



Милюкова О.Ю., Тишкин В.Ф.

Численный метод решения  
уравнения  
теплопроводности с  
разрывным коэффициентом  
на основе многосеточного  
метода

**Рекомендуемая форма библиографической ссылки:** Милюкова О.Ю., Тишкин В.Ф. Численный метод решения уравнения теплопроводности с разрывным коэффициентом на основе многосеточного метода // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2013. № 64. 19 с. URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2013-64>

**Ордена Ленина  
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ  
имени М.В.Келдыша  
Российской академии наук**

**О.Ю.Милюкова, В.Ф.Тишкин**

**Численный метод решения  
уравнения теплопроводности  
с разрывным коэффициентом  
на основе многосеточного метода**

**Москва — 2013**

**Милюкова О.Ю., Тишкин В.Ф.**

Численный метод решения уравнения теплопроводности с разрывным коэффициентом на основе многосеточного метода

Предлагается новый численный метод решения начально-краевой задачи для уравнения теплопроводности с разрывным коэффициентом на основе многосеточного метода. Расчеты модельной двумерной задачи на ортогональных сетках показали хорошую точность предложенного метода. Использование этого метода для решения начально-краевых задач для уравнения теплопроводности позволяет существенно уменьшить объем вычислений по сравнению с их решением как по неявной, так и по явной схеме на подробной сетке.

*Ключевые слова:* уравнения параболического типа, многосеточные методы, точность численного метода

**Olga Milyukova , Vladimir Tishkin**

Method for the numerical solution of heat transfer equation with discontinuous coefficient based on multigrid techniques

A new numerical method for the solution of initial-boundary problems for heat transfer equation with discontinuous coefficient based on multigrid techniques is proposed. Good accuracy of the proposed method was confirmed by numerical tests performed for a two-dimensional model problem on orthogonal grids. The use of the method for the solution of initial-boundary problems for heat transfer equation on refined grids makes it possible to considerably reduce the computational work as compared to either implicit or explicit schemes.

*Key words:* parabolic equations, multigrid methods, numerical accuracy

## Оглавление

1. Введение .....	3
2. Алгоритм нового метода решения уравнения теплопроводности с разрывным коэффициентом .....	4
3. Результаты расчетов.....	15
Список литературы.....	19

## 1. Введение

При численном моделировании многих задач математической физики, например, задач газовой динамики, гидродинамики, необходимо учитывать диффузионные процессы, а значит нужно решать уравнения параболического типа. Использование явных схем для аппроксимации параболических уравнений приводит к жесткому ограничению на шаг по времени для сохранения устойчивости [1,2] и, следовательно, к очень большому времени расчетов. Применение неявных схем снимает это ограничение, однако трудоемкость решения систем линейных алгебраических уравнений, возникающих при этом, может сделать невыгодным их использование. Заметим, что применение многосеточных методов [3,4] в классическом варианте в ряде случаев также может быть связано с большой арифметической работой и не дать существенного выигрыша по сравнению с вычислением по явным схемам. Поэтому необходима разработка новых численных алгоритмов решения параболических уравнений.

В работах [5-8] предложены эффективные алгоритмы решения параболических уравнений на ортогональных сетках, основанные на использовании двухсеточного метода. С помощью теоретического и численного исследования на примере модельных задач для уравнения теплопроводности показано, что методы, определяемые этими алгоритмами, обладают устойчивостью и точностью, присущими чисто неявной схеме на подробной сетке. Схемы решения задач методами [7,8], в отличие от схем [5,6], консервативны. Предложенные в [5-8] алгоритмы позволяют существенно уменьшить объем арифметической работы на каждом временном слое по сравнению с использованием неявной схемы на подробной сетке.

В работах [9,10] предлагается новый численный метод решения уравнений параболического типа на ортогональных сетках, основанный на использовании  $L$ -сеточного метода. При этом  $L$  таково, что  $h_{x,L}^2 = o(\tau)$ ,  $h_{y,L}^2 = o(\tau)$ ,  $h_{z,L}^2 = o(\tau)$ , где  $h_{x,L}, h_{y,L}, h_{z,L}$  - шаги по пространству на самой грубой сетке,  $\tau$  - шаг по времени. При решении начально-краевой задачи для параболического уравнения с помощью нового метода на каждом временном слое осуществляется всего одна итерация многосеточного цикла, а на этапах сглаживания на каждой сетке – одна или несколько итераций. На примере двумерной модельной задачи для уравнения теплопроводности доказано, что предложенный метод позволяет получить решение с тем же порядком точности, что по чисто неявной схеме. Расчеты модельных задач с непрерывными коэффициентами показали хорошую точность метода. Показано, что использование предложенного метода позволяет существенно уменьшить объем арифметической работы по сравнению с решением задачи как по неявной схеме, так и по явной схеме на подробной сетке, в которой временной шаг мал. Предложен способ распараллеливания алгоритма созданного нового метода.

В работе [11] предлагается численный метод решения уравнения теплопроводности на треугольных сетках, основанный на использовании многосеточного метода. При этом используются  $L$  сеток, где  $L$  удовлетворяет условиям, аналогичным сформулированным для случая ортогональных сеток [9,10]. Для нахождения решения на каждом новом временном слое осуществляется всего одна итерация многосеточного цикла и одна или несколько сглаживающих итераций. Предлагаются специальные способы вычисления ограничения невязки на более грубую сетку и интерполяции поправки на более подробную сетку. Расчеты модельных задач с постоянными коэффициентами показали, что предложенный метод обладает устойчивостью и точностью, присущими чисто неявной схеме на подробной сетке.

Однако, как показывают расчеты модельных задач, предложенный новый численный метод решения уравнений параболического типа не позволяет получить решение задачи с разрывными коэффициентами и большим скачком коэффициентов на линиях разрыва с достаточной точностью. В настоящей работе предлагается новый численный метод решения начально-краевых задач для уравнения теплопроводности с разрывным коэффициентом на основе многосеточного метода. Основное внимание уделено случаю использования двухсеточного метода и ортогональных сеток. Построение и исследование метода осуществляется на примере двумерной начально-краевой задачи для уравнения теплопроводности с разрывным коэффициентом теплопроводности и большим скачком этого коэффициента. Расчеты модельной задачи показали хорошую точность предложенного метода. Использование этого метода для решения начально-краевых задач для уравнения теплопроводности позволяет существенно уменьшить объем вычислений по сравнению с их решением по неявной схеме на подробной сетке и по явной схеме на подробной сетке.

## 2. Алгоритм нового метода решения уравнения теплопроводности с разрывным коэффициентом

Построение и исследование алгоритма нового метода решения уравнений диффузионного типа с разрывными коэффициентами на основе многосеточного метода проведем на примере начально-краевой задачи для двумерного уравнения теплопроводности

$$\begin{aligned} \rho C_v \frac{\partial T}{\partial t} &= \operatorname{div}(\kappa \operatorname{grad} T) + f, (x, y, t) \in G, \\ T(x, y, t) &= g(x, y, t) \text{ при } (x, y) \in \gamma, 0 \leq t \leq \bar{T}, \\ T(x, y, 0) &= T_0(x, y), \end{aligned} \quad (1)$$

где  $C_v$ - коэффициент теплоемкости при постоянном объеме,  $\rho$ - плотность,  $\kappa$ - коэффициент теплопроводности,  $T$ - температура в точке  $(x, y)$  в момент

времени  $t$ ,  $f$  - плотность тепловых источников,  $\gamma$  - граница области расчета,  $g(x, y, t), T_0(x, y)$  - заданные функции. Область  $G = \{0 < x < l_1, 0 < y < l_2, 0 < t \leq \bar{T}\}$ .

В области  $G$  введем равномерную сетку по каждому пространственному направлению и по времени. Для аппроксимации задачи (1) будем использовать чисто неявную разностную схему

$$(C_v \rho)_{ij} \frac{u_{ij}^n - \overset{\vee}{u}_{ij}^n}{\tau} = \kappa_{i+0.5, j} \frac{u_{i+1, j}^n - u_{ij}^n}{h_x^2} - \kappa_{i-0.5, j} \frac{u_{ij}^n - u_{i-1, j}^n}{h_x^2} + \kappa_{ij+0.5} \frac{u_{ij+1}^n - u_{ij}^n}{h_y^2} - \kappa_{ij-0.5} \frac{u_{ij}^n - u_{ij-1}^n}{h_y^2} + \Phi_{ij},$$

$$u_{0, j}^n = u_1(t_{n+1}, y_j), u_{N_x, j}^n = u_2(t_{n+1}, y_j), \quad 0 < i < N_x, 0 < j < N_y, \quad (2)$$

$$u_{i, 0}^n = u_3(t_{n+1}, x_i), u_{i, N_y}^n = u_4(t_{n+1}, x_i),$$

$$u_{ij}^{n, 0} = T_0(x_i, y_j) \quad 0 \leq i \leq N_x, 0 \leq j \leq N_y,$$

где  $\overset{\vee}{u}_{ij}^n, u_{ij}^n$  - решения на  $n+1$  и  $n$  - том временных слоях,  $h_x, h_y$  - постоянные шаги сетки по  $x, y$ ,  $\tau$  - шаг по  $t$ . Разностная схема (2) представляет собой систему линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных значений решения на  $n+1$  слое по времени

$$A_h u^{n+1} = f_h. \quad (3)$$

Решение системы уравнений (3) можно производить многосеточным методом [3,4]. Основная идея многосеточного метода состоит в следующем. На каждой итерации внешнего цикла для решения исходного уравнения (3) на первоначальной сетке с шагом  $h = (h_1, h_2)$  находится  $u_h^s$  - приближенное решение исходного уравнения после  $s$  итераций, причем основной задачей при этом является подавление высокочастотных для этой сетки гармоник (сглаживание). Точное решение уравнения (3):  $u_h = u_h^s - \delta_h^s$ , можно определить при известном значении погрешности  $\delta_h^s$ , которая удовлетворяет уравнению  $A_h \delta_h^s = r_h$ , где  $r_h = A_h u_h^s - f_h$ .  $\delta_h^s$  будем находить приближенно. Для этого переходим на более грубую сетку с шагом  $H = (2h_1, 2h_2)$  и находим решение уравнения

$$A_H \Delta_H = R_H, \quad (4)$$

где  $A_H$ -аппроксимация  $A_h$  на более грубую сетку,  $R_H$  - ограничение или проекция невязки  $r_h$  на эту сетку. Далее, интерполируя функцию  $\Delta_H$  на сетку с шагом  $h$ , определяем значение поправки  $\delta_h$  и затем вычисляем  $u_h = u_h^s - \delta_h$ . Для решения уравнения (4) в свою очередь применяется изложенный выше подход, и так далее. На последней используемой сетке  $L$ -того уровня уравнение  $A_{h_L} \Delta_{h_L} = R_{h_L}$  решается точно или с помощью какого-либо итерационного метода [12]. Процесс продолжается до сходимости итераций внешнего цикла.

Остановимся сначала на случае использования двухсеточного метода. В настоящей работе в отличие от классического двухсеточного метода будем производить только одну итерацию внешнего цикла двухсеточного метода и

одну или несколько сглаживающих итераций. Основной причиной недостаточной точности получения решения задачи с разрывным коэффициентом и большим скачком коэффициента методами [5-10] является использование формул интерполяции, обладающих достаточной точностью только в случае, если интерполируемая функция имеет четвертые ограниченные производные по пространственным переменным. В случае разрывного коэффициента  $\kappa$  это условие не выполнено.

В настоящей работе вместо грубой сетки будем использовать обобщенную грубую сетку. Построим обобщенную грубую сетку следующим образом. Пусть  $h_1 = h_2 = h$ . Выделим в построенной грубой сетке с шагом  $H$  ячейки, в которых происходит разрыв коэффициента  $\kappa$ . К этим ячейкам присоединим слева и справа, снизу и сверху по крайней мере еще по 2 ячейки грубой сетки. В этой области расчета будем всегда использовать подробную сетку. Тогда не возникнет проблемы интерполяции недостаточно гладкой функции. Пусть, например, область расчета – единичный квадрат,

$$\kappa(x, y) = \begin{cases} 100, & \text{при } 0.5 \leq x \leq 1 \wedge 0.5 \leq y \leq 1, \\ 1, & \text{в противном случае.} \end{cases} \quad (5)$$

На рис. 1 схематически приведен пример расположения узлов обобщенной

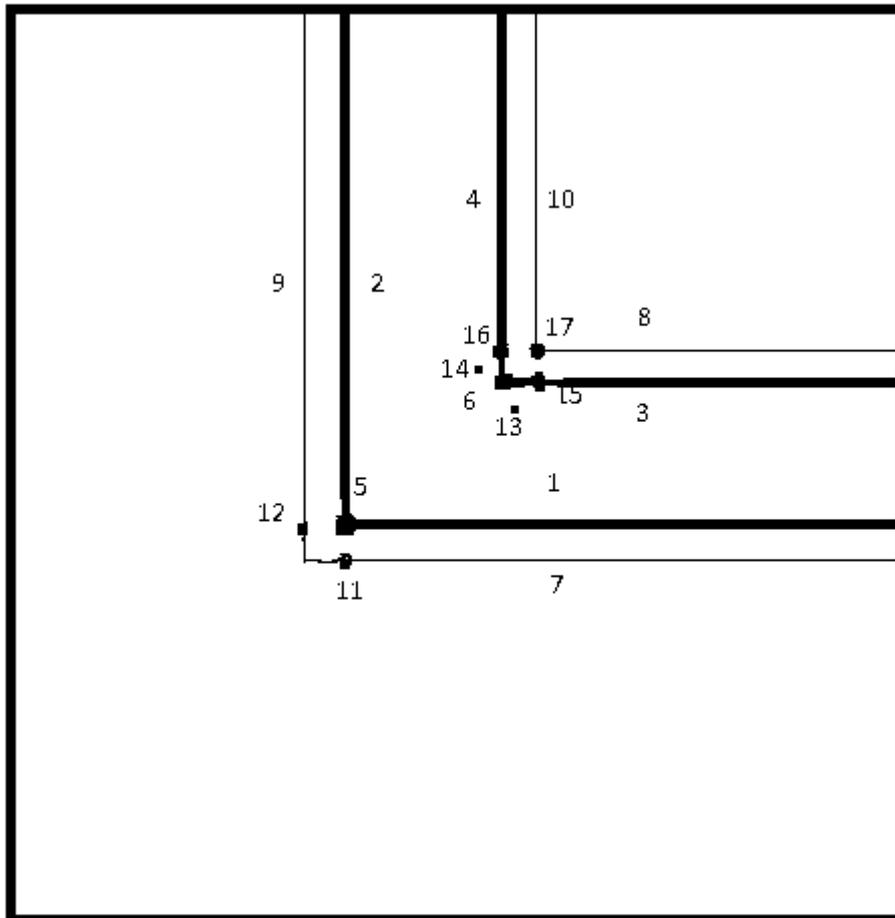


Рис.1. Схематическое изображение расположения узлов обобщенной грубой сетки, случай 1.

сетки. В подобласти, заключенной между линиями 1,2,3,4, а также на этих линиях, за исключением отрезков между точками 6 и 16, 6 и 15, используется подробная сетка с шагом  $h$ . В подобласти ниже линии 7 и левее линии 9 и на линиях 7, 9, а также в подобласти выше линии 8 и правее линии 10 и на линиях 8, 10 используется грубая сетка с шагом  $H$ .

Матрица  $A_{\bar{H}}$  строится с использованием метода конечных объемов. На линии 1 шаблоны узлов сетки с номером  $i$  имеют вид, изображенный на рис. 2а), 2б), а элементы матрицы  $A_{\bar{H}}$  в соответствующих строках  $i$  вычисляются по формулам

$$(A_{\bar{H}})_{ii} = 4.5 + 1.5h^2 / \tau, (A_{\bar{H}})_{ij1} = -0.25, (A_{\bar{H}})_{ij2} = -0.25, (A_{\bar{H}})_{ij3} = -1.5, (A_{\bar{H}})_{ij4} = -1.5, (A_{\bar{H}})_{ij5} = -1, \\ \text{или } (A_{\bar{H}})_{ii} = 4.5 + 1.5h^2 / \tau, (A_{\bar{H}})_{ij1} = -0.5, (A_{\bar{H}})_{ij2} = -1.5, (A_{\bar{H}})_{ij3} = -1.5, (A_{\bar{H}})_{ij4} = -1. \quad (6)$$

Аналогичный вид имеют шаблоны узлов сетки на линиях 2,3,4. Формулы для вычисления элементов матрицы  $A_{\bar{H}}$  в строках, соответствующих узлам на линиях 2,3,4, аналогичны (6).

На линии 7 шаблоны узлов сетки имеет вид, изображенный на рис. 2в), а элементы матрицы  $A_{\bar{H}}$  в соответствующей строке  $i$  (на линии 7) вычисляются по формулам

$$(A_{\bar{H}})_{ii} = 4 + 4h^2 / \tau, \\ (A_{\bar{H}})_{ij1} = -1, (A_{\bar{H}})_{ij2} = -1, (A_{\bar{H}})_{ij3} = -1, (A_{\bar{H}})_{ij4} = -0.25, (A_{\bar{H}})_{ij5} = -0.5, (A_{\bar{H}})_{ij6} = -0.25. \quad (7)$$

Аналогичный вид имеют шаблоны узлов сетки на линиях 8,9,10. Формулы для вычисления элементов матрицы  $A_{\bar{H}}$  в соответствующих строках аналогичны формулам (7).

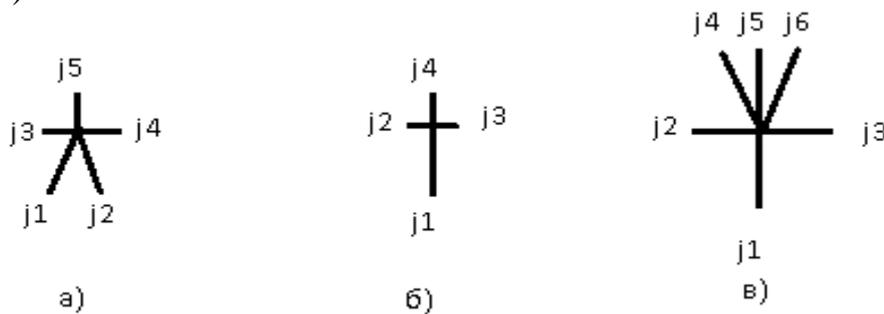


Рис. 2. Шаблоны узлов сетки с номером  $i$  на линиях 1 и 7 (а)-для узлов сетки на линии 1 с нечетным номером  $m$  при индексации  $m_j$  узлов подробной сетки, б) для узлов сетки на линии 1 с четным номером  $m$ , в)- для узлов сетки на линии 7).

В точке 5 шаблон узла сетки с номером  $i$  имеет вид, изображенный на рис. 3а), а элементы матрицы  $A_{\bar{H}}$  в строке  $i$ , соответствующей точке 5, вычисляются по формулам

$$(A_{\bar{H}})_{ii} = 4.5 + 2.25h^2 / \tau, (A_{\bar{H}})_{ij1} = -0.75, (A_{\bar{H}})_{ij2} = -0.75, (A_{\bar{H}})_{ij3} = -1.5, (A_{\bar{H}})_{ij4} = -1.5. \quad (8)$$

В точке 11 шаблон узла сетки имеет вид, изображенный на рис. 3б), а элементы матрицы  $A_{\bar{H}}$  в строке  $i$ , соответствующей точке 11, вычисляются по формулам

$$(A_{\bar{H}})_{ii} = 4 + 4h^2 / \tau, (A_{\bar{H}})_{ij1} = -1, (A_{\bar{H}})_{ij2} = -1, (A_{\bar{H}})_{ij3} = -1, (A_{\bar{H}})_{ij4} = -0.75, (A_{\bar{H}})_{ij5} = -0.25.$$

Аналогичный вид имеют шаблон узла сетки в точке 12 и формулы для вычисления элементов матрицы  $A_{\bar{H}}$  в соответствующей строке.

В точке 6 шаблон имеет вид, изображенный на рис. 3в), а элементы матрицы  $A_{\bar{H}}$  в соответствующей строке  $i$  вычисляются по формулам

$$(A_{\bar{H}})_{ii} = 450 + 2.25h^2 / \tau, (A_{\bar{H}})_{ij1} = -100, (A_{\bar{H}})_{ij2} = -50, (A_{\bar{H}})_{ij3} = -100, (A_{\bar{H}})_{ij4} = -50, (A_{\bar{H}})_{ij5} = -75, (A_{\bar{H}})_{ij6} = -75.$$

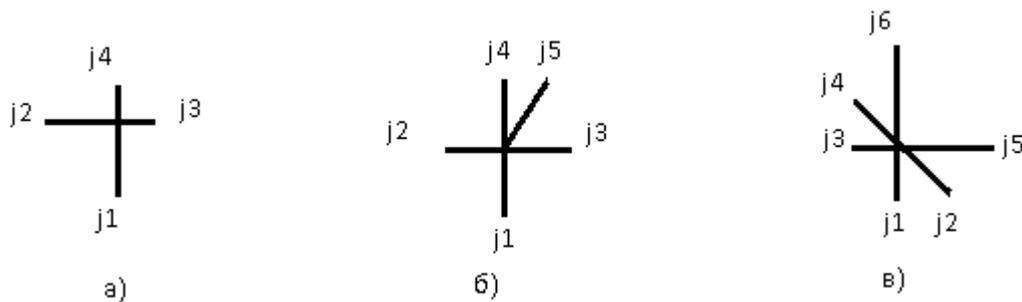


Рис. 3. Шаблоны узлов сетки, расположенных в точке 5 - (а)), в точке 11 (случай 1)- (б)), в точке 6 (в)).

В точке 13 (см. рис. 1), шаблон узла сетки имеет вид, изображенный на рис. 4а), а элементы матрицы  $A_{\bar{H}}$  в соответствующей строке  $i$  вычисляются по формулам

$$(A_{\bar{H}})_{ii} = 400 + h^2 / \tau, (A_{\bar{H}})_{ij1} = (A_{\bar{H}})_{ij2} = (A_{\bar{H}})_{ij3} = -100, (A_{\bar{H}})_{ij4} = (A_{\bar{H}})_{ij5} = -50.$$

Аналогичный вид имеет шаблон узла сетки в точке 14, изображенной на рис. 1, а элементы матрицы  $A_{\bar{H}}$  в соответствующей строке вычисляются по аналогичным формулам.

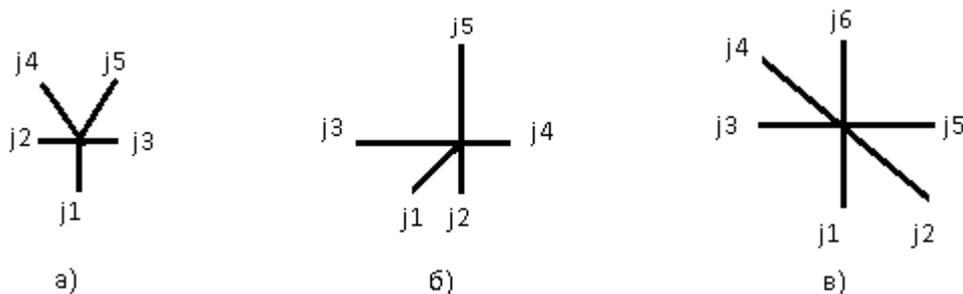


Рис. 4. Шаблоны узлов сетки, расположенных в точке 13 - (а)), в точке 15- (б)), в точке 17 (в)), изображенных на рис. 1.

В точке 15 (см. рис. 1) шаблон имеет вид, изображенный на рис. 4б), а элементы матрицы  $A_{\bar{H}}$  в соответствующей строке вычисляются по формулам

$$(A_{\bar{H}})_{ii} = 450 + 2.25h^2 / \tau, (A_{\bar{H}})_{ij1} = -50, (A_{\bar{H}})_{ij2} = -100, (A_{\bar{H}})_{ij3} = (A_{\bar{H}})_{ij5} = -75, (A_{\bar{H}})_{ij4} = -150.$$

Аналогичный вид имеет шаблон в точке 16, изображенной на рис. 1, а элементы матрицы  $A_{\bar{H}}$  в соответствующей строке вычисляются по аналогичным формулам.

В точке 17 (см. рис.1) шаблон имеет вид, изображенный на рис. 4в), а элементы матрицы  $A_{\bar{H}}$  в соответствующей строке  $i$  вычисляются по формулам  $(A_{\bar{H}})_{ii} = 400 + 4h^2 / \tau$ ,  $(A_{\bar{H}})_{ij1} = (A_{\bar{H}})_{ij3} = -75$ ,  $(A_{\bar{H}})_{ij2} = (A_{\bar{H}})_{ij4} = -25$ ,  $(A_{\bar{H}})_{ij5} = (A_{\bar{H}})_{ij6} = -100$ .

В остальных узлах обобщенной грубой сетки элементы матрицы  $A_{\bar{H}}$  совпадают с элементами матрицы  $A_h$ , если фактически используется шаблон подробной сетки, и совпадают с элементами матрицы  $A_H$ , если используется шаблон грубой сетки.

Однако, при таком выборе матрицы  $A_H$  отсутствует аппроксимация члена  $div(\kappa grad T)$  на линиях 1,3 при нечетном  $i$ , на линиях 2,4 при нечетном  $j$ , на линиях 7-10 (при нумерации узлов подробной сетки  $i,j$ ), в точках 6,11-17. Построим другую матрицу  $A_{\bar{H}}$  так, чтобы обеспечить аппроксимацию этого члена на линиях 1-10 со вторым порядком по  $h$  и с первым порядком по  $h$  в большинстве выделенных точек. На рис.5 приведено схематическое

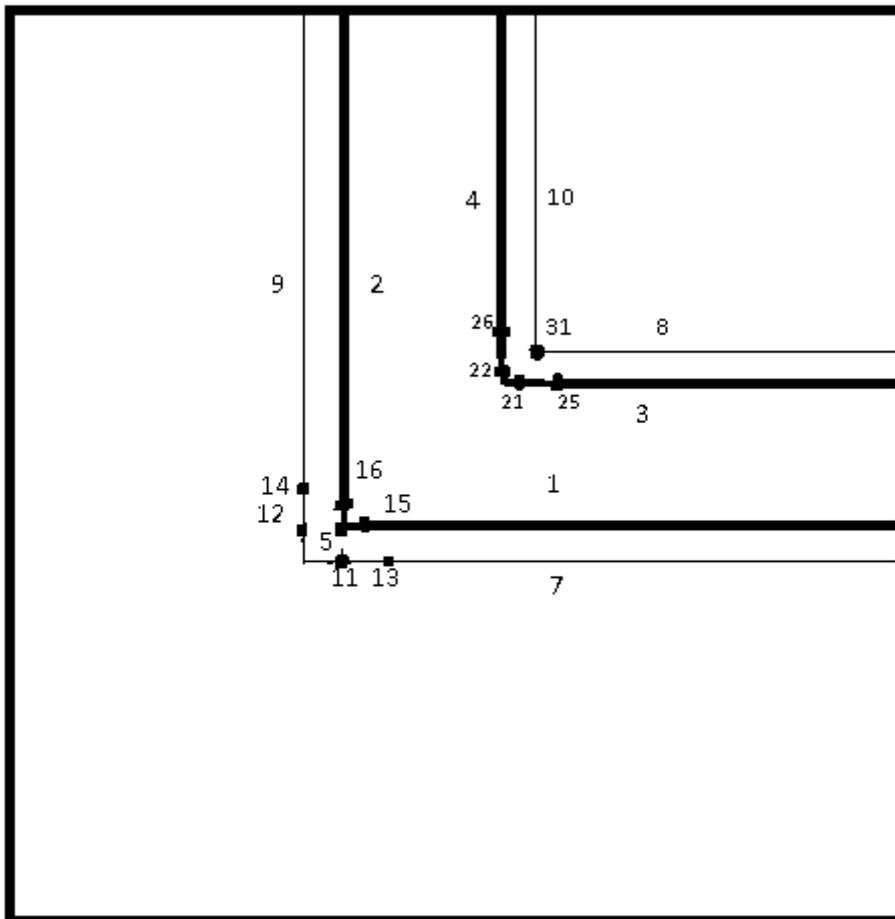


Рис.5. Схематическое изображение расположения узлов обобщенной грубой сетки при использовании более точной аппроксимации (случай 2).

изображение расположения узлов обобщенной грубой сетки при использовании более точной аппроксимации.

При использовании более точной аппроксимации шаблоны узлов сетки с номером  $i$  на линии 1 имеют вид, изображенный на рис. 6а), 6б), а элементы матрицы  $A_{\bar{H}}$  в соответствующей строке  $i$  вычисляются по формулам

$$(A_{\bar{H}})_{ii} = 4.5 + 1.5h^2 / \tau, (A_{\bar{H}})_{ij1} = (A_{\bar{H}})_{ij2} = -9/32, (A_{\bar{H}})_{ij3} = (A_{\bar{H}})_{ij4} = -1.5, (A_{\bar{H}})_{ij5} = -1, (A_{\bar{H}})_{ij6} = (A_{\bar{H}})_{ij7} = 1/32, \quad (9)$$

или  $(A_{\bar{H}})_{ii} = 4.5 + 1.5h^2 / \tau, (A_{\bar{H}})_{ij1} = -0.5, (A_{\bar{H}})_{ij2} = -1.5, (A_{\bar{H}})_{ij3} = -1.5, (A_{\bar{H}})_{ij4} = -1.$

Аналогичный вид имеют шаблоны узлов сетки на линиях 2,3,4. Формулы для вычисления элементов матрицы  $A_{\bar{H}}$  в строках, соответствующих узлам на линиях 2,3,4 аналогичны (9).

На линии 7 шаблоны узлов сетки имеют вид, изображенный на рис. 6в), а элементы матрицы  $A_{\bar{H}}$  в соответствующих строках  $i$  (на линии 7) вычисляются по формулам

$$(A_{\bar{H}})_{ii} = 4 + 4h^2 / \tau, (A_{\bar{H}})_{ij1} = (A_{\bar{H}})_{ij2} = (A_{\bar{H}})_{ij3} = -1, (A_{\bar{H}})_{ij4} = (A_{\bar{H}})_{ij6} = -9/32, (A_{\bar{H}})_{ij5} = -0.5, (A_{\bar{H}})_{ij7} = (A_{\bar{H}})_{ij8} = 1/32. \quad (10)$$

Аналогичный вид имеют шаблоны узлов сетки на линиях 8,9,10. Формулы для вычисления элементов матрицы  $A_{\bar{H}}$  в соответствующих строках аналогичны формулам (10).

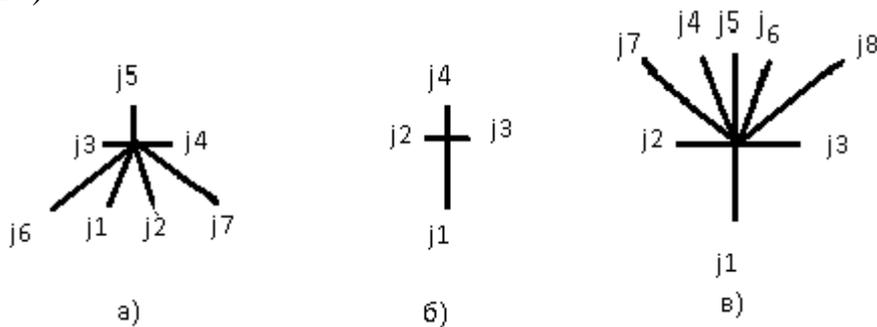


Рис. 6. Шаблоны узлов сетки с номером  $i$  на линиях 1 и 7 при использовании более точной аппроксимации (а)-для узлов сетки на линии 1 с нечетным номером  $t$  при индексации  $tj$  узлов подробной сетки, б) для узлов сетки на линии 1 с четным номером  $t$ , в)- для узлов сетки на линии 7).

В точке 5 шаблон узла сетки с номером  $i$  имеет вид, изображенный на рис. 3а), а элементы матрицы  $A_{\bar{H}}$  в строке  $i$ , соответствующей точке 5, вычисляются по формулам (8).

В точке 11 (см. рис. 5) шаблон узла сетки имеет вид, изображенный на рис. 7а), а элементы матрицы  $A_{\bar{H}}$  в строке  $i$ , соответствующей точке 11, вычисляются по формулам

$$(A_{\bar{H}})_{ii} = 4 + 4h^2 / \tau, (A_{\bar{H}})_{ij1} = (A_{\bar{H}})_{ij2} = (A_{\bar{H}})_{ij3} = -1, (A_{\bar{H}})_{ij4} = (A_{\bar{H}})_{ij5} = -0.5, \\ (A_{\bar{H}})_{ij6} = -0.1, (A_{\bar{H}})_{ij7} = 0.1.$$

Аналогичный вид имеет шаблон узла сетки в точке 12 с рис. 5 и формулы для вычисления элементов матрицы  $A_{\bar{H}}$  в соответствующей строке.

В точке 13 (см. рис. 5) шаблон имеет вид, изображенный на рис. 7б), а элементы матрицы  $A_{\bar{H}}$  в соответствующей строке  $i$  вычисляются по формулам

$$(A_{\bar{H}})_{ii} = 4.5 + 2.25h^2 / \tau, (A_{\bar{H}})_{ij1} = (A_{\bar{H}})_{ij2} = (A_{\bar{H}})_{ij3} = -1, (A_{\bar{H}})_{ij4} = -3/16, (A_{\bar{H}})_{ij5} = -0.5, \\ (A_{\bar{H}})_{ij6} = -3/8, (A_{\bar{H}})_{ij7} = 1/16.$$

Аналогичный вид имеют шаблон узла сетки в точке 14 с рис. 5 и формулы для вычисления элементов матрицы  $A_{\bar{H}}$  в соответствующей строке.

В точке 15 (см. рис. 5) шаблон имеет вид, изображенный на рис. 7в), а элементы матрицы  $A_{\bar{H}}$  в соответствующей строке  $i$  вычисляются по формулам

$$(A_{\bar{H}})_{ii} = 4.5 + 2.25h^2 / \tau, (A_{\bar{H}})_{ij1} = -3/16, (A_{\bar{H}})_{ij2} = -3/8, (A_{\bar{H}})_{ij3} = (A_{\bar{H}})_{ij4} = -1.5, \\ (A_{\bar{H}})_{ij5} = -1, (A_{\bar{H}})_{ij6} = 1/16.$$

Аналогичный вид имеют шаблон узла сетки в точке 16 с рис. 5 и формулы для вычисления элементов матрицы  $A_{\bar{H}}$  в соответствующей строке.

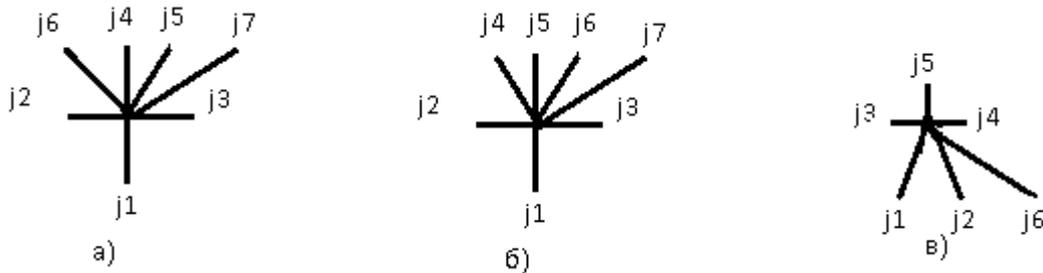


Рис. 7. Шаблоны узлов сетки, расположенных в точке 11 - (а)), в точке 13- (б)), в точке 15 (в)), обозначенных на рис. 5 .

В точке 21 (см. рис. 5) шаблон узла сетки имеет вид, изображенный на рис. 8а), а элементы матрицы  $A_{\bar{H}}$  в строке  $i$ , соответствующей этой точке, вычисляются по формулам

$$(A_{\bar{H}})_{ii} = 400 + (1.5 - 1/8)h^2 / \tau, (A_{\bar{H}})_{ij1} = (A_{\bar{H}})_{ij2} = -100, (A_{\bar{H}})_{ij3} = -1100/8, (A_{\bar{H}})_{ij4} = -25, \\ (A_{\bar{H}})_{ij5} = -700/32, (A_{\bar{H}})_{ij6} = 300/16, (A_{\bar{H}})_{ij7} = 100/32.$$

В точке 25 (см. рис. 5) шаблон узла сетки имеет вид, изображенный на рис. 8б), а элементы матрицы  $A_{\bar{H}}$  в строке  $i$ , соответствующей этой точке, вычисляются по формулам

$$(A_{\bar{H}})_{ii} = 450 + 1.5h^2 / \tau, (A_{\bar{H}})_{ij1} = -100, (A_{\bar{H}})_{ij2} = (A_{\bar{H}})_{ij3} = -150, (A_{\bar{H}})_{ij4} = -300/16, \\ (A_{\bar{H}})_{ij5} = -300/8, (A_{\bar{H}})_{ij6} = 100/16.$$

Аналогичный вид имеют шаблоны узлов сетки в точках 22, 26 и формулы для вычисления элементов матрицы  $A_{\bar{H}}$  в соответствующих строках.

В точке 31 (см. рис. 5) шаблон имеет вид, изображенный на рис. 8в), а элементы матрицы  $A_{\bar{H}}$  в соответствующей строке  $i$  вычисляются по формулам

$$(A_{\bar{H}})_{ii} = 400 + 4h^2 / \tau, (A_{\bar{H}})_{ij1} = (A_{\bar{H}})_{ij3} = -50, (A_{\bar{H}})_{ij2} = (A_{\bar{H}})_{ij4} = -300/8, \\ (A_{\bar{H}})_{ij7} = (A_{\bar{H}})_{ij9} = -300/16, (A_{\bar{H}})_{ij5} = (A_{\bar{H}})_{ij6} = -100, (A_{\bar{H}})_{ij8} = (A_{\bar{H}})_{ij10} = 100/16.$$

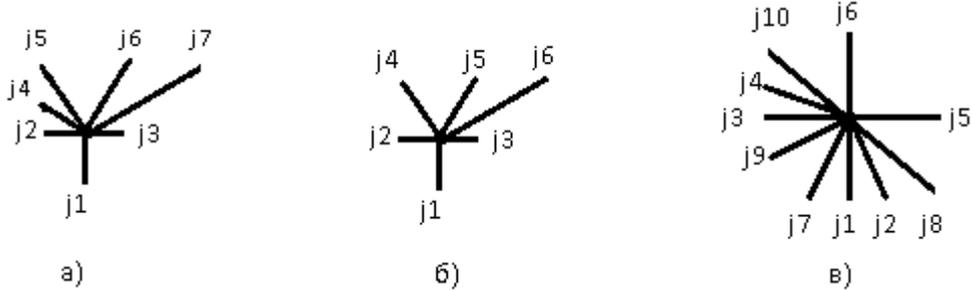


Рис. 8. Шаблоны узлов сетки, расположенных в точках 21 - (а)), в точке 25- (б)), в точке 31 (в)), обозначенных на рис. 5.

В остальных узлах обобщенной грубой сетки элементы матрицы  $A_{\bar{H}}$  совпадают с элементами матрицы  $A_h$ , если фактически используется шаблон подробной сетки и совпадают с элементами матрицы  $A_H$ , если используется шаблон грубой сетки.

Алгоритм вычисления решения уравнения (1) на новом временном слое состоит из нескольких этапов. На первом этапе- этапе сглаживания вычисления происходят по формуле [5-10]

$$(u_{ij})^{s+1} = \sigma \left[ \frac{(C_v \rho)_{ij} u_{ij}^n}{\tau} + \frac{\kappa_{i+0.5,j} (u_{i+1,j})^s + \kappa_{i-0.5,j} (u_{i-1,j})^s}{h_x^2} + \frac{\kappa_{i,j+0.5} (u_{i,j+1})^s + \kappa_{i,j-0.5} (u_{i,j-1})^s}{h_y^2} + \Phi_{ij} \right] \times \\ \left( \frac{(C_v \rho)_{ij}}{\tau} + \frac{\kappa_{i+0.5,j} + \kappa_{i-0.5,j}}{h_x^2} + \frac{\kappa_{i,j+0.5} + \kappa_{i,j-0.5}}{h_y^2} \right)^{-1} + (1 - \sigma)(u_{ij})^s, \\ u_{ij}^s = g_{ij}, (i, j) \in \gamma,$$

где  $i=1,2,\dots,N_1-1, j=1,2,\dots,N_2-1, 0 < \sigma \leq 1$ - весовой множитель, при  $s=0, (u_{ij})^0 = u_{ij}^n$ . Пусть  $\sigma = 0.5$ . Полученную сеточную функцию обозначим  $u_{ij}^{csl}$ . Затем вычисляется невязка:

$$r = A_h u^{csl} - f_h.$$

На втором этапе вычисляется ограничение невязки на грубую сетку по формуле [7-10]

$$R_{lp} = \frac{1}{4} r_{2i,2j} + \frac{1}{8} (r_{2i+1,2j} + r_{2i-1,2j} + r_{2i,2j+1} + r_{2i,2j-1}) + \frac{1}{16} (r_{2i+1,2j+1} + r_{2i-1,2j-1} + r_{2i-1,2j+1} + r_{2i+1,2j-1}).$$

На третьем этапе осуществляется решение уравнения для поправки на обобщенной грубой сетке

$$A_{\bar{H}} \theta = f_{\bar{H}},$$

где в случае использования первого варианта матрицы  $A_{\bar{H}}$   $f_{\bar{H}}$  вычисляется следующим образом:

$f_{\bar{H}} = h^2 r_h$ , если узел обобщенной грубой сетки принадлежит подобласти, где используется подробная сетка;

$f_{\bar{H}} = 4h^2 R_p$ , если узел обобщенной грубой сетки принадлежит подобласти, где используется грубая сетка с шагом  $H$ ;

$f_{\bar{H}} = 1.5h^2 r_h$ , если узел обобщенной грубой сетки принадлежит линиям 1,2,3,4;

$f_{\bar{H}} = 4h^2 R_p$ , если узел обобщенной грубой сетки принадлежит линиям 7-10;

$f_{\bar{H}} = 2.25h^2 r_h$ , если узел обобщенной грубой сетки принадлежит точкам 5,6;

$f_{\bar{H}} = 4h^2 R_p$ , если узел обобщенной грубой сетки принадлежит точкам 11,12;

$f_{\bar{H}} = h^2 r_h$ , если узел обобщенной грубой сетки принадлежит точкам 13,14;

$f_{\bar{H}} = 2.25h^2 r_h$ , если узел обобщенной грубой сетки принадлежит точкам 15,16;

$f_{\bar{H}} = 4h^2 R_p$ , если узел обобщенной грубой сетки принадлежит точке 17.

Здесь введено обозначение  $r_h = r$ . В случае использования второго варианта матрицы  $A_{\bar{H}}$   $f_{\bar{H}}$  вычисляется аналогичным образом.

На четвертом этапе происходит вычисление  $\delta_{ij}$  на подробной сетке. При этом  $\delta_{ij} = \theta_m$ , если узел  $i, j$  подробной сетки являлся узлом обобщенной грубой сетки с номером  $m$ . В противном случае  $\delta_{ij}$  вычисляется по формулам интерполяции по 4 точкам на ребрах двумерных ячеек грубой сетки и по 16 точкам в центрах ячеек этой сетки. Вычисления происходят по формулам [5-10]

$$\delta_{ij} = \begin{cases} \Delta_p, & i = 2l, j = 2p, \\ \frac{9}{16}(\Delta_p + \Delta_{l+1p}) - \frac{1}{16}(\Delta_{l-1p} + \Delta_{l+2p}), & i = 2l+1, j = 2p, \\ \frac{9}{16}(\Delta_p + \Delta_{lp+1}) - \frac{1}{16}(\Delta_{lp-1} + \Delta_{lp+2}), & i = 2l, j = 2p+1, \\ \frac{81}{256}(\Delta_p + \Delta_{l+1p} + \Delta_{lp+1} + \Delta_{l+1p+1}) + \frac{1}{256}(\Delta_{l-1p-1} + \Delta_{l-1p+2} + \Delta_{l+2p+2} + \Delta_{l+2p-1}) - \\ - \frac{9}{256}(\Delta_{l-1p} + \Delta_{l-1p+1} + \Delta_{lp+2} + \Delta_{l+1p+2} + \Delta_{l+2p+1} + \Delta_{l+2p} + \Delta_{l+1p-1} + \Delta_{lp-1}), & i = 2l+1, j = 2p+1, \end{cases}$$

где

$$\Delta_{-1,p} = -\Delta_{1,p}, \Delta_{N_{x,k+1}+1,p} = -\Delta_{N_{x,k+1}-1,p}, p = 0, \dots, N_{y,k+1}, \Delta_{l,-1} = -\Delta_{l,1}, \Delta_{l,N_{y,k+1}+1} = -\Delta_{l,N_{y,k+1}-1}, l = -1, \dots, N_{x,k+1} + 1.$$

На заключительном пятом этапе происходит вычисление решения на новом временном слое по формуле

$$u_{ij}^{n+1} = u_{ij}^{cst.} - \delta_{ij}.$$

Для решения задачи с разрывным коэффициентом можно построить метод, основанный на использовании большего числа уровней грубой сетки. Так, например, при использовании трехсеточного метода расположение узлов обобщенной самой грубой сетки в случае 1 схематически приведено на рис. 9.

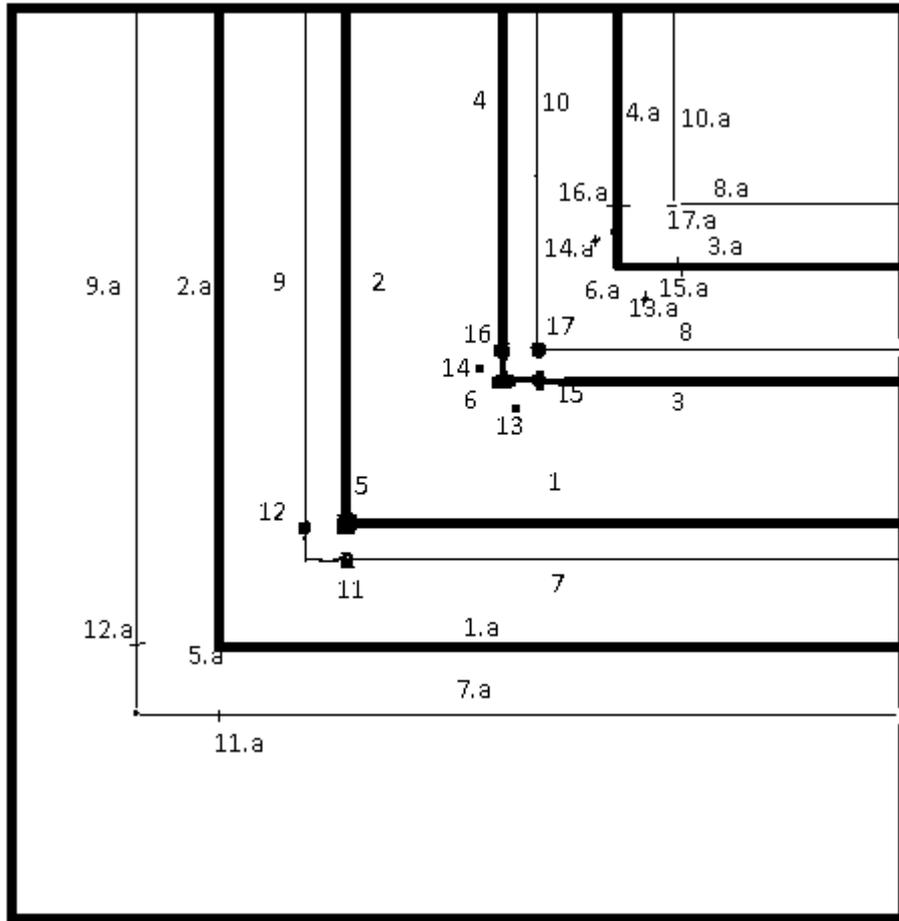


Рис.9. Схематическое изображение расположения узлов обобщенной грубой сетки в случае использования алгоритма решения уравнения теплопроводности на основе трехсеточного метода.

В подобласти, заключенной между линиями 1,2,3,4, а также на самих этих линиях (кроме отрезков между точками 6 и 15, 6 и 16) используется подробная сетка с шагом  $h$ . В подобласти ниже линии 1, но выше и на линии 1.a, в подобласти левее линии 2, но правее и на линии 2.a, а также в подобласти выше линии 3, но ниже и на линии 3.a, а также правее линии 4, но левее и на линии 4.a (кроме отрезков между точками 6.a и 15.a, 6.a и 16.a) – грубая сетка с шагом  $H$  (достаточно 2 слоя). В подобласти ниже линии 1.a и левее линии 2.a, а также в подобласти выше линии 3.a и правее линии 4.a – еще более грубая сетка с шагом  $2H$ .

При использовании трехсеточного метода вместо решения уравнения  $A_{\bar{H}}\theta = f_{\bar{H}}$  вновь осуществляется сглаживание и находится невязка после сглаживания. Затем производится ограничение этой невязки в узлах самой грубой сетки с шагом  $2H$ . Используются формулы, аналогичные приведенным выше. Строится матрица  $A_{\bar{H}}$  аналогично построению матрицы  $A_{\bar{H}}$ , причем она

будет отличаться от  $A_{\bar{H}}$  на линиях 1.a-10.a, в точках 5.a, 6.a, 11.a-17.a, а также в области расчета ниже линии 1.a, левее 2.a, правее 4.a и выше 3.a, где используется сетка с шагом  $2H$ . Затем решается уравнение  $A_{\bar{H}}g = f_{\bar{H}}$  на обобщенной самой грубой сетке. После этого, где необходимо производится интерполяция  $\tilde{\theta}$  найденной поправки  $g$  на сетку с шагом  $H$  и вычисляется поправка  $\Delta$  (учетом предварительного сглаживания). Затем производится интерполяция поправки  $\Delta$  с сетки с шагом  $H$  на сетку с шагом  $h$  в тех точках подробной сетки, где значения поправки  $\delta$  неизвестны, т. е. в соответствующих строках матрицы  $A_{\bar{H}}$  не используются коэффициенты аппроксимации (2) на подробную сетку. После этого осуществляется завершающий этап:

$$u_{ij}^{n+1} = u_{ij}^{c2l.} - \delta_{ij}.$$

Возможен переход к использованию большего числа уровней многосеточного метода.

Таким образом, делается всего одна итерация двухсеточного цикла и одна сглаживающая итерация. Несмотря на то, что система линейных уравнений при этом остается решенной не до конца, такая схема, как показано ниже численно для модельной задачи, обладает устойчивостью, точностью, присущими чисто неявной схеме на подробной сетке. Кроме того, при достаточно большом числе узлов сетки вычислительные затраты в предложенном методе меньше, чем при использовании неявной схемы на подробной сетке, так как решение системы уравнений для поправки на обобщенной грубой сетке требует существенно меньше арифметической работы, чем решение системы уравнений неявной схемы.

Как уже отмечалось, использование явной схемы на подробной сетке для решения уравнений параболического накладывает жесткое ограничение на шаг по времени для сохранения устойчивости, тем самым резко увеличивает время решения всей эволюционной задачи в целом. Предложенный метод в расчетах модельной задачи продемонстрировал устойчивость при увеличении шага по времени по сравнению с явной схемой в десятки, сотни и даже тысячи раз. Поэтому предложенный новый метод позволяет существенно уменьшить время расчета всей эволюционной задачи по сравнению с использованием явной схемы.

### 3. Результаты расчетов

Тестирование предложенного метода, использующего двухсеточный метод, производилось с помощью расчетов двумерной модельной задачи (1), где область расчета - единичный квадрат, коэффициент теплопроводности вычислялся по формуле (5).  $T_0 = 1 + 32x(1-x)y(1-y)$ ,  $g \equiv 1$ ,  $C_v \rho \equiv 1$ ,  $f=0$ . На

подробной и на грубой сетке коэффициент теплопроводности вычислялся по формулам:  $\kappa_{i+0.5,j} = 0.5(\kappa_{i+1,j} + \kappa_{i,j})$ ,  $\kappa_{i,j+0.5} = 0.5(\kappa_{i,j+1} + \kappa_{i,j})$ . Сравнение решения  $u_{ij}$ , полученного предложенным методом, проводилось с решением  $u_{ij}^n$  по чисто неявной схеме на подробной сетке (2).

Решение системы уравнений для поправки на обобщенной грубой сетке производилось методом сопряженных градиентов с предобусловливанием Якоби [12] или (в случае 2) методом бисопряженных градиентов со стабилизацией с предобусловливанием Якоби [12]. Решение системы уравнений неявной схемы на подробной сетке (2) осуществлялось методом сопряженных градиентов с предобусловливанием модифицированного неполного разложения Холецкого [12]. При этом завершение итерационного процесса осуществляется при выполнении условия  $\|A_h v^l - f_h\|_{L_2} < \varepsilon$ , где  $v^l$  - решение на итерации с номером  $l$ ,  $v^0 = u^n$ ,  $\varepsilon = 10^{-8}$ . Завершение итерационного процесса при решении системы для поправки на обобщенной грубой сетке осуществляется при выполнении условия  $\|A_{\bar{h}} \mu^l - f_{\bar{h}}\|_{L_2} < \varepsilon_1$ , где  $\mu^l$  - решение на итерации с номером  $l$ ,  $\mu^0 = 0$ ,  $\varepsilon_1 = 10^{-10}$ .

В таблице 1 приведены значения  $\alpha_1 = \max_t \|u - u^n\|_{L_2}$ ,  $\alpha_2 = \max_t \|u - u^n\|_C$ ,  $\alpha_3 = \max_t (\|u - u^n\|_C / \|u^n\|_C)$ , соответствующие различным значениям  $K = \tau / h^2$ , полученные при решении этой модельной задачи с использованием первого варианта вычисления элементов матрицы  $A_{\bar{h}}$ .

В таблице 2 приведены значения  $\alpha_1, \alpha_2$ , соответствующие различным значениям  $K = \tau / h^2$ , полученные при решении этой модельной задачи с использованием второго варианта вычисления элементов матрицы  $A_{\bar{h}}$ .

Результаты расчетов модельной задачи продемонстрировали устойчивость и хорошую точность метода. Как видно из таблиц, решение модельной задачи предложенным методом слабо отличаются от ее решения по чисто неявной схеме на подробной сетке. С ростом  $N_h$  максимум по  $t$  абсолютной погрешности в норме  $L_2$  при фиксированном  $K$  монотонно убывает, является величиной порядка  $O(h^\alpha)$ , где  $\alpha > 1$ .

Таблица 1. Значения  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ , полученные при решении модельной задачи .

		K=10		K=100
		$\alpha_1, \alpha_2$	$\alpha_3$	$\alpha_1, \alpha_2$
$N_h=100$	$\alpha_1$	$0.216 \cdot 10^{-2}$	$0.259 \cdot 10^{-2}$	$0.535 \cdot 10^{-2}$
	$\alpha_2$	$0.741 \cdot 10^{-2}$		$0.809 \cdot 10^{-2}$
$N_h=200$	$\alpha_1$	$0.344 \cdot 10^{-3}$	$0.686 \cdot 10^{-3}$	$0.182 \cdot 10^{-2}$
	$\alpha_2$	$0.203 \cdot 10^{-2}$		$0.679 \cdot 10^{-2}$
$N_h=300$	$\alpha_1$	$0.138 \cdot 10^{-3}$	$0.483 \cdot 10^{-3}$	$0.804 \cdot 10^{-3}$
	$\alpha_2$	$0.141 \cdot 10^{-2}$		$0.372 \cdot 10^{-2}$
$N_h=400$	$\alpha_1$	$0.830 \cdot 10^{-4}$	$0.351 \cdot 10^{-3}$	$0.396 \cdot 10^{-3}$
	$\alpha_2$	$0.103 \cdot 10^{-2}$		$0.317 \cdot 10^{-2}$
$N_h=500$	$\alpha_1$	$0.566 \cdot 10^{-4}$	$0.259 \cdot 10^{-3}$	$0.213 \cdot 10^{-3}$
	$\alpha_2$	$0.769 \cdot 10^{-3}$		$0.280 \cdot 10^{-2}$
$N_h=600$	$\alpha_1$	$0.414 \cdot 10^{-4}$	$0.197 \cdot 10^{-3}$	$0.123 \cdot 10^{-3}$
	$\alpha_2$	$0.585 \cdot 10^{-3}$		$0.247 \cdot 10^{-2}$
$N_h=700$	$\alpha_1$	$0.317 \cdot 10^{-4}$	$0.153 \cdot 10^{-3}$	$0.768 \cdot 10^{-4}$
	$\alpha_2$	$0.456 \cdot 10^{-2}$		$0.212 \cdot 10^{-2}$
$N_h=800$	$\alpha_1$	$0.251 \cdot 10^{-4}$	$0.122 \cdot 10^{-3}$	$0.506 \cdot 10^{-4}$
	$\alpha_2$	$0.363 \cdot 10^{-3}$		$0.181 \cdot 10^{-2}$
$N_h=900$	$\alpha_1$	$0.203 \cdot 10^{-4}$	$0.989 \cdot 10^{-4}$	$0.351 \cdot 10^{-4}$
	$\alpha_2$	$0.295 \cdot 10^{-3}$		$0.154 \cdot 10^{-2}$
$N_h=990$	$\alpha_1$	$0.175 \cdot 10^{-4}$	$0.923 \cdot 10^{-4}$	$0.271 \cdot 10^{-4}$
	$\alpha_2$	$0.275 \cdot 10^{-3}$		$0.148 \cdot 10^{-2}$

Таблица 2. Значения  $\alpha_1, \alpha_2$  полученные при решении модельной задачи

		$K=2$	$K=10$	$K=30$	$K=100$
$N_h=100$	$\alpha_1$	$0.470 \cdot 10^{-3}$	$0.517 \cdot 10^{-3}$	$0.509 \cdot 10^{-3}$	$0.308 \cdot 10^{-3}$
	$\alpha_2$	$0.222 \cdot 10^{-2}$	$0.393 \cdot 10^{-2}$	$0.372 \cdot 10^{-2}$	$0.22 \cdot 10^{-2}$
$N_h=200$	$\alpha_1$	$0.227 \cdot 10^{-3}$	$0.211 \cdot 10^{-3}$	$0.229 \cdot 10^{-3}$	$0.191 \cdot 10^{-3}$
	$\alpha_2$	$0.124 \cdot 10^{-2}$	$0.179 \cdot 10^{-2}$	$0.249 \cdot 10^{-2}$	$0.19 \cdot 10^{-2}$
$N_h=300$	$\alpha_1$	$0.129 \cdot 10^{-3}$	$0.126 \cdot 10^{-3}$	$0.120 \cdot 10^{-3}$	$0.120 \cdot 10^{-3}$
	$\alpha_2$	$0.804 \cdot 10^{-3}$	$0.929 \cdot 10^{-3}$	$0.158 \cdot 10^{-2}$	$0.154 \cdot 10^{-2}$
$N_h=400$	$\alpha_1$	$0.830 \cdot 10^{-4}$	$0.828 \cdot 10^{-4}$	$0.752 \cdot 10^{-4}$	$0.773 \cdot 10^{-4}$
	$\alpha_2$	$0.555 \cdot 10^{-3}$	$0.556 \cdot 10^{-3}$	$0.103 \cdot 10^{-2}$	$0.121 \cdot 10^{-2}$
$N_h=500$	$\alpha_1$	$0.574 \cdot 10^{-4}$	$0.581 \cdot 10^{-4}$	$0.541 \cdot 10^{-4}$	$0.515 \cdot 10^{-4}$
	$\alpha_2$	$0.401 \cdot 10^{-3}$	$0.377 \cdot 10^{-3}$	$0.714 \cdot 10^{-3}$	$0.945 \cdot 10^{-3}$
$N_h=600$	$\alpha_1$	$0.420 \cdot 10^{-4}$	$0.428 \cdot 10^{-4}$	$0.406 \cdot 10^{-4}$	$0.368 \cdot 10^{-4}$
	$\alpha_2$	$0.302 \cdot 10^{-3}$	$0.292 \cdot 10^{-3}$	$0.515 \cdot 10^{-3}$	$0.742 \cdot 10^{-3}$
$N_h=700$	$\alpha_1$	$0.320 \cdot 10^{-4}$	$0.328 \cdot 10^{-4}$	$0.315 \cdot 10^{-4}$	$0.278 \cdot 10^{-4}$
	$\alpha_2$	$0.235 \cdot 10^{-3}$	$0.232 \cdot 10^{-3}$	$0.386 \cdot 10^{-3}$	$0.591 \cdot 10^{-3}$
$N_h=800$	$\alpha_1$	$0.251 \cdot 10^{-4}$	$0.259 \cdot 10^{-4}$	$0.251 \cdot 10^{-4}$	$0.228 \cdot 10^{-4}$
	$\alpha_2$	$0.188 \cdot 10^{-3}$	$0.187 \cdot 10^{-3}$	$0.259 \cdot 10^{-3}$	$0.477 \cdot 10^{-3}$
$N_h=900$	$\alpha_1$	$0.203 \cdot 10^{-4}$	$0.209 \cdot 10^{-4}$	$0.204 \cdot 10^{-4}$	$0.188 \cdot 10^{-4}$
	$\alpha_2$	$0.154 \cdot 10^{-3}$	$0.155 \cdot 10^{-3}$	$0.239 \cdot 10^{-3}$	$0.391 \cdot 10^{-3}$
$N_h=990$	$\alpha_1$	$0.174 \cdot 10^{-4}$	$0.180 \cdot 10^{-4}$	$0.176 \cdot 10^{-4}$	$0.164 \cdot 10^{-4}$
	$\alpha_2$	$0.135 \cdot 10^{-4}$	$0.137 \cdot 10^{-3}$	$0.245 \cdot 10^{-2}$	$0.383 \cdot 10^{-2}$

## Вывод

Предложен новый эффективный численный метод решения начально-краевых задач для уравнения теплопроводности с разрывным коэффициентом на основе использования многосеточных методов. С помощью расчетов модельной задачи для двумерного уравнения теплопроводности на ортогональной сетке показано, что предложенный метод обладает

устойчивостью и точностью, присущими чисто неявной схеме на подробной сетке. Созданный новый метод позволяет существенно уменьшить объем арифметической работы на каждом временном слое по сравнению с использованием неявной схемы на подробной сетке, уменьшить время расчета всей эволюционной задачи по сравнению с использованием явной схемы на подробной сетке.

## Список литературы

1. Самарский А.А. Теория разностных схем. М.: Наука, 1989.
2. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы. <http://phys.spb.ru/Stud/Books/index.php>
3. Федоренко Р.П. Релаксационный метод решения разностных эллиптических уравнений // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. 1961. Т.1. N5. С. 922-927.
4. Бахвалов Н.С. О сходимости одного релаксационного метода для эллиптического оператора с естественными ограничениями // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. 1966. Т. N6. С. 101-135.
5. Ладонкина М.Е., Милюкова О.Ю., Тишкин В.Ф. Один численный алгоритм для уравнений диффузионного типа на основе многосеточных методов // Матем. модел., 2007. Т.19. № 4. С.71–89.
6. Ладонкина М.Е., Милюкова О.Ю., Тишкин В.Ф. Использование многосеточных методов для решения уравнений диффузионного типа // ВАНТ, серия: Матем. модел. физ. проц. 2008 . вып. 1. С. 4 – 19.
7. Ладонкина М.Е., Милюкова О.Ю., Тишкин В.Ф. Численный алгоритм решения диффузионных уравнений на основе многосеточных методов. // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. 2009.Т.49. N 3. С.518-541.
8. Ладонкина М.Е., Милюкова О.Ю., Тишкин В.Ф. Консервативные схемы для решения уравнений диффузионного типа на основе использования многосеточных методов// "Труды Средневолжского математического общества", Саранск, 2008, Т. 10, №2. С. 21 – 44.
9. Ладонкина М.Е., Милюкова О.Ю., Тишкин В.Ф. Численный метод решения уравнений диффузионного типа на основе использования многосеточного метода. // Журн. вычисл. матем. и матем. физ., 2010, т. 50, N8, С. 1438-1461.
10. Olga Milyukova , Marina Ladonkina, and Vladimir Tishkin. A numerical method for solving parabolic equations based on the use of a multigrid method // International Journal of Numerical Analysis & Modeling, Series B. 2012. V 2, N 2-3. p. 183-199.
11. Милюкова О.Ю., Тишкин В.Ф. Численный метод решения уравнения теплопроводности на треугольных сетках на основе многосеточного метода. // Препринт ИПМ им. М.В. Келдыша РАН, 2011, № 29, 16с.
12. Saad Y. Iterative methods for sparse linear systems. PWS Publishing Co., Int. Tompson Publ. Co. 1995. 447P.