ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 33 за 2013 г.

ISSN 2071-2898 (Print)
ISSN 2071-2901 (Online)

Колесниченко А. В.

Конструирование энтропийной транспортной модели на основе статистики Тсаллиса

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Колесниченко А. В. Конструирование энтропийной транспортной модели на основе статистики Тсаллиса // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2013. № 33. 23 с.
URL: http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2013-33

О р д е н а   Л е н и н а
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М.В. Келдыша
Р о с с и й с к о й   а к а д е м и и   н а у к

А.В. Колесниченко

Конструирование энтропийной транспортной модели на основе статистики Тсаллиса

Москва — 2013

Колесниченко А.В.

Конструирование энтропийной транспортной модели на основе статистики Тсаллиса

В работе предложен новый подход к построению транспортных энтропийных моделей распределения, базирующийся на формализме неэкстенсивной статистики. В качестве примера сконструирована простая энтропийная модель для одноцелевых поездок и для однородной группы автомобилей. Развитый подход позволяет моделировать более сложные коммуникационные системы (в том числе городские и региональные системы автотранспорта), которые описываются негиббсовыми распределениями. Фундаментом проведенного исследования являются неэкстенсивная энтропия Тсаллиса и степенные распределения, зависящие от действительного числа q, которое является мерой неаддитивности сложных социально-экономических систем.

Ключевые слова: энтропия Тсаллиса, неаддитивная статистика, энтропийные методы моделирования сложных систем, энтропийные транспортные модели.

Aleksandr Vladimirovich Kolesnichenko

Construction of entropy transport model based on statistics of Tsallis

The paper offers a new approach to transport entropy models of allocation based on the formalism of nonextensive statistics. As an example, we constructed an entropy simple model for the single-purpose trips and for a homogeneous group of cars. The developed approach allows to model more complex communication systems (including urban and regional systems for vehicles), which are not described by the Gibbs distribution. The basis of this research is nonextensive Tsallis entropy, and distribution, which are dependent on the actual number q, which is a measure of non-additive complex socio-economic systems.

Key words: entropy Tsallis, nonadditive statistics, entropy modeling of complex systems, entropy transport models.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ № 13-01-12046 офи-м.

1. Введение

Энтропийный подход к анализу статистических свойств случайно-детерминированных систем, базирующийся на классической статистике Больцмана-Гиббса-Шеннона, используется в настоящее время при исследовании самых различных по своей природе коммуникационных систем, в частности, городских, региональных, экономических и т.п. (см., например, [1-4]). При этом все подобные исследования основаны на предположении, что состояние устойчивого равновесия в системе достигается при максимуме характеризующей её энтропии Больцмана-Гиббса-Шеннона при выполнении дополнительных ограничений, учитывающих конечность ресурса, содержащегося в системе. Впервые концепция энтропии для определения наиболее вероятного распределения поездок между зонами (i, j) (при однородной цели поездок, заданных объёмах выездов, въездов и фиксированных полных затратах) была сформулирована в работе [1]. В настоящее время существует огромное количество различных по сложности энтропийных моделей транспорта, основанных на этом подходе [4, 5].

Важно иметь в виду, что все эти модели базируются на классической статистике Больцмана-Гиббса-Шеннона[1)], в основе которой лежит предположение о полном перемешивании потока «фазовых точек» в фазовом пространстве (гипотеза молекулярного хаоса). Это означает, что любая выделенная область фазового пространства приобретает по истечении времени $t \to \infty$ настолько хорошо развитую хаотическую структуру, что точки (элементы) сложной системы могут располагаться в любой её конечной части. Таким образом, фазовое пространство в классической статистике не содержит запрещённых состояний и обладает обычными свойствами непрерывности, гладкости, евклидовости. При этом стохастический процесс имеет марковский характер, а гипотеза перемешивания, дополненная предположением о бесконечно большом числе степеней свободы, приводит к каноническому (экспоненциальному) распределению вероятности состояний Больцмана-Гиббса-Шеннона (из которого, в частности, следует свойство аддитивности экстенсивных термодинамических переменных – энтропии, внутренней энергии и т.п.).

---

[1]) Понятие энтропии в статистической механике тесно связано с теорией информации. Имеется прямая связь распределения Больцмана-Гиббса с максимумом информационной энтропии Шеннона.

Вместе с тем система городского транспорта относится к числу коммуникационных систем, проявляющих в общем случае более сложное (неаддитивное) поведение. Для неё характерна относительно слабая хаотизация фазового пространства, при которой экспоненциально быстрое перемешивание приобретает другой (во многих случаях степенной) характер, причём её поведение зачастую определяется практически недостижимыми состояниями (в силу ограничения автомобилей по скоростям и по их местопребыванию, связанному с конкретной улично-дорожной сетью), которые характеризуются аномально малыми вероятностями заполнения, т.е. существенным свойством системы является произвольный характер фазового пространства. В результате этого случается, что достаточно малого изменения внешнего или внутреннего воздействия (например, наличия «узких мест», связанных с автоавариями, со снижением пропускной способности дороги в окрестности имеющегося на ней съезда и т.п.), чтобы коренным образом изменить поведение системы (в частности, чтобы возникла глобальная заторная ситуация). Кроме этого, реалистичной модели передвижения автотранспортных средств (АТС) присущи некоторые специфические свойства: априорная мотивация движения АТС, эффекты дальнодействия (так называемая «дальнозоркость» водителей либо наличие пунктов, поглощающих или порождающих транспортные потоки) и памяти (изначально существующая стратегия поведение АТС на дороге – поведенческие принципы Вардропа пользователей транспортной сети) – приводящие к нарушению гипотезы полного хаоса. Другими словами, транспортная система принадлежит к так называемым сложным (аномальным) системам [6], в которых в общем случае наблюдается сильное взаимодействие между отдельными её частями, немарковость динамического процесса, некоторая мотивация движения отдельных её элементов, что приводит, в конечном счёте, к нарушению гипотезы полного хаоса и тем самым к неаддитивности её термодинамических характеристик (в частности, энтропии). Именно в силу перечисленных причин её описание на основе классической статистики не является вполне адекватным, поскольку экспоненциальное распределение вероятности состояний верно только для простых систем, тогда как в сложных системах [6] вероятность спадает по степенному закону Парето [7].

Теорией, в рамках которой возможно адекватное моделирование перечисленных выше особенностей транспортной системы большого города, может стать интенсивно развиваемая в последнее время неаддитивная (неэкстенсивная) статистическая механика Тсаллиса [8,9], которая как раз и предназначена для описания коллективных свойств сложных систем (с длинной памятью, с сильными корреляциями между отдельными её частями и т.п.), допуская события, практически недостижимые в классических системах. Хорошо известно, что применение статистики Тсаллиса вполне оправдано при изучении эволюции сложных коммуникационных систем (сетей), состоящих из большого числа объектов (узлов), которые определённым образом взаимодействуют друг с другом, в частности, когда каждый узел сети может взаимодействовать не только с несколькими ближайшими соседями, но и со многими удалёнными узлами [6]. Хотя основы статистической теории неаддитивных систем были заложены К. Тсаллисом ещё 1988 году и последующие многочисленные исследования зарубежными авторами коллективного поведения термодинамически аномальных систем представляют значительный общетеоретический интерес, в отечественной литературе по неизвестным причинам этот раздел статистической механики пока не нашёл широкого распространения и для большинства исследователей остаётся все ещё экзотикой. Вместе с тем возникают многочисленные и требующие своего решения математические проблемы статистической теории сложных систем, среди которых важное место занимают транспортные системы.

В связи с этим в данной работе предложен новый подход к построению энтропийных транспортных моделей распределения, базирующийся на формализме неаддитивной статистики Тсаллиса. В качестве примера построена простая энтропийная модель для одноцелевых поездок и для однородной группы автомобилей. В дальнейшем предполагается сконструировать в рамках этого подхода более адекватные энтропийные модели, в которых транспортный поток с мотивацией обладает рядом специфических свойств, учитывающих, в частности, наличие корреспонденции между парой (i, j), расщепление маршрутов, расщепление типов коммуникаций, поведенческие гипотезы и т.п. Присутствие в энтропийной модели свободного параметра «деформации энтропии» q (который должен определяться в каждом конкретном случае эмпирическим путём из статистических или экспериментальных данных) позволяет в задачах поиска равновесного состояния транспортных потоков с балансовыми ограничениями (учитывающими конечность ресурса, содержащегося в системе) более адекватно и обоснованно моделировать конкретную дорожно-транспортную ситуацию.

2. Базовые элементы формализма деформированной статистики Тсаллиса

Рассмотрим вначале некоторые ключевые понятия статистики (термодинамики) Тсаллиса [10], которые будут использованы далее при конструировании обобщённой энтропийной транспортной модели. Деформированная статистическая механика сложных систем, подобно статистике простых физических систем, имеет дело с вероятностными закономерностями, характеризующими систему большого числа «частиц» (ведущих себя случайным образом элементов) и проявляющимися в «термодинамически» равновесных и неравновесных состояниях. Наиболее важное проявление подобных закономерностей в системе дискретных частиц состоит в их распределении по различным состояниям i, которое характеризуется фазовой плотностью распределения вероятностей p_i

($0 \le p_i < \infty$). В работе [8] К. Тсаллис предложил для сложных неаддитивных статистических систем обобщить классическую формулу Больцмана-Гиббса-Шеннона для энтропии

$$S_{БГШ} = -\mathrm{k}\sum_{i=1}^{W} p_i \ln p_i, \tag{1}$$

(где $\mathrm{k} > 0$ − постоянная Больцмана; W − статистический вес, определяющий число дискретных состояний i) определением

$$S_q = \frac{\mathrm{k}}{q-1}\sum_{i=1}^{W} p_i (1 - p_i^{q-1}), \qquad (\sum_{i=1}^{W} p_i = 1), \tag{2}$$

где энтропийный индекс (параметр деформации) q представляет собой вещественное число, принадлежащее области $q \in \mathcal{R}$. Такая деформация логарифмической функции энтропии позволяет объяснить важную особенность поведения сложных систем (аномальных систем с длинной памятью и/или дальнодействующими взаимодействиями), когда вероятность реализации p_i больших значений состояний i убывает (при $q > 1$) не экспоненциально быстро, а степенным образом. Благодаря этому статистика Тсаллиса может описывать события, практически не достижимые в простых системах, характеризуемых статистикой Больцмана-Гиббса-Шеннона. Легко показать, что в пределе $q \to 1$ (в пределе слабой связи) энтропия Тсаллиса (2) переходит в каноническую формулу (1). Действительно, в пределе $q \to 1$ имеем: $p_i^{q-1} = \exp\{(q-1)\ln p_i\} \to 1 + (q-1)\ln p_i$, и энтропия S_q сводится к форме

$$S_1 = \lim_{q\to 1}\frac{\mathrm{k}}{q-1}\sum_{i=1}^{W} p_i (1 - p_i^{q-1}) = -\mathrm{k}\sum_{i=1}^{W} p_i \ln p_i = S_{БГШ}. \tag{3}$$

Характерной особенностью энтропии Тсаллиса является её неаддитивный характер

$$S_q(\mathcal{A} \cup \mathcal{B}) = S_q(\mathcal{A}) + S_q(\mathcal{B}) + \frac{1-q}{\mathrm{k}} S_q(\mathcal{A}) S_q(\mathcal{B}), \tag{4}$$

где $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ − две независимые подсистемы, для которых полная вероятность составной системы $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ подчиняется условию мультипликативности. Его подстановка в формулу $\sum_i p_i^q = 1 + S_q (1-q)/k_B$ даёт связь (4). Таким образом, параметр $q -$ это *мера неаддитивности* системы, характеризующая целый класс различных статистик (термодинамик), соответствующих тем или иным статистически аномальным системам. Согласно гипотезе Тсаллиса этот параметр характеризует некоторые дополнительные степени свободы, присущие сложным системам, и должен определяться *a posteriori*. Величина q ничем не ограничена и может принимать значения от минус до плюс бесконечности, однако некоторые ограничения могут возникнуть в той или иной конкретной задаче; случаи $q<1$, $q=1$ и $q>1$ соответственно соотносятся с супераддитивностью, аддитивностью и субаддитивностью системы.

Будем далее считать, что физический статистический ансамбль неэкстенсивных систем реализуется двумя множествами: множеством всех его состояний и множеством случайных физических величин φ_i. Взвешенное значение $\mathbf{E}_q(\varphi) \equiv \langle \varphi \rangle_q$ величины φ_i в *статистике Курадо-Тсаллиса* [9], которой мы далее воспользуемся, определяется формулой[2)]

$$\langle \varphi \rangle_q = \sum_{i=1}^{W} \varphi_i p_i^q , \qquad (5)$$

которая при $q=1$ отвечает стандартному определению среднего значения. Для неслучайной постоянной величины C имеем равенство $\langle C \rangle_q = C \sum_i p_i^q$. При C=1 следует $\mathbf{E}_q(1) \neq 1$, что означает ненормированность данного взвешенного осреднения на единицу. Вместе с тем статистика Курадо-Тсаллиса, в рамках которой проводится данное исследование, содержит физическую температуру, благодаря чему не нарушается структура Лежандра термодинамической схемы теории сложных систем [9,10].

Заметим, что q-энтропия может быть представлена в канонической форме (1)

$$S_q = -\mathrm{k} \sum_{i=1}^{W} p_i^q \ln_q p_i , \qquad (6)$$

если использовать так называемый деформированный логарифм

[2)] В неаддитивной статистике Тсаллиса возможно осреднение по трём распределениям: p_i , p_i^q , $p_i^q / \sum_i p_i^q$ [10].

$$\ln_q x \equiv \frac{x^{1-q}-1}{1-q} \qquad x \in \mathcal{R}^+;\ q \in \mathcal{R}), \tag{7}$$

обратная функция к которому представляет собой *экспоненту Тсаллиса*

$$\exp_q x \equiv [1+(1-q)x]_+^{\frac{1}{1-q}} \qquad (x \in \mathcal{R};\ q \in \mathcal{R}). \tag{8}$$

Здесь выражение, стоящее в квадратных скобках, либо положительно, либо равно нулю, $[y]_+ \equiv \max(y,0)$; кроме этого, справедливо обычное соотношение $\exp_q \ln_q x = \ln_q \exp_q x = x$. Тогда энтропия Тсаллиса S_q, будучи мерой беспорядка сложной статистической системы, представляет среднее по статистическому ансамблю микроскопической q-энтропии

$$s_q(p_i) \equiv k_B(1-p_i^{q-1})/(1-q) = -k_B \ln_q p_i:$$

$$S_q \equiv \langle s_q(p_i)\rangle = \sum_{i=1}^{W} p_i^q s_q(p_i) = -\mathrm{k}\sum_{i=1}^{W} p_i^q \ln_q p_i = -\mathrm{k}\langle \ln_q p_i\rangle_q. \tag{9}$$

Таким образом, неаддитивная статистика Тсаллиса основывается на определении деформированных логарифмической и экспоненциальной функций равенствами (7) и (8), которые при параметре деформации $q \to 1$ приводят к обычным функциям:

$$\begin{gathered}\exp_1(x) \equiv \lim_{q\to 1+0} \exp_q(x) = \lim_{q\to 1-0} \exp_q(x) = \exp(x) \qquad (\forall x),\\ \ln_1 x \equiv \lim_{q\to 1+0} \ln_q x = \lim_{q\to 1-0} \ln_q x = \ln x \qquad (\forall x).\end{gathered} \tag{10}$$

Определяя q-деформированные произведение и частное положительных величин x, y

$$\begin{gathered}x \otimes_q y \equiv [x^{1-q}+y^{1-q}-1]_+^{\frac{1}{1-q}}, \qquad x \oslash_q y \equiv [x^{1-q}-y^{1-q}+1]_+^{\frac{1}{1-q}};\\ x,y>0,\end{gathered} \tag{11}$$

легко убедиться, что они удовлетворяют обычным свойствам

$$\exp_q(x+y)=\exp_q(x)\otimes_q \exp_q(y),$$
$$\exp_q(x-y)=\exp_q(x)\oslash_q \exp_q(y). \qquad (12)$$

Кроме этих формул, мы далее будем использовать следующие соотношения [11,12]

$$d(\ln_q x)/dx = 1/x^q, \qquad d(\exp_q x)/dx = (\exp_q x)^q$$
$$1/\exp_q x = \exp_{2-q}(-x), \quad -\ln_{2-q}(1/x) = \ln_q x \quad (\forall x;\forall q). \qquad (13)$$

Экстремум энтропии и равновесные состояния. В данной работе мы будем использовать основанный на теории информации (см., например, [13]) наиболее простой способ определения равновесного состояния $(p_i)^{eq}$, которое не меняется с течением времени. Проиллюстрируем его на физической дискретной системе, элементы которой обладают запасом внутренней энергии ε_i. Равновесная функция распределения для сложных систем в статистике Тсаллиса может быть определена, как и в классическом случае, из экстремума (максимума − при $q>1$ и минимума − при $q<1$) энтропии S_q при выполнении дополнительных условий: постоянства нормировки распределения вероятности

$$\sum_{i=1}^{W} p_i = 1 \qquad (14)$$

и постоянства полной энергии системы

$$\mathscr{E}_q = \langle \varepsilon_i \rangle = \sum_{i=1}^{W} \varepsilon_i p_i^q = const \qquad (15)$$

(здесь ε_i − энергия i-го состояния). Следуя *методу множителей Лагранжа*, найдём безусловный экстремум лагранжиана

$$\mathscr{L}_q(p,\alpha,\beta) \equiv -\mathrm{k}\langle \ln_q p_i \rangle - \alpha\Big(\sum_{i=1}^{W} p_i - 1\Big) - \beta\Big(\sum_{i=1}^{W} \varepsilon_i p_i^q - \mathscr{E}_q\Big),$$

где α и β − множители Лагранжа, соответствующие ограничениям (17) и (18). В соответствии с теоремой Лагранжа вероятное распределение p_i, «экстремизирующее» энтропию Тсаллиса $S_q(p) = -\mathrm{k}\langle \ln_q p_i \rangle_q$ при ограничениях (17) и (18), определяется из решения системы уравнений

$$\frac{\partial}{\partial p_i}\mathscr{L}_q(p,\alpha,\beta) = \frac{q k_B}{1-q} p_i^{q-1} - \left[\frac{k_B}{1-q} + \alpha + \beta\,\varepsilon_i\, q\, p_i^{q-1}\right] = 0, \qquad (i = 1,2,\ldots,W).$$

Отсюда следует *деформированное распределение Гиббса* с параметрами q и β

$$p_i^{(eq)} = Z_q^{-1}(\beta)\left[1 - \mathrm{k}^{-1}(1-q)\beta\varepsilon_i\right]^{1/(1-q)} \equiv Z_q^{-1}(\beta)\exp_q\{-\beta\varepsilon_i/\mathrm{k}\}, \quad (16)$$

где

$$Z_q(\beta) \equiv \left(\frac{1}{q} + \frac{q-1}{\mathrm{k}q}\alpha\right)^{1/(1-q)} = \sum_{i=1}^{W}\exp_q\left\{-\frac{\beta\varepsilon_i}{\mathrm{k}}\right\} \quad (17)$$

– обобщённая статистическая сумма, определяемая из условия нормировки (14); постоянные лагранжевы множители α (так называемая активность) и β (обратная эффективная температура) определяются из системы уравнений, получаемых подстановкой (16) в (14) и (15).

При условии $1 - \mathrm{k}^{-1}(1-q)\beta\varepsilon_i > 0$ и $q = 1$ из (16) и (17) следует каноническое распределение Гиббса

$$p_i^{(eq)} = Z^{-1}(T)\exp\{-\varepsilon_i/\mathrm{k}T\}, \qquad Z(T) = \sum_{i=1}^{W}\exp\{-\varepsilon_i/\mathrm{k}T\}$$

для аддитивных систем, находящихся в термостате с абсолютной температурой $T \equiv \beta^{-1}$. Легко видеть, что поведение распределения (20) при больших значениях энергии отличается от канонического: в частности, при $q > 1$ имеет место степенное, а не экспоненциальное падение с ростом энергии.

Если подставить распределение (16) в (2), то получим экстремальное (равновесное) значение q-энтропии

$$S_q = \frac{\mathrm{k}}{q-1}\left[1 - Z_q^{1-q}\sum_{i=1}^{W}\frac{p_i}{1 - \mathrm{k}^{-1}(1-q)\beta\varepsilon_i}\right] =$$

$$= \beta\left[\frac{\mathrm{k}(1 - Z_q^{1-q})}{\beta(q-1)} + Z_q^{1-q}\sum_{i=1}^{W}\frac{p_i\varepsilon_i}{1 - \mathrm{k}^{-1}(1-q)\beta\varepsilon_i}\right] =$$

$$= \beta\left[\frac{\mathrm{k}(1-Z_q^{1-q})}{\beta(q-1)} + \sum_{i=1}^{W} p_i^q \varepsilon_i\right] = \beta\left[E_q - \frac{\mathrm{k}(Z_q^{1-q}-1)}{\beta(q-1)}\right] \equiv \beta(\mathscr{E}_q - \mathscr{F}_q), \quad (18)$$

где

$$\mathscr{F}_q \equiv \frac{\mathrm{k}}{\beta(q-1)}(Z_q^{1-q}-1) = \frac{1}{\beta}\left(\frac{\mathrm{k}}{q(q-1)} - \frac{\alpha}{q} - \frac{\mathrm{k}}{q-1}\right) \quad (19)$$

– *деформированная свободная энергия Гельмгольца*, которая, как легко проверить, при $q=1$ совпадает со свободной энергией $F=-\mathrm{k}T\ln Z(T)$ аддитивной физической системы. Здесь у всех термодинамических величин мы отбросили верхний индекс «eq». С учетом выражения $Z_q(\beta) = \left[1-\mathrm{k}^{-1}\beta(1-q)\mathscr{F}_q\right]^{1/1-q}$, вытекающего из (19), распределение (16) может быть переписано в эквивалентном виде

$$p_i^{(eq)} = \exp_q\left\{-\frac{\varepsilon_i}{\mathrm{k}T_{ef}}\right\} / \exp_q\left\{-\frac{\mathscr{F}_q}{\mathrm{k}T_{ef}}\right\} = \left(\frac{1-(1-q)\varepsilon_i/\mathrm{k}T_{ef}}{1-(1-q)\mathscr{F}_q/\mathrm{k}T_{ef}}\right)^{1/1-q}, \quad (20)$$

где $T_{ef} \equiv \beta^{-1}$ – так называемая эффективная температура экстенсивной системы, определяющая интенсивность беспорядочного движения её элементов. Из (18) с учетом (19) могут быть получены, в частности, известные дифференциальные соотношения равновесной термодинамики в замкнутых системах:

$$\mathscr{E}_q - T_{ef}S_q = \mathscr{F}_q, \quad 1/T_{ef} = \partial S_q/\partial\mathscr{E}_q, \quad \mathscr{E}_q = \mathscr{F}_q - T_{ef}\partial\mathscr{F}_q/\partial T_{ef}\,. \quad (21)$$

3. Простая двухточечная транспортная модель

Напомним теперь способ энтропийного моделирования состояния стохастической системы городского автотранспорта (исходя из классической статистики Больцмана-Гиббса-Шеннона) на примере простейшей модели распределения поездок между различными пунктами (зонами) [3,4]. Это позволит нам ввести необходимые для дальнейшего исследования характеристики так называемой коммуникационной системы, включающей большое число однотипных элементов (в частности, автомобилей), в которой переход из одного состояния в другое осуществляется их перемещением по определённым маршрутам (коммуникациям). Если разбить городскую территорию некоторым подходящим способом на пронумерованные небольшие зоны, то направление этих коммуникаций определяется парой индексов (i, j), первый из которых (i) указывает на номер зоны i $(i = 1,\ldots,n)$ проживания населения с фиксированным числом автомобилей (будем в дальнейшем называть подобные зоны истоками), а второй (j) − на номер зоны j $(j = 1,\ldots,m)$ с фиксированным числом рабочих мест (стоки), в которую направлен некоторый поток автотранспорта. Далее будем предполагать, что все истоки и стоки связаны между собой коммуникациями, причём такая связь для каждой пары (i, j) единственная, и для неё известны некоторые характеристики ε_{ij} (так называемые *обобщённые затраты*, в качестве которых могут выступать стоимости перевозок, время передвижения, географическое расстояние и т.д.). В стохастической системе каждый её элемент «случайно избирает» ту или иную пару «исток-сток». Далее мы, для простоты, будем исходить из предположения равновероятности реализации выбора элементом системы той или иной пары (i, j). В этом случае транспортная задача заключается в оценке наиболее вероятного распределения поездок (потока) между пунктами i и j. Распределением в подобной системе называют «матрицу потоков транспорта» $X = \{x_{ij}\}$ из истоков i в стоки j, порядок которой $n\,m$. Заметим, что величины $x_{ij} > 0$ и должны удовлетворять следующим ограничениям:

$$\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{m} x_{ij} = q_i\,, \qquad (i = 1,\ldots,n), \tag{22}$$

где $Q_i \equiv Nq_i$ − заданный «объем» источника, измеренный в элементах системы (например, полное число отправлений автомобилей из зоны i к местам работы водителей); $\sum_{ij} x_{ij} = N$ − общее число перемещающихся элементов в системе (в нашем случае полное число индивидуумов, живущих в зонах i и работающих в зонах j);

$$\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = r_j\,, \qquad (j = 1,\ldots,m), \tag{23}$$

где $R_j \equiv Nr_j$ − «объем» стока (например, полное число рабочих мест в зоне j). Кроме этого, необходимо ввести дополнительное к (22) и (23) ограничение на матрицу потоков

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} x_{ij}\varepsilon_{ij} = N\langle\varepsilon\rangle, \tag{24}$$

где $\langle\varepsilon\rangle-$ средние обобщённые затраты на передвижение к местам работы; $N\langle\varepsilon\rangle-$ полные транспортные затраты.

Основная гипотеза, используемая при анализе транспортной системы, состоит в том, что наиболее вероятным (устойчивым) распределением будет матрица потоков $X=\{x_{ij}\}$, максимизирующая логарифм количества состояний системы $W(\{x_{ij}\}) = N!/\prod_{ij} x_{ij}!$, соответствующих матрице $\{x_{ij}\}$ при ограничениях (22)-(24) [3]. Таким образом, при использовании формализма теории математического программирования рассматриваемая транспортная модель сводится к следующей задаче: найти

$$\max_{x_{ij}} \ln W(\{x_{ij}\}), \qquad \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} x_{ij} = N\ , \qquad x_{ij} > 0\,, \tag{25}$$

при ограничениях

$$\sum_{j=1}^{m} x_{ij} = Ns_i\,, \quad ^{(1)} \quad \sum_{i=1}^{n} x_{ij} = Nr_j\,, \quad ^{(2)} \quad \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} x_{ij}\varepsilon_{ij} = N\langle\varepsilon\rangle. \quad ^{(3)} \tag{26}$$

Равновесная матрица потоков, решающая эту задачу, имеет вид [3]

$$(x_{ij})^{eq} = \alpha_i\beta_j s_i r_j \exp(-\beta\varepsilon_{ij}), \tag{27}$$

где коэффициенты α_i и β_j (*балансирующие множители*), связанные соответственно с зонами отправления и прибытия, определяются из следующих уравнений

$$\alpha_i \equiv \frac{\exp(-1-\lambda_i^{(1)})}{s_i} = N\left[\sum_{j=1}^{m}\beta_j r_j \exp(-\beta\varepsilon_{ij})\right]^{-1}, \tag{28}$$

$$\beta_j \equiv \frac{\exp(-\lambda_j^{(2)})}{r_j} = N\left[\sum_{i=1}^{n}\alpha_i s_i \exp(-\beta\varepsilon_{ij})\right]^{-1}. \tag{29}$$

Эти уравнения решаются итерационными методами [14, 15], и можно легко убедиться в том, что они гарантируют, что величины (27) удовлетворяют ограничениям (22) и (23). Здесь $\lambda_i^{(1)}$, $\lambda_j^{(2)}$ – наборы множителей Лагранжа, связанные с балансовыми ограничениями (26) для источников и для стоков; β – множитель Лагранжа, соответствующий ограничению по затратам (26$^{(3)}$). В случае если величина $\langle\varepsilon\rangle$ известна *a priori*, то уравнение (26$^{(3)}$) может быть численно решено относительно β, причём простой анализ уравнения (26$^{(3)}$) показывает, что при росте $\langle\varepsilon\rangle$ увеличатся обобщённые затраты на передвижение ε_{ij}, в то время как параметр β уменьшится. Но так как величина $\langle\varepsilon\rangle$ обычно неизвестна, то на практике параметр β определяют обычными методами калибровки.

Следует заметить, что результат (27) получен при использовании *формулы Стирлинга* $\ln x_{ij}! = x_{ij}\ln x_{ij} - x_{ij}$ (справедливой при больших x_{ij}) для логарифма количества состояний системы

$$\begin{aligned} \ln \mathrm{W}(\{\mathrm{x}_{\mathrm{ij}}\}) &= \ln \mathrm{N}! + \mathrm{N} - \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} \mathrm{x}_{\mathrm{ij}} \ln \mathrm{x}_{\mathrm{ij}} = \\ &= (\ln \mathrm{N}! + \mathrm{N} - \mathrm{N}\ln \mathrm{N}) - N\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} \mathrm{p}_{\mathrm{ij}} \ln \mathrm{p}_{\mathrm{ij}}, \end{aligned} \tag{30}$$

где $p_{ij} \equiv x_{ij}/N$. Величины p_{ij} могут интерпретироваться в качестве распределения вероятностей, а величина

$$S = -\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} p_{ij} \ln p_{ij} \tag{31}$$

может быть использована в качестве подходящей меры энтропии вероятностного распределения (меры неопределённости) для поиска равновесного состояния транспортной системы [3]. Поскольку S и $\ln W$ линейно зависимы, то максимизация энтропии S при ограничениях (26) (записанных в виде условий для p_{ij}) приводит к нахождению наиболее вероятной матрицы потоков $\{x_{ij}\}^{eq}$.

Формализм получения оценки (27) на основе принципа максимизации энтропии (31) был проиллюстрирован выше, при получении соотношения (20) для обобщённого равновесного распределения Больцмана в аномальной системе. Важно иметь в виду, что использование энтропии S для поиска $(p_{ij})^{eq}$ является более предпочтительным, поскольку при этом не используется приближенная формула Стирлинга и оценка p_{ij} по максимуму энтропии S даёт, по меньшей мере, возможность последовательно анализировать сложные социальные системы [3]. Кроме этого, процедура максимизации энтропии имеет преимущество перед обычным статистическим анализом при построении динамических городских и региональных моделей.

4. Транспортная модель, основанная на максимизации деформированной энтропии Тсаллиса

Итак, мы рассматриваем социально-экономическую систему, включающую большое число однотипных элементов (автомобилей), в которых переход из одного состояния в другое осуществляется перемещением элементов из n групп (истоки) начального состояния в m групп (стоки) конечного состояния. Предположим, что все истоки i $(i=1,\dots,n)$ и стоки j $(j=1,\dots,m)$ связаны между собой коммуникациями. Для простоты будем далее считать, что такая связь для каждой пары (i, j) единственная и для неё известна характеристика коммуникации ε_{ij}. Построенные модели должны определять наиболее вероятное состояние системы. Основная гипотеза, используемая в энтропийных коммуникационных моделях, состоит в том, что устойчивое равновесное состояние $(p_{ij})^{eq}$ соответствует максимизации энтропии системы. Для того чтобы охватить при моделировании коммуникационной системы (в частности, системы городского транспорта) большое число неуправляемых элементов, необходимо деформировать энтропию Больцмана-Гиббса-Шеннона (31) таким образом, чтобы она давала характерный для неё степенной *закон Парето* распределения вероятности состояний [6]. Далее мы будем исходить из следующего представления энтропии Тсаллиса в двухиндексном случае:

$$S_q \equiv \mathrm{k}\frac{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} p_{ij}(1-p_{ij}^{q-1})}{q-1} = -\mathrm{k}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} p_{ij}^{q}\ln_q p_{ij} = -\mathrm{k}\langle \ln_q p_{ij}\rangle_q, \tag{32}$$

где p_{ij} – распределение вероятностей. Тогда для поиска равновесного (устойчивого) состояния сложной системы следует решать следующую задачу: найти распределение p_{ij}, обеспечивающее

$$\max_{p_{ij}}\left(-\mathrm{k}\langle \ln_q p_{ij}\rangle_q\right), \qquad \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} p_{ij} = 1, \quad p_{ij} \ge 0, \quad i \in S, \quad j \in R \tag{33}$$

при ограничениях

$$\sum_{i=1}^{n} p_{ij} = r_j, \quad \sum_{j=1}^{m} p_{ij} = s_i, \quad \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} p_{ij}^{q}\varepsilon_{ij} = \mathscr{E}_q, \tag{34}$$

где величины ε_{ij} служат мерой сопротивления передвижению между i и j (в качестве которой могут выступать географическое расстояние, время передвижения, затраты на передвижение, или, что часто бывает более эффективным, взвешенная комбинация подобных факторов). Очевидно, для совместности системы суммарный объем выезжающих автомобилей должен быть равен суммарному объёму въезжающих; тогда

$$\sum_{i=1}^{n} s_i = \sum_{j=1}^{m} r_j = 1. \tag{35}$$

Для получения матрицы $\{p_{ij}\}$, максимизирующей q-энтропию $S_q = -\mathrm{k}\langle \ln_q p_{ij}\rangle_q$ при ограничениях (34), следует максимизировать функционал

$$\mathscr{L}_q(p,\lambda,\beta) \equiv -\mathrm{k}\langle \ln_q p_{ij}\rangle_q +$$

$$\sum_{i=1}^{n}\lambda_i^{(1)}\left(s_i - \sum_{j=1}^{m} p_{ij}\right) + \sum_{j=1}^{m}\lambda_j^{(2)}\left(r_j - \sum_{i=1}^{n} p_{ij}\right) + \beta\left(\mathscr{E}_q - \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\varepsilon_{ij}\, p_{ij}^{q}\right), \tag{36}$$

где $\lambda_i^{(1)}$, $\lambda_j^{(2)}$, β, − наборы множители Лагранжа. Значения p_{ij}, которые доставляют максимум $\mathscr{L}_q(p,\lambda,\beta)$ и, следовательно, являются наиболее вероятным распределением, представляют собой решение системы уравнений

$$\frac{\partial}{\partial p_{ij}}\mathscr{L}_q(p,\lambda,\beta) = -\frac{q\,\mathrm{k}}{q-1} p_{ij}^{q-1} + \frac{\mathrm{k}}{q-1} - \lambda_i^{(1)} - \lambda_j^{(2)} - \beta\, q\,\varepsilon_{ij}\, p_{ij}^{q-1} = 0 \tag{37}$$

$$i = 1,2,\ldots,n; \qquad j = 1,2,\ldots,m.$$

Отсюда следует

$$\left(\frac{1}{q}\right)^{\frac{1}{1-q}}\left(1+(1-q)\frac{1}{\mathrm{k}}(\lambda_i^{(1)}+\lambda_j^{(2)})\right)^{\frac{1}{1-q}}(p_{ij})^{eq} = \left(1+(1-q)(-\mathrm{k}^{-1}\beta\,\varepsilon_{ij})\right)^{\frac{1}{1-q}},$$

или, при использовании определения (8) для экспоненты Тсаллиса,

$$\left(\frac{1}{q}\right)^{\frac{1}{1-q}} \exp_q\left[\frac{1}{\mathrm{k}}(\lambda_i^{(1)}+\lambda_j^{(2)})\right](p_{ij})^{eq} = \exp_q(-\mathrm{k}^{-1}\beta\,\varepsilon_{ij})\,. \tag{38}$$

Выражение (38), с учетом (16), может быть переписано в виде

$$(p_{ij})^{eq} = Z_{ij}^{-1}\exp_q(-\mathrm{k}^{-1}\beta\,\varepsilon_{ij})\,, \tag{39}$$

где

$$Z_{ij} \equiv \left(\frac{1}{q}\right)^{\frac{1}{1-q}}\left(1+(1-q)\frac{1}{\mathrm{k}}(\lambda_i^{(1)}+\lambda_j^{(2)})\right)^{\frac{1}{1-q}} \equiv \left(\frac{1}{q}\right)^{\frac{1}{1-q}}\exp_q\left[\frac{1}{\mathrm{k}}(\lambda_i^{(1)}+\lambda_j^{(2)})\right]. \tag{40}$$

В случае $q>0$, условие $p_{ij}\ge 0$ неотрицательности распределения вероятностей выполняется автоматически. Используя теперь понятие q-деформированного произведения двух положительных величин и свойство $1/\exp_q x = \exp_{2-q}(-x)$ деформированной экспоненты

$$\exp_{2\text{-}q}\left[-(\lambda_i^{(1)}+\lambda_j^{(2)})/\mathrm{k}\right] = \exp_{2\text{-}q}(-\lambda_i^{(1)}/\mathrm{k})\otimes_{2\text{-}q}\exp_{2\text{-}q}(-\lambda_j^{(2)}/\mathrm{k})\,,$$

перепишем выражение (39) для равновесного распределения вероятности в виде

$$(p_{ij})^{eq} = q^{\frac{1}{1-q}}\exp_{2\text{-}q}\left[-(\lambda_i^{(1)}+\lambda_j^{(2)})/\mathrm{k}\right]\exp_q(-\mathrm{k}^{-1}\beta\,\varepsilon_{ij}) =$$

$$= q^{\frac{1}{1-q}}\left[\exp_{2\text{-}q}(-\lambda_i^{(1)}/\mathrm{k})\otimes_{2\text{-}q}\exp_{2\text{-}q}(-\lambda_j^{(2)}/\mathrm{k})\right]\exp_q(-\mathrm{k}^{-1}\beta\,\varepsilon_{ij})\,. \tag{41}$$

Подставляя (41) в (34), получим уравнения для определения коэффициентов $\lambda_i^{(1)}$ и $\lambda_j^{(2)}$

$$r_j = q^{\frac{1}{1-q}}\sum_{i=1}^{n}\left[\exp_{2\text{-}q}(-\lambda_j^{(2)}/\mathrm{k})\otimes_{2\text{-}q}\exp_{2\text{-}q}(-\lambda_i^{(1)}/\mathrm{k})\right]\exp_q(-\mathrm{k}^{-1}\beta\,\varepsilon_{ij})\,, \tag{42}$$

$$s_i = q^{\frac{1}{1-q}} \sum_{j=1}^{m} \left[\exp_{2\text{-}q}(-\lambda_i^{(1)}/\mathrm{k}) \otimes_{2\text{-}q} \exp_{2\text{-}q}(-\lambda_j^{(2)}/\mathrm{k}) \right] \exp_q(-\mathrm{k}^{-1}\beta\, \varepsilon_{ij}). \quad (43)$$

Для того чтобы представить окончательный результат в традиционном виде (см. формулы (28)-(29)), принятом при моделировании распределения поездок, введём калибровочные коэффициенты

$$\alpha_i(q) = \frac{\exp_{2\text{-}q}(-\lambda_i^{(1)}/\mathrm{k})}{s_i} \equiv \frac{1}{s_i}\left[1-\mathrm{k}^{-1}(q-1)\lambda_i^{(1)}\right]^{\frac{1}{q-1}} \quad (44)$$

и

$$\beta_j(q) = \frac{\exp_{2\text{-}q}(-\lambda_j^{(2)}/\mathrm{k})}{r_j} \equiv \frac{1}{r_j}\left[1-\mathrm{k}^{-1}(q-1)\lambda_j^{(2)}\right]^{\frac{1}{q-1}}. \quad (45)$$

Тогда выражение для равновесного распределения вероятности принимает вид (ср. с выражением (27))

$$(p_{ij})^{eq} = q^{\frac{1}{1-q}} r_j s_i \left[\alpha_i \otimes_{2\text{-}q} \beta_j\right] \exp_q(-\mathrm{k}^{-1}\beta\, \varepsilon_{ij}). \quad (46)$$

Здесь

$$\alpha_i \otimes_q \beta_j \equiv [\alpha_i^{1-q} + \beta_j^{1-q} - 1]_+^{\frac{1}{1-q}},$$

$$\exp_q(-\mathrm{k}^{-1}\beta\, \varepsilon_{ij}) \equiv \left(1-\mathrm{k}^{-1}(1-q)\beta\, \varepsilon_{ij}\right)_+^{\frac{1}{1-q}}. \quad (47)$$

Для определения калибровочных коэффициентов α_i и β_j имеем, в соответствии с (42) и (43), следующие уравнения

$$q^{\frac{1}{q-1}} = \sum_{k=1}^{n} \left[\beta_j(q) \otimes_{2\text{-}q} \alpha_k(q)\right] s_k \exp_q(-\mathrm{k}^{-1}\beta\, \varepsilon_{kj}), \quad (j = 1,\ldots,m); \quad (48)$$

$$q^{\frac{1}{q-1}} = \sum_{l=1}^{m} \left[\alpha_i(q) \otimes_{2\text{-}q} \beta_l(q) \right] r_l \exp_q(-\mathrm{k}^{-1} \beta\, \varepsilon_{ij}), \quad (i = 1,\ldots,n). \tag{49}$$

Численные значения этих коэффициентов, как и в традиционном случае, должны определяться по специальной процедуре, аналогичной [5,14]. Поскольку величина $\mathscr{E}_q$, как правило, не известна *a priori*, то лагранжевый множитель β может определяться обычными методами калибровки.

Выведем теперь ещё несколько полезных соотношений. Если подставить распределение (39) в (32), то получим экстремальное (равновесное) значение q-энтропии

$$S_q = \frac{\mathrm{k}}{q-1} \left\{ 1 - \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \frac{p_{ij} Z_{ij}^{1-q}}{1 - \mathrm{k}^{-1}(1-q)\beta\, \varepsilon_{ij}} \right\} =$$

$$= \beta \left\{ \frac{\mathrm{k}}{\beta(q-1)} \left(1 - \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} p_{ij} Z_{ij}^{1-q} \right) + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \frac{p_{ij} Z_{ij}^{1-q}\, \varepsilon_{ij}}{1 - \mathrm{k}^{-1}(1-q)\beta\, \varepsilon_{ij}} \right\} =$$

$$= \beta \left\{ \frac{\mathrm{k}}{\beta(q-1)} \left(1 - \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} p_{ij} Z_{ij}^{1-q} \right) + \mathscr{E}_q \right\} = \beta(\mathscr{E}_q - \mathscr{F}_q), \tag{50}$$

где

$$\mathscr{F}_q \equiv \frac{\mathrm{k}}{\beta(q-1)} \left(\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} p_{ij} Z_{ij}^{1-q} - 1 \right) \tag{51}$$

– деформированная свободная энергия Гельмгольца для неаддитивной транспортной системы. Здесь и ниже у всех термодинамических величин был отброшен верхний индекс «*eq*». Из (50) с учетом (51) могут быть получены известные дифференциальные соотношения равновесной термодинамики

$$\mathscr{F}_q = \mathscr{E}_q - S_q/\beta, \quad \partial S_q / \partial \mathscr{E}_q = \beta, \quad \partial(\beta \mathscr{F}_q)/\partial\beta = \mathscr{E}_q\,. \tag{52}$$

С учетом (39), (40), соотношение (51) может быть переписано в следующих эквивалентных формах:

$$\mathscr{F}_q(\lambda^{(1)},\lambda^{(2)},\beta) \equiv \frac{\mathrm{k}}{\beta(q-1)}\left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} Z_{ij}^{-q}\exp_q(-\beta\ \varepsilon_{ij}/\mathrm{k})-1\right)=$$

$$=\frac{1}{\beta q}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} p_{ij}(\lambda_i^{(1)}+\lambda_j^{(2)}-\mathrm{k})=\frac{1}{\beta q}\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i^{(1)}s_i+\sum_{j=1}^{m}\lambda_j^{(2)}r_j-\mathrm{k}\right). \quad (53)$$

Используя (53), получаем

$$\frac{\partial(\beta\mathscr{F}_q)}{\partial\lambda_i^{(1)}}=\frac{1}{q}s_i\ , \qquad \frac{\partial(\beta\mathscr{F}_q)}{\partial\lambda_j^{(2)}}=\frac{1}{q}r_j\ . \quad (54)$$

Так как левые части равенств (54) заданы, а свободная энергия $\mathscr{F}_q(\lambda^{(1)},\lambda^{(2)},\beta)$ определяется формулой (53), т.е. особым образом зависит от $\lambda_i^{(1)}$ и $\lambda_j^{(2)}$, то соотношения (54) можно рассматривать как точную форму системы уравнений для определения лагранжевых коэффициентов λ.

Наконец, найдём вторую вариацию функционала (36)

$$\delta^2\mathscr{L}=-\mathrm{k}\,q\left\{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\left[1-(1-q)\ \beta\varepsilon_{ij}\right]p_{ij}^{q-2}\delta^2 p_{ij}\right\}. \quad (55)$$

Из (55) следует, что экстремум соответствует максимуму и минимуму рассматриваемого функционала соответственно при $q>0$ ($\delta^2\mathscr{L}<0$) и $q<0$ ($\delta^2\mathscr{L}>0$). Таким образом, распределение (39) максимизирует или минимизирует энтропию Тсаллиса (32).

Заключение

Энтропийный подход к анализу статистических свойств сложных систем, базирующийся на статистике Гиббса-Больцмана, используется в настоящее время при исследовании самых различных по своей природе случайно-детерминированных систем, в частности, городских, региональных, экономических и т.п. [3-5,16]. При этом подобные исследования основаны на гипотезе о том, что состояние устойчивого равновесного состояния в системе достигается при максимуме характеризующей её классической энтропии

Больцмана-Гиббса-Шеннона при выполнении некоторых дополнительных условий, учитывающих конечность ресурса, содержащегося в системе. Впервые концепция энтропии для определения наиболее вероятного распределения поездок между зонами (i,j) (при однородной цели поездок, при заданных объёмах выездов, въездов и фиксированных полных затратах) была сформулирована в работе [2]. В настоящее время существует огромное количество различных по сложности моделей, основанных на этом подходе.

Вместе с тем в основе статистики Гиббса лежит предположение о полном перемешивании потока «фазовых точек» в фазовом пространстве (гипотеза молекулярного хаоса) [17]. Это означает, что любая выделенная область фазового пространства приобретает по истечении времени $t \to \infty$ настолько хорошо развитую хаотическую структуру, что точки (элементы) сложной системы могут располагаться в любой её конечной части. При этом стохастический процесс имеет марковский характер, а гипотеза перемешивания, дополненная предположением о бесконечном числе степеней свободы, приводит к каноническому (экспоненциальному) распределению вероятности состояний Больцмана-Гиббса-Шеннона, из которого следует свойство аддитивности экстенсивных термодинамических переменных, в частности, энтропии. Вместе с тем система городского автотранспорта относится, по-видимому, к числу систем, проявляющих более сложное (неэкстпенсивное) поведение. Для этой системы характерна относительно слабая хаотизация фазового пространства, при которой экспоненциально быстрое перемешивание приобретает другой (во многих случаях степенной) характер, причём её поведение зачастую определяется практически недостижимыми состояниями. Другими словами, транспортная система принадлежит к так называемым сложным (аномальным) системам [6], в которых наблюдается сильное взаимодействие между отдельными её частями, немарковость динамического процесса, что приводит, в конечном счёте, к нарушению аддитивности энтропии. Именно в силу перечисленных причин её моделирование на основе классической энтропии Больцмана-Гиббса-Шеннона не является вполне адекватным.

В связи с этим в работе рассмотрен подход к построению транспортных моделей, базирующийся на формализме неаддитивной статистики Тсаллиса [18,19], которая как раз и предназначена для описания коллективного поведения подобного рода сложных коммуникационных систем. Показано, что наиболее вероятное распределение поездок, моделируемое в рамках деформированной статистики Тсаллиса, определяется обобщёнными соотношениями, почти такими же по структуре, как и в случае транспортной модели [3,4], основанной на классической статистике Больцмана-Гиббса-Шеннона. В пределе $q \to 1$ эти соотношения полностью эквивалентны традиционным. Вместе с тем развитый подход позволяет сконструировать энтропийные модели более сложных транспортных систем, для которых характерна относительно слабая хаотизация фазового пространства и которым присуще не экспоненциальное, а степенное поведение, известное как закон Парето (закон, определяющий степенное распределение вероятности реализаций состояния системы). Для подобных аномальных систем имеет место сильное взаимодействие между отдельными их частями, немарковость динамических процессов, эредитарность (запаздывающая причинно-следственная связь), что приводит в конечном счёте к нарушению гипотезы полного перемешивания [6]. Хотя в работе построена только простая модель для одноцелевых поездок и для однородной группы автомобилей, предложенный в ней метод может быть использован для конструирования более адекватных энтропийных транспортных моделей распределения, в которых учитывается ряд дополнительных специфических факторов, таких как наличие корреспонденции между парой (i, j), расщепление маршрутов, расщепление типов коммуникаций, поведенческие гипотезы и т.д.

Библиографический список

1. Wilson A.J. Entropy maximizing models in the theory of trip distributions, mode split and route split// J. Transp. Econ. Policy. 1969. V. 3. P. 108-126.

2. Wilson A.J. A statistical theory of spatial distribution models// Transp. Res. 1967. V.1. P. 253-269.

3. Вильсон А. Дж. Энтропийные методы моделирования сложных систем. М.: Наука. 1978. 247 с.

4. Введение в математическое моделирование транспортных потоков: Учебное пособие / А.В. Гасников и др. Под ред. А.В. Гасникова. М.: МЦНМО. 2012. 376 с.

5. Fang S.C., Rajasekera J.R., Tsao H.-S.J. Entropy optimization and mathematical programming. Kluwer Academic Publisher. 1997.

6. Олемской А.И. Синергетика сложных систем: Феноменология и статистическая теория. М.: КРАСАНД, 2009. 384 с.

7. Reed W. J. On Pareto's law and the determinants of Pareto exponents// J. Income Distribution. 2004. V. 13. P.7-17.

8. Tsallis C. Possible generalization of Boltzmann-Gibbs statistics// J. Stat. Phys. 1988. V. 52. P. 479-487.

9. Curado E.M.F., Tsallis C. Generalized statistical mechanics: connection with thermodynamics // J. Phys. 1991. A 24, P. L69-72.

10. Nonextensive statistical mechanics and thermodynamics: Bibliography / URL: http://tsallis.cat.cbpf.br/biblio.htm.

11. Schwammle V., Tsallis C. Two-parameter generalization of the logarithm and exponential functions and Boltzmann-Gibbs-Shannon entropy // URL: http://xxx.lanl.gov/abs/cond-mat/0703792

12. Tsallis C., Mendes R.S., Plastino A.R. The role of constraints within generalized Nonextensive statistics // Physica A. 1998. V. 261. P. 534-554.

13. Хакен Г. Информация и самоорганизация. Макроскопический подход к сложным системам. М.: Мир. 1991. 240 с.

14. Шелейховский Г.В. Композиция городского плана как проблема транспорта. М.: ГИПРОГОР. 1946. 129 с.

15. Брэгман Л.Д. Доказательство сходимости метода Шелейховского для задачи с транспортными ограничениями // ЖВ и МФ.1967. № 1. С.147-156.

16. Nesterov Y., de Palma A. Static equilibrium in congested transportation networks. // Networks and Spatial Economics. 2003. V. 3. P. 371–395

17. Леонтович М.А. Введение в термодинамику. Статистическая физика. М.: Наука. 1983. 416 с.

18. Martinez S., Nicolas F., Pennini F., Plastino A. Tsallis' entropy maximization procedure revisited// Physica A. 2000. V. 286. P. 489-502.

19. Dynamical foundations of nonextensive statistical mechanics. Preprint. 2001. URL: http://xxx.lanl.gov/abs/cond-mat/0105374 .

Оглавление