ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 65 за 2013 г.

Горючкина И.В.

О сходимости степенного ряда с нерациональными показателями степени, являющегося формальным решением алгебраического ОДУ

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
ИМЕНИ М.В. КЕЛДЫША

И. В. Горючкина

О СХОДИМОСТИ СТЕПЕННОГО РЯДА С НЕРАЦИОНАЛЬНЫМИ ПОКАЗАТЕЛЯМИ СТЕПЕНИ, ЯВЛЯЮЩЕГОСЯ ФОРМАЛЬНЫМ РЕШЕНИЕМ АЛГЕБРАИЧЕСКОГО ОДУ

Москва, 2013 г.

УДК 517.91

И. В. Горючкина. О сходимости степенного ряда с нерациональными показателями степени, являющегося формальным решением алгебраического ОДУ. Препринт института прикладной математики им. М. В. Келдыша РАН, Москва, 2013.

Здесь доказывается теорема о достаточном условии сходимости вблизи нуля степенного ряда (с комплексными, но не рациональными показателями степени), который формально удовлетворяет алгебраическому (полиномиальному) обыкновенному дифференциальному уравнению (ОДУ). Доказательство основано на классическом методе мажорант, но при построении мажорантного ряда используются методы степенной геометрии.

I. V. Goryuchkina. On convergence of power series solution with nonrational power exponents of algebraic ODE. Preprint of the Keldysh Institute of Applied Mathematics of RAS. Moscow, 2013.

Here we prove the theorem on sufficient condition of the convergence near zero of the formal power series (with complex but nonrational power exponents) that satisfies to algebraic (polynomial) ordinary differential equation (ODE). The proof is based on classical majorant method, but for constructing majorant series we use methods of power geometry.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 11-01-00023 и проект 12-01-31421 мол_а).

1. Свойства формальных решений алгебраических ОДУ, представляемых в виде степенных рядов с нерациональными показателями степени, мало изучены. Отметим, что степенная функция комплексного переменного с комплексным показателем степени имеет сложное поведение. Лучше изучены решения ОДУ, представляемые формальными рядами Тейлора, Лорана или Пьюзо. Имеется большое число работ, в основном зарубежных авторов, посвященных этой тематике. Далее мы приведем некоторые результаты, касающиеся сходимости и различных оценок на рост коэффициентов формальных рядов Тейлора или рядов Лорана с конечной главной частью.

В 1903 году Е. Майе [1] изучал формальные решения вида

$$y = \sum_{k=0}^{\infty} c_k\, x^k, \quad c_k \in \mathbb{C} \tag{1}$$

алгебраического ОДУ n-го порядка

$$f(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0, \tag{2}$$

где $f(x, y, y', \ldots, y^{(n)})$ – это многочлен своих переменных. И показал, что *если формальный ряд* (1) *удовлетворяет уравнению* (2), *тогда существует вещественное неотрицательное число s, такое, что ряд*

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{c_k}{(k!)^s}\, x^k \tag{3}$$

сходится для достаточно малых $|x|$. В 1971 году К. Малер [2] получил другое доказательство теоремы Майе.

Ряд (1) с тем свойством, что ряд (3) сходится, называется *рядом Жевре*, а число s – *показателем Жевре*.

В 1978 году Ж.-П. Рамис [3] изучал формальные решения линейных ОДУ. Используя многоугольник Ньютона, он предъявил точную оценку на показатель Жевре формального решения (1) линейного аналитического ОДУ и показал, что его значение зависит от тангенсов наклонов ребер этого многоугольника.

В 1989 году Б. Мальгранж [4] доказал теорему о том, что: *если а) формальное решение* (1) *удовлетворяет уравнению* (2)*; б) выполнено условие*

$$\frac{\partial f(x, y, y', \ldots, y^{(n)})}{\partial y^{(n)}} \not\equiv 0 \quad \text{\textit{на решении} (1);}$$

в) многоугольник Ньютона линейного дифференциального оператора

$$\mathcal{M}(x) = \sum_{l=0}^{n} \frac{\partial f(x, y, y', \ldots, y^{(n)})}{\partial y^{(l)}} \frac{d^l}{dx^l}, \quad \text{\textit{вычисленного на решении} (1),}$$

не имеет положительных тагенсов наклонов ребер; то особая точка $x = 0$ *является регулярной особой точкой, т. е. ряд* (1) *сходится для достаточно малых* $|x|$. *А если выполнены условия а), б) и вместо условия в) – условие г) многоугольник Ньютона этого линейного дифференциального оператора* $\mathcal{M}(x)$ *имеет ребра с положительными тангенсами наклона; то для формального решения* (1) *уравнения* (2) *показатель Жевре* $s \leqslant 1/r$, *где* r *– это наименьший из положительных тангенсов наклона ребер многоугольника Ньютона.*

В 1990 году Я. Сибуя [5] рассматривал уравнение (2) с решением (1), для которых он обобщил вышеперечисленные результаты Майе, Рамиса и Мальгранжа. А именно, он предъявил точную оценку на показатель Жевре формального решения (1) нелинейного аналитического ОДУ, и из его теоремы следовали утверждения теоремы Рамиса и теоремы Мальгранжа.

В 2004 г. А.Д. Брюно [6] рассмотрел уравнение

$$\tilde{f}(x, z, z', \ldots, z^{(n)}) \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{L}(x)z + h(x, z, z', \ldots, z^{(n)}) = 0, \tag{4}$$

где $\tilde{f}(x, z, z', \ldots, z^{(n)})$ – это сумма членов вида

$$\alpha\, x^p z^{q_0} \left(z'\right)^{q_1} \cdot \ldots \cdot \left(z^{(n)}\right)^{q_n}, \tag{5}$$

$\alpha,\ p \in \mathbb{C}$, $0 \leqslant q_0, \ldots, q_n \in \mathbb{Z}$. Согласно работе [6] каждому члену (5) можно поставить в соответствие точку $(t_1, t_2) = (\operatorname{Re} p - \sum\limits_{k=0}^{n} k\, q_k, \sum\limits_{k=0}^{n} q_k) \in \mathbb{R}^2$. Совокупность всех таких точек называется *носителем* суммы $\tilde{f}(x, z, z', \ldots, z^{(n)})$ и обозначается $\mathbf{S}(\tilde{f})$. Выпуклая оболочка носителя называется *многоугольником* и обозначается $\Gamma(\tilde{f})$. Предполагается, что в уравнении (4) $\mathcal{L}(x)$ – это линейный дифференциальный оператор Эйлера, носитель $\mathbf{S}(\mathcal{L}(x)z) = (v, 1)$, $v \in \mathbb{R}$, точка $(v, 1)$ является левой вершиной многоугольника $\Gamma(\tilde{f})$ и не содержится в многоугольнике $\Gamma(h)$. Верхнее ребро многоугольника $\Gamma(\tilde{f})$, примыкающее к вершине $(v, 1)$ имеет внешнюю нормаль $-(1, r)$. В [6] доказана теорема 3.1: *уравнение* (4) *имеет формальное решение*

$$z = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(\log x) x^{s_k}, \tag{6}$$

где $s_k \in \mathbf{K}(k_1, \ldots, k_\kappa) \subset \mathbb{C}$, $r < \operatorname{Re} s_k \leqslant \operatorname{Re} s_{k+1}$, *конечно число* s_k *с одинаковым* $\operatorname{Re} s_k$, c_k *– это многочлен от логарифма* $\log x$, $k_1, \ldots, k_\kappa$ *– критические числа оператора* $\mathcal{L}(x)$ *с учетом их кратности* ($r < \operatorname{Re} k_i \leqslant \operatorname{Re} k_{i+1}$) *и* $\mathbf{K}(k_1, \ldots, k_\kappa)$ *– точечное множество на* $\mathbb{C}$ (*с* $\operatorname{Re} s_k > r$), *которое определенным образом вычисляется по носителю* $\mathbf{S}(\tilde{f})$ *и критическим числам*

$k_1, \dots, k_\kappa$. В работе [6] указан метод вычисления разложения (6). При этом если

$$k_i \notin \mathbf{K}(k_1, \dots, k_{i-1}), \quad i = 1, \dots, \kappa, \tag{7}$$

то разложение (6) не содержит логарифмов $\log x$, т.е. все c_k являются постоянными. Если имеются кратные критические числа $k_i = k_{i-1}$, то условие (7) не выполнено. Однако разложение (6) может не содержать логарифма, если условие (7) не выполнено. Кроме того, в [6] сформулирована без доказательства теорема 3.4 (гипотеза): *если в ситуации теоремы* 3.1 *в разложении* (6) *все* c_k *суть константы и порядок производной в* $\mathcal{L}(x)z$ *равен* n (*т.е. порядку производной в* $h(x, z, z', \dots, z^{(n)})$), *то ряд* (6) *равномерно сходится в некоторой окрестности точки* $x = 0$ *при* $|\arg x| \leqslant \pi$.

Далее рассматривается случай, когда уравнение (2) имеет формальное решение

$$y = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^{s_k}, \tag{8}$$

где коэффициенты c_k – комплексные постоянные, показатели степени $s_k \in \mathbb{C}$, $-\infty < \operatorname{Re} s_k \leqslant \operatorname{Re} s_{k+1}$, и если $\operatorname{Re} s_k = \operatorname{Re} s_{k+1}$, то $\operatorname{Im} s_k \leqslant \operatorname{Im} s_{k+1}$, и во втором пункте данной работы доказывается

Лемма 1. *Если для уравнения* (2) *с формальным решением* (8) *выполняется условие*

$$\sum_{l=0}^{n} \left| \frac{\partial f(x, y, y', \dots, y^{(n)})}{\partial y^{(l)}} \right| \not\equiv 0 \;\; \textit{на решении (8)}, \tag{9}$$

тогда существует такой номер $N \in \mathbb{Z}$, $N \geq 0$, *что для любого целого* $\mu \geq N$, *преобразование*

$$y = \sum_{k=0}^{\mu} c_k \, x^{s_k} + x^{s_\mu} u, \quad \operatorname{Re} s_{\mu+1} > \operatorname{Re} s_\mu, \tag{10}$$

приводит уравнение (2) *к уравнению специального вида*

$$x^{v+s_\mu} \left[\mathcal{L}(x) u + g(x, u, u', \dots, u^{(n)}) \right] = 0, \tag{11}$$

где $v \in \mathbb{C}$, $\mathcal{L}(x)$ *– это линейный дифференциальный оператор Эйлера, т. е. линейный дифференциальный оператор вида*

$$\mathcal{L}(x) = \sum_{l=0}^{n} a_l \, x^l \, \frac{d^l}{dx^l}, \tag{12}$$

$a_l = \mathrm{const} \in \mathbb{C}$, $\sum\limits_{l=0}^{n} |a_l| \neq 0$, *дифференциальная сумма* $g(x, u, u', \ldots, u^{(n)})$ *содержит* x *в комплексных степенях с положительными вещественными частями или в чисто мнимых степенях, а* $u, u', \ldots, u^{(n)}$ *– в целых неотрицательных степенях. При этом*

$$g(x, u, u', \ldots, u^{(n)}) = A(x, u_0, u_1, \ldots, u_n) + B(x, u_0, u_1, \ldots, u_n) + D(x), \quad (13)$$

где

$$u_0 = u, \quad u_l = x^l u^{(l)} + \sum_{j=1}^{l} \prod_{i=1}^{j} (s_\mu - i + 1)\, \mathrm{C}_l^{l-j}\, x^{l-j} u^{(l-j)}, \quad (14)$$

$$\mathrm{C}_l^{l-j} = \frac{l\,!}{j!\,(l-j)!}, \quad l \in \mathbb{N}, \ \ l \leqslant n,$$

или, что тоже самое,

$$u = u_0, \quad x^l u^{(l)} = u_l + \sum_{j=1}^{l} (-1)^j \prod_{i=1}^{j} (s_\mu + i - 1)\ \mathrm{C}_l^{l-j}\ u_{l-j},$$

а) *функция* $A(x, u_0, u_1, \ldots, u_n)$ *содержит* x *в комплексных степенях с положительными вещественными частями или в чисто мнимых степенях и только линейные по* u_0, u_1, $\ldots$, u_n *члены;*

б) *функция* $B(x, u_0, u_1, \ldots, u_n)$ *содержит* x *в комплексных степенях с положительными вещественными частями или в чисто мнимых степенях и не содержит линейных по* $u_0, u_1, \ldots, u_n$ *и свободных от* u_0, u_1, $\ldots$, u_n *членов;*

в) *функция* $D(x)$ *содержит* x *в комплексных степенях с положительными вещественными частями.*

Отметим, что если многочлен $f(x, y, y', \ldots, y^{(n)})$ и все его частные производные по $y, y', \ldots, y^{(n)}$ до k-го порядка обращаются в ноль тождественно на решении (8), а частная производная $k+1$-го порядка по переменной $y^{(l)}$ не обращается в ноль тождественно, то в качестве исходного многочлена следует рассматривать k раз продифференцированный по $y^{(l)}$ многочлен $f(x, y, y', \ldots, y^{(n)})$.

Таким образом, задача изучения решений уравнения (2) всегда сводится к задаче изучения решений уравнения (11).

В четвертом пункте доказывается **теорема 3.4**, сформулированная в [6], в случае когда множество показателей степени формального решения (8) уравнения (2) имеет одну комплексную (но нерациональную) образующую s_μ.

Отметим, что во многих случаях оператор $\mathcal{L}(x)$ уравнения (4) вычисляется по укороченному уравнению (первому приближению уравнения (2)) и его решению.

В случае когда формальное решение (8) уравнения (2) имеет целые показатели степени s_k, условия сформулированной теоремы Брюно эквивалентны условиям теоремы Мальгранжа в регулярном случае, т. е. в случае выполнения условий *а*), *б*) и *в*).

В 2010 году А. Брюно и И. Горючкина в гл. 1, § 7 [7] доказали сформулированную в [6] теорему в случае целых показателей степени, используя технику, отличную от техники Мальгранжа.

В пятом пункте этой статьи приведены примеры проверки условий теоремы Брюно для формальных решений третьего уравнения Пенлеве. Отметим, что любое формальное решение вида (8) третьего (и любого) уравнения Пенлеве [12] имеет не более одной комплексной образующей множества показателей степени этого решения.

2. Доказательство леммы 1. Сначала отметим, что в работе Мальгранжа [4] приведено доказательство этой леммы в случае целых показателей степени разложения (8). Его подход применим и в случае, когда показатели степени $s_k \in \mathbb{C}$, $-\infty < \operatorname{Re} s_0 \leqslant \operatorname{Re} s_1 \leqslant \operatorname{Re} s_2 \leqslant \ldots$, число показатателей степени s_k с одинаковой вещественной частью $\operatorname{Re} s_k$ конечно. Далее будем использовать технические приемы работ [4] и [8].

Перепишем уравнение (2) в виде

$$F(x, y_0, y_1, \ldots, y_n) = 0, \tag{15}$$

где левая часть – это многочлен своих переменных, $y_i = x^i\, y^{(i)}$, $i = 0, \ldots, n$. Обозначим

$$Y = (y_0, y_1, \ldots, y_n), \;\; U = (u_0, u_1, \ldots, u_n),$$
$$\varphi = \sum_{k=0}^{\infty} c_k\, x^{s_k}, \;\; \varphi_\mu = \sum_{k=0}^{\mu} c_k\, x^{s_k},$$
$$\varphi_i = x^i \varphi^{(i)}, \;\; \varphi_{i\mu} = x^i \varphi_\mu^{(i)}, \; i = 0, \ldots, n,$$
$$\Phi = (\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_n), \;\; \Phi_\mu = (\varphi_{0\mu}, \varphi_{1\mu}, \ldots, \varphi_{n\mu}).$$

Тогда условие (9) можно переписать в виде

$$\sum_{i=0}^{n} \left| \;\; \frac{\partial F(x, Y)}{\partial y_i} \right|_{Y=\Phi} \Bigg| \not\equiv 0. \tag{16}$$

Преобразование (10) запишем в виде $Y=\Phi_\mu+x^{s_\mu}U$. Применяя это преобразование и формулу Тейлора к уравнению $F(x,Y)=0$, получаем уравнение

$$\begin{gathered}F(x,\Phi_\mu+x^{s_\mu}U)=F(x,\Phi_\mu)+x^{s_\mu}\sum_{i=0}^{n}\left.\frac{\partial F(x,Y)}{\partial y_i}\right|_{Y=\Phi_\mu}u_i+\\ +\frac{x^{2s_\mu}}{2}\sum_{i,j=0}^{n}\left.\frac{\partial^2 F(x,Y)}{\partial y_i\partial y_j}\right|_{Y=\Phi_\mu}u_i\,u_j+\dots=0.\end{gathered}\tag{17}$$

Определим функцию $p(\varphi)$, которая каждому формальному степенному ряду φ (с постоянными коэффициентами и комплексными показателями степени, которые упорядочены по неубыванию вещественных частей, и число показателей степени с одинаковой вещественной частью конечно) ставит в соответствие число $\rho\in\mathbb{C}$, вещественная часть которого $\operatorname{Re}\rho$ – это наименьшая среди всех вещественных частей показателей степени этого ряда, и среди всех мнимых частей показателей степени с минимальной вещественной частью мнимая часть $\operatorname{Im}\rho$ минимальна.

Если $\left.\dfrac{\partial F(x,Y)}{\partial y_i}\right|_{Y=\Phi}\not\equiv 0$, то пусть

$$v_i=p\left(\left.\frac{\partial F(x,Y)}{\partial y_i}\right|_{Y=\Phi}\right).$$

Если $\left.\dfrac{\partial F(x,Y)}{\partial y_i}\right|_{Y=\Phi}\equiv 0$, то пусть $v_i=+\infty$. Поскольку выполнено условие (16), то не все значения $v_0,\dots,v_n$ бесконечны. Пусть $v=p\left(\sum\limits_{i=0}^{n}x^{v_i}\right)$.

И пусть μ такой номер, что $\mathrm{Re}s_{\mu+1}>\mathrm{Re}s_\mu\geq 0$, и

$$\forall i,\ \forall l:\ \ i,l\in\mathbb{Z},\ 0\leqslant i\leqslant n,\ l\geq 0,\ \ \operatorname{Re}\left(p\left(\left.\frac{\partial F(x,Y)}{\partial y_i}\right|_{Y=\Phi_{\mu+l}}\right)\right)\geq\operatorname{Re}v,$$

и

$$\exists\, i,\ \forall l:\ \ i,l\in\mathbb{Z},\ 0\leqslant i\leqslant n,\ l\geq 0,\ \ p\left(\left.\frac{\partial F(x,Y)}{\partial y_i}\right|_{Y=\Phi_{\mu+l}}\right)=v.\tag{18}$$

Тогда

$$\operatorname{Re}\left(p\left(\left.\frac{\partial F(x,Y)}{\partial y_i}\right|_{Y=\Phi}-\left.\frac{\partial F(x,Y)}{\partial y_i}\right|_{Y=\Phi_\mu}\right)\right)\geq\operatorname{Re}v.\tag{19}$$

А поскольку

$$\left.\frac{\partial F(x,Y)}{\partial y_i}\right|_{Y=\Phi}-\left.\frac{\partial F(x,Y)}{\partial y_i}\right|_{Y=\Phi_\mu}=x^{s_\mu}\sum_{j=0}^{n}\left.\frac{\partial^2 F(x,Y)}{\partial y_i\partial y_j}\right|_{Y=\Phi_\mu}u_j+\dots,$$

то

$$\operatorname{Re}\left(p\left(x^{s_\mu}\sum_{j=0}^{n}\frac{\partial^2 F(x,Y)}{\partial y_i\partial y_j}\bigg|_{Y=\Phi_\mu}u_j+\ldots\right)\right)\geq \operatorname{Re} v. \tag{20}$$

Положим $\Psi=(\psi_0,\ldots,\psi_n)$ и $\Psi=x^{-s_\mu}(\Phi-\Phi_\mu)$, тогда $U=\Psi$ – это формальное решение уравнения (17). Каждая из компонент вектора Ψ начинается со степени $s_{\mu+1}-s_\mu$, т. е. $p(\psi_i)=s_{\mu+1}-s_\mu$, $i=0,\ldots,n$. Кроме того, так как $Y=\Phi$ формально удовлетворяет уравнению (15), то

$$p\left(F(x,\Phi_\mu)\right)=s_{\mu+1}+v. \tag{21}$$

В уравнении (17) среди линейных по $u_0,\ldots,u_n$ членов выделим те, которые содержат множитель $x^{s_\mu+v}$, обозначим их $x^{s_\mu+v}L(U)$, где многочлен $L(U)$ имеет вид

$$L(U)=\sum_{i=0}^{n}A_i\,u_i. \tag{22}$$

Согласно формуле (18) этот многочлен $L(U)\not\equiv 0$. Пользуясь формулой (14), получаем $L(U)=\mathcal{L}(x)u=\sum\limits_{i=0}^{n}a_i\,x^i\,u^{(i)}$, где $\sum\limits_{i=0}^{n}|a_i|\neq 0$. Действительно, коэффициенты A_i и a_i связаны между собой треугольной матрицей с единичным определителем:

$$\begin{pmatrix}
1 & \pi_1\,\mathrm{C}_1^0 & \pi_2\,\mathrm{C}_2^0 & \ldots & \pi_{n-1}\,\mathrm{C}_{n-1}^0 & \pi_n\,\mathrm{C}_n^0\\
0 & 1 & \pi_1\,\mathrm{C}_2^1 & \ldots & \pi_{n-2}\,\mathrm{C}_{n-1}^1 & \pi_{n-1}\,\mathrm{C}_n^1\\
0 & 0 & 1 & \ldots & \pi_{n-3}\,\mathrm{C}_{n-1}^2 & \pi_{n-2}\,\mathrm{C}_n^2\\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\
0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & \pi_1\,\mathrm{C}_n^{n-1}\\
0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix}A_0\\A_1\\A_2\\\vdots\\A_{n-1}\\A_n\end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix}a_0\\a_1\\a_2\\\vdots\\a_{n-1}\\a_n\end{pmatrix},$$

где $\pi_j=\prod\limits_{i=1}^{j}(s_\mu-i+1)$. Отсюда следует, что $a_0=\ldots=a_n=0$, только если $A_0=\ldots=A_n=0$, чего быть не может, поскольку $L(U)\not\equiv 0$.

Обозначим также

$$x^{s_\mu+v}D(x)=F(x,\Phi_\mu),$$

$$x^{s_\mu+v}(A(x,U)+L(U))=x^{s_\mu}\sum_{i=0}^{n}\frac{\partial F(x,\Phi_\mu)}{\partial y_i}\,u_i,$$

$$x^{s_\mu+v}B(x,U)=x^{2s_\mu}\sum_{i,j=0}^{n}\frac{\partial^2F(x,\Phi_\mu)}{\partial y_i\partial y_j}u_iu_j+\ldots.$$

При этом из соотношений (19), (20), (21) и (22) следует, что $p(D(x))=s_{\mu+1}-s_\mu$, $\mathrm{Re}\,(p\,(L(\Psi)))=0$, $\mathrm{Re}\,(p\,(A(x,\Psi)))\geqslant 0$, $p\,(A(x,\Psi))\neq 0$, $\mathrm{Re}\,(p\,(B(x,\Psi)))\geqslant 0$, т. е. функция $A(x,U)$ содержит x в комплексных степенях с положительными вещественными частями или в чисто мнимых степенях и только линейные по $u_0,u_1,\ldots,u_n$ члены; функция $B(x,U)$ содержит x в комплексных степенях с положительными вещественными частями или в чисто мнимых степенях и не содержит линейных по u_0, u_1, …, u_n и свободных от u_0, u_1, …, u_n членов; функция $D(x)$ содержит x в комплексных степенях с положительными вещественными частями. Доказательство леммы 1 окончено.

3. Далее при $|x|\to 0$, $\arg(x)\in[-\pi,\pi]$ изучается формальное решение (8) уравнения (2) в предположении, что выполнены условия

а) $\dfrac{\partial f(x,y,y',\ldots,y^{(n)})}{\partial y^{(n)}}\not\equiv 0$ на решении (8);

б) коэффициент $c_\mu\neq 0$;

в) показатели степени

$$s_0,\ldots,s_{\mu-1}\in\mathbb{Z},\quad s_\mu\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{Q},\quad s_\mu,s_{\mu+1},s_{\mu+2},\dots\in\mathbf{K}\subset\mathbb{C},\tag{23}$$

$$\mathbf{K}\subseteq\{s_\mu+m_1r_1+m_2r_2,\ m_1,m_2\in\mathbb{Z},\ m_1,m_2\geqslant 0\},\tag{24}$$

$$\mathrm{Re}\,r_1,\ \mathrm{Re}\,r_2>0,$$

$$r_1=\langle R_1,\,(1,s_\mu)\rangle=\alpha_1+\beta_1s_\mu,\quad r_2=\langle R_2,\,(1,s_\mu)\rangle=\alpha_2+\beta_2s_\mu,\tag{25}$$

векторы $R_1=(\alpha_1,\,\beta_1)$ и $R_2=(\alpha_2,\,\beta_2)$, $R_1,\,R_2\in\mathbb{Z}^2$, векторы R_1 и R_2 не коллинеарны, т. е.

$$\gamma\ ,\overset{\mathrm{def}}{=}\begin{vmatrix}\alpha_1&\beta_1\\ \alpha_2&\beta_2\end{vmatrix}\neq 0;\tag{26}$$

г) показатели степени s_k занумерованы в порядке неубывания их вещественных частей

$$-\infty<s_0<\dots<s_{\mu-1}<\mathrm{Re}\,s_\mu\leqslant\mathrm{Re}\,s_{\mu+1}\leq\ldots,$$

если $\mathrm{Re}\,s_k=\mathrm{Re}\,s_{k+1}$, то $\mathrm{Im}\,s_k<\mathrm{Im}\,s_{k+1}$. Количество показателей степени s_k с одинаковой вещественной частью $\mathrm{Re}\,s_k$ конечно.

Таким образом, рассматривается случай, когда множество показателей степени (24) разложения (8) имеет только одну комплексную образующую s_μ.

Кроме того, будем предполагать, что уравнение (2) преобразованием (10) приводится к уравнению специального вида (11) с тем же самым номером μ, что и в формулах (23) и (24). Тогда с помощью преобразования (10) эта задача сводится к задаче изучения решения

$$u = \sum_{k=0}^{\infty} \gamma_k \, x^{\sigma_k} \tag{27}$$

уравнения

$$\mathcal{L}(x)u + g(x, u, u', \ldots, u^{(n)}) = 0, \tag{28}$$

где $\gamma_k = c_{k+\mu+1}$, $\sigma_k = s_{k+\mu+1} - s_\mu$, линейный дифференциальный оператор $\mathcal{L}(x)$ определен формулой (12), дифференциальная сумма $g(x, u, u', \ldots, u^{(n)})$ определена формулой (13). При этом показатели степени σ_k принадлежат множеству

$$\{m_1 r_1 + m_2 r_2, \ m_1, m_2 \in \mathbb{Z}, \ m_1, m_2 \geq 0, m_1 + m_2 > 0\} \subset \mathbb{C}. \tag{29}$$

Замечание 1. Сделав преобразование $y = \sum\limits_{k=0}^{\mu-1} c_k x^{s_k} + z$ в уравнении (2) с решением (8), учитывая предположения а) – г) (перечисленные в начале этого пункта) и умножив результат на x в подходящей степени, получаем уравнение

$$h(x, z, z', \ldots, z^{(n)}) = 0, \tag{30}$$

где $h(x, z, z', \ldots, z^{(n)})$ – это многочлен своих переменных.

Векторы R_1 и R_2 образуют базис множества

$$\{R_0 + m_1 R_1 + m_2 R_2, \, m_1, m_2 \in \mathbb{Z}, m_1, m_2 \geqslant 0\} \subset \mathbb{Z}^2, \ R_0 \in \mathbb{Z}^2, \tag{31}$$

в котором содержится носитель $\mathbf{S}(h)$ уравнения (30).

Лемма 2. *Комплексный носитель уравнения* (28) (*которое получается из уравнения* (2) *с решением* (8) *с помощью преобразования* (10) *с учетом условий* а) – г)) *лежит в множестве*

$$\{M_1 \, (r_1, \, -1) + M_2 \, (r_2, \, -1) + M_3 (0, \, 1)\} \subset \mathbb{C} \times \mathbb{Z}, \tag{32}$$

$M_1, M_2, M_3 \in \mathbb{Z}$, $M_3 \geq M_1 + M_2$, $M_1 + M_2 + M_3 > 0$, $M_1, M_2, M_3 \geq 0$.

Доказательство. Сделаем в уравнении (2) преобразование (10). Но сделаем его в три приема

$$1)\ \ y = \sum_{k=0}^{\mu-1} c_k x^{s_k} + z,\ \ 2)\ \ z = c_\mu x^{s_\mu} + v,\ \ 3)\ \ v = x^{s_\mu} u, \tag{33}$$

что чуть увеличит объем доказательства, но упростит выкладки. Отметим, что основное внимание уделяется изменениям показателей степени, а не появляющимся во время преобразований многочисленным константам.

Итак, сначала в уравнении (2) делаем преобразование 1) из формулы (33). Согласно замечанию 1 получаем уравнение (30) с носителем $\mathbf{S}(h)$, лежащим в множестве (31). Рассмотрим моном

$$\alpha\, x^{q_1}\, z^{q_{20}} (z'x)^{q_{21}} \cdot \ldots \cdot (z^{(n)} x^n)^{q_{2n}} \tag{34}$$

дифференциального многочлена $h(x, z, z', \ldots, z^{(n)})$, где $\alpha \in \mathbb{C}$, q_1, q_{20}, $\ldots$, $q_{2n} \in \mathbb{Z}$, q_1, q_{20}, $\ldots$, $q_{2n} \geq 0$, $q_2 = \sum\limits_{l=0}^{n} q_{2\,l}$, $(q_1,\, q_2) \in \mathbf{S}(h)$.

Затем применяем преобразование 2) из формулы (33) к моному (34), получаем выражение

$$\alpha\, x^{q_1}\, (c_{\mu 0}\, x^{s_\mu} + v)^{q_{20}}\, (c_{\mu 1}\, x^{s_\mu} + v' x)^{q_{21}} \cdot \ldots \cdot (c_{\mu n}\, x^{s_\mu} + v^{(n)} x^n)^{q_{2n}},$$

где $c_{\mu\, l}\, x^{s_\mu} = c_\mu (x^{s_\mu})^{(l)}\, x^l$. Пользуемся формулой бинома Ньютона и переписываем это выражение в виде

$$\alpha\, x^{q_1} \sum_{j_0=0}^{q_{20}} \mathrm{C}_{q_{20}}^{j_0}\, (c_{\mu 0} x^{s_\mu})^{q_{20} - j_0}\, v^{j_0} \cdot \ldots \cdot \sum_{j_n=0}^{q_{2n}} \mathrm{C}_{q_{2n}}^{j_n}\, (c_{\mu n} x^{s_\mu})^{q_{2n} - j_n}\, (x^n v^{(n)})^{j_n},$$

где $\mathrm{C}_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$.

Далее перемножаем суммы, выделяем свободные от $v, v', \ldots, v^{(n)}$, линейные, квадратичные и. т. д. члены по $v, v', \ldots, v^{(n)}$ и выносим за скобку множитель $\tilde{\alpha}\, x^{q_1 + q_2 s_\mu}$, где $\tilde{\alpha} = \alpha\, c_{\mu 0}^{q_{20}} \cdot \ldots \cdot c_{\mu n}^{q_{2n}}$, получаем выражение

$$\tilde{\alpha}\, x^{q_1 + q_2 s_\mu} \left[1 + \sum_{l=0}^{n} \mathrm{C}_{q_{2\,l}}^{1}\, \frac{v^{(l)} x^l}{c_{\mu\, l}}\, x^{-s_\mu} + \sum_{l=0}^{n} \mathrm{C}_{q_{2\,l}}^{2} \left(\frac{v^{(l)} x^l}{c_{\mu\, l}} \right)^2 x^{-2 s_\mu} + \right. \tag{35}$$

$$\left. \sum_{\substack{l,m=0 \\ l \neq m}}^{n} \mathrm{C}_{q_{2\,l}}^{1}\, \mathrm{C}_{q_{2\,m}}^{1}\, \frac{v^{(l)} x^l}{c_{\mu\, l}}\, \frac{v^{(m)} x^m}{c_{\mu\, m}}\, x^{-2 s_\mu} + \ \ldots\ + \frac{v^{q_{20}} \cdot \ldots \cdot (v^{(n)} x^n)^{q_{2n}}}{c_{\mu 0}^{q_{20}} \cdot \ldots \cdot c_{\mu n}^{q_{2n}}}\, x^{-q_2 s_\mu} \right].$$

Обозначим $(x^{s_\mu}u)^{(l)}=\sum\limits_{j=0}^{l} a_{lj}\,x^{s_\mu-l+j}u^{(j)}$. Теперь в формуле (35) делаем преобразование 3) из формулы (33), получаем выражение

$$\tilde{\alpha}\,x^{q_1+q_2s_\mu}\left[1+\sum_{l=0}^{n}\mathrm{C}^{\,1}_{q_{2\,l}}\sum_{j=0}^{l}\frac{a_{lj}}{c_{\mu\,l}}\,u^{(j)}x^j+\sum_{l=0}^{n}\mathrm{C}^{\,2}_{q_{2\,l}}\left(\sum_{j=0}^{l}\frac{a_{lj}}{c_{\mu\,l}}\,u^{(j)}x^j\right)^2+\right.$$
$$\sum_{\substack{l,m=0\\ l\neq m}}^{n}\mathrm{C}^{\,1}_{q_{2\,l}}\mathrm{C}^{\,1}_{q_{2\,m}}\sum_{j=0}^{l}\frac{a_{lj}}{c_{\mu\,l}}\,u^{(j)}x^j\sum_{i=0}^{m}\frac{a_{mi}}{c_{\mu\,m}}\,u^{(i)}x^i+\ \dots$$
$$\left.+\frac{1}{c_{\mu 0}^{q_{20}}\cdot\ldots\cdot c_{\mu n}^{q_{2n}}}\,u^{q_{20}}\,(a_{10}u+a_{11}xu')^{q_{21}}\cdot\ldots\cdot\left(\sum_{j=0}^{n}a_{nj}u^{(j)}x^j\right)^{q_{2n}}\right],$$

которое можно записать в виде

$$x^{q_1+q_2s_\mu}\sum_{i=0}^{N}b_i\,u^{q_{20}^i}(u'x)^{q_{21}^i}\cdot\ldots\cdot(u^{(n)}x^n)^{q_{2n}^i},\tag{36}$$

где $N\in\mathbb{N}$, $b_i\in\mathbb{C}$, $q_{20}^i,\dots,q_{2n}^i\in\mathbb{Z}$, $q_{20}^i,\dots,q_{2n}^i\geq 0$, $q_2^i=\sum\limits_{l=0}^{n}q_{2l}^i$.

Комплексный носитель этой дифференциальной суммы имеет вид

$$\{(q_1+q_2s_\mu,\ q_2^i),\ i=0,\dots,N\},$$

где $q_2^i\in\mathbb{Z}$, $q_2^i\geq 0$, а $(q_1,q_2)\in\mathbf{S}(h)$. Поскольку $(q_1,q_2)\in\mathbf{S}(h)$, то

$$q_1+q_2s_\mu\in\{\langle R_0+R_1m_1+R_2m_2,(1,s_\mu)\rangle,m_1,m_2\in\mathbb{Z},\ m_1,m_2\geq 0\}.$$

Отсюда следует, что носитель уравнения (11) лежит в множестве

$$\{(r_0+m_1r_1+m_2r_2,m_3),m_1,m_2,m_3\in\mathbb{Z},\ m_1,m_2,m_3\geq 0,\ m_1+m_2+m_3>0\},$$

где $r_0=\langle R_0,(1,s_\mu)\rangle$, $r_1=\langle R_1,(1,s_\mu)\rangle$ и $r_2=\langle R_2,(1,s_\mu)\rangle$. Кроме того, $r_0=v+s_\mu$, $v\in\mathbb{C}$. Делим уравнение (11) на x^{v+s_μ}, получаем уравнение (28). Носитель уравнения (28) лежит в множестве

$$\{(r_1m_1+r_2m_2,m_3),m_1,m_2,m_3\in\mathbb{Z},m_1,m_2,m_3\geq 0,m_1+m_2+m_3>0\}\}.\tag{37}$$

Формулу (37) переписываем в эквивалентной форме (32). Доказательство леммы 2 окончено.

Число λ называется *характеристическим* (*собственным*) *числом* линейного дифференциального оператора $\mathcal{L}(x)$, определенного формулой (12), если оно удовлетворяет уравнению $\mathcal{L}(x)\,x^{\lambda} = 0$. При этом $\mathcal{L}(x)\,x^{\lambda} = x^{\lambda}\,\nu(\lambda)$, где $\nu(\lambda)$ – характеристический многочлен. Корни λ_i, $i = 1\ldots,n$ характеристического уравнения $\nu(\lambda) = 0$ являются характеристическими числами линейного дифференциального оператора $\mathcal{L}(x)$.

Линейный дифференциальный оператор (12) имеет n характеристических чисел λ_i, $i = 1\ldots,n$, которые можно упорядочить $\operatorname{Re}\lambda_1 \leqslant \operatorname{Re}\lambda_2 \leqslant \ldots \leqslant \operatorname{Re}\lambda_n$. Для разложения (27) характеристическое число λ_i называется *критическим числом*, если $\operatorname{Re}\lambda_i > \operatorname{Re}\sigma_0$ или $\operatorname{Re}\lambda_i = \operatorname{Re}\sigma_0$, а $\operatorname{Im}\lambda_i > \operatorname{Im}\sigma_0$.

Согласно § 1 работы [6] формальное решение $z = \sum\limits_{k=\mu}^{\infty} c_k x^{s_k}$ уравнения (30) с носителем (24) соответствует вершине $\Gamma_j^{(0)}$ многоугольника этого уравнения. Носитель этого решения (см. предложения 3.1 – 3.3 из [6]) вычисляется по носителю уравнения (30) и характеристическому числу s_μ. При этом среди показателей степени s_k либо нет критических чисел, либо критические числа принадлежат множеству (24).

Если алгебраическое ОДУ имеет формальное решение

$$y = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(\tilde{x}^{\,1/q})^{s_k} \tag{38}$$

($q \in \mathbb{Z}$, c_k и s_k те же, что и в формуле (8)), то с помощью замены переменной $\tilde{x} = x^q$ в уравнении и его формальном решении (38) эта задача сводится к задаче (2) с решением (8).

Продолжим изучать формальное решение (27) уравнения (28). Далее нам будет необходимо, чтобы для всех k, начиная с некоторого номера $m+1$, выполнялись неравенства

$$|\nu(\sigma_k)| > 0 \quad \text{и} \quad |\sigma_k(\sigma_k - 1)\cdot\ldots\cdot(\sigma_k - n + 1)| > 0. \tag{39}$$

Для этого сделаем замену зависимой переменной в уравнении (28)

$$u = \sum_{k=0}^{m} \gamma_k\, x^{\sigma_k} + w, \tag{40}$$

где m выбрано так, что выполняются неравенства

$$\operatorname{Re}\sigma_m \geqslant n \quad \text{и} \quad \operatorname{Re}\sigma_m \geqslant \operatorname{Re}\lambda_n. \tag{41}$$

После замены переменной (40) в уравнении (28) получим уравнение

$$f_1(x, w, w', \ldots, w^{(n)}) \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{L}(x)w + g_1(x, w, w', \ldots, w^{(n)}) = 0, \tag{42}$$

где линейный дифференциальный оператор $\mathcal{L}(x)$ определен формулой (12), дифференциальная сумма $g_1(x, w, w', \ldots, w^{(n)})$ содержит x в комплексных степенях с положительными вещественными частями или в чисто мнимых степенях, а w, w', …, $w^{(n)}$ – в целых неотрицательных степенях. А именно,

$$g_1(x, w, w', \ldots, w^{(n)}) = A_1(x, w_0, w_1, \ldots, w_n) + B_1(x, w_0, w_1, \ldots, w_n), \tag{43}$$

где

$$w_0 = w,\ w_1 = xw',\ \ldots,\ w_n = x^n w^{(n)}, \tag{44}$$

а) *функция $A_1(x, w_0, w_1, \ldots, w_n)$ содержит x в комплексных степенях с положительными вещественными частями или в чисто мнимых степенях и только линейные по $w_0, w_1, \ldots, w_n$ члены;*

б) *функция $B_1(x, w_0, w_1, \ldots, w_n)$ содержит x в комплексных степенях с положительными вещественными частями или в чисто мнимых степенях и не содержит линейных по $w_0, w_1, \ldots, w_n$ членов.*

Комплексный носитель уравнения (42) лежит в множестве (32). Действительно, после преобразования (40) моном

$$bx^{q_1} u^{q_{20}} (u'x)^{q_{21}} \cdot \ldots \cdot (u^{(n)} x^n)^{q_{2n}}$$

уравнения (28), где $b \in \mathbb{C}$, q_1 принадлежит множеству (29), $q_{20}, \ldots, q_{2n} \in \mathbb{Z}$, $q_{20}, \ldots, q_{2n} \geqslant 0$, преобразовывается в выражение

$$bx^{q_1} \sum_{j_0=0}^{q_{20}} \mathrm{C}_{q_{20}}^{j_0} \left(\sum_{k=0}^{m} \gamma_{k0}\, x^{\sigma_k} \right)^{q_{20}-j_0} w^{j_0} \cdot \ldots \cdot \sum_{j_n=0}^{q_{2n}} \mathrm{C}_{q_{2n}}^{j_n} \left(\sum_{k=0}^{m} \gamma_{kn}\, x^{\sigma_k} \right)^{q_{2n}-j_n} \Big(w^{(n)} x^n \Big)^{j_0}, \tag{45}$$

где $\gamma_{kl}\, x^{\sigma_k} = \left(\gamma_k\, x^{\sigma_k}\right)^{(l)} x^l$. Поскольку показатели степени q_1 и σ_k принадлежат множеству (29), то их выпуклая линейная комбинация также принадлежит множеству (29). Следовательно, носитель выражения (45) (т. е. множество всех векторных показателей степени дифференциальных мономов уравнения (42)) лежит в множестве (32).

Замечание 2. Поскольку $\mathcal{L}(x)\, c\, x^{\lambda} = 0$ при любом значении $c \in \mathbb{C}$, то произвольные постоянные формального ряда (27) содержатся только в слагаемых с критическими значениями $\sigma_k = \lambda_i$, $0 \leqslant i \leqslant n$.

Поскольку в преобразовании (40) m выбрано так, что среди показателей степени σ_k разложения (46) нет критических чисел, то согласно замечанию 2 все коэффициенты γ_k этого разложения однозначно определены.

Уравнение (42) имеет единственное (однозначно определенное начальными данными) формальное решение

$$w = \sum_{k=m+1}^{\infty} \gamma_k \, x^{\sigma_k}, \tag{46}$$

где γ_k и σ_k те же, что и в формуле (27), $\operatorname{Re}\sigma_k > n$ и $\operatorname{Re}\sigma_k > \operatorname{Re}\lambda_n$.

Поскольку σ_k принадлежат множеству (29), то ряд (46) можно записать в виде

$$w = \sum_{M} \gamma_M \, \xi_1^{m_1} \xi_2^{m_2}, \tag{47}$$

где $M = (m_1, m_2) \in \mathbb{Z}^2$, $m_1, m_2 \geqslant 0$, $\gamma_M = \gamma_k$ с $\sigma_k = m_1 r_1 + m_2 r_2$,

$$\xi_1 = x^{r_1}, \ \xi_2 = x^{r_2}. \tag{48}$$

Если для коэффициентов ряда (47) и коэффициентов C_M ряда

$$W = \sum_{M}^{\infty} C_M \ \xi_1^{m_1} \xi_2^{m_2} \tag{49}$$

выполняются неравенства

$$C_M \geqslant |\gamma_M|, \tag{50}$$

то *ряд* (49) называется *мажорантным для ряда* (47).

Продифференцировав n раз ряд

$$W = \sum_{k=m+1}^{\infty} C_k x^{\sigma_k}, \tag{51}$$

где σ_k те же, что и в (46), $C_k \in \mathbb{R}$, $C_k \geqslant |c_k| \geqslant 0$, $C_k = C_M$ с $\sigma_k = m_1 r_1 + m_2 r_2$, получим ряд

$$W^{(n)} = \sum_{k=m+1}^{\infty} C_k \, \sigma_k (\sigma_k - 1) \cdot \cdots \cdot (\sigma_k - n + 1) \, x^{\sigma_k - n}. \tag{52}$$

Ряд

$$W_a = \sum_{k=m+1}^{\infty} C_k \ |\sigma_k (\sigma_k - 1) \cdot \cdots \cdot (\sigma_k - n + 1)| \ x^{\sigma_k - n} \tag{53}$$

будем называть *ассоциированным рядом* с рядом (52).

Если коэффициенты γ_M и C_M удовлетворяют неравенствам (50), то ряд

$$x^n W_a = \sum_{M}^{\infty} C_M |(m_1 r_1 + m_2 r_2) \cdot \ldots \cdot (m_1 r_1 + m_2 r_2 - n + 1)| \, \xi_1^{m_1} \xi_2^{m_2} \tag{54}$$

мажорирует ряд

$$x^n w^{(n)} = \sum_{M}^{\infty} \gamma_M (m_1 r_1 + m_2 r_2) \cdot \ldots \cdot (m_1 r_1 + m_2 r_2 - n + 1)\, \xi_1^{m_1} \xi_2^{m_2}. \qquad (55)$$

Если в дифференциальной сумме $\mathcal{L}(x)w$ уравнения (42) коэффициент при старшей производной $a_n \neq 0$, то, разделив уравнение (42) на a_n, получим уравнение $\dfrac{1}{a_n}\, f_1(x, w, w', \ldots, w^{(n)}) = 0$, в котором коэффициент при старшей производной в дифференциальной сумме $\dfrac{1}{a_n}\, \mathcal{L}(x)w$ равен единице. Чтобы не вводить новые обозначения, далее будем полагать, что уравнение (42) уже имеет такой вид, т. е. $a_n = 1$.

Так как $s_0 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Q}$ и $\gamma \neq 0$ (т. е. числа r_1 и r_2 линейно независимы над целыми числами), то имеется взаимнооднозначное соответствие между элементами множества (29) и подмножеством множества $\mathbb{Z}^2$.

4. **Теорема 1.** *Если в уравнении* (42)*, которое получается из уравнения* (2) *преобразованиями* (10) *и* (40)*, дифференциальная сумма* $\mathcal{L}(x)w$ *содержит старшую производную* (*т. е. производную порядка* n)*, то ряд* (46) *равномерно сходится для достаточно малых* $|x|$ *и* $|\arg x| \leqslant \pi$.

Доказательство. Рассмотрим ряд (51), а также ряд (52) и ассоциированный с ним ряд (53). Если выполняются неравенства $C_M \geqslant |\gamma_M| > 0$, то ряд (49) мажорирует ряд (47), а ряд (54) мажорирует ряд (55).

Построим уравнение

$$\Delta\ x^n\, W_a - G_1(x,\ x^n\, W_a) = 0, \ \ \Delta\ = \mathrm{const} \in \mathbb{R}, \ \ \Delta\ > 0, \qquad (56)$$

где левая часть – это *дифференциальная сумма без производных*, содержащая x в комплексных степенях, а W_a – в целых; которое имеет формальное решение (53), такое, что ряд (54) мажорирует ряд (55).

Для этого запишем уравнение (42) в виде

$$\mathcal{L}(x)w = -g_1(x,\ w,\ w', \ldots, w^{(n)}). \qquad (57)$$

Оценим снизу левую часть уравнения (57). Поскольку в разложении (46) $\operatorname{Re}\sigma_k \geqslant n$ и $\operatorname{Re}\sigma_k > \operatorname{Re}\lambda_n$, то показатели степени σ_k разложения (46) удовлетворяют неравенствам (39). Тогда существует $\Delta \in \mathbb{R}$, $\Delta > 0$ такое, что показатели степени σ_k разложения (46) удовлетворяют неравенству

$$|\nu(\sigma_k)| \geqslant \Delta\ |\sigma_k(\sigma_k - 1) \ldots (\sigma_k - n + 1)|. \qquad (58)$$

Из формулы (58) следует, что

$$0 < \Delta \leqslant \inf \frac{|\nu(\sigma_k)|}{|\sigma_k(\sigma_k-1)\dots(\sigma_k-n+1)|}$$

по всем σ_k с $\operatorname{Re}\sigma_k > n$ и $\operatorname{Re}\sigma_k > \operatorname{Re}\lambda_n$. Так как $\mathcal{L}(x)x^{\sigma_k} = x^{\sigma_k}\nu(\sigma_k)$ и выполнено условие (58), то при $|x|>0$, $\operatorname{Re}\sigma_k > n$ и $\operatorname{Re}\sigma_k > \operatorname{Re}\lambda_n$ имеем

$$|\mathcal{L}(x)x^{\sigma_k}| \geqslant \Delta \left| x^n \frac{d^n}{dx^n} x^{\sigma_k} \right|, \tag{59}$$

т. е. $|\mathcal{L}(x)\,W| \geq \Delta\;|W^{(n)}\,x^n| = \Delta\;|W_a\,x^n|$.

Функцию $G_1(x,\,x^nW_a)$ построим по функции $-g_1$. Для этого сначала в дифференциальной сумме $-g_1$ заменим все коэффициенты на их модули, а затем заменим функцию w и все ее производные $w^{(l)}$ на выражения $x^{n-l}\,W_a$:

$$w^{(l)} \longrightarrow x^{n-l}\,W_a,\; n \geqslant l \geqslant 0. \tag{60}$$

Заметим, что если $w = x^\rho$, $\rho\in\mathbb{C}$, где $\operatorname{Re}\rho > n$, $|x|>0$, то $w^{(l)} = \rho(\rho-1)\dots(\rho-l+1)\,x^{\rho-l}$, а $x^{n-l}w^{(n)} = \rho(\rho-1)\dots(\rho-n+1)\,x^{\rho-l}$, и во втором случае модуль коэффициента не меньше, чем модуль коэффициента в первом случае, а показатели степени совпадают.

Носители рядов (52) и (53) совпадают. Векторный показатель степени $Q(W^{(n)}) = (-n,1)$. Положим $Q(W_a) = (-n,1)$. Тогда комплексные носители сумм $-g_1(x,\,w,\,w',\,\dots,\,w^{(n)})$ и $G_1(x,\,x^nW_a)$ совпадают и лежат в множестве (32). Действительно, согласно построению суммы $G_1(x,\,x^nW_a)$ каждый моном дифференциальной суммы $-g_1(x,\,w,\,w',\,\dots,\,w^{(n)})$ переходит в моном суммы $G_1(x,\,x^nW_a)$:

$$b\,x^{q_1}w^{q_{20}}(w'x)^{q_{21}}\cdot\ldots\cdot(w^{(n)}x^n)^{q_{2n}} \;\longrightarrow\; |b|\,x^{q_1}\,(x^nW_a)^{q_2}\,,$$

где $b\in\mathbb{C}$ $q_{20},\dots,q_{2n}\in\mathbb{Z}$, $q_{20},\dots,q_{2n}\geq 0$, $q_2 = \sum\limits_{l=0}^{n} q_{2l}$, векторный показатель степени (q_1,q_2) принадлежит множеству (32). Очевидно, что векторные показатели степени этих мономов совпадают, т. е.

$$Q\left(b\,x^{q_1}w^{q_{20}}(w'x)^{q_{21}}\cdot\ldots\cdot(w^{(n)}x^n)^{q_{2n}}\right) = Q\left(|b|\;x^{q_1}\,(x^nW_a)^{q_2}\right) = (q_1,q_2).$$

Отсюда следует, что совпадают все точки носителей этих сумм. Построение уравнения (56) окончено.

В разложении (46) показатели степени σ_k упорядочены согласно неубыванию их вещественных частей $\operatorname{Re}\sigma_{m+1}\leqslant\operatorname{Re}\sigma_{m+2}\leqslant\operatorname{Re}\sigma_{m+3}\leqslant\dots$, и если

$\operatorname{Re}\sigma_k = \operatorname{Re}\sigma_{k+1}$, то $\operatorname{Im}\sigma_k < \operatorname{Im}\sigma_{k+1}$. Покажем, что каждый коэффициент γ_k разложения (46) однозначно определяется коэффициентами уравнения (42) и коэффициентами γ_t разложения (46) с $t < k$.

Подставим ряд (46) в уравнение (42). Затем упорядочим члены в порядке неубывания вещественных частей показателей степени переменной x и в случае когда вещественные части равны, в порядке возрастания мнимых частей. Поскольку ряд (46) удовлетворяет уравнению (42), то, приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x, получаем систему уравнений

$$\nu(\sigma_k)\gamma_k - b_k = 0, \tag{61}$$

где $k = m+1, m+2, m+3, \ldots$. Коэффициент b_{m+1} зависит только от коэффициентов уравнения (42), коэффициенты b_k с $k \geqslant m+2$ зависят от коэффициентов уравнения (42) и от коэффициентов γ_t разложения (46) с $t < k$.

Далее подставим ряд (53) в уравнение (56). Для коэффициентов C_k этого ряда получаются равенства, аналогичные равенствам (61), т. е.

$$\Delta\ |\sigma_k(\sigma_k - 1)\ldots(\sigma_k - n + 1)|C_k - B_k = 0, \tag{62}$$

где $k = m+1, m+2, m+3, \ldots$. Коэффициент B_{m+1} зависит только от коэффициентов уравнения (56), коэффициенты B_k с $k \geqslant m+2$ завистят от коэффициентов уравнения (56) и от предыдущих коэффициентов $C_t \geqslant |\gamma_t|$ с $t < k$.

Рассмотрим уравнения (61) и (62) при $k = m+1$. Коэффициенты b_{m+1} и B_{m+1} зависят только от коэффициентов уравнений (46) и (56) соответственно. Согласно построению уравнения (56) и формуле (58) выполняются неравенства $|b_{m+1}| \leqslant B_{m+1}$, $|\nu(\sigma_{m+1})| \geqslant \Delta\ |\sigma_{m+1}(\sigma_{m+1} - 1)\ldots(\sigma_{m+1} - n + 1)|$, следовательно, $|\gamma_{m+1}| \leqslant C_{m+1}$. Теперь рассмотрим уравнения (61) и (62) при $k = m+2$. Согласно построению уравнения (56), формуле (58) и $|\gamma_{m+1}| \leqslant C_{m+1}$, выполняются неравенства $|b_{m+2}| \leqslant B_{m+2}$, $|\nu(\sigma_{m+2})| \geqslant |\sigma_{m+2}(\sigma_{m+2} - 1)\ldots(\sigma_{m+2} - n + 1)|$, следовательно, $|\gamma_{m+2}| \leqslant C_{m+2}$. Продолжая по индукции этот процесс для каждого $k \geqslant m+3$, получаем, что $|b_k| \leqslant B_k$, $|\nu(\sigma_k)| \geqslant \Delta\ |\sigma_k(\sigma_k - 1)\ldots(\sigma_k - n + 1)|$, $|c_t| \leqslant C_t$ с $t < k$, поэтому

$$C_k = \frac{B_k}{\Delta\ |\left(\sigma_k(\sigma_k - 1)\ldots(\sigma_k - n + 1)\right)|} \geqslant |\gamma_k| = \frac{|b_k|}{|\nu(\sigma_k)|}.$$

Таким образом, решение (53) такое, что ряд (54) мажорирует ряд (55).

Теперь покажем, что ряд (53) сходится. Для этого в уравнении (56) положим

$$x^n\, W_a\ , \stackrel{\text{def}}{=} Z \tag{63}$$

и запишем его в виде

$$\Delta\ Z - G_1(x,\, Z) = 0. \tag{64}$$

При этом носители уравнений (42), (56) и (64) совпадают.

Уравнение (64) содержит x в комплексных степенях с неотрицательными вещественными частями, а Z – в целых неотрицательных. Мы хотим перейти от уравнения с двумя переменными и комплексными показателями степени, к уравнению с тремя переменными, но целыми неотрицательными показателями степени. Для этого сделаем в уравнении (64) преобразование (48) с $\operatorname{Re} r_1 > 0$, $\operatorname{Re} r_2 > 0$. Поскольку носитель уравнения (64) лежит в множестве (32), то уравнение (64) можно записать в виде

$$\sum A_{M_1,M_2,M_3}\ x^{M_1 r_1 + M_2 r_2}\, Z^{M_3} = 0, \tag{65}$$

где $M_1, M_2, M_3 \in \mathbb{Z}$, $M_1, M_2, M_3 \geqslant 0$, $M_1 + M_2 + M_3 > 0$, $A_{M_1,M_2,M_3} = \mathrm{const} \in \mathbb{R}$, $A_{0,0,1} = \Delta$. Согласно преобразованию (48) уравнение (65) преобразуется в уравнение

$$\sum A_{M_1,M_2,M_3}\ \xi_1^{M_1}\, \xi_2^{M_2}\, Z^{M_3} = 0.$$

Положим

$$\Pi_0(\xi_1, Z)\ ,\stackrel{\mathrm{def}}{=} \sum A_{M_1,0,M_3}\ \xi_1^{M_1-1}\ Z^{M_3},\ M_1 \geqslant 1, M_3 \geqslant 0;$$

$$\Pi_1(\xi_2, Z)\ ,\stackrel{\mathrm{def}}{=} \sum A_{0,M_2,M_3}\ \xi_2^{M_2-1}\, Z^{M_3},\ M_2 \geqslant 1, M_3 \geqslant 0;$$

$$\Pi_2(\xi_1, \xi_2, Z)\ ,\stackrel{\mathrm{def}}{=} \sum A_{M_1,M_2,M_3}\ \xi_1^{M_1-1}\, \xi_2^{M_2-1}\, Z^{M_3},\ M_1, M_2 \geqslant 1, M_3 \geqslant 0;$$

$$\Pi_3(Z)\ ,\stackrel{\mathrm{def}}{=} \sum A_{0,0,M_3}\ Z^{M_3-2},\ M_3 \geqslant 2.$$

Таким образом, с помощью преобразования (48) из уравнения (64) получаем уравнение

$$f_2(\xi_1,\, \xi_2,\, Z)\ ,\stackrel{\mathrm{def}}{=} \Delta\ Z - G_2(\xi_1, \xi_2, Z) = 0, \tag{66}$$

где

$$G_2(\xi_1, \xi_2, Z) = \xi_1\, \Pi_0(\xi_1, Z) + \xi_2\, \Pi_1(\xi_2, Z) + \xi_1\, \xi_2\ \Pi_2(\xi_1, \xi_2, Z) + Z^2\, \Pi_3(Z),$$

$\Pi_0(\xi_1, Z)$, $\Pi_1(\xi_2, Z)$, $\Pi_2(\xi_1, \xi_2, Z)$ и $\Pi_3(Z)$ – это многочлены своих переменных.

Поскольку $f_2(\xi_1,\, \xi_2,\, Z)$ многочлен своих переменных и

$$f_2(0,0,0) = 0,\ \frac{\partial f_2}{\partial Z}\,(0,0,0) = \Delta\ \neq 0,$$

то согласно теореме Коши о неявной функции [9] уравнение (66) имеет единственное (однозначно определенное начальными данными) аналитическое решение

$$Z(\xi_1, \xi_2) = \sum_{M_1, M_2} \psi_{M_1, M_2}\, \xi_1^{M_1}\, \xi_2^{M_2},\ Z(0,0) = 0, \tag{67}$$

где $M_1, M_2 \in \mathbb{Z}$, $M_1, M_2 \geqslant 0$, $M_1 + M_2 > 0$. Следовательно, ряд (67) равномерно сходится для достаточно малых $|\xi_1|$ и $|\xi_2|$. Согласно (48) это будет иметь место при достаточно малых $|x|$ и $|\arg x \leqslant \pi.|$

Возвращаясь обратно (67) $\to$ (48) $\to$ (63) к переменным W_a и x, получаем аналитическое решение

$$x^n\, W_a = \sum_{M_1, M_2} \psi_{M_1, M_2}\, x^{M_1 r_1 + M_2 r_2},$$

которое можно записать в виде

$$W_a = \sum_{M_1, M_2} \psi_{M_1, M_2}\, x^{M_1 r_1 + M_2 r_2 - n}. \tag{68}$$

Поскольку формальное решение (53) определено единственным образом, то оно совпадает с решением (68), т. е. ряд (53) равномерно сходится для достаточно малых $|x|$ и $|\arg x| \leqslant \pi$. А так как ряд (54) мажорирует ряд (55) и $|x^{r_1}| \leqslant |\xi_1|$, $|x^{r_2}| \leqslant |\xi_2|$ при указанных x, то отсюда следует, что ряд (46) также равномерно сходится для достаточно малых $|x|$ и $|\arg x| \leqslant \pi$. Доказательство теоремы 1 окончено.

5. **Пример 1.** Рассмотрим третье уравнение Пенлеве

$$y'' = \frac{y'^2}{y} - \frac{y'}{x} + \frac{ay^2 + b}{x} + \frac{cy^4 + d}{y}, \tag{69}$$

где $y' = dy/dx$, параметры уравнения $a, b, c, d \in \mathbb{C}$. Домножив его на $x^2 y$, получим полиномиальное ОДУ:

$$-x^2 yy'' + x^2 y'^2 - xy'y + axy^3 + bxy + cx^2 y^4 + dx^2 = 0. \tag{70}$$

Носитель уравнения (70) состоит из пяти точек $\{(0,2),\ (1,1),\ (1,3),\ (2,4),\ (2,0)\}$ и лежит в множестве

$$\{(0,2) + m_1(1,-1) + m_2(1,1),\ m_1, m_2 \in \mathbb{Z}, m_1, m_2 \geqslant 0\}. \tag{71}$$

Многоугольник уравнения (70) – это треугольник с вершинами $(0,2)$, $(2,4)$, $(2,0)$. Рассмотрим укороченное уравнение, соответствующее вершине $(0,2)$:

$$\hat{f}_1^{(0)}(x, y, y', y'')\ \stackrel{\text{def}}{=} -x^2 yy'' + x^2 y'^2 - xy'y = 0. \tag{72}$$

Согласно работе [6] ищем его решения в виде $y = c_0 x^{s_0}$. Подставляя это решение в уравнение находим, что c_0 и s_0 – суть произвольные постоянные. Вершине $(0,2)$ соответствует нормальный конус $\mathbf{U}_1^{(0)} = \{m_1(-1,-1) + m_2(-1,1),\ m_1, m_2 \in \mathbb{R}, m_1, m_2 > 0\}$. Поэтому $-1 < \operatorname{Re} s_0 < 1$. Из вершины $(0,2)$ исходят векторы $R_1 = (1,-1)$ и $R_2 = (1,1)$ образующие решетку, в которой лежит носитель уравнения (70). Множество показателей степени разложения без учета критических чисел $\mathbf{K}$ лежит в множестве с одной комплексной образующей s_0:

$$\mathbf{K} \subseteq \{s_0 + m_1(1-s_0) + m_2(1+s_0),\ m_1, m_2 \in \mathbb{Z}, m_1, m_2 \geqslant 0\} \subset \mathbb{C}. \tag{73}$$

Линейный дифференциальный оператор $\mathcal{L}(x)$ можно вычислить как формальную первую вариацию $\dfrac{\delta \hat{f}_1^{(0)}(x,y,y',y'')}{\delta y}$ на решении $y = c_0\, x^{s_0}$. Таким образом, получаем, что

$$\mathcal{L}(x)u = -c_0\,(x^2 u'' + (1-2r)xu' + r^2).$$

Линейному дифференциальному оператору $\mathcal{L}(x)$ соответствует характеристическое уравнение $\nu(k) = (k - s_0)^2 = 0$, которое имеет двукратное решение $k = s_0$. Следовательно, критических чисел нет и разложение решения имеет вид ([12])

$$y = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^{s_k}, \tag{74}$$

где комплексные коэффициенты: c_0 – произвольный, $c_0 \neq 0$, c_k с $k \in \mathbb{N}$ – однозначно определены, комплексные показатели степени: s_0 – произвольный, $-1 < \operatorname{Re} s_0 < 1$, s_k принадлежит множеству (73). Порядок оператора $\mathcal{L}(x)$ равен 2, согласно теореме 1 (случай $s_0 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Q}$) и теореме 1.7.2 из [7] (случай $s_0 \in \mathbb{Q}$) ряд (74) равномерно сходится для достаточно малых $|x|$ и $|\arg x| \leqslant \pi$.

Пример 2. Укороченное уравнение, соответствующее ребру $[(0,2), (1,1), (2,0)]$, имеет вид

$$\hat{f}_1^{(1)}(x,y,y',y'')\ \stackrel{\text{def}}{=} -x^2yy'' + x^2y'^2 - xy'y + bxy + dx^2 = 0. \tag{75}$$

Ребру $[(0,2),\ (1,1),\ (2,0)]$ соответствует нормальный конус

$$\mathbf{U}_1^{(1)} = \{m_1(-1,-1), m_1 \in \mathbb{R},\ m_1 > 0\}.$$

Ищем степенные решения уравнения (75) в виде $y = c_0 x$. Подставляя его в уравнение (75), определяем, что $c_0 = d/b$. Множество показателей степени разложения без учета критических чисел $\mathbf{K} = \{1 + 2m_1, m_1 \in \mathbb{Z}, m_1 \geq 0\}$.

Здесь линейный дифференциальный оператор $\mathcal{L}(x)$ можно вычислить как формальную первую вариацию $\dfrac{\delta \hat{f}_1^{(1)}(x,y,y',y'')}{\delta y}$ на решении $y=(d/b)\,x$, т. е. $\mathcal{L}(x)u=(d/b)(x^2u''-xu'+1)+b.$ Характеристическое уравнение

$$(d/b)(k-1)^2+b=0,$$

соответствующее линейному дифференциальному оператору $\mathcal{L}(x)$, имеет два корня $k=1\pm b/\sqrt{-d}$. Пусть $\lambda=b/\sqrt{-d}$, $\lambda\in\mathbb{C}$, $\operatorname{Re}\lambda>0$, $\lambda\neq 2p$, $p\in\mathbb{N}$, тогда уравнение (70) имеет формальные решения

$$y=\sum_{k=0}^{\infty}c_kx^{s_k}, \tag{76}$$

где комплексные коэффициенты: $c_0=-d/b$, $c_0\neq 0$, c_k с $s_k=1+\lambda$ – произвольный, остальные c_k – однозначно определены, комплексные показатели степени:

$$s_k\in\mathbf{K}(1+\lambda)\subseteq\{1+2m_1+\lambda\,m_2,\ m_1,m_2\in\mathbb{Z},m_1,m_2\geqslant 0\}\subset\mathbb{C}. \tag{77}$$

Множество $\mathbf{K}(1+\lambda)$ имеет одну комплексную образующую λ. Порядок $\mathcal{L}(x)$ равен 2, согласно теореме 1 (в случае $\lambda\in\mathbb{C}\backslash\mathbb{Q}$) и теореме 1.7.2 из [7] (в случае $\lambda\in\mathbb{Q}$) ряд (76) равномерно сходится для достаточно малых $|x|$ и $|\arg x|\leqslant\pi$.

Выражаю благодарность моему учителю Александру Дмитриевичу Брюно и моему другу Ренату Гонцову за замечания, предложения и обсуждения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Maillet E.* Sur les séries divergentes et les équations différentielles. Ann. École. Norm. Sup. 1903. Vol. 20. No. 4. P. 487-517.

2. *Mahler K.* On formal power series as integrals of algebraic differential equations, Lincei Rend. Sc. fistran. mat. e nat. 1971. Vol. 50. P. 70-89.

3. *Ramis J.-P.* Dévissage Gevrey. Astérisque. 1978. Vol. 59/60. P. 173-204.

4. *Malgrange B.* Sur le théorème de Maillet. Asymptotic Anal. 1989. Vol. 2. P. 1-4.

5. *Sibuya Y.* Linear Differential Equations in the Complex Domain: Problems of Analytic Continuation. American Mathematical Society: Translations of mathematical monographs. 1990. Vol. 82. 267 p.

6. *Брюно А.Д.* Асимптотики и разложения решений обыкновенного дифференциального уравнения // УМН. 2004. Т. 59. №3. С. 31–80.

7. *Брюно А.Д., Горючкина И.В.* Асимптотические разложения решений шестого уравнения Пенлеве // Труды московского математического общества. 2010. Т. 71. С. 6–118.

8. *Горючкина И.В.* О кратных и некратных решениях алгебраических ОДУ. Препринт №83 Института прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН. 2012. 12 с. (`http://www.keldysh.ru/papers/2012/prep2012_83.pdf`).

9. *Гурса Э.* Курс математического анализа. Москва-Ленинград: ГТТИ. 1933. Т. 1. 1 ч. 368 с.

10. *Гурса Э.* Курс математического анализа. Москва-Ленинград: ГТТИ. 1933. Т. 2. 1 ч. 271 с.

11. *Брюно А.Д.* Степенная геометрия в алгебраических и дифференциальных уравнениях. М.: Физматлит, 1998.

12. *Брюно А.Д., Гриднев А.В.* Степенные и экспоненциальные разложения решений третьего уравнения Пенлеве. Препринт №51 Института прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН. 2003. 19 с. (`http://www.keldysh.ru/papers/2010/source/prep2010_10.pdf`)