



Ладонкина М.Е., Неклюдова О.А.,
Тишкин В.Ф.

Лимитер повышенного
порядка точности для
разрывного метода
Галеркина на треугольных
сетках

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Ладонкина М.Е., Неклюдова О.А., Тишкин В.Ф. Лимитер повышенного порядка точности для разрывного метода Галеркина на треугольных сетках // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2013. № 53. 26 с. URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2013-53>

**Ордена Ленина
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М.В.Келдыша
Российской академии наук**

М.Е.Ладонкина, О.А.Неклюдова, В.Ф.Тишкин

**Лимитер повышенного порядка точности
для разрывного метода Галеркина
на треугольных сетках**

Москва — 2013

Ладонкина М.Е., Неклюдова О.А., Тишкин В.Ф.

Лимитер повышенного порядка точности для разрывного метода Галеркина на треугольных сетках

Построен новый лимитер, сохраняющий высокий порядок точности на гладких решениях при решении задач гидродинамики разрывным методом Галеркина, являющийся обобщением «моментного» лимитера на треугольные сетки.

Ключевые слова: разрывный метод Галеркина, лимитеры, уравнения Эйлера

Marina Eugeniivna Ladonkina, Olga Alexandrovna Neklyudova, Vladimir Fedorovich Tishkin

The high order limiter for RKDG on triangular meshes

The limiter, saving high order of accuracy on smooth solutions obtained by RKDG for hydrodynamic problems, was developed. This limiter is a generalization of a "moment" limiter on triangular meshes.

Key words: discontinuous Galerkin methods, limiters, Euler equations

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект 11-01-00444_a.

Оглавление

Введение	3
1. Применение разрывного метода Галеркина к решению системы уравнений Эйлера	3
2. Используемые лимитеры.....	5
3. Моментный лимитер 2D.....	10
4. Лимитирование характеристических переменных.....	13
5. Выбор направлений лимитируемых производных.....	14
6. Исследование порядка точности метода	16
Выводы	23
Список литературы	24

Введение

Для решения задач газовой динамики в настоящее время широко применяется метод Галеркина с разрывными базисными функциями, который характеризуется высоким порядком точности получаемого решения. Как известно, для обеспечения монотонности решения, полученного данным методом, необходимо вводить так называемые ограничители наклона, или лимитеры, в особенности в том случае, если решение содержит сильные разрывы. Идея классического лимитера Кокбурна [1,2] легко реализуется как в одномерном, так и в двумерном и трехмерном случаях, причем на произвольных треугольных и тетраэдральных сетках. Но при использовании данного лимитера, к сожалению, снижается точность решения [3,4]. При использовании разрывного метода Галеркина высокого порядка точности хорошо зарекомендовал себя «моментный» лимитер [5]. Однако при решении задач с двумя или тремя пространственными переменными применение «моментного» лимитера возможно лишь при использовании ортогональных сеток. В данной работе предложен новый лимитер, сохраняющий высокий порядок точности на гладких решениях, являющийся обобщением «моментного» лимитера на треугольные сетки.

Авторы выражают искреннюю признательность Жукову В.Т. за постоянный интерес, ценные замечания и помощь в работе.

1. Применение разрывного метода Галеркина к решению системы уравнений Эйлера

Рассмотрим уравнения двумерной идеальной газовой динамики, записанные в виде:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F(U)}{\partial x} + \frac{\partial G(U)}{\partial y} = 0,$$

$$\text{где } U = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ E \end{pmatrix}, F = \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho uv \\ (E + p)u \end{pmatrix}, G = \begin{pmatrix} \rho v \\ \rho uv \\ \rho v^2 + p \\ (E + p)v \end{pmatrix} \quad (1)$$

величины ρ, ε, p соответствуют плотности, удельной внутренней энергии и давлению газа, u, v – компоненты скорости, а $E = \rho \left(\varepsilon + \frac{u^2 + v^2}{2} \right)$ – полная

энергия на единицу объема. Для определения давления p будем использовать уравнение состояния идеального газа:

$$p = (\gamma - 1)\rho\varepsilon, \quad (2)$$

где γ – показатель адиабаты.

Эти уравнения должны быть дополнены начальными и граничными условиями, вид которых зависит от конкретной задачи, и будут конкретизированы далее.

Для применения разрывного метода Галеркина покроем область Ω , на которой ищется решение, треугольной сеткой T_h .

На каждом треугольнике T_j приближенное решение системы уравнений (1) будем искать в виде полиномов $P(x, y)$ степени p с зависящими от времени коэффициентами. Будем рассматривать случаи представления решения в виде линейных $p = 1$ и квадратичных $p = 2$ полиномов, тогда решение на треугольнике T_j будет иметь вид

$$U_h(x, y, t) = U_0(t)\phi_0(x, y) + \sum_{k=x, y} U_k(t)\phi_k(x, y) + \sum_{l, \omega=x, y} U_{l\omega}(t)\phi_{l\omega}(x, y), \quad (3)$$

где $\phi_k(x, y)$, $\phi_{l\omega}(x, y)$ – базисные функции, $U_k(t), U_{l\omega}(t)$ – соответствующие коэффициенты разложения. В данной работе в качестве базисных функций используется базис Тейлора.

$$\begin{aligned} \phi_0 &= 1, \\ \phi_x &= \frac{x - x_c}{\Delta x}, \quad \phi_y = \frac{y - y_c}{\Delta y}, \\ \phi_{xx} &= \left(\frac{x - x_c}{\Delta x}\right)^2, \quad \phi_{xy} = \left(\frac{x - x_c}{\Delta x}\right)\left(\frac{y - y_c}{\Delta y}\right), \quad \phi_{yy} = \left(\frac{y - y_c}{\Delta y}\right)^2 \end{aligned} \quad (4)$$

где (x_c, y_c) – центр масс ячейки, $\Delta x, \Delta y$ – проекция ячейки на оси x и y соответственно. Заметим, что данный базис является не ортогональным.

Приближенное решение системы (1) в разрывном методе Галеркина ищется как решение следующей системы [1]:

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \int_{T_j} U_h(x, y, t) \cdot \phi_k(x, y) dx dy + \iint_{\partial T_j} h(U_h^+(x, y, t), U_h^-(x, y, t), n) \cdot \phi_k(x, y) dS \\ & - \int_{T_j} \left[F(U_h(x, y, t)) \cdot \frac{\partial \phi_k(x, y)}{\partial x} + G(U_h(x, y, t)) \cdot \frac{\partial \phi_k(x, y)}{\partial y} \right] dx dy = 0, \quad (5) \\ & \forall \phi_k(x, y), k = 0, x, y, xx, xy, yy. \end{aligned}$$

где $U_h(x, y, t) = (\rho_h(x, y, t), \rho u_h(x, y, t), \rho v_h(x, y, t), E_h(x, y, t))^T$ – вектор решения, n – вектор внешней единичной нормали по границе элемента ∂T_j . Величины, обозначенные через $U_h^+(x, y, t)$, вычисляются на границе ∂T_j элемента T_j по значениям внутри элемента T_j , в то время как величины, обозначенные через $U_h^-(x, y, t)$, вычисляются на границе ∂T_j по значениям в соседней к данному элементу T_j ячейке. $h(U_h^+(x, y, t), U_h^-(x, y, t), n)$ – численная потоковая функция, зависящая от значений приближенного решения по обе стороны границы элемента и от направления единичного нормального вектора n [6-8], для которой выполнено условие согласования

$$h(U_h^+(x, y, t), U_h^-(x, y, t), n) = F(U_h(x, y, t)) \cdot (n_x)_{\partial T_j} + G(U_h(x, y, t)) \cdot (n_y)_{\partial T_j}. \quad (6)$$

В качестве численного потока в данной работе был использован поток Годунова [8].

Интегралы в уравнении (5) заменяем квадратурными формулами нужного порядка [9, 10].

2. Используемые лимитеры

Прямое использование формул (5) для расчета решений, содержащих разрывы, может привести к возникновению осцилляций в окрестностях разрывов. Для устойчивого счета в разрывном методе Галеркина используются специальные ограничители.

Перейдем к описанию лимитера Кокбурна $\Lambda \Pi_h$ [1,2] в двумерном случае. Классический лимитер Кокбурна $\Lambda \Pi_h$ [1] представляет собой оператор, воздействующий на кусочно-линейную функцию $u_h(x, y) = u_0 + \sum_{k=x,y} u_k \phi_k(x, y)$ и удовлетворяющий условию сохранения «массы» для любого элемента $T_j \in T_h$

$$\int_{T_j} \Lambda \Pi_h u_h dx dy = \int_{T_j} u_h dx dy. \quad (7)$$

Результатом действия лимитера $\Lambda \Pi_h$

$$\Lambda \Pi_h u_h = u_0 + \sum_{k=x,y} \tilde{u}_k \phi_k(x,y) \quad (8)$$

является кусочно-линейная функция, величины наклона которой по направлениям, заранее определенным по некоторому правилу, не превышают величин наклона исходной функции.

Построим лимитер на треугольных элементах (рис. 1).

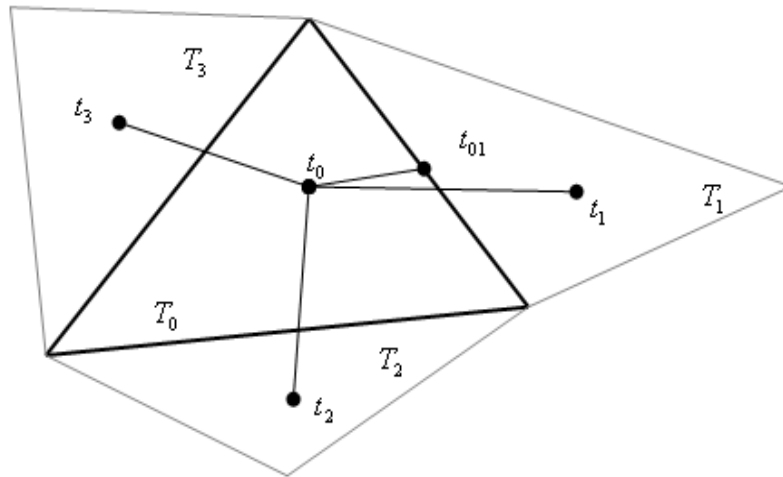


Рис. 1. Построение лимитера

Обозначим через t_j центр масс треугольника T_j , через t_{0j} – центр j -го ребра, являющегося общим для треугольников T_0 и T_j , $j=0,1,2,3$.

Рассмотрим на каждом из треугольников T систему базисных функций, построенных следующим образом. Пусть t_{0j} – центр j -го ребра треугольника. Тогда базисная функция $\psi_j(x,y)$ – линейная функция, принимающая значение 1 в центре j -го ребра и значение 0 в центрах двух оставшихся ребер.

$$\psi_j(x,y) = \begin{cases} 1, & \text{в } t_{0j}, \\ 0, & \text{в } t_{0i}, \end{cases} \quad j \neq i. \quad (9)$$

Приближенное решение в треугольнике T ищем в виде разложения по базису $\{\psi_j(x,y)\}$, $j=1,2,3$, т.е.

$$u_h(x, y, t) = \sum_{j=1}^3 u_{0j}(t) \cdot \psi_j(x, y), \quad (10)$$

где $u_{0j}(t)$ равно значению численного решения в центре j -го ребра.

Вычислим приращение функции u_h в точке t_{0j}

$$\Delta u_{0j} = u_h(t_{0j}) - u_h(t_0) = u_h(t_{0j}) - u_0, \quad (11)$$

где

$$u_0 = \bar{u}_{T_0} = \frac{1}{|T_0|} \int_{T_0} u_h dx dy = u_h(t_0). \quad (12)$$

Тогда для $(x, y) \in T_0$ в фиксированный момент времени t можно записать:

$$u_h(x, y) = \sum_{j=1}^3 u_{0j} \cdot \psi_j(x, y) = u_0 + \sum_{j=1}^3 \Delta u_{0j} \cdot \psi_j(x, y). \quad (13)$$

Построим линейную функцию $\tilde{u}_{hj}(x, y)$ на треугольнике, вершины которого являются центрами масс соответствующего треугольника $T_0T_1T_2$, $T_0T_1T_3$ или $T_0T_2T_3$ по интегральным средним значениям внутри данного треугольника. Выбор треугольника определяется положением точки t_{0j}

Вычислим приращение функции в точке t_{01}

$$\Delta \tilde{u}_{0j} = \tilde{u}_{0j} - u_0. \quad (14)$$

Для определения $\Lambda \Pi_h u_h$ вычислим величины

$$\Delta_j = \min \text{mod}(\Delta u_{0j}, \mu \cdot \Delta \tilde{u}_{0j}),$$

$$\min \text{mod}(a_1, \dots, a_N) = \begin{cases} s \cdot \min(|a_1|, \dots, |a_N|), & \text{если } s = \text{sign}(a_1) = \dots = \text{sign}(a_N), \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases} \quad (15)$$

где $1 \leq \mu \leq 2$.

Для выполнения закона сохранения (7) необходимо потребовать выполнения условия

$$\int_{T_j} \left(u_0 + \sum_{j=1}^3 \Delta_j \cdot \psi_j(x, y) \right) dx dy = \int_{T_j} u_h dx dy \quad (16)$$

или

$$u_0 \cdot S_{T_j} + \frac{S_{T_j}}{3} \sum_{j=1}^3 \Delta_j = u_0 \cdot S_{T_j} \quad (17)$$

Если это равенство выполнено, т.е.

$$\sum_{j=1}^3 \Delta_j = 0, \quad (18)$$

то полагаем процесс лимитирования окончанным, и ограниченная функция выглядит следующим образом

$$\Delta \Pi_h u_h = u_0 + \sum_{j=1}^3 \Delta_j \psi_j(x, y). \quad (19)$$

Иначе, если условие (17) не выполнено, т.е. $\sum_{j=1}^3 \Delta_j \neq 0$, и в целях выполнения условия неувеличения наклона по заранее определенным направлениям, величины $|\Delta_j|$ подвергаются коррекции в сторону уменьшения.

Возможны 2 варианта:

1. все Δ_j одного знака, тогда полагаем $\Delta_j = 0$, $j = 1, 2, 3$;
2. две Δ_j одного знака, а третья Δ_j – противоположного, пусть для определенности $sign(\Delta_1) = sign(\Delta_2) = -sign(\Delta_3)$ и $|\Delta_1 + \Delta_2| > |\Delta_3|$, тогда для выполнения (18) следует большие величины уменьшить так, чтобы $\theta \cdot (\Delta_1 + \Delta_2) + \Delta_3 = 0$, где $\theta < 1$.

Алгоритмически этот процесс описан ниже (20) – (24).

Вычисляем суммарный вклад положительных членов

$$\Delta^+ = \sum_{j=1}^3 \max(0, \Delta_j) \quad (20)$$

и суммарный вклад отрицательных членов

$$\Delta^- = \sum_{j=1}^3 \max(0, -\Delta_j) \quad (21)$$

суммы $\sum_{j=1}^3 \Delta_j$.

Полагаем

$$\theta^+ = \min\left(1, \frac{\Delta^-}{\Delta^+}\right), \quad \theta^- = \min\left(1, \frac{\Delta^+}{\Delta^-}\right). \quad (22)$$

Определим величину

$$\tilde{\Delta}_j = \theta^+ \max(0, \Delta_j) - \theta^- \max(0, -\Delta_j). \quad (23)$$

Тогда окончательно получим

$$\Lambda\Pi_h u_h(x, y) = u_0 + \sum_{j=1}^3 \tilde{\Delta}_j \psi_j(x, y). \quad (24)$$

Легко видеть, что представленный лимитер удовлетворяет перечисленным выше требованиям.

Для применения данного лимитера в случае, когда решение представляет собой полином порядка выше единицы, спроецируем функцию

$$u_h(x, y, t) = u_0(t) \cdot \phi_0(x, y) + \sum_{k=x, y} u_k(t) \cdot \phi_k(x, y) + \sum_{l, \omega=x, y} u_{l\omega}(t) \cdot \phi_{l\omega}(x, y)$$

на пространство линейных полиномов

$$u_h^l(x, y) = \sum_{j=1}^3 u_{0j}^l \cdot \psi_j(x, y).$$

Далее лимитируем функцию $u_h^l(x, y)$ в соответствии с алгоритмом, описанным выше (11) – (15). Если $\Delta_j^l = \Delta u_{0j}^l$ для всех j , то в результате действия лимитера исходная функция не изменится:

$$\Lambda\Pi_h u_h(x, y) = u_0(t) \cdot \phi_0(x, y) + \sum_{k=x, y} u_k(t) \cdot \phi_k(x, y) + \sum_{l, \omega=x, y} u_{l\omega}(t) \cdot \phi_{l\omega}(x, y),$$

в противном случае продолжаем лимитирование в соответствии с алгоритмом (20)– (24).

3. Моментный лимитер 2D

Как было отмечено выше, система базисных функций (4) не является ортогональной. Для построения нового «моментного» лимитера перейдем к блочно-ортогональной системе базисных функций.

$$\text{I: } \varphi_0 = 1,$$

$$\text{II: } \varphi_x = \frac{x - x_c}{\Delta x}, \varphi_y = \frac{y - y_c}{\Delta y},$$

$$\text{III: } \begin{cases} \varphi_{xx} = \left(\frac{x - x_c}{\Delta x}\right)^2 + \alpha_{xx} \left(\frac{x - x_c}{\Delta x}\right) + \beta_{xx} \left(\frac{y - y_c}{\Delta y}\right) + \gamma_{xx}, \\ \varphi_{xy} = \left(\frac{x - x_c}{\Delta x}\right) \left(\frac{y - y_c}{\Delta y}\right) + \alpha_{xy} \left(\frac{x - x_c}{\Delta x}\right) + \beta_{xy} \left(\frac{y - y_c}{\Delta y}\right) + \gamma_{xy}, \\ \varphi_{yy} = \left(\frac{y - y_c}{\Delta y}\right)^2 + \alpha_{yy} \left(\frac{x - x_c}{\Delta x}\right) + \beta_{yy} \left(\frac{y - y_c}{\Delta y}\right) + \gamma_{yy} \end{cases} \quad (21)$$

где параметры $\alpha_{r\omega}$, $\beta_{r\omega}$, $\gamma_{r\omega}$, $\zeta_{r\omega}$ определяются из условия ортогональности квадратичных функций $\varphi_{r\omega}$ всем линейным функциям φ_r и единичной φ_0 , т.е.

$$\left(\varphi_{r\omega}, \varphi_\mu\right) = \int_{T_j} \left(\varphi_{r\omega} \cdot \varphi_\mu\right) dx dy = 0, \quad r, \omega, \mu = x, y. \quad (22)$$

Разложим исходную функцию $u_h(x, y, t)$ (3) по базису (21):

$$\begin{aligned} u_h(x, y, t) &= u_0(t) + \sum_{k=x, y} u_k(t) \cdot \phi_k(x, y) + \sum_{r, \omega=x, y} u_{r\omega}(t) \cdot \phi_{r\omega}(x, y) = \\ &= \bar{u}_0 + \sum_{k=x, y, z} v_k(t) \cdot \phi_k(x, y) + \sum_{r, \omega=x, y, z} v_{r\omega}(t) \cdot \phi_{r\omega}(x, y) \end{aligned} \quad (23)$$

где

$$\bar{u}_0 = \frac{1}{|T_0|} \int_{T_0} u_h dx dy = u_0 - (u_{xx} \gamma_{xx} + u_{xy} \gamma_{xy} + u_{yy} \gamma_{yy}), \quad (24)$$

$$\begin{aligned}
v_x &= u_x - (u_{xx}\alpha_{xx} + u_{xy}\alpha_{xy} + u_{yy}\alpha_{yy}), \\
v_y &= u_y - (u_{xx}\beta_{xx} + u_{xy}\beta_{xy} + u_{yy}\beta_{yy}).
\end{aligned}
\tag{25}$$

Запишем производные функции $u_h(x, y, t)$ в виде

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u_h(x, y)}{\partial x} &= a_x + b_x \left(\frac{x - x_c}{\Delta x} \right) + c_x \left(\frac{y - y_c}{\Delta y} \right), \\
\frac{\partial u_h(x, y)}{\partial y} &= a_y + b_y \left(\frac{x - x_c}{\Delta x} \right) + c_y \left(\frac{y - y_c}{\Delta y} \right),
\end{aligned}
\tag{26}$$

где

$$\begin{aligned}
a_x &= \frac{u_x + u_{xx}\alpha_{xx} + u_{xy}\alpha_{xy} + u_{yy}\alpha_{yy}}{\Delta x}, \\
b_x &= 2u_{xx} \left(\frac{x - x_c}{\Delta x^2} \right), \quad c_x = u_{xy} \left(\frac{y - y_c}{\Delta x \Delta y} \right), \\
a_y &= \frac{u_y + u_{xx}\beta_{xx} + u_{xy}\beta_{xy} + u_{yy}\beta_{yy}}{\Delta y}, \\
b_y &= u_{xy} \left(\frac{x - x_c}{\Delta x \Delta y} \right), \quad c_y = 2u_{yy} \left(\frac{y - y_c}{\Delta y^2} \right).
\end{aligned}
\tag{27}$$

Как видим, $\frac{\partial u(x, y)}{\partial x}$ и $\frac{\partial u(x, y)}{\partial y}$ являются линейными функциями, к которым возможно применить оператор лимитирования $\Lambda \Pi_h$ (8)

$$\begin{aligned}
\Lambda \Pi_h \frac{\partial u_h(x, y)}{\partial x} &= a_x + \tilde{b}_x \left(\frac{x - x_c}{\Delta x} \right) + \tilde{c}_x \left(\frac{y - y_c}{\Delta y} \right), \\
\Lambda \Pi_h \frac{\partial u_h(x, y)}{\partial y} &= a_y + \tilde{b}_y \left(\frac{x - x_c}{\Delta x} \right) + \tilde{c}_y \left(\frac{y - y_c}{\Delta y} \right).
\end{aligned}
\tag{28}$$

Значения $\Lambda \Pi_h \frac{\partial u_h(x, y)}{\partial x}$ и $\Lambda \Pi_h \frac{\partial u_h(x, y)}{\partial y}$ будем рассматривать как значения производных по x и y от лимитируемой функции $u_h(x, y)$. Заметим, что после

применения лимитера соотношение $\frac{\partial}{\partial y} \left(\Lambda \Pi_h^n \frac{\partial u_h(x, y)}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\Lambda \Pi_h^n \frac{\partial u_h(x, y)}{\partial y} \right)$ может оказаться невыполненным. Для его выполнения в качестве производных от лимитированной функции $\Lambda \Pi_h u_h(x, y)$ будем использовать следующие формулы:

$$\begin{aligned} \Lambda \Pi_h^n \frac{\partial u_h(x, y)}{\partial x} &= a_x + \tilde{b}_x \left(\frac{x - x_c}{\Delta x} \right) + \mu(\tilde{c}_x, \tilde{b}_y) \left(\frac{y - y_c}{\Delta y} \right), \\ \Lambda \Pi_h \frac{\partial u_h(x, y)}{\partial y} &= a_y + \mu(\tilde{c}_x, \tilde{b}_y) \left(\frac{x - x_c}{\Delta x} \right) + \tilde{c}_y \left(\frac{y - y_c}{\Delta y} \right). \end{aligned} \quad (29)$$

В качестве функции $\mu(\tilde{c}_x, \tilde{b}_y)$ можно взять функцию

$$\mu(\tilde{c}_x, \tilde{b}_y) = \frac{\tilde{c}_x + \tilde{b}_y}{2}. \quad (30)$$

Если в результате действия лимитера на функции $\frac{\partial u_h(x, y)}{\partial x}$ и $\frac{\partial u_h(x, y)}{\partial y}$ коэффициенты u_3, u_4, u_5 не изменились, а именно, $u_3 = \tilde{b}_x, u_4 = \psi(\tilde{c}_x, \tilde{b}_y), u_5 = \tilde{c}_y$, то результатом действия лимитера будет исходная функция $u_h(x, y, t)$, в противном случае, подобно одномерному «моментному» лимитеру, следует перейти к лимитированию коэффициентов при линейной части, отбросив отлимитированную квадратичную часть функции (3)

$$\begin{aligned} u_h^l(x, y, t) &= \bar{u}_0 + v_x \left(\frac{x - x_c}{\Delta x} \right) + v_y \left(\frac{y - y_c}{\Delta y} \right), \\ \Lambda \Pi_h u_h^l(x, y, t) &= \bar{u}_0 + \tilde{v}_x \left(\frac{x - x_c}{\Delta x} \right) + \tilde{v}_y \left(\frac{y - y_c}{\Delta y} \right). \end{aligned} \quad (31)$$

Результатом действия моментного лимитера является полином той же степени, что и исходная функция

$$\begin{aligned}
\Lambda \Pi_h^M u_h(x, y, t) &= \bar{u}_0 + \sum_{k=x, y} \tilde{v}_k(t) \cdot \phi_k(x, y) + \sum_{k, j=x, y, z} \tilde{v}_{kj}(t) \cdot \phi_{kj}(x, y) = \\
&= \tilde{u}_0(t) + \sum_{k=x, y, z} \tilde{u}_k(t) \cdot \phi_k(x, y) + \sum_{k, j=x, y, z} \tilde{u}_{kj}(t) \cdot \phi_{kj}(x, y)
\end{aligned} \quad (32)$$

где

$$\begin{aligned}
v_x &= \tilde{v}_x, \quad v_y = \tilde{v}_y, \quad v_{xx} = \tilde{b}_x, \quad v_{xy} = \psi(\tilde{c}_x, \tilde{b}_y), \quad v_{yy} = \tilde{c}_y. \\
\tilde{u}_0 &= \bar{u}_0 + \tilde{v}_{xx} \gamma_{xx} + \tilde{v}_{xy} \gamma_{xy} + \tilde{v}_{yy} \gamma_{yy}, \\
\tilde{u}_x &= \tilde{v}_x + \tilde{v}_{xx} \alpha_{xx} + \tilde{v}_{xy} \alpha_{xy} + \tilde{v}_{yy} \alpha_{yy}, \\
\tilde{u}_y &= \tilde{v}_y + \tilde{v}_{xx} \beta_{xx} + \tilde{v}_{xy} \beta_{xy} + \tilde{v}_{yy} \beta_{yy}, \\
\tilde{u}_{xx} &= \tilde{v}_{xx}, \\
\tilde{u}_{xy} &= \tilde{v}_{xy}, \\
\tilde{u}_{yy} &= \tilde{v}_{yy}.
\end{aligned} \quad (33)$$

4. Лимитирование характеристических переменных

В случае систем уравнений процедура монотонизации проводится для локальных характеристических переменных. Заметим, что для вычисления характеристических переменных достаточно определить собственные вектора матрицы

$$A_n = A \cdot n_x + B \cdot n_y, \quad (34)$$

где A и B – матрицы Якоби потоков $F(U)$ и $G(U)$ соответственно,

$$A = \frac{\partial F(U)}{\partial U}, \quad B = \frac{\partial G(U)}{\partial U}. \quad (35)$$

В самом деле, выписав уравнения для

$$p = \frac{\partial U}{\partial x}, \quad q = \frac{\partial U}{\partial y}; \quad (36)$$

получим систему (37) – (39)

$$\frac{\partial U}{\partial t} + A \cdot \frac{\partial U}{\partial x} + B \cdot \frac{\partial U}{\partial y} = 0; \quad (37)$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} + A \cdot \frac{\partial p}{\partial x} + B \cdot \frac{\partial p}{\partial y} + \Phi(U, p, q) = 0; \quad (38)$$

$$\frac{\partial q}{\partial t} + A \cdot \frac{\partial q}{\partial x} + B \cdot \frac{\partial q}{\partial y} + \Psi(U, p, q) = 0, \quad (39)$$

для которой характеристическая матрица имеет вид

$$\begin{pmatrix} A_n & 0 & 0 \\ 0 & A_n & 0 \\ 0 & 0 & A_n \end{pmatrix}, \quad (40)$$

а функции

$$\Phi(U, p, q) = p^2 \cdot \frac{\partial A}{\partial U} + q \cdot p \cdot \frac{\partial B}{\partial U} \text{ и } \Psi(U, p, q) = p \cdot q \cdot \frac{\partial A}{\partial U} + q^2 \cdot \frac{\partial B}{\partial U}. \quad (41)$$

5. Выбор направлений лимитируемых производных

Во избежание ситуации, когда направление, по которому производится лимитирование, ортогонально вектору градиента, необходимо перейти в новую систему координат.

Обозначим через (g_x, g_y) единичный вектор по направлению вектора градиента функции $u_h(x, y, t)$, вычисленный в точке (x_c, y_c) ,

$$g_x = \frac{\frac{\partial u}{\partial x}(x_c, y_c)}{|\bar{g}|}, \quad g_y = \frac{\frac{\partial u}{\partial y}(x_c, y_c)}{|\bar{g}|}, \quad (42)$$

где

$$|\bar{g}| = \sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}(x_c, y_c)\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}(x_c, y_c)\right)^2}.$$

Выберем два единичных вектора x' и y' так, чтобы вектор \bar{g} составлял с вектором x' угол 45° и векторы x' и y' были ортогональны.

$$(\bar{g}, \bar{x}') = \cos \varphi_{x'} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad (\bar{g}, \bar{y}') = \cos \varphi_{y'} = -\frac{1}{\sqrt{2}}. \quad (43)$$

После того, как выбраны векторы $\bar{x}' = \left(\frac{g_x - g_y}{\sqrt{2}}, \frac{g_x + g_y}{\sqrt{2}} \right)$ и $\bar{y}' = \left(-\frac{g_x + g_y}{\sqrt{2}}, \frac{g_x - g_y}{\sqrt{2}} \right)$, определим новую систему координат $0\tilde{x}\tilde{y}$, с центром координат в точке 0 и осями координат, совпадающими по направлению с векторами x' и y' . Далее необходимо сделать поворот группы треугольников, состоящей из треугольника T_0 , в котором производится лимитирование, и его соседей T_1, T_2, T_3 . Новые координаты при этом вычисляются по формуле:

$$\begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{g_x - g_y}{\sqrt{2}} & \frac{g_x + g_y}{\sqrt{2}} \\ -\frac{g_x + g_y}{\sqrt{2}} & \frac{g_x - g_y}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}. \quad (44)$$

Обозначив

$$\alpha = \frac{g_x - g_y}{\sqrt{2}}, \quad \beta = \frac{g_x + g_y}{\sqrt{2}}, \quad (45)$$

запишем лимитируемую полиномиальную функцию в новых координатах в виде

$$\begin{aligned} U(\tilde{x}, \tilde{y}) = & u_0 + \tilde{u}_1 \frac{(\tilde{x} - \tilde{x}_c)}{\Delta \tilde{x}} + \tilde{u}_2 \frac{(\tilde{y} - \tilde{y}_c)}{\Delta \tilde{y}} + \\ & \tilde{u}_3 \left(\frac{\tilde{x} - \tilde{x}_c}{\Delta \tilde{x}} \right)^2 + \tilde{u}_4 \frac{(\tilde{x} - \tilde{x}_c)}{\Delta \tilde{x}} \frac{(\tilde{y} - \tilde{y}_c)}{\Delta \tilde{y}} + \left(\frac{\tilde{y} - \tilde{y}_c}{\Delta \tilde{y}} \right)^2 \end{aligned} \quad (46)$$

где

$$\begin{aligned}
\tilde{u}_1 &= \frac{\Delta\tilde{x}}{\Delta x} u_1 \alpha + \frac{\Delta\tilde{x}}{\Delta y} u_2 \beta, & \tilde{u}_2 &= \frac{\Delta\tilde{y}}{\Delta y} u_2 \alpha - \frac{\Delta\tilde{y}}{\Delta x} u_1 \beta, \\
\tilde{u}_3 &= \left(\frac{\Delta\tilde{x}}{\Delta x}\right)^2 u_3 \alpha^2 + \frac{(\Delta\tilde{x})^2}{\Delta x \Delta y} u_4 \alpha \beta + \left(\frac{\Delta\tilde{x}}{\Delta y}\right)^2 u_5 \beta^2, \\
\tilde{u}_4 &= \frac{\Delta\tilde{x} \Delta\tilde{y}}{(\Delta y)^2} u_5 \cdot 2\alpha\beta + \frac{\Delta\tilde{x} \Delta\tilde{y}}{\Delta x \Delta y} u_4 (\alpha^2 - \beta^2) - \frac{\Delta\tilde{x} \Delta\tilde{y}}{(\Delta x)^2} u_3 \cdot 2\alpha\beta, \\
\tilde{u}_5 &= \left(\frac{\Delta\tilde{y}}{\Delta x}\right)^2 u_3 \beta^2 - \frac{(\Delta\tilde{y})^2}{\Delta x \Delta y} u_4 \alpha \beta + \left(\frac{\Delta\tilde{y}}{\Delta y}\right)^2 u_5 \beta^2.
\end{aligned}$$

Для векторных переменных $\rho u, \rho v$ на первом этапе преобразования следует перейти в новую систему координат $\{0, \tilde{x}, \tilde{y}\}$

$$\begin{aligned}
\rho\tilde{u} &= \rho u \cdot \alpha + \rho v \cdot \beta, \\
\rho\tilde{v} &= -\rho u \cdot \beta + \rho v \cdot \alpha,
\end{aligned} \tag{47}$$

затем пересчитать коэффициенты полиномов $\rho\tilde{u}, \rho\tilde{v}$ по формулам (46). Данное преобразование необходимо провести во всех соседних ячейках. Далее проводится стандартная процедура лимитирования, описанная в п.3. После выхода из процедуры необходимо сделать обратное преобразование.

Замечание 1. Для методов высокого порядка точности необходимо использовать схемы высокого порядка по времени. Мы использовали схему Рунге-Кутты третьего порядка[1]:

$$\begin{aligned}
U^* &= \Lambda \Pi_h \left\{ U^n + \Delta t L(U^n) \right\} \\
U^{**} &= \Lambda \Pi_h \left\{ \frac{3}{4} U^n + \frac{1}{4} U^* + \frac{1}{4} \Delta t L(U^*) \right\} \\
U^{n+1} &= \Lambda \Pi_h \left\{ \frac{1}{3} U^n + \frac{2}{3} U^{**} + \frac{2}{3} \Delta t L(U^{**}) \right\}.
\end{aligned} \tag{48}$$

6. Исследование порядка точности метода

В качестве тестовой задачи, на которой возможно исследовать порядки точности метода, будем использовать простую волну, в которой энтропия p / ρ^γ и инвариант Римана $R^+ = u + (2 / (\gamma - 1))c$ являются постоянными.

Распределение плотности в начальный момент выберем в виде бесконечно гладкой функции:

$$\rho = \begin{cases} 1 + \exp\left(2 - 2l^2 / (l^2 - x^2)\right), & |x| < l, \\ 1, & \text{иначе,} \end{cases} \quad x \in [-1, 1], \quad l = 0.2, \quad \gamma = 5/3. \quad (49)$$

Остальные гидродинамические параметры определяются из условий постоянства энтропии и инварианта R^+

$$\varepsilon = \rho^{(\gamma-1)}, \quad u = \frac{-2\sqrt{\varepsilon(\gamma-1)\gamma}}{\gamma-1}, \quad E = \rho\varepsilon + \rho\frac{u^2}{2}. \quad (50)$$

Так как задача рассматривалась в двумерной постановке в прямоугольной расчетной области $[X] \times [Y] = [-1, 1] \times [0, 0.06]$, на границах области заданы постоянные граничные условия:

$$\begin{aligned} \rho(-1, y, t) &= 1, \quad u(-1, y, t) = -\sqrt{10}, \quad E(-1, y, t) = 6, \\ \rho(1, y, t) &= 1, \quad u(1, y, t) = -\sqrt{10}, \quad E(1, y, t) = 6, \\ \rho(x, 0, t) &= \rho(x, 0.06, t), \quad u(x, 0, t) = u(x, 0.06, t), \quad E(x, 0, t) = E(x, 0.06, t). \end{aligned} \quad (51)$$

Численное решение задач (49)-(51) получено разрывным методом Галеркина с квадратичными базисными функциями. Вычисления интегралов проводились по квадратурным формулам Гаусса с семиточечным шаблоном. Порядки точности исследуемого метода r определены по правилу Рунге

$$r = \log_2 \frac{\|U_h - U^T\|_{L^i}}{\|U_{h/2} - U^T\|_{L^i}}, \quad (52)$$

где $U_h, U_{h/2}$ – численные решения задачи с пространственными шагами h и $h/2$ соответственно, U^T – точное решение задачи [3], в нормах L^1 , L^2 и L^4 .

$$\|U_h - U^T\|_{L^i} = \left(\iint_{\Omega} (U_h - U^T)^i dx dy \right)^{1/i}, \quad i = 1, 2, 4 \quad \Omega \in R^2. \quad (53)$$

Проведены серии расчетов без использования лимитера (Табл.1), с классическим лимитером Кокбурна (Табл.2.а-2.в) и с «моментным» лимитером (Табл.3.а-3.в). Расчеты выполнены на равномерных сетках с шагом $h_x = h_y =$

0,013, 0,0066, 0,0033 и 0,0016, с временным шагом $\Delta T = 1 \cdot 10^{-5}$. В таблицах параметр N – количество ячеек по направлению x .

Определены порядки точности исследуемого метода в нормах L^1 , L^2 и L^4 на два момента времени: $T=0.05$ и $T=0.07$.

Полные результаты исследования, приведенные в работе [3,4], показали, что при численном решении задач разрывным методом Галеркина с использованием линейных базисных функций при соответствующем выборе параметра лимитер Кокбурна и «моментный» лимитер в одномерном случае совпадают. В двумерном случае при использовании линейных базисных функций «моментный» лимитер полностью совпадает с лимитером Кокбурна по построению.

Таблица 1

Без лимитера					
L^1	N	T = 0.05		T = 0.07	
		ошибка	порядок	ошибка	порядок
	150	2.23e - 06		1.21e - 05	
	300	2.29e - 07	3.28	1.69e - 06	2.84
	600	2.60e - 08	3.14	1.44e - 07	3.55
	1200	3.19e - 09	3.02	1.41e - 08	3.34
L^2					
	150	2.62e - 05		2.19e - 04	
	300	2.73e - 06	3.26	3.95e - 05	2.47
	600	3.24e - 07	3.07	3.80e - 06	3.37
	1200	3.97e - 08	3.02	3.58e - 07	3.40
L^4					
	150	1.84e - 04		1.62e - 03	
	300	1.89e - 05	3.28	3.23e - 04	2.32
	600	2.39e - 06	2.98	3.65e - 05	3.14
	1200	2.96e - 07	3.01	3.55e - 06	3.36

Таблица 2.а

Лимитер Кокбурна ($\alpha = 2.0$)					
L^1	N	T = 0.05		T = 0.07	
		ошибка	порядок	ошибка	порядок
	150	6.08e - 05		1.02e - 04	
	300	1.31e - 05	2.20	2.69e - 05	1.92
	600	2.86e - 06	2.20	5.87e - 06	2.19
	1200	6.63e - 07	2.11	1.28e - 06	2.19
L^2					
	150	4.77e - 04		1.10e - 03	
	300	1.13e - 04	2.06	3.55e - 04	1.64
	600	2.65e - 05	2.10	8.89e - 05	1.99
	1200	6.51e - 06	2.02	1.92e - 05	2.20
L^4					
	150	2.30e - 03		7.03e - 03	
	300	5.79e - 04	1.99	2.48e - 03	1.50
	600	1.45e - 04	1.99	6.71e - 04	1.88
	1200	4.02e - 05	1.85	1.45e - 04	2.21

Таблица 2.б

Лимитер Кокбурна ($\alpha = 1.5$)					
L^1	N	T = 0.05		T = 0.07	
		ошибка	порядок	ошибка	порядок
	150	9.13e - 05		1.41e - 04	
	300	2.01e - 05	2.18	3.50e - 05	2.01
	600	4.10e - 06	2.29	7.43e - 06	2.23
	1200	8.98e - 07	2.19	1.58e - 06	2.22
L^2					
	150	6.25e - 04		1.15e - 03	
	300	1.66e - 04	1.91	3.79e - 04	1.60
	600	4.13e - 05	2.00	9.69e - 05	1.96
	1200	1.05e - 05	1.96	2.17e - 05	2.15
L^4					
	150	2.69e - 03		6.08e - 03	
	300	8.20e - 04	1.71	2.45e - 03	1.30
	600	2.40e - 04	1.77	6.75e - 04	1.86
	1200	7.19e - 05	1.74	1.48e - 04	2.18

Таблица 2.в

Лимитер Кокбурна ($\alpha = 1$)					
L^1	N	T = 0.05		T = 0.07	
		ошибка	порядок	ошибка	порядок
	150	3.40e - 04		5.77e - 04	
	300	1.02e - 04	1.73	1.81e - 04	1.66
	600	2.97e - 05	1.78	5.43e - 05	1.74
	1200	8.12e - 06	1.87	1.52e - 05	1.83
L^2					
	150	2.01e - 03		3.98e - 03	
	300	6.85e - 04	1.55	1.40e - 03	1.50
	600	2.20e - 04	1.63	4.70e - 04	1.57
	1200	6.40e - 05	1.77	1.49e - 04	1.65
L^4					
	150	8.53e - 03		1.98e - 02	
	300	3.18e - 03	1.42	7.64e - 03	1.37
	600	1.07e - 03	1.57	2.73e - 03	1.48
	1200	3.22e - 04	1.73	9.60e - 04	1.50

Таблица 3.а

«Моментный» лимитер ($\mu_1 = \mu_2 = 2.0$)					
		Г = 0.05		Г = 0.07	
L^1	N	ошибка	порядок	ошибка	порядок
	150	1.35e - 05		2.89e - 05	
	300	1.04e - 06	3.69	6.09e - 06	2.25
	600	5.76e - 08	4.17	9.18e - 07	2.73
	1200	3.60e - 09	3.99	9.32e - 08	3.29
L^2	150	1.51e - 04		4.29e - 04	
	300	1.51e - 05	3.32	1.39e - 04	1.62
	600	9.52e - 07	3.99	2.70e - 05	2.36
	1200	5.04e - 08	4.23	3.35e - 06	3.01
L^4	150	9.20e - 04		2.93e - 03	
	300	1.17e - 04	2.96	1.16e - 03	1.32
	600	7.81e - 06	3.91	2.48e - 04	2.23
	1200	3.97e - 07	4.29	3.52e - 05	2.81

Таблица 3.б

«Моментный» лимитер ($\mu_1 = \mu_2 = 1.5$)					
		Г = 0.05		Г = 0.07	
L^1	N	ошибка	порядок	ошибка	порядок
	150	3.69e - 05		8.93e - 05	
	300	3.76e - 06	3.29	7.23e - 06	3.62
	600	1.99e - 07	4.23	1.22e - 06	2.55
	1200	5.78e - 09	5.10	1.33e - 07	3.20
L^2	150	3.84e - 04		1.16e - 03	
	300	4.25e - 05	3.17	1.14e - 04	3.34
	600	2.70e - 06	3.97	3.28e - 05	1.80
	1200	7.37e - 08	5.19	4.86e - 06	2.75
L^4	150	2.19e - 03		8.53e - 03	
	300	2.51e - 04	3.12	8.76e - 04	3.28
	600	1.76e - 05	3.83	3.02e - 04	1.53
	1200	5.41e - 07	5.02	4.98e - 05	2.59

Таблица 3.в

«Моментный» лимитер ($\mu_1 = \mu_2 = 1.0$)					
L^1	N	T = 0.05		T = 0.07	
		ошибка	порядок	ошибка	порядок
	150	2.44e - 04		3.96e - 04	
	300	7.82e - 05	1.64	1.45e - 04	1.44
	600	2.29e - 05	1.76	4.75e - 05	1.61
	1200	6.05e - 06	1.92	1.39e - 05	1.76
L^2	150	1.88e - 03		3.36e - 03	
	300	6.97e - 04	1.43	1.51e - 03	1.15
	600	2.14e - 04	1.70	5.76e - 04	1.39
	1200	5.87e - 05	1.86	1.93e - 04	1.57
L^4	150	9.42e - 03		1.75e - 02	
	300	3.77e - 03	1.31	8.81e - 03	0.99
	600	1.20e - 03	1.65	3.79e - 03	1.21
	1200	3.28e - 04	1.86	1.41e - 03	1.42

Как видно из таблицы 1, решение, полученное разрывным методом Галеркина без использования лимитеров в момент времени $T=0.05$, показывает третий порядок точности, а в некоторых случаях и выше. В более поздний момент времени $T=0.07$ порядок решения на грубой сетке во всех нормах заметно ниже, но, следует заметить, что при измельчении сетки решение стремится к третьему порядку точности.

Далее рассмотрим решение, полученное при использовании лимитера Кокбурна (Табл. 2.а – 2.в). Также, как и в одномерном случае [3], проследим за влиянием выбора параметра лимитирования, обозначенного через μ , на точность решения. Так, при значении параметра $\mu=2$ (Табл. 2.а) получаем так называемый «слабый лимитер», который показывает порядок точности, равный 1.5 – 2.21, что на один порядок ниже, чем без использования лимитера. При уменьшении значения параметра $\mu=1,5$ (Табл. 2.б) порядки точности решений становятся незначительно ниже, некоторое отличие наблюдается только в расчетах на грубой сетке. В этом случае следует обратить внимание на поведение функции ошибки, которая, как и следовало, увеличивается. При использовании самых «жестких условий» (Табл. 2.в) при $\mu=1$, когда сказывается наибольшее влияние соседних ячеек, точность решения самая низкая, в данных расчетах она не превысила значения 1.87. Таким образом, независимо от выбора параметра лимитирования, применение данного лимитера не позволяет получить высокие порядки точности при использовании базиса с квадратичными функциями.

Далее в таблицах 3.а–3.в представлены результаты расчетов с использованием предложенной в данной работе модификации «моментного» лимитера, где μ_i – параметры лимитирования, i соответствует степени базисных функций, участвующих в лимитировании. В данных таблицах приведены расчеты с $\mu_1 = \mu_2$, так как предварительные исследования показали незначительное влияние параметра μ_2 на порядок решения при фиксированном значении параметра μ_1 . При выборе параметров $\mu_1 = \mu_2 = 2$ (Табл. 3.а) получаем «слабый» лимитер, который, в отличие от лимитера Кокбурна, позволяет получить на порядок более точное решение, как видно из таблиц 2.а и 3.а, как на момент времени $T=0.05$, так и $T=0.07$. При уменьшении значений параметров до $\mu_1 = \mu_2 = 1.5$ (Табл. 3.б) получаем вариант лимитера с более «жесткими» условиями, при этом точность решения мало отличается от точности решения, полученного с параметрами $\mu_1 = \mu_2 = 2$, если смотреть на функцию ошибки. При сравнении с лимитером Кокбурна с параметром $\mu = 1.5$ «моментный» лимитер во всех случаях показывает более точное решение, за исключением некоторой немонотонности в поведении функции порядка точности на поздний момент времени. При использовании самого жесткого варианта «моментного» лимитера с параметрами $\mu_1 = \mu_2 = 1$ получаем порядки точности решения ниже, чем при использовании лимитера Кокбурна с соответствующим параметром лимитирования.

Таким образом, только при использовании «моментного» лимитера со слабыми условиями лимитирования возможно получить решение повышенного порядка точности.

Следует отметить: как и в одномерном случае, в ряде расчетов порядок точности решения в соответствующих нормах возрастает с $T=0.05$ к $T=0.07$. Например, в Табл. 2.а и Табл. 2.б. Так как ошибка вычисления при этом увеличивается, можно утверждать, что скорость сближения численного решения на различных сетках между собой со временем возрастает, что влечет за собой увеличение в значениях порядков точности.

Выводы

При численном решении задач на треугольных сетках разрывным методом Галеркина с использованием квадратичных базисных функций лимитер Кокбурна не дает порядок точности выше второго, в то время как применение нового «моментного» лимитера при определенном выборе параметров позволяет получить решение третьего порядка. Таким образом, для сохранения высокого порядка точности на гладких решениях разрывным методом Галеркина необходимо применять «моментный» лимитер с соответствующими значениями параметров лимитирования.

Список литературы

1. Bernardo Cockburn, An Introduction to the Discontinuous Galerkin Method for Convection – Dominated Problems, Advanced Numerical Approximation of Nonlinear Hyperbolic Equations (Lecture Notes in Mathematics), 1998, V. 1697, pp. 151-268.
2. Галанин М.П., Грищенко Е.В., Савенков Е.Б., Токарева С.А. Применение RKDG метода для численного решения задач газовой динамики, 2006, Препринт 52, ИПМ им. М.В. Келдыша РАН, Москва. URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2006-52>
3. Ладонкина М.Е., Неклюдова О.А., Тишкин В.Ф. Исследование влияния лимитера на порядок точности решения разрывным методом Галеркина. // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. 2012. № 34. URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2012-34>
4. Ладонкина М.Е., Неклюдова О.А., Тишкин В.Ф. Исследование влияния лимитера на порядок точности решения разрывным методом Галеркина. // Матем. моделирование. 2012. № 24:12. С.124–128. URL: http://www.mathnet.ru/php/archive.phtml?wshow=paper&jrnid=mm&paperid=3234&option_lang=rus
5. Krivodonova L., Limiters for high-order discontinuous Galerkin methods, 2007, Journal of Computational Physics, vol. 226, pp. 879-896.
6. Русанов В.В. Расчет взаимодействия нестационарных ударных волн с препятствиями // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1961. т. I. № 2. С. 267-279. URL: http://www.mathnet.ru/php/archive.phtml?wshow=paper&jrnid=zvmmf&paperid=7987&option_lang=rus
7. Lax P.D. Weak solutions of nonlinear hyperbolic equations and their numerical computation. // Communications on Pure and Applied Mathematics. 1954.7. № 1. P.159 -193.
8. Годунов С.К. Разностный метод численного расчета разрывных решений уравнений гидродинамики // Мат. сборник, 1959. т. 47(89):3, С. 271-306.
9. Мысовских И.П. Интерполяционные кубатурные формулы. – М.: Наука, 1981.
10. Li Ben Q. Discontinuous finite elements in fluid dynamics and heat transfer. – Springer, 2006
11. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Гидродинамика / Теоретическая физика: Т. VI. – М.: Физматлит. 2001.
12. Уизем Дж. Линейные и нелинейные волны. М.: Мир, 1977.