметр семейства периодических решений и начнем расчет до точки $x = x_*$, где $u_1 = 0$, далее варьируем неизвестную $u_2 = w$ так, чтобы $u_3(x_*) = 0$. Таких значений w , вообще говоря, может быть много. Если это система четвертого порядка, то решение найдено, используем симметризацию относительно точки $x = x_*$ или $x = x_0$, чтобы найти решение на периоде. Если порядок системы выше четвертого, то варьируем $u_4(x_0)$, чтобы приравнять к нулю $u_5(x_*)$, и т.д. Теперь можно построить множество точек ветви периодического решения на плоскости (z, w) , обозначим эту ветвь числом 1. Но в случае, если для данного значения z решений больше одного, а при наличии двух пересечений их счетное число, то не все периодические решения найдены. Тогда при поиске x_* пропускаем первое значение, где $u_1 = 0$, и ищем второе. В результате получаем еще одну ветвь. Все решения, обозначенные числом 1, естественно, включены сюда тоже. Поэтому целесообразно сначала нарисовать ветвь решений, обозначенных числом 2, одним цветом, а затем другим цветом - ветвь решений обозначенных числом 1. Тогда ветвь решений, получаемых при пропуске одного значения, но не получаемых без этого, будет выделена. Это и будем называть ветвью 2, это ветвь двоякопериодических решений. Затем можно пропустить два значения x_* , где $u_1 = 0$, и найти ветвь 3 и т.д. Это ветви двухпериодных решений, номер ветви соответствует визуально наблюдаемому отношению периодов. Заметим, что данная классификация ветвей только косвенно коррелирует с математическими и физическими свойствами периодических решений и служит вспомогательным инструментом для более тонких исследований, основанных на взаимном расположении ветвей, см. п.4.2. Так, одноволновые решения обычно соответствуют ветви 1, а двухволновые с резонансом периодов $1/2$ - ветви 2, и т.д.. Но это выполняется не на всех участках. Номер ветви может зависеть от того, какое неизвестное выбрано для оценки числа горбов. Понятия первичных и вторичных ветвей носят фундаментальный характер.

Данный метод при условии контроля точности вычислений является доказательным, поскольку принцип непрерывности предполагает определение границ интервалов изменения неизвестных, для которого существует решение.

Для систем порядка $2t$ данный метод требует $t - 1$ вариаций неизвестных (вариация переменной x сюда не включается).

Нахождение произвольной, в том числе и несимметричной, периодической волны. Принцип построения алгоритма такой же, как и в предыдущем случае, но другие начальные данные и большее число вариаций. Например, так. Пусть $u_1(x_0) = 0$. После того, как найдено x_* , варьируется w так, чтобы $u_0(x_*) = z$. Затем варьируется $u_3(x_0)$ так, чтобы $u_2(x_*) = u_2(x_0)$. Для гамильтоновых систем четвертого порядка на этом процесс заканчивается, поскольку из-за наличия дополнительного интеграла система сводима к уравнению третьего порядка и условие $u_3(x_*) = u_3(x_0)$ выполняется автоматически, хотя из-за сложного строения интеграла это может потребовать дополнительной проверки для исключения псевдорешений. Порядок вариаций может быть и иным. Для не гамильтоновых систем необходима еще одна

вариация, например, вариация фазовой скорости, чтобы найти периодическое решение, т.е. там периодическое решение относится к классу 0. Если система шестого порядка, то добавляется еще две вариации и т.д. Как и в предыдущем случае, выделяются ветви 1, 2, 3 и т.д. В отличие от предыдущего случая здесь рассчитывается решение на периоде, а не на полупериоде.

Метод является доказательным.

Число вариаций для гамильтоновых систем здесь $2m-2$, то есть больше, чем в предыдущем случае, поэтому, если интересуют только симметричные решения, то его лучше не использовать.

Данный метод в том виде, как он описан здесь, нельзя применять к интегрируемым по Лиувиллю системам, к линейным системам.

Построенные периодические решения можно использовать для получения решения в виде обычной или обобщенной уединенной волны методом предельного перехода.

Нахождение симметричной уединенной волны классов -1, 0, +1 для симметричных систем уравнений. Начнем с класса 0. Рассматривается неустойчивое инвариантное многообразие. В случае системы четвертого порядка и обычной уединенной волны его размерность равна 2. Для нахождения уединенной волны нужно найти пересечение с двумерной плоскостью $S : (u_1 = 0, u_3 = 0)$. Суммарная размерность равна 4. Их пересечение возможно. На большом удалении от гребня уединенной волны неустойчивое многообразие можно описать, используя линейное приближение:

$$\mathbf{u} = \varepsilon_1 \mathbf{u}_1 \exp \kappa_1 x + \varepsilon_2 \mathbf{u}_2 \exp \kappa_2 x, \quad \kappa_{1,2} > 0,$$

в случае классической уединенной волны или

$$\mathbf{u} = \operatorname{Re}[\varepsilon_1 \mathbf{u}_1 \exp(ikx + \nu x) + \varepsilon_2 \mathbf{u}_2 \exp(-ikx + \nu x)] = \varepsilon \mathbf{u}_r \sin(kx + \delta) \exp \nu x, \\ \kappa_{1,2} = \nu \pm ik, \quad \nu > 0,$$

в случае 1:1 уединенной волны. Здесь $\mathbf{u}_{1,2}$ – собственные вектора, соответствующие первому и второму собственному значению матрицы линеаризованной системы. Как и в случае периодических волн, первая вариация x , варьируем так, чтобы $u_1(x_*) = 0$. Как и в случае периодических волн, здесь можно выделить ветвь 1, 2, 3..., это актуально для 1:1 уединенных волн. Для классической волны фиксируем параметр ε_1 . Параметром вариации для достижения $u_3(x_*) = 0$ может служить отношение $\varepsilon_1/\varepsilon_2$. В случае 1:1 уединенной волны удобно фиксировать ε , а в качестве варьируемого параметра использовать сдвиг δ , варьируемый по периоду. В случае систем более высокого порядка добавляются растущие волны, которые добавляют вариации. Поскольку это решения класса 0, то для построения картины расположения ветвей можно использовать, например, фазовую скорость U и значение $u_0(x_*)$, т.е. амплитуду волны.

В случае уединенных волн класса -1 , размерность неустойчивого инвариантного многообразия равна 1 для систем четвертого порядка

$$\mathbf{u} = \varepsilon \mathbf{u}_1 \exp \kappa_1 x.$$

Дополнительным варьируемым параметром является скорость U .

В случае обобщенных уединенных волн класса +1 имеется один свободный параметр, его можно интерпретировать, например, как амплитуду волны периодической составляющей, неустойчивое инвариантное многообразие имеет размерность 2. В случае малой амплитуды периодической составляющей оно приближенно описывается так:

$$\mathbf{u} = \varepsilon_1 \mathbf{u}_r \sin(\mathbf{kx} + \delta) + \varepsilon_2 \mathbf{u}_2 \exp \kappa_2 \mathbf{x}.$$

Здесь ε_1 - свободный параметр, значение ε_2 фиксируется, δ варьируется или наоборот. Для конечных амплитуд периодической составляющей решение ищется аналогичным образом:

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_p + \varepsilon \mathbf{u}_i,$$

\mathbf{u}_p – некоторое нелинейное периодическое решение типа нелинейной периодической волны, \mathbf{u}_i – некоторое растущее решение системы, линеаризованной относительно периодического состояния \mathbf{u}_p , варьируемым параметром становится ε . Ветви обобщенных уединенных волн можно отображать, например, на плоскости ε_1 (или z) и $u_0(x_*)$.

Число вариаций здесь равно $m - 1$, как и в случае поиска симметричных периодических волн.

Эта методика, в принципе, носит доказательный характер, но поставленные расчетные задачи жесткие, т.е. незначительное изменение начальных данных ведет к значительным изменениям в решении. Но здесь это не существенно, поскольку это не задача управления процессом. Важно только правильно смоделировать инвариантно многообразие вдали от исходного состояния. В связи с этим отклонение для вариации здесь можно выбирать довольно произвольно, а не так, как написано выше, фактически можно делать любую однопараметрическую добавку к состоянию равновесия.

Используя найденные уединенные волны, можно найти структуры разрывов непрерывным переходом по параметру (с понижением класса на 1) или дискретным переходом от последовательности уединенных волн (с сохранением класса).

Нахождение уединенных волн и структур разрывов методом сращивания. Строится линеаризованная модель неустойчивого инвариантного многообразия слева и линеаризованная модель устойчивого инвариантного многообразия справа. Фиксируется состояние правого (или наоборот левого) инвариантного многообразия в некоторой точке x , пусть это состояние \mathbf{u}_2 . Варьируется значение x_* , а также параметры многообразий слева и справа так, чтобы $u_i(x_*) = u_{i2}$, $i = 0, 1, 2n - 2$ (учитывается наличие одного интеграла). В число вариаций включаются и параметры состояний 1 и 2, если они не известны. В не гамильтоновых системах требуется приравнение и по последнему переменному. В частности, это означает, что при добавлении диссипации исчезнут уединенные волны, но появятся обычные необратимые структуры разрывов. Этот метод похож на описанный выше метод нахождения периодических волн произвольного вида. Метод тоже, в принципе,

доказательный. Постановки на расчет жесткие. Для гамильтоновых систем $2m - 2$ вариации. Этот метод фактически не использовался из-за сложности реализации. Метод приводится здесь для сопоставления.

Универсальный метод нахождения уединенных волн и структур разрывов и периодических волн. Делается линеаризованная параметризованная модель неустойчивого инвариантного состояния слева. Рассматривается состояние справа \mathbf{u}_1 . Можно и наоборот. В случае периодических и уединенных слева и справа одно и то же состояние. Варьируются параметр x и параметры инвариантного многообразия 2, а также параметры состояния 1, если они не известны, наличие интеграла используется для сокращения числа параметров. Если справа и слева разное число параметров в многообразии, то предпочтительнее выбирать то состояние, где их меньше. Ищется x_* и множество параметров, где достигается локальный минимум $|\mathbf{u}(x_*) - \mathbf{u}_1|$ (точка x_0 и ее окрестность не учитывается). Таких точек может быть много, и, в принципе, возможно выделение ветвей. Перебор локальных минимумов идет последовательно по всем варьируемым параметрам. Для оценки возможности существования решения целесообразно просматривать график зависимости локального минимума от последнего варьируемого параметра. Решение, для которого этот минимум близок к нулю, принимается за решение искомой задачи. Доказательностью данный метод не обладает, но он прост в реализации и требует меньшего числа вариаций.

Аналогичным образом можно искать и периодические волны. Там фиксируются, например, значения $u_0(x_0) = z$ и $u_1(x_0) = 0$, варьируется величина x , например, так, чтобы $u_3(x_0) = u_3(x_*)$, а локальный минимум модуля ищется при вариации других неизвестных.

6 Методика расчета уравнений в частных производных и существование решения

6.1 Подбор численной схемы

Теоретически прогнозируемые типы решений задачи о распаде разрыва наблюдаются при непосредственном расчете уравнений в частных производных. Расчет ведется с использованием явных (кроме случая электронной магнитной гидродинамики и случая трубы, наполненной жидкостью) трехслойных схем с центральными разностями, при этом при необходимости расчета диссипативных членов с производными второго порядка во избежание неустойчивости они либо аппроксимировались на нижнем слое (такой способ упоминается, например, в [23]), либо применялся шаблон ромб, как в схеме Дюфорты-Франкеля для уравнения теплопроводности [24] (эта схема абсолютно устойчивая и не накладывает никаких ограничений на шаг по времени). У таких схем при отсутствии диссипативных членов в уравнениях нет схемной диссипации. При исследовании дифференциальной формы оказывается, что они в любом приближении аппроксимируют систему обратимого типа, аналогичную исходной. При аппроксимации конечными разностями

стями желательно использовать консервативный вариант уравнений, чтобы численные схемы были также консервативны. Схемы условно устойчивы, есть некоторое ограничение на шаг по времени, определяемое экспериментально или при помощи спектрального метода. В качестве ориентира при экспериментальном выявлении условия устойчивости можно использовать дисперсионное соотношение при больших значениях k .

В некоторых случаях, если уравнения аналогичны газодинамическим уравнениям, то есть в них имеется закон сохранения массы или его аналог ($\rho_t + (u\rho)_x = 0$), для трехслойных схем возможно возникновение медленно развивающейся численной неустойчивости, которая не устраняется уменьшением временного шага. Известно, что в случае газовой динамики эта неустойчивость не устраняется добавлением вязкости, описываемой производными второго порядка [23]. Исследования показывают, что эта неустойчивость не устраняется и обратимыми дисперсионными членами с производными третьего порядка. В этом случае целесообразно применять двухслойные схемы типа Лакса-Вендрофа. Для этих схем при анализе дифференциального приближения выясняется, что доминирующие схемные эффекты описываются обратимыми дисперсионными членами второго порядка малости по пространственным и временным шагам, но есть и необратимые члены третьего порядка малости $O(\Delta t^3, \Delta t \Delta x^2)$. В случае малого шага по времени, а такой шаг обычно диктуется условием устойчивости, влияние схемной диссипации практически отсутствует. Схемы типа Лакса-Вендрофа не требуют специальных приемов для аппроксимации диссипативных членов. Уравнениями, потребовавшими использования таких схем, оказались уравнения электронной магнитной гидродинамики и уравнения трубы.

6.2 О корректности постановки нелинейных задач

Известно, что в гиперболических системах возникает опрокидывание волн, и для устранения этого явления вводится диссипация (вязкость), описываемая производными второго порядка. Вопрос о возможности замены вязких членов обратимыми дисперсионными членами требует специального анализа.

У некоторых уравнений дисперсия описывается производными низкого порядка и нет дисперсии для коротких волн, $\omega/k \rightarrow const$ при $k \rightarrow \infty$, что соответствует физической реальности, поскольку любой сигнал должен распространяться с конечной скоростью. В некотором смысле эти уравнения являются точными уравнениями, поскольку при их выводе не применялись методы усреднения или приближение длинных волн, приводящие к тому, что дисперсия сохраняется и для коротких волн, хотя формально эти приближения короткие волны не описывают. Было замечено, что в бездиссипативном случае с течением времени для точных уравнений может возникать рост амплитуды огибающей коротких волн, приводящий к остановке расчета, т.е. такая дисперсия не в полном объеме компенсирует опрокидывание нелинейных волн.

Кроме того, для уравнений трубы с контролируемым давлением диспер-

сия порождается членами с низким порядком производных. Здесь могло бы происходить опрокидывание длинных волн, но исследование показывает, что при возникновении такого процесса некорректность уравнений из-за сжатия оболочки трубы возникает раньше и расчет останавливается.

6.3 О граничных условиях

При расчете задачи о распаде разрыва решается задача Коши. Однако приходится проводить расчет в ограниченном объеме. Пригодные граничные условия иногда удается найти из физических соображений. Число граничных условий, необходимое для математически корректной постановки задачи, можно установить, проанализировав дисперсионное соотношение, обратив его [6]. Обычно удобно ставить граничные условия, так, что значения неизвестных на границе совпадают с заданными значениями неизвестных согласно постановке задачи. Кроме того, при необходимости добавляются условия того, что производные первого, второго или третьего порядка равны нулю, чтобы удовлетворить численной схеме. Симметричные численные схемы при наличии пространственных производных нечетного порядка обычно требуют большего числа граничных условий, чем нужно для математически корректной постановки задачи. Расчеты показывают, что так можно делать, но со временем вблизи границы могут накапливаться возмущения. Происходит также отражение волн от границы. Поэтому приходится регулярно отрезать приграничный участок решения и заменять его невозмущенным. Эти проблемы можно устранить, введя в уравнения диссипативные члены, описываемые производными четного порядка, которые действуют только вблизи границы. Тогда, во-первых, достигается корректность постановки задачи, если это члены с производными высокого порядка, а во-вторых, не происходит отражения волн, если диссипация при приближении к границе нарастает плавно. Например, для обобщенного уравнения Кортевега-де Вриза с производной пятого порядка корректность постановки граничных условий для симметричной схемы достигается добавлением производной шестого порядка. При использовании трехслойной схемы аппроксимировать производную шестого порядка, как и в случае производной второго порядка, целесообразно по шаблону ромб. Заметим, что этот шаблон нельзя использовать в случае производной четвертого порядка: возникает неустойчивость.

6.4 Характер решений

В качестве начальных данных для расчетов берется сглаженная ступенька. Расчеты подтверждают прогнозируемые решения о распаде произвольного разрыва, но для некоторых интервалов амплитуды разрыва встречаются и решения хаотического характера. Тенденции к возникновению аттрактора не наблюдается. Это характерно для динамических систем континуального типа, описывающих неограниченные объемы. При расчетах со слабой диссипацией встречаются и периодические по времени решения. В целом в слабодиссипативном случае при уменьшении величины диссипативного параметра

выявляются закономерности, характерные для общей теории динамических систем и, в частности, для турбулентных процессов в ограниченных объемах, т.е. происходит переход от стационарных процессов к периодическим по времени, а затем и к хаотическим с постепенным нарастанием хаоса [15].

Список литературы

- [1] Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика. Т. VI. Гидродинамика. М.: Наука, 1988. 730с.
- [2] Куликовский А.Г., Свешникова Е.И. Нелинейные волны в упругих средах. М.Московский Лицей, 1998. 412с.
- [3] Гуревич А.В., Питаевский Л.П. Нестационарная структура бесстолкновительной ударной волны // ЖЭТФ. 1973. Т. 65. №2. С. 590-604.
- [4] Бахолдин И.Б. Трехволновой резонанс и усредненные уравнения взаимодействия двух волн в средах, описываемых кубическим уравнением Шредингера // Изв. РАН МЖГ. 1992. №1. С. 107-116.
- [5] Бахолдин И.Б. Волновые разрывы, описываемые модифицированным уравнением Шредингера // Ж. вычисл. матем. и матем. физики. 1998. Т.38, №8. С. 1331-1350.
- [6] Бахолдин И.Б. Бездиссипативные разрывы в механике сплошной среды. М.:Физматлит, 2004. 318с.
- [7] Бахолдин И.Б. Структуры эволюционных разрывов в бездиссипативных системах // Прикл. матем. механ. 1999. Т. 63. Вып. 1. С.52-62.
- [8] Бахолдин И.Б. Разрывы, описываемые обобщенными уравнениями Кортевега-де Вриза // Изв. РАН Мех. Жидк. И газов. 1999. №4. С.95-109.
- [9] Бахолдин И.Б. Скачок с излучением в моделях, описываемых обобщенным уравнением Кортевега-де Вриза // Прикл. матем. механ. 2001. Т. 65. Вып. 1. С. 59-68.
- [10] Бахолдин И.Б. Уединенные волны и структуры разрывов в бездиссипативных моделях с усложненной дисперсией // Прикл. матем. механ. 2003. Т. 67. Вып. 1. С. 49-64.
- [11] Бахолдин И.Б. Методы исследования структур диссипативных и бездиссипативных разрывов в системах с дисперсией // Журн. выч. матем. и матем. физики. 2005. Т. 45. № 2. С. 330-343. –
- [12] Бахолдин И.Б. Бездиссипативные разрывы для магнитозвуковой ветви холодной плазмы // Физ. плазмы 2000. Т. 26. №1. С. 1-8.

- [13] Бахолдин И.Б., Егорова Е.Р., Исследование магнитозвуковых уединенных волн для уравнений электронной магнитной гидродинамики // Журн. выч. матем. и матем. физики. 2011г. Т. 51. № 3. С. 515–528.
- [14] Бахолдин И.Б., Томашпольский В.Я. Уединенные волны в модели предварительно напряженного нелинейного композита // Дифференциальные уравнения. 2004. Т. 40. №4. С. 527-538.
- [15] Бахолдин И.Б. Стационарные и нестационарные структуры разрывов для моделей, описываемых обобщенным уравнением Кортевега–Бюргерса // Прикладная математика и механика. 2011. Т. 75. №2. С. 271-302.
- [16] Ильичев А.Т., Марченко А.В. О распространении длинных нелинейных волн в тяжелой жидкости под ледяным покровом // Изв. АН СССР Мех. Жидк. И газов. 1989. №1. С. 88-95.
- [17] Гвоздовская Н.И., Куликовский А.Г. Квазипоперечные ударные волны в упругих средах с внутренней структурой // ПМТФ. 1999. Т.40. №2. С. 174-180.
- [18] Kakutani T., Ono H. Weak non-linear hydromagnetic waves in a cold collision-free plasma // J. Phys. Soc. Japan. 1969. V. 26. P. 1305-1318.
- [19] Fu Y.B., Il'ichev A. Solitary waves in fluid-filled elastic tubes: existence, persistence, and the role of axial displacement // IMA J. Appl. Math., 2010. V.75, 257-268.
- [20] Fu Y.B., Pearce S.P. Characterization and stability of localized bulging/necking in inflated membrane tubes // IMA J. Appl. Math., 2010. V.75, 581-602.
- [21] Арнольд В.И. Математические методы классической механики. М.: Наука, 1979. 432с.
- [22] Champneys A.R., Toland J.F. Bifurcation and coalescence of a plethora of homoclinic orbits for Hamiltonian system // J. Dynam. Diff. Eq. 1993. V.8. P.221-228.
- [23] Роуч П. Дж. Вычислительная гидродинамика. - М.: Мир, 1980. - 616 с.
- [24] Самарский А. А. Теория разностных схем. - М.: Наука, 1977. - 656с.