



**Басс Л.П., Николаева О.В.,
Грачёва А.И., Кузнецов В.С.**

Малоугловое приближение и
полное решение уравнения
переноса в сеточном
алгоритме метода
дискретных ординат

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Малоугловое приближение и полное решение уравнения переноса в сеточном алгоритме метода дискретных ординат / Л.П.Басс [и др.] // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2013. № 45. 21 с. URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2013-45>

**Ордена Ленина
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М.В.Келдыша
Российской академии наук**

Л.П.Басс, О.В.Николаева, А.И.Грачева, В. С.Кузнецов

**Малоугловое приближение
и полное решение уравнения переноса
в сеточном алгоритме
метода дискретных ординат**

Москва — 2013

Басс Л.П., Николаева О.В., Грачева А.И., Кузнецов В.С.

Малоугловое приближение и полное решение уравнения переноса в сеточном алгоритме метода дискретных ординат

Представлен численный алгоритм решения прямой задачи для уравнения переноса с сильно вытянутым сечением рассеяния в плоском слое, освещенном мононаправленным излучением в предположении, что оптические параметры среды известны. Решение ищется в виде суммы сингулярной (малоугловое приближение) и регулярной компонент. Предложен новый алгоритм расчета малоуглового приближения и источника в задаче для регулярной компоненты.

Малоугловое приближение определяется в области углов, примыкающей к углу мононаправленного излучения источника, и ищется итерационно как решение системы сеточных уравнений, полученных методом характеристик. Регулярная компонента отлична от нуля во всем интервале углов и находится решением краевой задачи для уравнения переноса с источником, определяемым малоугловым приближением; решение ищется с помощью сеточной схемы метода дискретных ординат по программе Радуга-6.2.

Приведены результаты расчетов яркостей прошедшего и отраженного света для слоя морской воды, для которой рассеяние вперед превышает рассеяние назад на 5-7 порядков, и для облачных капель, для которых рассеяние вперед превышает рассеяние назад на 3 порядка. Показана эффективность предложенного алгоритма, позволяющего использовать более редкие угловые сетки при сохранении точности расчета.

Ключевые слова: уравнение переноса излучения, малоугловое приближение

Bass L.P., Nikolaeva O.V., Gracheva A.I., Kuznetsov V.S.

Small angle approximation and total solution to the transport equation in the mesh algorithm of the discrete ordinate method

The method to solve the direct problem for the transport equation in a slab layer illuminated by the monodirectional beam under a peaked-forward scattering phase function is presented. The solution is decomposed into the singular component (small angle approximation) and the regular one. The new method to the small angle approximation and source in the problem for the regular component is suggested.

The small angle approximation is defined for directions near the direction of the incident beam. It is obtained via the mesh equations and solved by the iteration method. The mesh equations are found via the characteristics method. The regular component is defined for all directions. It is found by solving the transport equation with the source defined via the small angle approximation; this problem is solved by the mesh scheme of the discrete ordinate method by the code Радуга-6.2.

Reflectance and transmittance for sea water and cloud layers, obtained by the new method and the direct calculations are presented. The forward peak of the sea water phase functions is more than the back peak by 5-7 orders. This value is about 3 orders for the cloud phase function.

One shows the new method permits use sparse angular meshes in high accurate calculations.

Key words: the radiation transport equation, the small angle approximation

Работа выполнена при финансовой поддержке Проекта № 3.1 Программы фундаментальных исследований № 3 ОМН РАН

Оглавление

1. Введение.....	3
2. Краткий обзор методик решения задачи расчета малоуглового приближения.....	3
3. Постановка задачи. Нерассеянное излучение	4
4. Малоугловое приближение	5
5. Сеточные формулы для расчета малоуглового приближения	7
6. Определение регулярной компоненты решения	10
7. Численные результаты в задаче о морской воде.....	12
8. Численные результаты в задаче об облаке.....	17
9. Заключение.....	19
10. Список литературы	20

1. Введение

Уравнение переноса моделирует процесс распространения различных частиц в веществе. Одним из коэффициентов уравнения переноса является сечение рассеяния, определяющее вероятность изменения направления движения частицы после акта рассеяния на определенный угол. Эта зависимость может быть сильно вытянутой – отношение значений сечения для углов $\theta \approx 0^\circ$ (рассеяние вперед) к значениям сечения для углов $\theta \approx 180^\circ$ (рассеяние назад) может составлять несколько порядков.

Решение уравнения переноса с такими вытянутыми вперед сечениями представляет собой трудную задачу. Для получения высокоточных результатов приходится использовать сверхгустые угловые сетки, что требует больших временных затрат. В работе описывается численный алгоритм для решения таких задач, позволяющий получать высокоточные сеточные решения на негустых угловых сетках. Алгоритм включает в себя новый сеточный метод определения малоуглового приближения к решению, представляющего его сингулярную компоненту, а также новый метод расчета источника в задаче для оставшейся регулярной части решения.

Разработанный алгоритм может быть применён при решении задач зондирования атмосферы, задач биомедицины (оптический лазер) и лучевой терапии (заряженные частицы). Эти задачи являются актуальными и социально значимыми, например, в связи с потеплением климата, загрязнением атмосферы, а также в связи с большим числом онкологических заболеваний.

2. Краткий обзор методик решения задачи расчета малоуглового приближения

Хороший обзор методик вычисления малоуглового приближения к решению сделан в работе [1]. Во многих методах, начиная с работ Гоудсмита-Сандерсона [2] и до современных работ В.П.Будака [1], используются различного рода гипотезы о сечении как о функции распределения (например, распределение Гаусса). Существенную роль играет гипотеза о осесимметричном распределении интенсивности излучения. Уравнение БФП

(Больцмана-Фоккера-Планка) [3], которое выведено также для преодоления трудностей, связанных с сильной вытянутостью сечения рассеяния, имеет более сложный вид, чем уравнение переноса. Кроме того, оно не обеспечивает достаточную точность для “средних” (промежуточной степени вытянутости) сечений [4]. Изложенный в данной работе алгоритм свободен от этих недостатков.

3. Постановка задачи. Нерассеянное излучение

Рассмотрим уравнение переноса излучения в плоском слое

$$\mu \frac{\partial \Psi}{\partial z} + \sigma(z) \Psi(z, \mu, \varphi) = \int_{-1}^1 d\mu' \int_0^{2\pi} d\varphi' \Psi(z, \mu', \varphi') \sigma_s(z, \mu, \varphi, \mu', \varphi'), \quad (1)$$

$$0 < z < H, \quad -1 < \mu < 1, \quad 0 < \varphi < 2\pi.$$

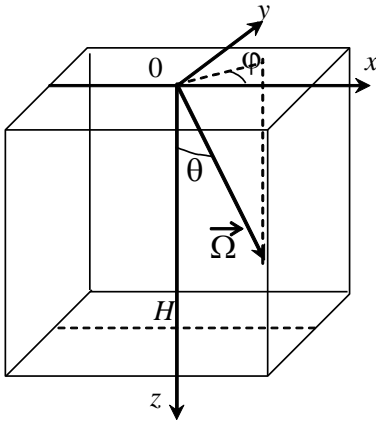


Рис. 1. Система координат в слое $[0, H]$

Здесь решение $\Psi(z, \mu, \varphi)$ определяет интенсивность излучения в точке z плоского слоя $[0, H]$ в направлении $\vec{\Omega}$, составляющем угол $\theta = \arccos(\mu)$ с осью z , см. Рис. 1. Азимутальный угол φ - угол между осью z и проекцией вектора направления излучения $\vec{\Omega}$ на плоскость, перпендикулярную оси z , см. Рис. 1.

Функция $\sigma(z)$ задает полное сечение взаимодействия излучения с веществом. Функция $\sigma_s(z, \mu, \varphi, \mu', \varphi')$ есть сечение рассеяния, зависящее от пространственной координаты z и косинуса угла рассеяния

$$\chi(\mu, \mu', \varphi, \varphi') = \mu \mu' + \sqrt{1 - \mu^2} \sqrt{1 - (\mu')^2} \cos(\varphi - \varphi'). \quad (2)$$

Краевые условия задают интенсивность излучения, падающего на верхнюю границу $z=0$ под углом $\theta_0 = \arccos(\mu_0)$ при $\varphi_0 = 0$

$$\Psi(0, \mu, \varphi) = S_0 \mu_0 \delta(\mu - \mu_0) \delta(\varphi - \varphi_0) \text{ при } \mu > 0. \quad (3)$$

Здесь мощность источника S_0 – количество энергии излучения, в единицу времени проходящее через единичную площадку, перпендикулярную направлению излучения. В этом случае величина $S_0 \mu_0$ есть количество энергии излучения, падающей на единичную площадку, лежащую на верхней границе $z=0$ под углом θ_0 к направлению падения излучения.

На нижней границе $z=H$ задается нулевое краевое условия

$$\Psi(H, \mu, \varphi) = 0 \text{ при } \mu < 0. \quad (4)$$

Решение задачи (1)-(4) представляется суммой нерассеянной $\Psi_0(z, \mu, \varphi)$ и рассеянной $\Psi_{\text{scat}}(z, \mu, \varphi)$ компонент. Эти функции определяются задачами

$$\begin{cases} \mu \frac{\partial \Psi_0}{\partial z} + \sigma(z) \Psi_0(z, \mu, \varphi) = 0, \\ \Psi_0(0, \mu, \varphi) = S_0 \mu_0 \delta(\mu - \mu_0) \delta(\varphi) \text{ при } \mu > 0, \quad \Psi_0(H, \mu, \varphi) = 0 \text{ при } \mu < 0, \end{cases} \quad (5)$$

$$\begin{cases} \mu \frac{\partial \Psi_{\text{scat}}}{\partial z} + \sigma(z) \Psi_{\text{scat}}(z, \mu, \varphi) = \\ = \int_{-1}^1 d\mu' \int_0^{2\pi} d\varphi' \Psi_{\text{scat}}(z, \mu', \varphi') \sigma_s(z, \mu, \varphi, \mu', \varphi') + f(z, \mu, \varphi), \\ f(z, \mu, \varphi) = \int_{-1}^1 d\mu' \int_0^{2\pi} d\varphi' \Psi_0(z, \mu', \varphi') \sigma_s(z, \mu, \varphi, \mu', \varphi'), \\ \Psi_{\text{scat}}(0, \mu, \varphi) = 0 \text{ при } \mu > 0, \quad \Psi_{\text{scat}}(H, \mu, \varphi) = 0 \text{ при } \mu < 0. \end{cases} \quad (6)$$

Решение задачи (5) для нерассеянной компоненты находится аналитически с помощью теории обобщенных функций [5].

$$\Psi_0(z, \mu, \varphi) = e^{-\tau(z)/\mu_0} S_0 \delta(\mu - \mu_0) \delta(\varphi).$$

Здесь $\tau(z)$ - длина отрезка $[0, z]$ в длинах свободного пробега

$$\tau(z) = \int_0^z dt \sigma(t).$$

Источник $f(z, \mu, \varphi)$ в задаче (6) для рассеянной компоненты также находится аналитически

$$f(z, \mu, \varphi) = S_0 e^{-\tau(z)/\mu_0} \sigma_s(z, \mu, \varphi, \mu_0, 0).$$

Рассеянная компоненты определяется с помощью расчета по сеточной схеме

4. Малоугловое приближение

Если сечение рассеяния есть сильно вытянутая вперед функция, то рассеянная компонента - решение задачи (6) - может быть представлено суммой малоугловой $\Psi_{\text{s.a.}}(z, \mu, \varphi)$ и регулярной $\Psi_{\text{reg}}(z, \mu, \varphi)$ компонент, которые определяются следующими задачами

$$\left\{ \begin{array}{l} \mu \frac{\partial \Psi_{\text{s.a.}}}{\partial z} + \sigma(z) \Psi_{\text{s.a.}}(z, \mu, \varphi) = S_{\chi}[\Psi_{\text{s.a.}}](z, \mu, \varphi) + g(z, \mu, \varphi), \\ \chi(\mu, \mu_0, \varphi, 0) \leq \chi_0, \quad 0 < z < H, \\ S_{\chi}[\Psi_{\text{s.a.}}](z, \mu, \varphi) = \int_{\chi(\mu', \mu_0, \varphi', 0) \leq \chi_0} d\mu' d\varphi' \Psi_{\text{s.a.}}(z, \mu', \varphi') \sigma_s(z, \mu, \varphi, \mu', \varphi'), \\ \Psi_{\text{s.a.}}(0, \mu, \varphi) = 0 \text{ при } \mu > 0, \\ \Psi_{\text{s.a.}}(H, \mu, \varphi) = 0 \text{ при } \mu < 0, \end{array} \right. \quad (7)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \mu \frac{\partial \Psi_{\text{reg}}}{\partial z} + \sigma(z) \Psi_{\text{reg}}(z, \mu, \varphi) = S[\Psi_{\text{reg}}](z, \mu, \varphi) + h(z, \mu, \varphi), \\ -1 < \mu < 1, \quad 0 < z < H, \\ S[\Psi_{\text{reg}}](z, \mu, \varphi) = \int_{-1}^1 d\mu' \int_0^{2\pi} d\varphi' \Psi_{\text{reg}}(z, \mu', \varphi') \sigma_s(z, \mu, \varphi, \mu', \varphi'), \\ \Psi_{\text{reg}}(0, \mu, \varphi) = 0 \text{ при } \mu > 0, \quad \Psi_{\text{reg}}(H, \mu, \varphi) = 0 \text{ при } \mu < 0. \end{array} \right. \quad (8)$$

Здесь величина $\chi(\mu, \mu', \varphi, \varphi')$ - косинус угла рассеяния, определяемый выражением (2), параметр χ_0 близок к единице. Можно видеть, что малоугловое приближение определяется только для направлений, отклоняющихся от направления, под которым излучение падает на верхнюю границу $z=0$, на угол, меньший, чем $\arccos(\chi_0)$, см. Рис. 2.

Источники $g(z, \mu, \varphi)$ и $h(z, \mu, \varphi)$ в задачах (7) и (8) для малоугловой и регулярной компонент соответственно определяются равенствами

$$g(z, \mu, \varphi) = S_{\chi}[\Psi_0] = S_0 e^{-\tau(z)/\mu_0} \sigma_s(z, \mu, \varphi, \mu_0, 0),$$

$$h(z, \mu, \varphi) = \begin{cases} 0 & \text{при } \chi(\mu, \mu_0, \varphi, 0) \leq \chi_0 \\ \int_{\chi(\mu', \mu_0, \varphi', 0) \leq \chi_0} d\mu' d\varphi' [\Psi_{\text{s.a.}} + \Psi_0] & \text{при } \chi(\mu, \mu_0, \varphi, 0) > \chi_0. \end{cases} \quad (9)$$

Можно видеть, что источник $h(z, \mu, \varphi)$ отличен от нуля только вне области В определения малоуглового приближения, то есть в области, удовлетворяющей условию $\chi(\mu, \mu_0, \varphi, 0) \leq \chi_0$. Этому условию соответствует следующий диапазон угловых переменных θ, φ

$$\max(\theta^-, 0) < \theta < \min(\theta^+, \pi/2), \quad \theta^{\pm} = \theta_0 \pm \arccos(\chi_0), \quad 0 < \varphi < \Delta\varphi(\mu), \quad (10)$$

где

$$\Delta\varphi(\mu) = \begin{cases} 2\pi & \text{при } \theta^- \leq 0 \\ \arccos \frac{\chi_0 - \mu_0 \mu}{\sqrt{1-\mu^2} \sqrt{1-\mu_0^2}} & \text{при } \theta^- > 0 \end{cases}, \quad \theta_0 = \arccos(\mu_0).$$

Условия (10) задают область В на единичной сфере, см. Рис. 2.

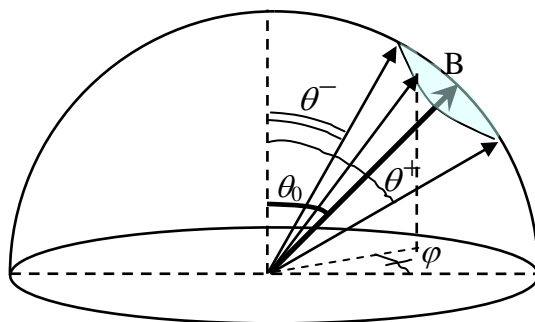


Рис. 2. Область В на единичной сфере, в которой определено малоугловое приближение

5. Сеточные формулы для расчета малоуглового приближения

Для направлений $\mu > 0$ аналитическое решение задачи (7) имеет вид

$$\Psi_{\text{s.a.}}(z, \mu, \varphi) = \frac{1}{\mu} \int_0^z dt \exp\left(-\frac{\tau(z) - \tau(t)}{\mu}\right) \cdot \left[\int_{\chi(\mu', \mu_0, \varphi', 0) \leq \chi_0} d\mu' d\varphi' \Psi_{\text{s.a.}}(t, \mu', \varphi') \sigma_s(t, \mu, \varphi, \mu', \varphi') + g(t, \mu, \varphi) \right]. \quad (11)$$

Построим сеточную аппроксимацию этого соотношения. Для этого введем сетку по пространственной координате z точками

$$0 < z_{1/2} < z_{3/2} < \dots < z_{j-1/2} < z_{j+1/2} < \dots < z_{J+1/2} = H. \quad (12)$$

Каждой ячейке отвечает шаг $\Delta_j = z_{j+1/2} - z_{j-1/2}$ и центр $z_j = (z_{j+1/2} + z_{j-1/2})/2$.

Определим сеточные величины для представления малоуглового приближения

$\psi_{j+1/2}(\mu, \varphi) = \Psi_{\text{s.a.}}(z_{j+1/2}, \mu, \varphi)$ - значение в точке сетки,

$$\psi_j(\mu, \varphi) = \frac{1}{\Delta_j} \int_{z_{j-1/2}}^{z_{j+1/2}} dt \Psi_{\text{s.a.}}(t, \mu, \varphi) - \text{среднее значение в ячейке.}$$

Также введем обозначения

$$g_j(\mu, \varphi) = g(z_j, \mu, \varphi), \quad \sigma_{s,j}(\mu, \varphi, \mu', \varphi') = \sigma_s(z_j, \mu, \varphi, \mu', \varphi'), \quad \sigma_j = \sigma(z_j).$$

Заменяем интеграл в выражении (11) частичной суммой

$$\psi_{j+1/2}(\mu, \varphi) = \sum_{i=1}^j \frac{\Delta_i}{\mu} \exp\left(-\frac{\tau(z_{j+1/2}) - \tau(t_i)}{\mu}\right) \left[\int_{\chi(\mu', \mu_0, \varphi', 0) \leq \chi_0} d\mu' d\varphi' \psi_i(\mu', \varphi') \sigma_{s,i}(\mu, \varphi, \mu', \varphi') + g_i(\mu, \varphi) \right].$$

Введем аппроксимацию для малоуглового приближения в пространственной ячейке

$$\psi_j(\mu, \varphi) = (\psi_{j+1/2}(\mu, \varphi) + \psi_{j-1/2}(\mu, \varphi)) / 2. \quad (13)$$

С ее помощью находим формулу

$$\psi_{j+1/2}(\mu, \varphi) = W_{j+1/2}(\mu, \varphi) + \int_{(\mu', \varphi') \in B} d\mu' d\varphi' \psi_{j+1/2}(\mu', \varphi') U_{j+1/2}(\mu, \varphi, \mu', \varphi'), \quad (14)$$

где функции $W_{j+1/2}(\mu, \varphi)$ и $U_{j+1/2}(\mu, \varphi, \mu', \varphi')$ определяются равенствами

$$\begin{aligned} W_{j+1/2}(\mu, \varphi) &= \frac{1}{\mu} \sum_{i=1}^j \Delta_i \exp\left(-\frac{\tau(z_{j+1/2}) - \tau(t_i)}{\mu}\right) g_i(\mu, \varphi) + \\ &+ \frac{1}{\mu} \sum_{i=1}^{j-1} \Delta_i \exp\left(-\frac{\tau(z_{j+1/2}) - \tau(t_i)}{\mu}\right) \int_{\chi(\mu', \mu_0, \varphi', 0) \leq \chi_0} d\mu' d\varphi' \psi_i(\mu', \varphi') \sigma_{s,i}(\mu, \varphi, \mu', \varphi') + \\ &+ \frac{\Delta_j}{2\mu} \exp\left(-\frac{\tau(z_{j+1/2}) - \tau(t_j)}{\mu}\right) \int_{\chi(\mu', \mu_0, \varphi', 0) \leq \chi_0} d\mu' d\varphi' \psi_{j-1/2}(\mu', \varphi') \sigma_{s,i}(\mu, \varphi, \mu', \varphi'), \end{aligned}$$

$$U_{j+1/2}(\mu, \varphi, \mu', \varphi') = \sigma_{s,j}(\mu, \varphi, \mu', \varphi') \frac{1}{2\mu} \Delta_j \exp\left(-\frac{\tau(z_{j+1/2}) - \tau(z_j)}{\mu}\right).$$

Отметим, что источник $W_{j+1/2}(\mu, \varphi)$ в уравнении (14) для значения малоуглового приближения $\psi_{j+1/2}(\mu, \varphi)$ в точке $z = z_{j+1/2}$ определяется значениями малоуглового приближения в предыдущих пространственных

ячейках $[z_{i-1/2}, z_{i+1/2}]$, $i=1, \dots, j$.

Уравнение (14) может быть решено методом простой итерации

$$\psi_{j+1/2}^{it+1}(\mu, \varphi) = W_{j+1/2}(\mu, \varphi) + \int_{(\mu', \varphi') \in B} d\mu' d\varphi' \psi_{j+1/2}^{it}(\mu', \varphi') U_{j+1/2}(\mu, \varphi, \mu', \varphi'). \quad (15)$$

Итерации позволяют учесть в малоугловом приближении процессы многократного рассеяния излучения в области В.

Для ядра интегрального оператора $U_{j+1/2}(\mu, \varphi, \mu', \varphi')$ выполнена оценка

$$\begin{aligned} 0 &< \int_{\chi(\mu', \mu_0, \varphi', 0) \leq \chi_0} d\mu' d\varphi' U_{j+1/2}(\mu, \varphi, \mu', \varphi') < \\ &< \int_{\chi(\mu', \mu_0, \varphi', 0) \leq \chi_0} d\mu' d\varphi' \sigma_{s,j}(\mu, \varphi, \mu', \varphi') \frac{1}{2\mu} \Delta_j \frac{\mu}{\tau(z_{j+1/2}) - \tau(z_j)} < \\ &< \int_{\chi(\mu', \mu_0, \varphi', 0) \leq \chi_0} d\mu' d\varphi' \sigma_{s,j}(\mu, \varphi, \mu', \varphi') \frac{1}{2} \Delta_j \frac{1}{\sigma_j \Delta_j / 2} < \\ &< \int_{\chi(\mu', \mu_0, \varphi', 0) \leq \chi_0} d\mu' d\varphi' \sigma_{s,j}(\mu, \varphi, \mu', \varphi') \frac{1}{\sigma_j} < 1 \end{aligned}$$

При выводе этой оценки используется неравенство $\exp(-r) < 1/r$, выполненное для любого $r > 0$. Оценка доказывает, что итерационный процесс (15) сходится.

После определения значения малоуглового приближения $\psi_{j+1/2}(\mu, \varphi)$ в точке $z = z_{j+1/2}$, среднее значение в j -ой ячейке может быть найдено с помощью равенства (13). Далее уравнение (14) может быть решено для следующей $(j+1)$ -ой пространственной ячейки.

Для расчета по формуле (15) нужно ввести угловую сетку в области В, см. (10). Для этого используются сетка Гаусса по μ и равномерная сетка по φ . Вводим сплошную нумерацию узлов сетки $\{\mu_k, \varphi_k\}$, $k=1, \dots, K$, для каждого узла определяем вес w_k . Веса нормируем так, чтобы было выполнено равенство

$$\sum_{k=1}^K w_k = S,$$

где S – площадь области В. Тогда итерационная формула (15) заменяется выражением

$$\psi_{j+1/2}^{it+1}(\mu_m, \varphi_m) = W_{j+1/2}(\mu_m, \varphi_m) + \sum_{k=1}^K w_k \psi_{j+1/2}^{it}(\mu_k, \varphi_k) U_{j+1/2}(\mu_m, \varphi_m, \mu_k, \varphi_k). \quad (16)$$

6. Определение регулярной компоненты решения

Для определения регулярной компоненты $\Psi_{\text{reg}}(z, \mu, \varphi)$ необходимо решить задачу (8) с источником $h(z, \mu, \varphi)$, зависящим от малоуглового приближения. Для этого вводится угловая сетка уже по всей сфере $-1 < \mu < 1$, $0 < \varphi < 2\pi$.

$$\{\bar{\mu}_k, \bar{\varphi}_k\}, k = 1, \dots, \bar{K},$$

так, что сумма весов равна площади всей сферы:

$$\sum_{k=1}^{\bar{K}} \bar{w}_k = 4\pi.$$

- - узел сетки $\{\bar{\mu}_k, \bar{\varphi}_k\}$ на всей сфере
- ⊗ - ячейки сетки $\{\bar{\mu}_{k,i}, \bar{\varphi}_{k,i}\}$ в области узла $\{\bar{\mu}_k, \bar{\varphi}_k\}$
- #### - ячейки сетки $\{\mu_k, \varphi_k\}$ в области В
- - область В

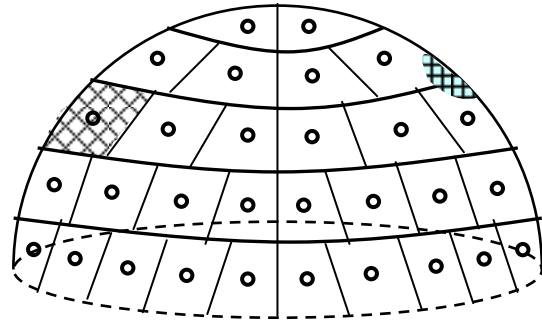


Рис. 3. Угловые квадратуры на сфере

Для расчета функции $h(z, \mu, \varphi)$ выражение (9) нужно заменить квадратурной формулой. При этом нужно учитывать, что малоугловое приближение $\Psi_{\text{s.a.}}$ определено на сетке $\{\mu_k, \varphi_k\}, k = 1, \dots, K$, введенной в области В, см. формулу (10), тогда как источник $h(z, \mu, \varphi)$ должен быть получен на сетке $\{\bar{\mu}_k, \bar{\varphi}_k\}, k = 1, \dots, \bar{K}$, относящейся ко всей сфере.

Поэтому для определения источника $h(z, \mu, \varphi)$ соотношение (9) заменяется следующей квадратурной формулой

$$h(z, \bar{\mu}_k, \bar{\varphi}_k) = \sum_{i=1, (\bar{\mu}_{k,i}, \bar{\varphi}_{k,i}) \in B}^{\bar{K}} \bar{w}_{k,i} \left[\sum_{\ell=1}^K w_{\ell} \Psi_{\text{s.a.}}(z, \mu_{\ell}, \varphi_{\ell}) \sigma_s(z, \mu_k, \bar{\mu}_{k,i}, \varphi_k, \bar{\varphi}_{k,i}) + e^{-\tau(z)/\mu_0} S_0 \sigma_s(z, \bar{\mu}_{k,i}, \mu_0, \bar{\varphi}_{k,i}, 0) \right] \quad (17)$$

Здесь $\{\bar{\mu}_{k,i}, \bar{\varphi}_{k,i}\}$ и $\bar{w}_{k,i}$ - узлы и веса дополнительной угловой сетки,

введенной в ячейке $\{\bar{\mu}_k, \bar{\varphi}_k\}$, см. Рис. 3, \bar{K} - число узлов дополнительной сетки. Внешняя сумма в выражении (17) выполняется по всем узлам дополнительной сетки $\{\bar{\mu}_{k,i}, \bar{\varphi}_{k,i}\}$ в данной ячейке $\{\bar{\mu}_k, \bar{\varphi}_k\}$, не попадающим внутрь области В. Если ячейка $\{\bar{\mu}_k, \bar{\varphi}_k\}$ пересекается с областью В, то таким образом четко отслеживается граница пересечения этой ячейки с В. Внутренняя сумма в выражении (17) выполняется по всем узлам $\{\mu_k, \varphi_k\}, k=1, \dots, K$ сетки внутри области В.

Отметим, что расчет по формуле (17) источника в задаче для регулярной компоненты выполняется независимо для всех узлов основной угловой сетки $\{\bar{\mu}_k, \bar{\varphi}_k\}$. Такой расчет может быть легко распараллелен средствами OpenMP.

Далее при решении задачи (8) с источником (17) интеграл рассеяния в правой части уравнения переноса аппроксимируется квадратурной суммой

$$I(z, \mu, \varphi) = \int_{-1}^1 d\mu' \int_0^{2\pi} d\varphi' \Psi_{\text{reg}}(z, \mu', \varphi') \sigma_s(z, \mu, \varphi, \mu', \varphi') \approx \\ \approx I(z, \bar{\mu}_n, \bar{\varphi}_n) = \sum_{m=1}^{\bar{K}} \Psi_{\text{reg}}(z, \bar{\mu}_m, \bar{\varphi}_m) \sigma_{s,m,n},$$

где

$$\sigma_{s,m,n}(z) = \sum_{i=1}^{\bar{K}} w_{m,i} \sigma_s(z, \bar{\mu}_{m,i}, \bar{\varphi}_{m,i}, \bar{\mu}_n, \bar{\varphi}_n) -$$

элемент матрицы рассеяния. Уравнение (8) при этом заменяется следующей системой уравнений

$$\mu \frac{\partial \Psi_{\text{reg}}(z, \bar{\mu}_n, \bar{\varphi}_n)}{\partial z} + \sigma(z) \Psi_{\text{reg}}(z, \bar{\mu}_n, \bar{\varphi}_n) = \sum_{m=1}^{\bar{K}} \Psi_{\text{reg}}(z, \bar{\mu}_m, \bar{\varphi}_m) \sigma_{s,m,n} + h(z, \bar{\mu}_n, \bar{\varphi}_n)$$

Далее вводится аппроксимация каждого из этих уравнений по пространственной переменной z на сетке (12); получившаяся система решается итерационно КР1 методом [6].

Такой подход позволяет решать задачи о переносе излучения в средах с сильно анизотропным рассеянием. По сравнению с другим более часто используемым методом, опирающимся на разложение интеграла столкновений по сферическим функциям, наш метод более точен (если число членов разложения мало) и требует много меньше времени (если число членов разложения велико).

7. Численные результаты в задаче о морской воде

Рассмотрим модельную задачу, в которой на однородный плоский слой толщины $H = 10$ см падает излучение под углом $\theta_0 = 60^\circ$. Полное сечение в слое $\sigma(z) = 1$, поглощение отсутствует. Используется сечение рассеяния Мобли [7] (Fournier-Forand-Mobley (FFM) phase function) для морской воды

$$\sigma_s(\chi) = \frac{3 \cos^2 \chi - 1}{4\pi(1 - \delta^2)^2 \delta^\nu} \left[\nu(1 - \delta) - (1 - \delta^\nu) + \right. \\ \left. [\delta(1 - \delta^\nu) - \nu(1 - \delta)] \frac{1}{\sin^2(\chi/2)} + \frac{1 - \delta_{180}^\nu}{16\pi(\delta_{180} - 1)\delta_{180}^\nu} \right],$$

где

$$\delta = \frac{4}{3(n-1)^2} \sin^2(\chi/2), \quad \delta_{180} = \frac{4}{3(n-1)^2}, \quad \nu = \frac{3 - \varpi}{2}, \quad \varpi = 3 + (n - 1.01)/0.1542.$$

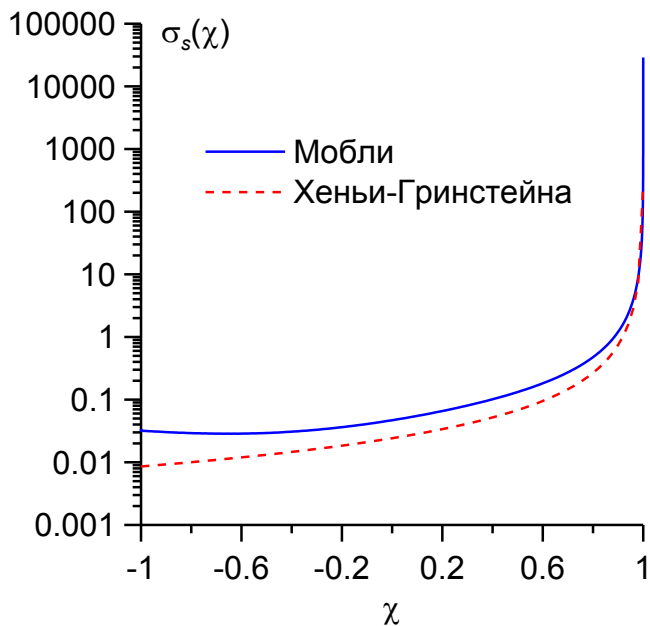


Рис. 4. Сечения рассеяния для морской воды, $g=0.937646$

Здесь $n=1.1$ – показатель преломления, ϖ – параметр гиперболического распределения. Параметр асимметрии такого сечения

$$g = \frac{\int_{-1}^1 d\chi \chi \sigma_s(\chi)}{\int_{-1}^1 d\chi \sigma_s(\chi)} = 0.9376$$

Также в расчетах используется сечение рассеяния Хеньи-Гринштейна с тем же значением параметра асимметрии $g=0.9376$, см. Рис. 4. Оба сечения (Мобли и Хеньи-Гринштейна) задаются своими средними значениями в 800 ячейках равномерной сетки, введенной на отрезке $[-1, 1]$. При этом сечения аппроксимируются непрерывно дифференцируемым кубическим сплайном.

Заметим, что обычно сечение Мобли в расчетах представляется разложением по полиномам Лежандра; при этом учитывается порядка 1000-2000 слагаемых.

В расчетах используются угловые S_N сетки Карлсона, в которых узлы равномерно распределены по единичной сфере. При этом узлы распределены по слоям, причем число узлов на слое уменьшается с приближением слоя к полюсу сферы. Общее число узлов $\bar{K} = (N + 2)N$. Параметр χ_0 выбирается

равным $\cos(5^\circ)=0.9962$ для сечения Хеньи-Гринштейна и равным $\cos(0.5^\circ)=0.999962$ для более вытянутого сечения Мобли, см. Рис. 4.

В расчетах находятся следующие функции.

1. Малоугловое приближение $\Psi_{s.a.}(z, \mu, \varphi)$ с помощью итерационного процесса (16) на угловой сетке из $K=48$ узлов
2. Регулярная компонента $\Psi_{reg}(z, \mu, \varphi)$ как решение задачи (8) по программе Радуга-6.2 [8]
3. Сумма регулярной компоненты и малоуглового приближения – функция $\Psi_{sum}(z, \mu, \varphi) = \Psi_{s.a.}(z, \mu, \varphi) + \Psi_{reg}(z, \mu, \varphi)$
4. Рассеянная компонента $\Psi_{scat}(z, \mu, \varphi)$ как решение задачи (6) по программе Радуга-6.2.

Рассеянная компонента находится тем же методом, что и регулярная компонента, см. раздел 6.

На Рис. 5-Рис. 8 приведены графики функций

$$R(\mu)|_{\mu < 0} = \frac{\pi}{\mu_0} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \Psi(0, \mu, \varphi), \quad T(\mu)|_{\mu > 0} = \frac{\pi}{\mu_0} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \Psi(H, \mu, \varphi).$$

Они представляют угловое распределение яркости прошедшего $T(\mu)$ и отраженного $R(\mu)$ излучения на границах слоя $z=H$ и $z=0$ соответственно.

Непрерывные кривые на Рис. 5-Рис. 8 представляют функции $\Psi_{scat}(z, \mu, \varphi)$, полученные без выделения малоуглового приближения как решение задачи (6). Полыми кругами (o) и черными точками (•) обозначены функции $\Psi_{sum}(z, \mu, \varphi)$, полученные с выделением малоуглового приближения решением задач (7) и (8).

В Таблицах 1 и 2 для нескольких угловых сеток приведены времена расчетов. Можно видеть, что расчет малоуглового приближения занимает много времени. Однако выделение малоугловой компоненты позволяет использовать более грубые угловые сетки для расчета регулярной компоненты, см. Рис. 5-Рис. 8, и тем самым снижать временные затраты. Расчет с выделением малоугловой компоненты может быть выполнен на сетке S_{24} , тогда как расчет без выделения малоугловой компоненты нужно проводить на сетке S_{68} , временные затраты возрастают в 10 раз для сечения рассеяния Хеньи-Гринштейна и в 30 раз для более вытянутого сечения рассеяния Мобли.

В Таблице 3 приведены значения альbedo отражения r и пропускания t

$$r = \int_{-1}^0 d\mu |\mu| R(\mu), \quad t = \int_0^1 d\mu \mu T(\mu)$$

для задачи с сечением рассеяния Мобли. Можно видеть, что эти величины могут быть получены либо расчетом на густой сетке S_{68} без выделения

малоугловой компоненты, либо расчетом на негустой сетке S_{24} при выделении малоугловой компоненты решения. При этом с высокой точностью выполнено соотношение баланса для непоглощающей среды: $r+t=1$.

Таблица 1

Времена расчетов при разных угловых сетках в задаче с сечением рассеяния Хеньи-Гринштейна для морской воды, $g=0.937646$

Угловая сетка	Время расчета	
	без выделения малоуглового приближения	с выделением малоуглового приближения
S_{96}	18 мин 42 сек	-
S_{68}	4 минуты 46 сек	6 минут 54 сек
S_{48}	2 минуты 41 сек	1 мин 14 сек
S_{36}	1 минута 15 сек	25 сек
S_{24}	30 сек	7 сек

Таблица 2

Времена расчетов при разных угловых сетках в задаче с сечением рассеяния Мобли

Угловая сетка	Время расчета	
	без выделения малоуглового приближения	с выделением малоуглового приближения
S_{96}	19 мин 9 сек	-
S_{68}	4 мин 51 сек	-
S_{48}	1 мин 15 сек	2 мин 46 сек
S_{36}	26 сек	1 мин 16 сек
S_{24}	6 сек	30 сек

Таблица 3

Значения альбедо отражения r и пропускания t при разных угловых сетках в задаче с сечением рассеяния Мобли

Угловая сетка	Альбедо отражения r	Альбедо пропускания t
расчет без выделения малоуглового приближения		
S_{24}	0.310	0.376
S_{36}	0.421	0.544
S_{48}	0.468	0.595
S_{68}	0.435	0.559
S_{96}	0.437	0.562
расчет с выделением малоуглового приближения		
S_{24}	0.436	0.554

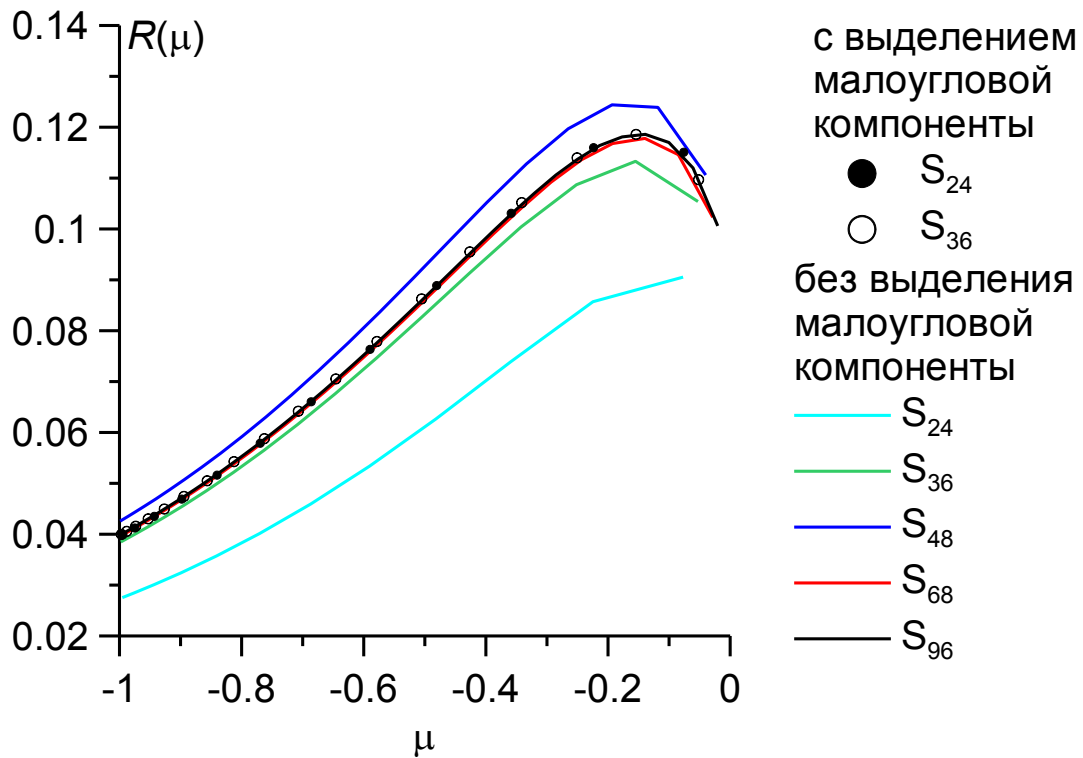


Рис. 5. Угловое распределение яркости отраженного излучения, сечение Мобли

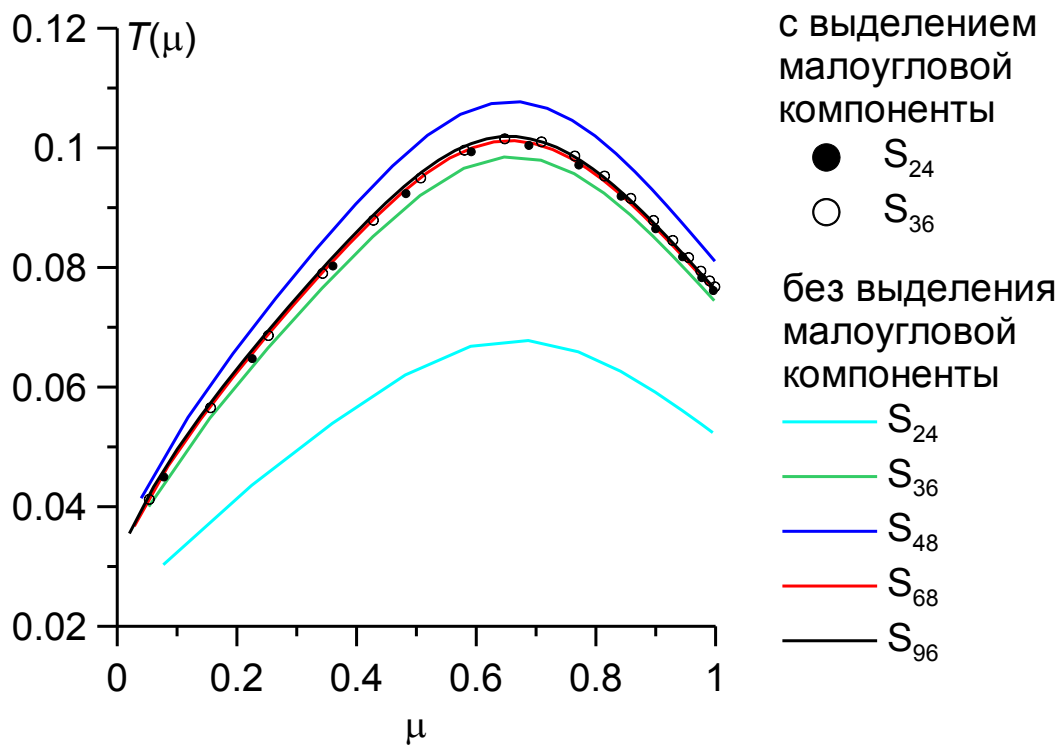


Рис. 6. Угловое распределение яркости прошедшего излучения, сечение Мобли

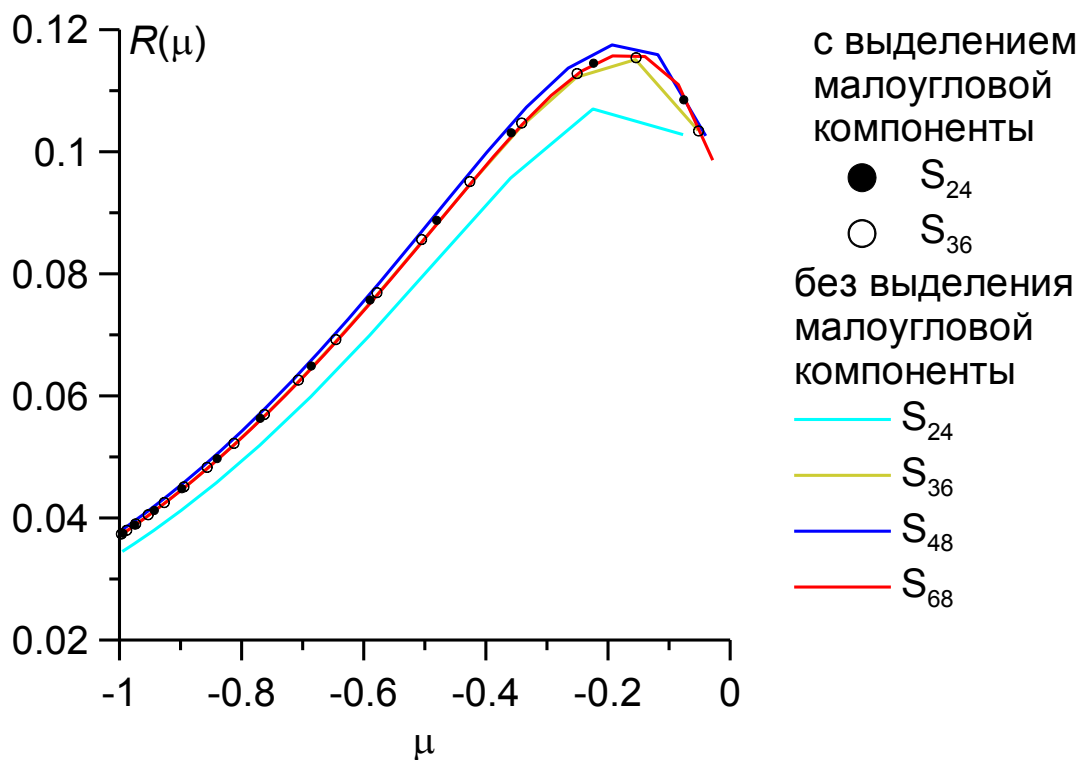


Рис. 7. Угловое распределение яркости отраженного излучения, сечение Хеньи-Гринштейна при $g=0.937646$ (морская вода)

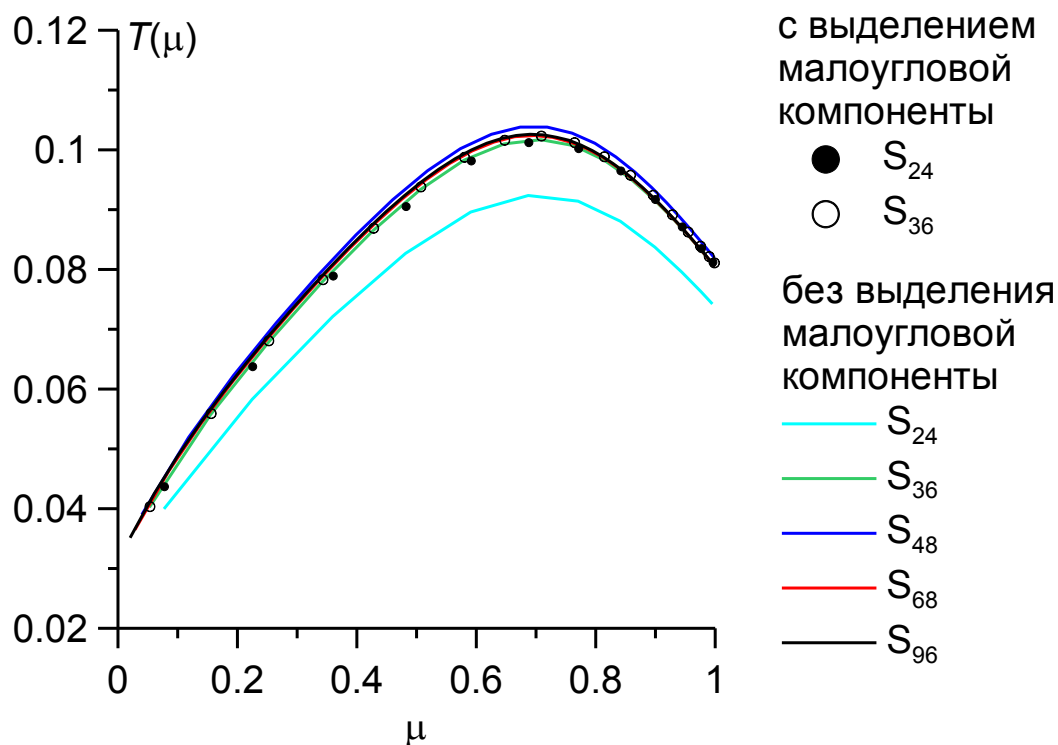


Рис. 8. Угловое распределение яркости прошедшего излучения, сечение Хеньи-Гринштейна при $g=0.937646$ (морская вода).

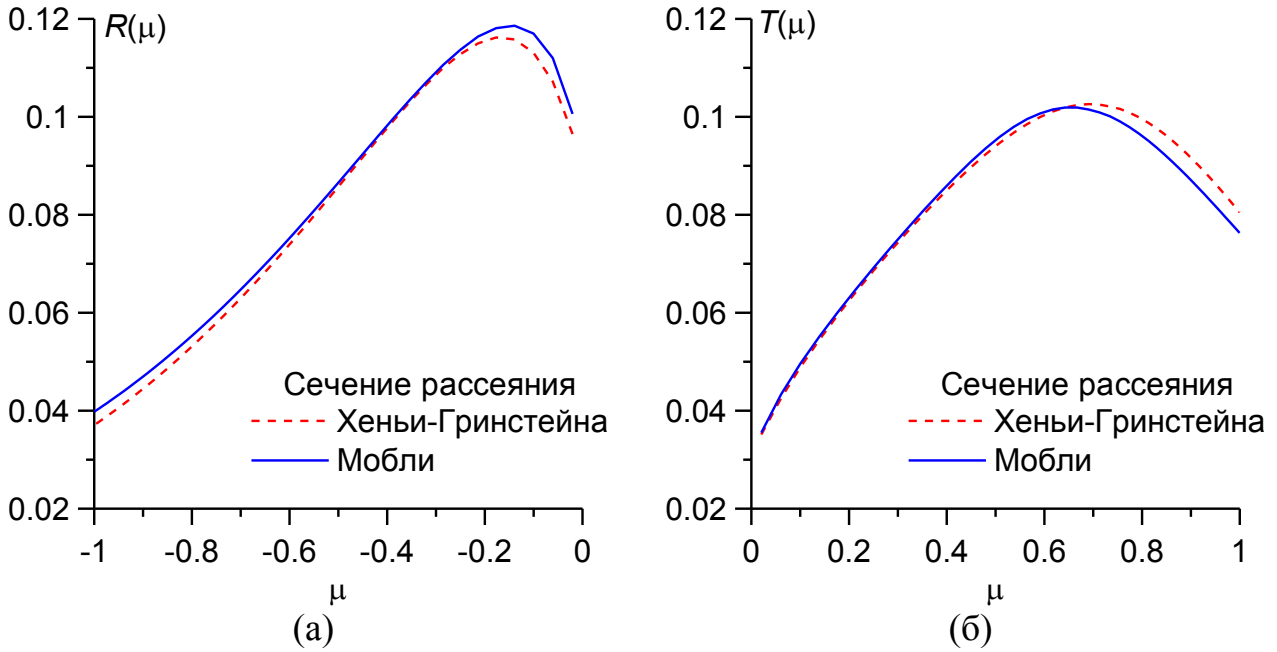


Рис. 9. Угловое распределение яркости отраженного (а) и прошедшего (б) света для сечений рассеяния Мобли и Хеньи-Гринштейна на густой угловой сетке S_{96}

Полученные решения на густой угловой сетке (S_{96}) для обоих типов сечения рассеяния показаны на Рис. 9. Можно видеть влияние различия в сечениях рассеяния, см. Рис. 4, на различия в расчетных результатах.

8. Численные результаты в задаче об облаке

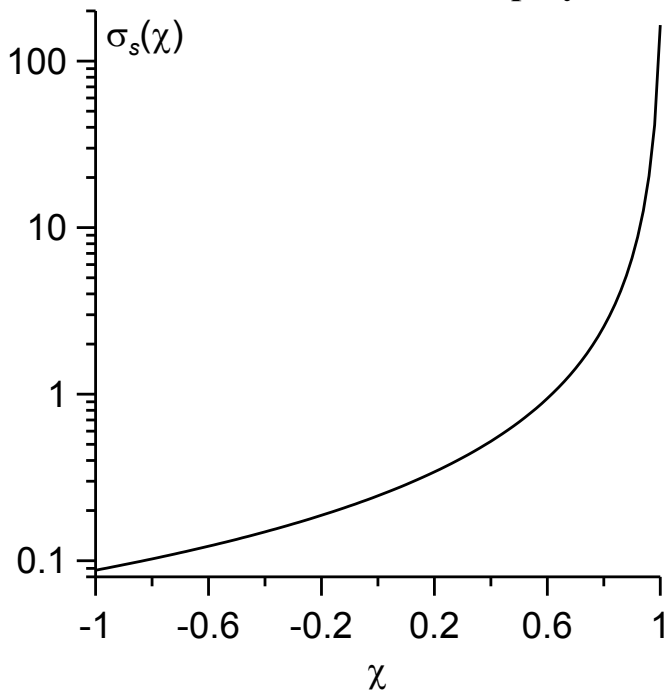


Рис. 10. Сечения рассеяния Хеньи-Гринштейна для облачных капель, $g=0.85$

Рассмотрим ту же модельную задачу, что и в разделе 7, но с сечением рассеяния Хеньи-Гринштейна при $g=0.85$, см. Рис. 10. Такое сечение рассеяния описывает рассеяние света видимого диапазона на облачных каплях.

Сечение рассеяния задается своими средними значениями в 400 ячейках равномерной сетки, введенной на отрезке $[-1, 1]$. Для представления такой функции разложением по полиномам Лежандра с точностью менее 1% требуется 70 слагаемых.

Как и в разделе 7, расчеты выполняются на сгущающейся последовательности угловых S_N сеток Карлсона. При этом используются менее густые сетки, поскольку сечение рассеяния является менее

вытянутым. Параметр χ_0 выбирается равным $\cos(6^\circ)=0.9945$, число точек сетки в области В равно 36.

В Таблице 4 приведены времена расчетов. Расчет с выделением малоугловой компоненты может быть выполнен на сетке S_8 , тогда как расчет без выделения малоугловой компоненты нужно проводить на сетке S_{24} , см. Рис. 11 и Рис. 12, временные затраты при этом возрастают в 6 раз.

Таблица 4

Времена расчетов при разных угловых сетках в задаче с сечением рассеяния Хеньи-Гринштейна для облачных капель, $g=0.85$

Угловая сетка	Время расчета	
	без выделения малоуглового приближения	с выделением малоуглового приближения
S_{48}	2 мин 33 сек	3 мин 18 сек
S_{36}	52 сек	1 мин 17 сек
S_{24}	13 сек	24 сек
S_{16}	4 сек	9 сек
S_{12}	2 сек	4 сек
S_8	1 сек	2 сек

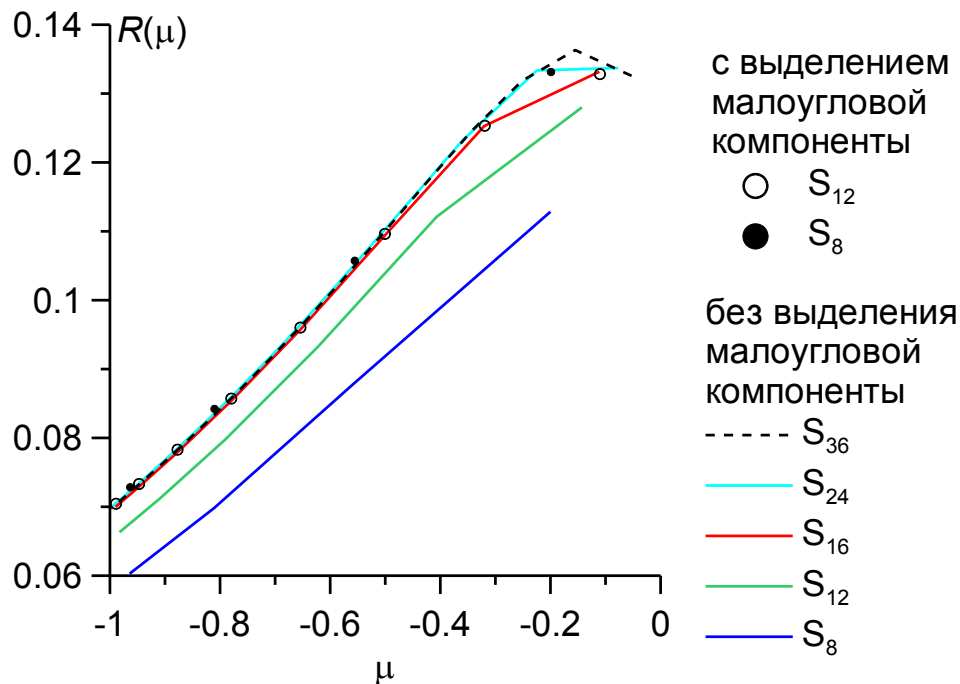


Рис. 11. Угловое распределение яркости отраженного излучения, сечение Хеньи-Гринштейна при $g=0.85$ (облачные капли)

На Рис. 11 и Рис. 12 приведены графики углового распределения яркости прошедшего $T(\mu)$ и отраженного $R(\mu)$ излучения на границах слоя $z=H$ и $z=0$ соответственно. Как и в разделе 7, непрерывные кривые представляют функции $\Psi_{\text{scat}}(z, \mu, \varphi)$, полученные без выделения малоуглового приближения как

решение задачи (6). Полыми кругами (\circ) и черными точками (\bullet) обозначены функции $\Psi_{\text{sum}}(z, \mu, \varphi)$, полученные с выделением малоуглового приближения решением задач (7) и (8).

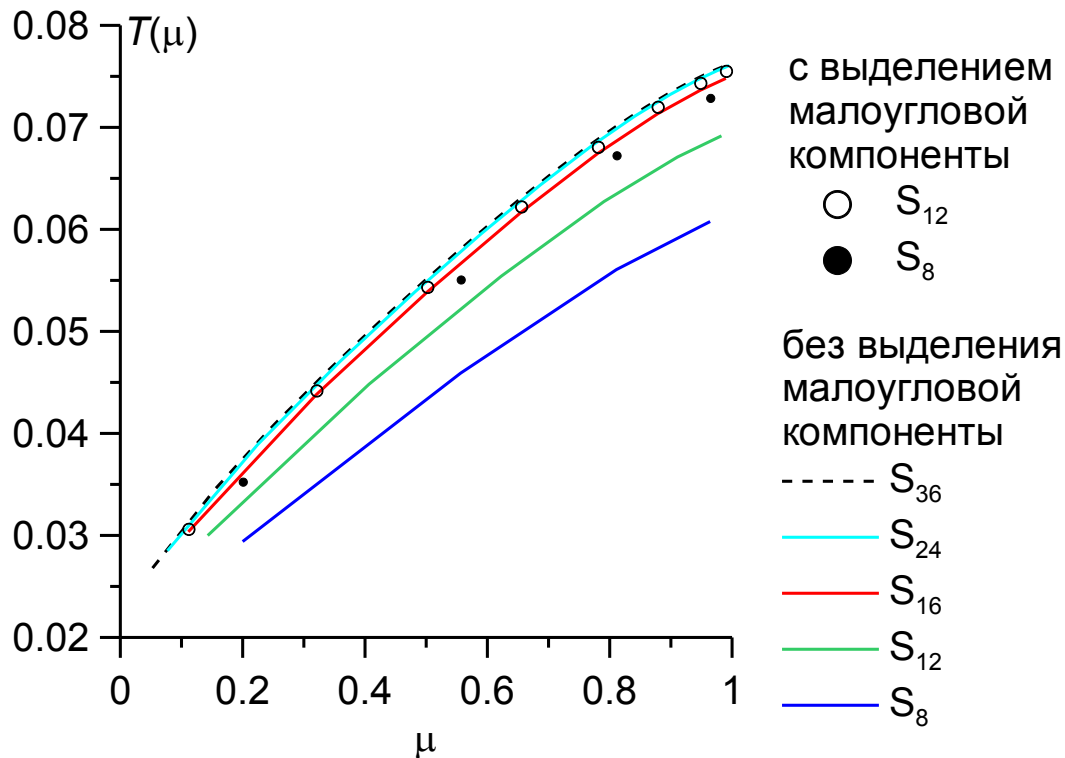


Рис. 12. Угловое распределение яркости прошедшего излучения, сечение Хеньи-Гринштейна при $g=0.85$ (облачные капли)

9. Заключение

В настоящей работе описан численный алгоритм решения задачи для определения интенсивности света в плоском слое, освещенном мононаправленным источником. Алгоритм опирается на разбиение решения на сингулярную и регулярную компоненты; сингулярная компонента ищется в малоугловом приближении, регулярная компонента находится сеточным методом дискретных ординат.

Особенность алгоритма состоит в том, что сингулярная компонента – малоугловое приближение к решению – находится итерационно как решение системы сеточных уравнений. При выводе этой системы не делается предположений о степени вытянутости сечения рассеяния и об азимутальной симметрии рассеянного излучения, которые используются другими авторами. Не делается аппроксимации сечения рассеяния с помощью δ -функции. Также нет предположений о пространственной однородности области.

Представленный алгоритм обобщается на случай 3D геометрии. Это обобщение может быть выполнено значительно легче, чем разработка и

реализация положительной сеточной схемы для уравнения Больцмана-Фоккера-Планка.

Разработанный алгоритм не имеет многих недостатков существующих методов и может быть применён при решении задач зондирования атмосферы, задач биомедицины (свет) и лучевой терапии (заряженные частицы).

Приведенные результаты методических расчетов в задаче о пропускании и отражении света слоем морской воды и слоем облачных капель показывают, что новый алгоритм позволяет использовать более грубые угловые сетки, чем те сетки, которые требуются при расчете прямым методом. Использование более грубых сеток позволяет существенно (порядка 10 раз) сократить время счета. При этом эффективность нового алгоритма тем выше, чем больше вытянутость сечения рассеяния.

Авторы выражают благодарность Е.Н.Аристовой и Я.А.Илюшину за полезные обсуждения.

10. Список литературы

1. Budak V.P., Klyuykov D.A., and Korkin S.V. Light Scat. Rew. Ed. by A.A. Kokhanovsky, 2010, p.5. Convergence acceleration of radiative transfer equation solution at strongly anisotropic scattering.
2. Goudsmit S., Saunderson J.L. Multiple scattering of electrons // Phys. Rev. 1940, V. 57. P. 24-29.
3. Przybylski K, Ligou J. Numerical Solution of the Boltzmann Equation Including Fokker-Plank Terms // Nucl. Sci. Eng. 1982. V. 81. PP. 92.
4. Sanchez R, McCormic N. Discrete Ordinates Solutions for Highly Forward Peaked Scattering // Nucl. Sci. Eng. 2004 V. 147. P. 249-274
5. Владимиров В.С. Обобщённые функции в математической физике. 2-е изд., испр и доп. М., Наука, 1979, 320 стр.
6. Марчук Г.И., Лебедев В.И. Численные методы в теории переноса нейтронов. М., Атомиздат., 1981
7. Mobley C.D., Sundman L.K., Boss E. Phase function effects on oceanic light fields // Appl Opt. 2002. V. 41. PP. 1035-1050.
8. Nikolaeva O.V., Bass L.P., Germogenova T.A., Kuznetsov V.S. Algorithms to calculation of radiative fields from localized sources via the code Raduga-5.1(P) // Transport Theory & Statistical Physics. 2007. V. 36. PP. 439-474.