



ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 32 за 2013 г.



Ладонкина М.Е., Тишкин В.Ф.

Один метод для численного  
решения систем типа  
законов сохранения

**Рекомендуемая форма библиографической ссылки:** Ладонкина М.Е., Тишкин В.Ф. Один метод для численного решения систем типа законов сохранения // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2013. № 32. 12 с. URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2013-32>

**Ордена Ленина  
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ  
имени М.В.Келдыша  
Российской академии наук**

**М.Е.Ладонкина, В.Ф.Тишкин**

**Один метод для численного решения  
систем типа законов сохранения**

**Москва — 2013**

**Ладонкина М.Е., Тишкин В.Ф.**

Один метод для численного решения систем типа законов сохранения

Предлагается метод решения систем типа законов сохранения, являющийся обобщением интегро-интерполяционного метода. Исследуется порядок точности данного метода на гладких решениях. Приведено решение содержащей сильные разрывы задачи о взаимодействии ударной волны с энтропийным возмущением. Показано, что данный метод дает решение более высокой точности, чем схема первого порядка.

**Ключевые слова:** системы типа законов сохранения, порядок точности схемы, разрывное решение

**Marina Eugenievna Ladonkina, Vladimir Fedorovich Tishkin**

One method for numerical solutions of conservation laws systems

A method for solving systems of conservation laws, which is a generalization of integro-interpolation method is proposed in this paper. We study the order of accuracy of the method for smooth solutions. The shock–entropy interaction problem, which contains strong discontinuities is solved by the proposed method. It is shown that the solution obtained by this method has a higher order than the solution obtained by the first-order scheme.

**Key words:** systems of conservation laws, order accurate scheme, discontinuous solution

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект 11-01-00444\_a.

## Оглавление

Введение.....	3
1. Описание метода.....	3
2. Исследование порядков сходимости схемы .....	6
3. Постановка задачи о взаимодействии ударной волны с энтропийным возмущением .....	9
Выводы .....	12
Литература .....	12

## Введение

Для решения задач газовой динамики в настоящее время часто используют методы высокого порядка точности. Как известно, для обеспечения монотонности решения необходимо вводить лимитеры, особенно если решение содержит сильные разрывы. В настоящей работе предлагается новый метод решения систем типа законов сохранения, являющийся обобщением интегроинтерполяционного метода, не предполагающий использование лимитеров. Исследован порядок точности данного метода на гладких решениях. Исследование проведено для уравнений одномерной идеальной газовой динамики, в случае, когда решение представляет собой простую волну, параметры которой подобраны таким образом, чтобы обеспечить бесконечную гладкость начальных функций. Приведено решение содержащей сильные разрывы задачи о взаимодействии ударной волны с энтропийным возмущением предложенным методом, на этом примере показана хорошая точность нового метода.

## 1. Описание метода

Рассмотрим одномерную систему типа законов сохранения, записанную в виде:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F(U)}{\partial x} = 0, \quad (1)$$

где  $U = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$  — вектор консервативных переменных,  $F(U) = \begin{pmatrix} f_1(U) \\ f_2(U) \\ \vdots \\ f_n(U) \end{pmatrix}$  —

заданные потоковые функции.

Будем предполагать, что система является гиперболической, т.е. матрица  $A(U) = \frac{\partial F(U)}{\partial U}$  имеет базис из собственных векторов.

Для получения численного решения покроем отрезок, на котором ищется решение, сеткой  $0 = x_{1/2} \leq x_{3/2} \leq \dots \leq x_{N+1/2} = L$  с шагом  $\Delta x_i = (x_{i+1/2} - x_{i-1/2})$ .

На каждом интервале  $x_{i-1/2} \leq x \leq x_{i+1/2}$  приближенное решение системы уравнений (1) будем искать в виде полиномиальной функции

$$U_i(x, t) = u_i^0(t) + u_i^1(t)(x - x_i) + \dots + u_i^k(t)(x - x_i)^k, \quad (2)$$

где  $x_i = \frac{x_{i+1/2} - x_{i-1/2}}{2}$  — центр ячейки.

В дальнейшем в данной работе ограничимся рассмотрением линейной функции

$$U_i(x, t) = U_{0i} + P_i(x - x_i). \quad (3)$$

Проинтегрировав (1) по интервалу  $[x_{i-1/2}, x_{i+1/2}]$ , получим

$$\frac{\partial U_{0i}(t)}{\partial t} + \frac{F_{i+1/2} - F_{i-1/2}}{\Delta x_i} = 0. \quad (4)$$

В качестве значений потоков  $F_{i-1/2}, F_{i+1/2}$  будем использовать монотонные потоки, вычисленные от значений функций  $U(x, t)$  слева и справа от точек  $x_{i-1/2}, x_{i+1/2}$  соответственно.

$$F_{i+1/2} = \Phi(U_{i+1/2}^+, U_{i+1/2}^-).$$

В качестве потока  $\Phi(U^+, U^-)$  будем использовать потоки Лакса–Фридрихса–Русанова [1,2].

$$\Phi(U_{i+1/2}^+, U_{i+1/2}^-) = \frac{1}{2} \left( F(U_{i+1/2}^+) + F(U_{i+1/2}^-) \right) - K_{i+1/2} \cdot \frac{(U_{i+1/2}^- - U_{i+1/2}^+)}{2},$$

$$K_{i+1/2} = \max(|\lambda^+|, |\lambda^-|),$$

где  $\lambda^+, \lambda^-$  — максимальные по модулю собственные числа матриц  $A(U^+)$ ,  $A(U^-)$  соответственно.

$$U_{i+1/2}^+ = U_{0i} + P_i(x_{i+1/2} - x_i), \quad U_{i+1/2}^- = U_{0i+1} + P_{i+1}(x_{i+1/2} - x_{i+1}). \quad (5)$$

Для определения величин  $P_i$  заметим, что  $P = \frac{\partial U}{\partial x}$  на интервале  $x_{i-1/2} \leq x \leq x_{i+1/2}$ .

Продифференцировав (1), получим уравнения для определения  $P = \frac{\partial U}{\partial x}$ :

$$\frac{\partial P}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (A(U) \cdot P) = 0, \quad (6)$$

Проинтегрировав (6) по интервалу  $[x_{i-1/2}, x_{i+1/2}]$ , приходим к формуле

$$\frac{\partial P_i}{\partial t} + \frac{(A(U) \cdot P)_{i+1/2} - (A(U) \cdot P)_{i-1/2}}{\Delta x_i} = 0.$$

Для расчета потока  $(A(U) \cdot P)_{i+1/2}$  также будем использовать формулы потока типа Лакса–Фридрихса–Русанова

$$\begin{aligned} (A(U) \cdot P)_{i+1/2} &= \frac{1}{2} \left( A(U_{i+1/2}^+) P_{i+1/2}^+ + A(U_{i+1/2}^-) P_{i+1/2}^- \right) - \\ &\quad - K_{i+1/2} \cdot \frac{(P_{i+1/2}^- - P_{i+1/2}^+)}{2} \\ K_{i+1/2} &= \max(|\lambda^+|, |\lambda^-|), \end{aligned} \quad (7)$$

где  $U_{i+1/2}^+, U_{i+1/2}^-$  определяются по формулам (5), а

$$P_{i+1/2}^- = P_{i+1}, \quad P_{i+1/2}^+ = P_i. \quad (8)$$

Заметим, что если ввести вектор переменных

$$V = \begin{pmatrix} U \\ P \end{pmatrix} \quad (9)$$

и вектор потоков

$$\Phi(V(U)) = \begin{pmatrix} F(U) \\ A(U) \cdot P \end{pmatrix}, \quad (10)$$

то данный метод можно рассматривать как применение интегро-интерполяционного метода с потоками Лакса–Фридрихса–Русанова для уравнений

$$\frac{\partial V(U)}{\partial t} + \frac{\partial \Phi(V(U))}{\partial x} = 0. \quad (11)$$

При этом компонента  $U$  представляется как линейный полином на интервале  $[x_{i-1/2}, x_{i+1/2}]$ , а компонента  $P$  – как полином нулевой степени.

Если рассмотреть матрицу системы (9-11)  $\mathbf{A} = \frac{\partial \Phi}{\partial V}$ , то легко видеть, что

она имеет вид  $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} A(U) & 0 \\ \frac{\partial A(U)}{\partial U} \cdot P & A(U) \end{pmatrix}$ , при этом собственные значения матрицы

$\mathbf{A}$  совпадают с собственными значениями матрицы  $A(U)$ .

Отметим, что система уже не всегда будет являться гиперболической.

Запишем численную схему для решения системы (9-11):

$$\frac{\mathbf{V}_i^{n+1} - \mathbf{V}_i^n}{\Delta t} + \frac{\mathbf{H}_{i+1/2}(\mathbf{V}_i^n) - \mathbf{H}_{i-1/2}(\mathbf{V}_i^n)}{\Delta x_i} = 0. \quad (12)$$

В формуле (12)  $\mathbf{H}_{i+1/2}$ ,  $\mathbf{H}_{i-1/2}$  – дискретные потоки, являющиеся монотонными функциями двух переменных

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_{i+1/2} &= \Phi\left(\mathbf{V}\left(U_h(x_{i+1/2}^-, t)\right), \mathbf{V}\left(U_h(x_{i+1/2}^+, t)\right)\right) \\ \mathbf{H}_{i-1/2} &= \Phi\left(\mathbf{V}\left(U_h(x_{i-1/2}^-, t)\right), \mathbf{V}\left(U_h(x_{i-1/2}^+, t)\right)\right), \end{aligned}$$

для которых выполнено условие согласования:

$$\mathbf{H}\left(\mathbf{V}\left(U_h(x_i, t)\right), \mathbf{V}\left(U_h(x_i, t)\right)\right) = \Phi\left(V\left(U_h(x_i, t)\right)\right).$$

## 2. Исследование порядков сходимости схемы

Рассмотрим систему уравнений Эйлера, для чего в (1) положим

$$U = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho v \\ E \end{pmatrix}, \quad F(U) = \begin{pmatrix} \rho v \\ \rho v^2 + p \\ (E + p)v \end{pmatrix}, \quad (13)$$

величины  $\rho$ ,  $v$ ,  $\varepsilon$  соответствуют плотности, скорости, удельной внутренней энергии и давлению газа, а  $E = \rho \left( \varepsilon + \frac{v^2}{2} \right)$  — полная энергия на единицу объема. Для определения давления  $p$  будем использовать уравнение состояния идеального газа:

$$p = (\gamma - 1) \rho \varepsilon,$$

где  $\gamma$  — показатель адиабаты.

В качестве тестовой задачи, на которой мы будем исследовать порядки точности метода, будем использовать простую волну, в которой энтропия  $\frac{p}{\rho^\gamma}$  и инвариант Римана  $R^+ = v + \frac{2}{\gamma - 1} c$  являются постоянными [3,4].

Распределение плотности в начальный момент выберем в виде бесконечно гладкой функции[5,6]:

$$\rho = \begin{cases} 1 + e^{-2 \frac{l^2}{l^2 - x^2}}, & |x| < l, \\ 1, & \text{иначе} \end{cases} \quad x \in [-1, 1], \quad l = 0.2, \quad \gamma = 5/3. \quad (14)$$

Остальные гидродинамические параметры определяются из условий постоянства энтропии и инварианта  $R^+$

$$\varepsilon = \rho^{(\gamma-1)}, \quad u = \frac{-2\sqrt{\varepsilon(\gamma-1)\gamma}}{\gamma-1}, \quad E = \rho\varepsilon + \rho \frac{v^2}{2}. \quad (15)$$

На границах области заданы постоянные граничные условия:

$$\begin{aligned} \rho(-1, t) = 1, \quad v(-1, t) = -\sqrt{10}, \quad E(-1, t) = 6, \\ \rho(1, t) = 1, \quad v(1, t) = -\sqrt{10}, \quad E(1, t) = 6. \end{aligned} \quad (16)$$

Порядки точности исследуемого метода  $r$  определены по правилу Рунге

$$r = \log_2 \frac{\|U_h - U^T\|_{L_i}}{\|U_{h/2} - U^T\|_{L_i}}, \quad (17)$$



где  $U_h, U_{h/2}$  — численные решения задачи с пространственными шагами  $h$  и  $h/2$  соответственно,  $U^T$  — точное решение задачи [5] в нормах  $L^1$ ,  $L^2$  и  $L^4$ .

$$\begin{aligned} \|U_h - U^T\|_{L^1} &= \int_{-1}^1 |U_h - U^T| dx, & \|U_h - U^T\|_{L^2} &= \sqrt{\int_{-1}^1 (U_h - U^T)^2 dx}, \\ \|U_h - U^T\|_{L^4} &= \left( \int_{-1}^1 (U_h - U^T)^4 dx \right)^{1/4} \end{aligned} \quad (18)$$

Для вычисления интегралов (18) были использованы квадратурные формулы Гаусса с пятиточечным шаблоном.

В таблице 1 представлены результаты расчетов. Хорошо видно, что при измельчении сетки порядок точности данного метода монотонно стремится ко второму, причем во всех исследуемых нормах.

Таблица 1

	T = 0.05		T = 0.07	
N	ошибка	порядок	ошибка	порядок
250	4.40e-03		8.11e-03	
500	1.59e-03	1.47	3.41e-03	1.25
1000	5.18e-04	1.62	1.28e-03	1.41
2000	1.53e-04	1.76	4.37e-04	1.55
4000	4.24e-05	1.86	1.37e-04	1.68
8000	1.12e-05	1.92	3.99e-05	1.78
16000	2.89e-06	1.95	1.10e-05	1.86
250	1.18e-02		2.40e-02	
500	4.71e-03	1.33	1.18e-02	1.02
1000	1.62e-03	1.54	5.19e-03	1.20
2000	4.94e-04	1.71	2.03e-03	1.36
4000	1.39e-04	1.83	7.13e-04	1.51
8000	3.76e-05	1.89	2.28e-04	1.64
16000	9.83e-06	1.93	6.73e-05	1.76
250	2.61e-02		5.60e-02	
500	1.10e-03	1.24	3.10e-02	0.85
1000	3.91e-03	1.49	1.50e-02	1.06

2000	$1.22e - 03$	1.68	$6.31e - 03$	1.24
4000	$3.46e - 04$	1.81	$3.37e - 03$	1.41
8000	$9.36e - 05$	1.89	$7.95e - 04$	1.57
16000	$2.44e - 05$	1.94	$2.42e - 04$	1.72

### 3. Постановка задачи о взаимодействии ударной волны с энтропийным возмущением

Рассмотрим уравнения Эйлера с начальными данными [7]

$$(\rho, v, P)(x, 0) = \begin{cases} (3.857143, -0.920279, 10.333333), & x \leq 0, \\ (1 + 0.2 \sin(5x), -3.549648, 1.000000) & 0 < x < 10, \\ (1.000000, -3.549648, 1.000000), & x \geq 10. \end{cases}$$

Данная задача представляет собой взаимодействие стационарной ударной волны с движущимся влево потоком, имеющим синусоидальное изменение плотности (рис.1). При прохождении через ударную волну возникают колебания, которые развиваются со временем в ударные волны меньшей амплитуды (рис.2).

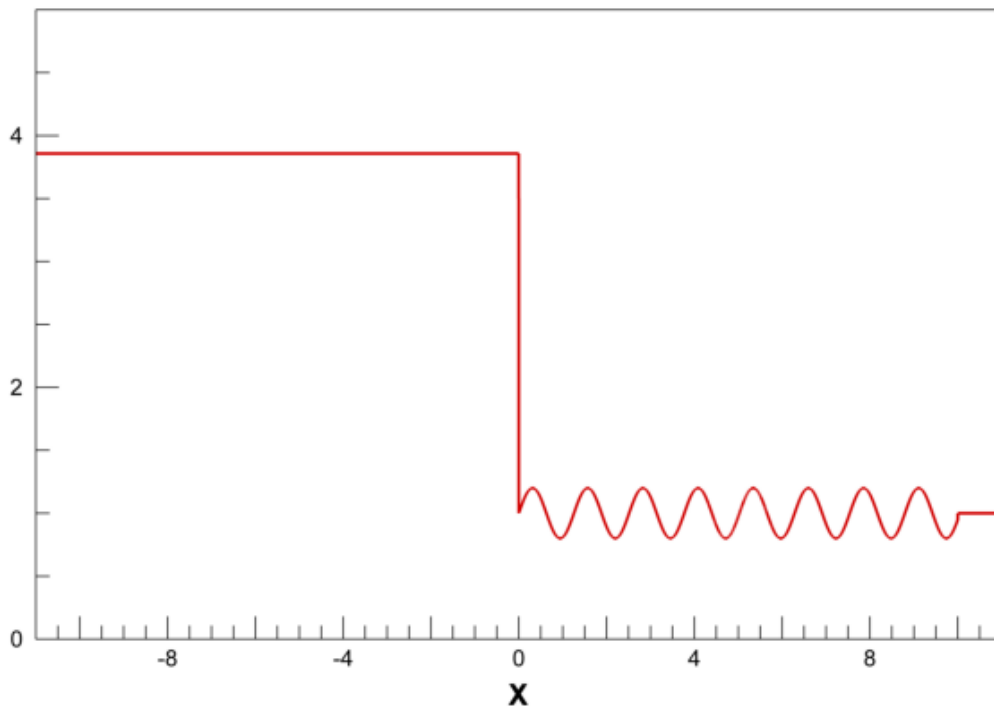


Рис.1 Начальное распределение плотности

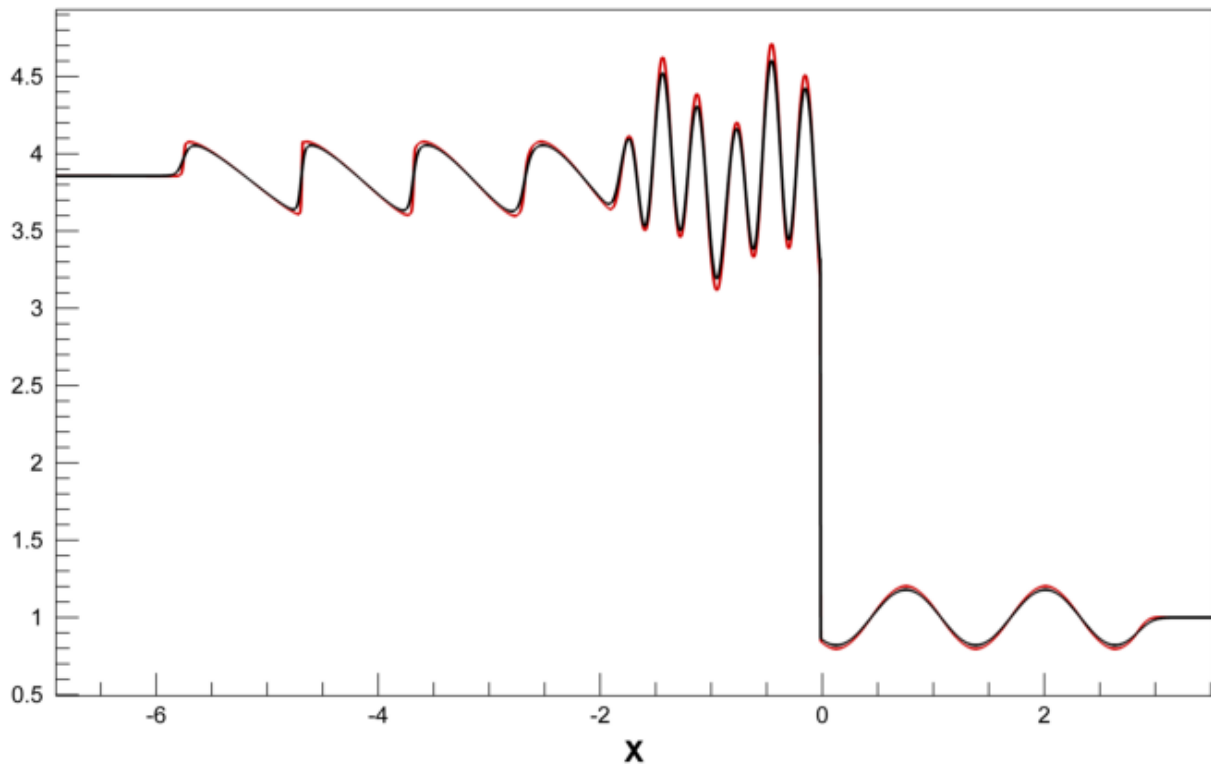


Рис.2 Профиль плотности  $T=2$

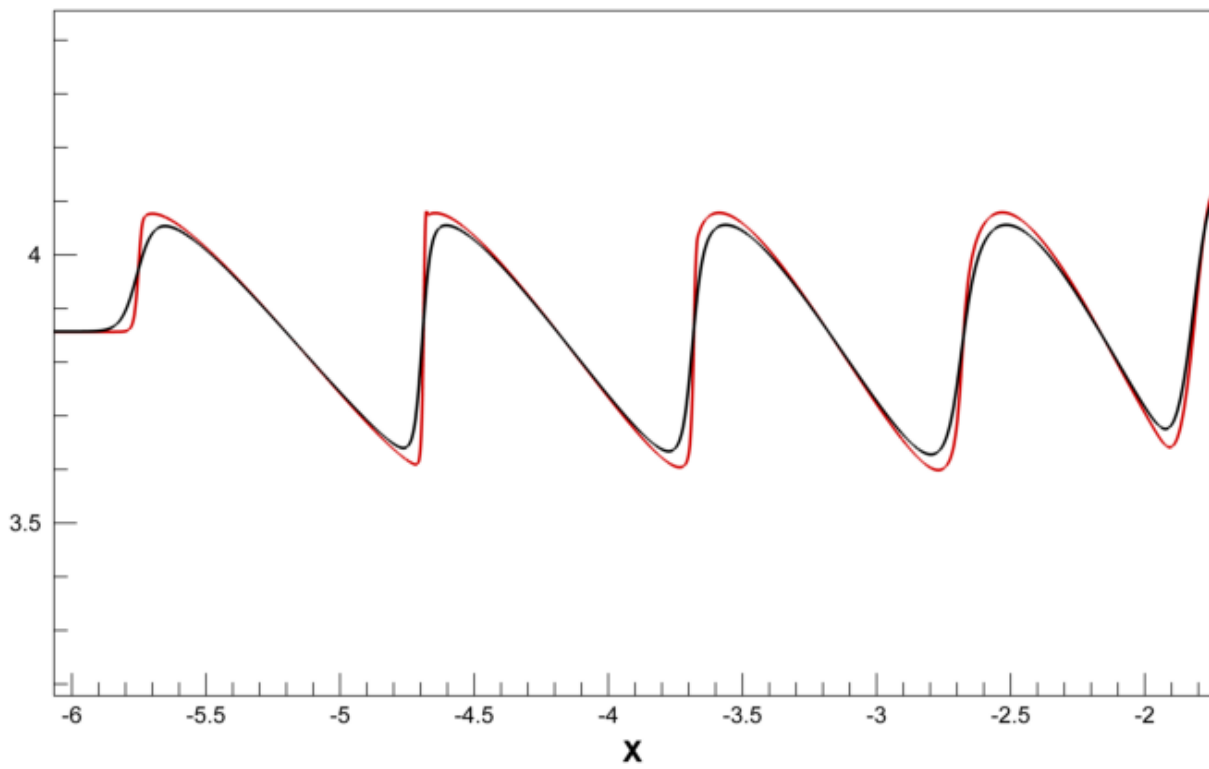


Рис.3

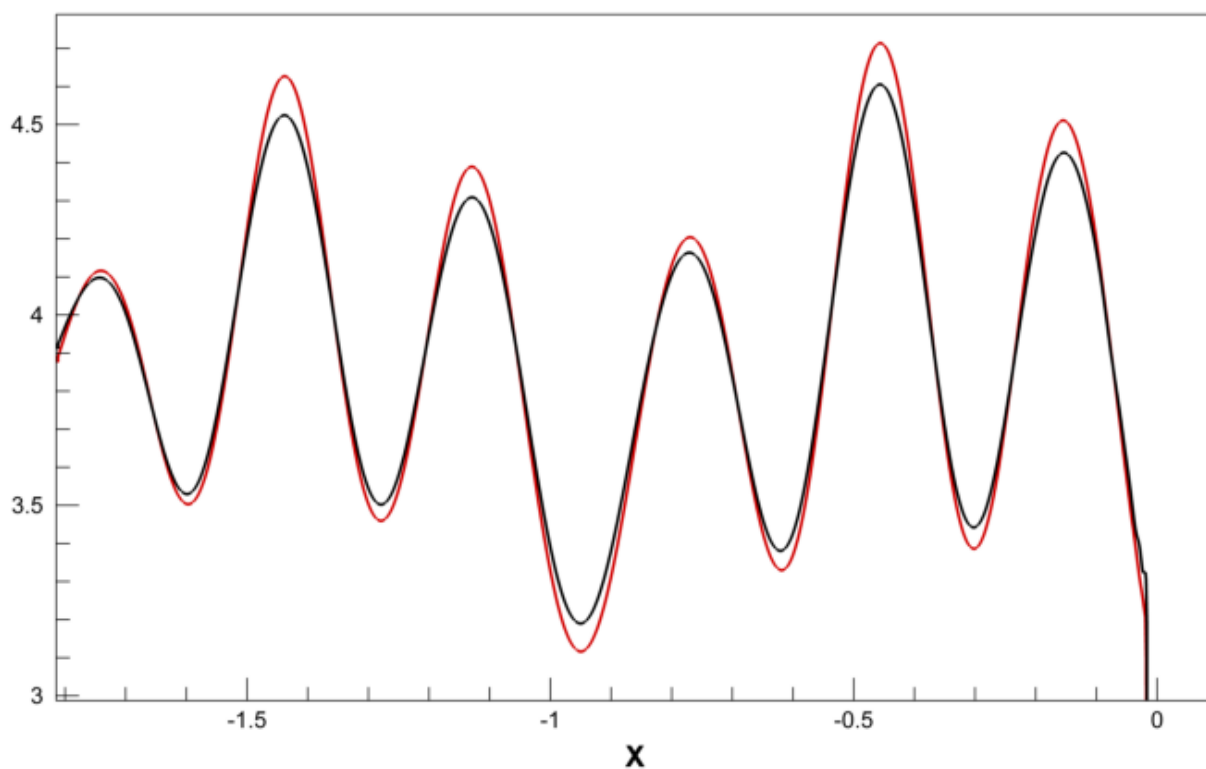


Рис.4

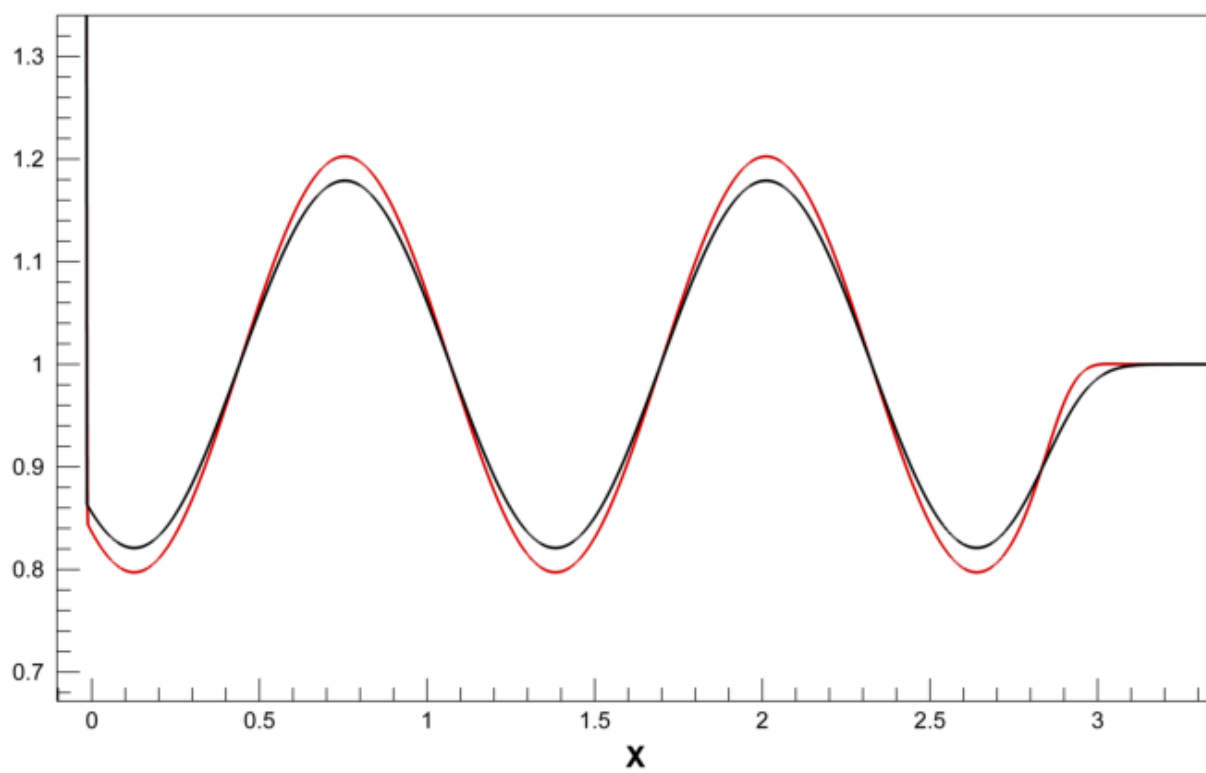


Рис.5

На рис. 2-5 представлены результаты расчетов на момент времени  $T=2$ , выполненных на равномерной сетке с шагом по пространству  $h_x=0.00125$ , по схеме Лакса-Фридрихса-Русанова первого порядка (черная линия), предложенным в данной работе методом (красная линия). Хорошо видно, что предложенная схема дает решение более высокого порядка, чем схема первого порядка, при этом не наблюдается генерирующей схемой осцилляций ни в окрестности фронта ударной волны, ни в следе за фронтом.

## Выводы

При решении задач, содержащих гладкие решения на сгущающихся сетках, можно видеть, что порядок точности предложенного метода монотонно сходится ко второму, причем во всех исследуемых нормах. При решении задач, решения которых содержат разрывы, данный метод дает решение более высокой точности, чем схема первого порядка.

## Литература

1. Русанов В.В. Расчет взаимодействия нестационарных ударных волн с препятствиями // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1961. т. I. № 2. С. 267-279. URL: [http://www.mathnet.ru/php/archive.phtml?wshow=paper&jrnid=zvmmf&paperid=7987&option\\_lang=rus](http://www.mathnet.ru/php/archive.phtml?wshow=paper&jrnid=zvmmf&paperid=7987&option_lang=rus)
2. Lax P.D. Weak solutions of nonlinear hyperbolic equations and their numerical computation. // Communications on Pure and Applied Mathematics. 1954.7. № 1. P.159 -193.
3. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Гидродинамика / Теоретическая физика: Т. VI. – М.: Физматлит. 2001.
4. Уизем Дж. Линейные и нелинейные волны. М.: Мир, 1977.
5. Ладонкина М.Е., Неклюдова О.А., Тишкин В.Ф. Исследование влияния лимитера на порядок точности решения разрывным методом Галеркина. // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. 2012. № 34. URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2012-34>
6. Ладонкина М.Е., Неклюдова О.А., Тишкин В.Ф. Исследование влияния лимитера на порядок точности решения разрывным методом Галеркина. // Матем. моделирование. 2012. № 24:12. С.124–128. URL: [http://www.mathnet.ru/php/archive.phtml?wshow=paper&jrnid=mm&paperid=3234&option\\_lang=rus](http://www.mathnet.ru/php/archive.phtml?wshow=paper&jrnid=mm&paperid=3234&option_lang=rus)
7. Shu C.-W., Osher S. Efficient implementation of essentially non-oscillatory shock-capturing schemes II. // Journal of Computational Physics. 1989, № 83. P. 32–78.