



ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 71 за 2013 г.



Долголева Г.В.

Численное решение
уравнений, описывающих
перенос тепла электронами
и ионами

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Долголева Г.В. Численное решение уравнений, описывающих перенос тепла электронами и ионами // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2013. № 71. 14 с. URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2013-71>

О р д е н а Л е н и н а
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М. В. Келдыша
Р о с с и й с к о й а к а д е м и и н а у к

Г.В. Долголева

**Численное решение уравнений,
описывающих перенос тепла электронами и ионами**

Москва, 2013 год

Долголева Г. В.

Численное решение уравнений, описывающих перенос тепла электронами и ионами

При решении широкого круга задач одним из определяющих процессов является перенос тепла. Для математического описания процесса переноса тепла чаще всего используют закон Фурье (диффузионное приближение). Это приближение ограничивается малыми температурными градиентами. Простейшие и довольно распространенные модели – это модификация диффузионного потока либо с его ограничением максимально допустимым потоком, либо с применением метода нелокального приближения для описания теплопереноса. При нелокальном приближении поток учитывает влияние всех точек системы на данную точку с помощью ядра, зависящего от оптических свойств системы.

В работе рассмотрено несколько приближений, сопоставляются результаты расчетов, анализируются положительные и отрицательные характеристики рассматриваемых приближений, выбрано оптимальное приближение с точки зрения как точности, так и времени счета.

Ключевые слова: перенос тепла, диффузионное приближение, нелокальная модель

Galina Vladimirovna Dolgoleva

Numerical solvation of equations, describing the transfer of heat by electrons and ions

Solving the great variety of tasks the one of the most significant processes is a transfer of heat. For mathematical description of this process mostly the law of Fourier (diffusive approaching) is used. This approaching is limited with small temperature gradients. The simplest and widespread enough model is the modification of diffusive stream either by limiting with the maximally possible stream or applying the method of the nonlocal approaching for description of a heat transfer. At the nonlocal approaching a stream takes into account the influence of all points of the system on this point by means of kernel depending on optical properties of the system.

A few approaching is in-process considered, the results of calculations are compared, positive and negative descriptions of the examined approaching are analyzed, the optimal approaching is chosen both from the point of view of exactness and to counting time.

Key words: the transfer of heat, diffusive approaching, nonlocal approaching

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 11-01-00258).

Введение

При исследовании работы термоядерных мишеней необходимо учитывать перенос тепла электронами и ионами. При внешнем облучении микромишеней /1/, /2/ образуется высокотемпературная область – «корона», в ней очень существенен перенос тепла электронами, который приводит к выравниванию температуры по пространству. Процесс переноса тепла ионами в этом случае не существен. Однако при работе мишени с обращенной короной /3/ образуется высокотемпературная область на стадии фокусировки, причем температура ионов значительно (приблизительно на порядок) превосходит температуру электронов, и здесь определяющим процессом является перенос тепла ионами.

Для математического описания процессов переноса тепла электронами и ионами чаще всего используют закон Фурье, согласно которому поток тепла W пропорционален градиенту температуры T с коэффициентом теплопроводности χ .

$$\rho \frac{\partial E}{\partial t} = -\operatorname{div} W, \quad (1)$$

$$W = W_{\text{оуп}} = -\chi \frac{\partial T}{\partial r}. \quad (2)$$

Здесь E, T – энергия и температура соответственно, t – счетное время, r – пространственная переменная.

Этими уравнениями описывается поток тепла как электронами, так и ионами.

Это так называемое диффузионное приближение. Применимость диффузионного приближения имеет ряд ограничений, особенно в условиях резких изменений температур, что характерно для лазерной плазмы. С ростом градиента температуры поток (2) неограниченно возрастает. Вместе с тем даже в том случае, когда все электроны (или ионы) плотности n и тепловой скоростью v_T будут распространяться в одну сторону, они могут перенести лишь предельный поток:

$$W_{\text{lim}} \approx n v_T.$$

На самом деле, как показывают кинетические расчеты теплопереноса /4/, а также эксперименты по ограничению электронного потока, оказывается, что максимальный тепловой поток W_{max} всегда меньше предельного W_{lim} :

$$W_{\text{max}} = f W_{\text{lim}} \operatorname{sign}(W_{\text{оуп}}),$$

где f – постоянная величина, меньшая единицы ($f < 1$). Расчеты и эксперименты /5/-/7/ установили, что величина f для переноса электронов изменяется в пределах: $0.03 \leq f \leq 0.1$. В случаях, когда $W_{\text{диф}}$ превосходит W_{max} , надо переходить к кинетическому описанию плазмы. Но поскольку численно решать кинетическое уравнение – задача достаточно сложная и громоздкая, а учет процессов теплопереноса в высокотемпературной плазме необходим, то зачастую в расчетах используют приближение Фурье, модифицируя разумным образом величину потока. В результате появляются различные модели для описания процесса теплопереноса, уточняющие модель (1), (2).

1. Приближения для описания переноса тепла, их разностная аппроксимация

Простейшие и довольно распространенные модели для расчета переноса тепла – это модификация теплового потока (2). В литературе обсуждаются в основном четыре модели для счета переноса тепла /4/, /8/-/13/.

Первая модель: поток полагается равным:

$$W = \min(W_{\text{max}}, W_{\text{диф}}),$$

$$W_{\text{max}} = DA\rho T^{3/2} \quad (3)$$

где D – константа, зависящая от заряда, атомного веса и величины f .

Замена $W_{\text{диф}}$ на W_{max} , когда $W_{\text{диф}} > W_{\text{max}}$, меняет в процессе счета тип решаемого уравнения с параболического на гиперболический. Поэтому для решения уравнения (1) с использованием потока вида (3) надо записать разностную схему так, чтобы она позволяла одновременно решать разные математические типы уравнений.

Вторая модель: поток полагается равным:

$$W = \alpha W_{\text{диф}} \quad \text{или} \quad \frac{1}{W} = \frac{1}{W_{\text{диф}}} + \frac{1}{W_{\text{max}}}, \quad (4)$$

$$\alpha = \frac{W_{\text{max}}}{W_{\text{max}} + W_{\text{диф}}}.$$

В работе /9/ приведен анализ применимости такого ограничения диффузионного потока (модель 2) и показано, что оно не всегда является корректным. Эта модель может давать иной характер решения там, где

справедливо диффузионное приближение. Это видно и из результатов расчетов, приведенных ниже.

В третьей модели для нахождения теплового потока решается волновое (гиперболическое) уравнение вида /10/:

$$\tau \frac{\partial W}{\partial t} + \chi \frac{\partial T}{\partial r} + W = 0, \quad (5)$$

где τ – время релаксации теплового потока.

Уравнение (5) при постоянных χ и τ было предложено еще Максвеллом /14/, оно используется для описания теплопереноса в разреженном газе /15/ и в задачах термоупругости /16/.

Было предложено применять это уравнение для определения теплового потока и в полностью ионизованной плазме /10/, /17/ как альтернативу описанным выше способам учета ограничения теплового потока. Как показано в работе /10/, не универсальна и модель (1),(5): ее можно применять лишь при

$$\tau \prec \tau_* = \frac{c_v l^2}{4\pi^2 \chi},$$

где l – размер системы, c_v – удельная теплоемкость, в противном случае волновой характер системы начинает проявляться «слишком ярко» /10/. Для уравнения (5) сложно записать монотонную разностную схему.

Четвертое приближение для описания переноса тепла – это так называемая «нелокальная» теплопроводность /11/-/13/. В ней для теплового потока предложена формула:

$$W(r) = \int_{-\infty}^{\infty} W_{\text{diff}} \omega(r, r') dr', \quad (6)$$

где ядро $\omega(r, r')$ учитывает влияние всех точек системы r' на точку r .

В этой модели сложно записать вид ядра, и отвечающий физическому смыслу, и позволяющий выйти на диффузионное приближение, если оно справедливо.

Существует несколько видов для ядра $\omega(r, r')$. В дальнейшем будем рассматривать ядро, которое предлагают авторы работы /11/:

$$\omega(r, r') = \exp \left[- \left| \frac{\int_{r'}^r \rho(r'') dr''}{\rho(r') \lambda(r')} \right| / 2\lambda(r') \right] \quad (7)$$

$\lambda(r')$ – эффективный пробег для электронов с температурой $T(r')$:

$$\lambda(r') = a(Z+1)^{1/2} \chi [T(r'), \rho(r')],$$

Z – заряд вещества, константа a подбиралась из сравнений расчетов по приближению (1), (6), (7) с расчетами по более точному описанию процесса теплопереноса – уравнению Фокера-Планка.

Эта модель была модифицирована: вместо $W_{\text{диф}}$ в формуле (6) берется поток W из (3), т.е. ограничивается максимальным потоком. В дальнейшем это приближение будем называть модифицированной нелокальной моделью теплопроводности.

В цитируемых источниках то или иное приближение рассматривалось в сравнении с диффузионным и для своей конкретной задачи. В данной работе рассматриваются все перечисленные приближения в сравнении между собой, а также с автомодельным решением. Автомодельное решение получено Насыровым Г.Ф. и Рогачевым В.Г. /устное сообщение/ при определенных предположениях для модели с ограничением потока в первом приближении – уравнение (3).

Для решения уравнений (1)–(7), помимо начальных условий, задаются граничные: либо соответствующая температура, либо поток, либо условие на свободной поверхности.

Разностные схемы для решения уравнения переноса тепла (1)–(7) неявные, итерационные: итерируются как коэффициент теплопроводности, так и температура. На итерациях разностные уравнения решаются прогонкой по температуре.

2. Сравнение различных приближений

Сравнение различных приближений проведем на расчетах модельной задачи. Простота постановки этой задачи связана с тем, что именно при таких предположениях Насыровым Г.Ф. и Рогачевым В.Г. было получено автомодельное решение при ограничении потока в первом приближении.

Постановка расчета следующая: рассматривается плоский слой с плотностью $\rho = 1$, толщиной $\Delta r = 1$, уравнение состояния – идеальный газ с $c_v = 1, \gamma = 5/3$, константа D в выражении для максимального потока $D = 1$, коэффициент теплопроводности $\chi = 1/\delta$ (с помощью параметра δ его можно варьировать, а следовательно, получать диффузионный поток больше или

меньше максимального). Граничные условия: справа температура равна нулю ($T(r=1)=0$), слева $T(r=0)=t^{2/3}$. В данном случае решение автомодельное и две автомодельные переменные имеют вид $\xi = r/(4t/3)$ и $\theta(\xi) = T(\xi)/(t^{2/3})$.

На рисунках 1 и 2 приведены результаты счета $\theta(\xi)$ с $\delta=0.7$ и с $\delta=4$ соответственно в зависимости от автомодельной переменной ξ . Линия, помеченная символом «dif» – это результаты расчета в диффузионном приближении, «1» – это результаты расчета по модели с ограничением потока в виде (3), «2» – это результаты расчета модели с ограничением потока в виде (4) и «3» – это результаты расчета по нелокальной модели, «4» – результаты расчета по модифицированной нелокальной модели теплопроводности, «5» – результаты расчета, в котором поток рассчитывается из уравнения (5). Численное решение представлено на момент времени, когда тепловой волной охвачена половина плоского слоя.

При $\delta=0.7$ $W_{diff} > W_{max}$, т.е. диффузионное приближение не применимо.

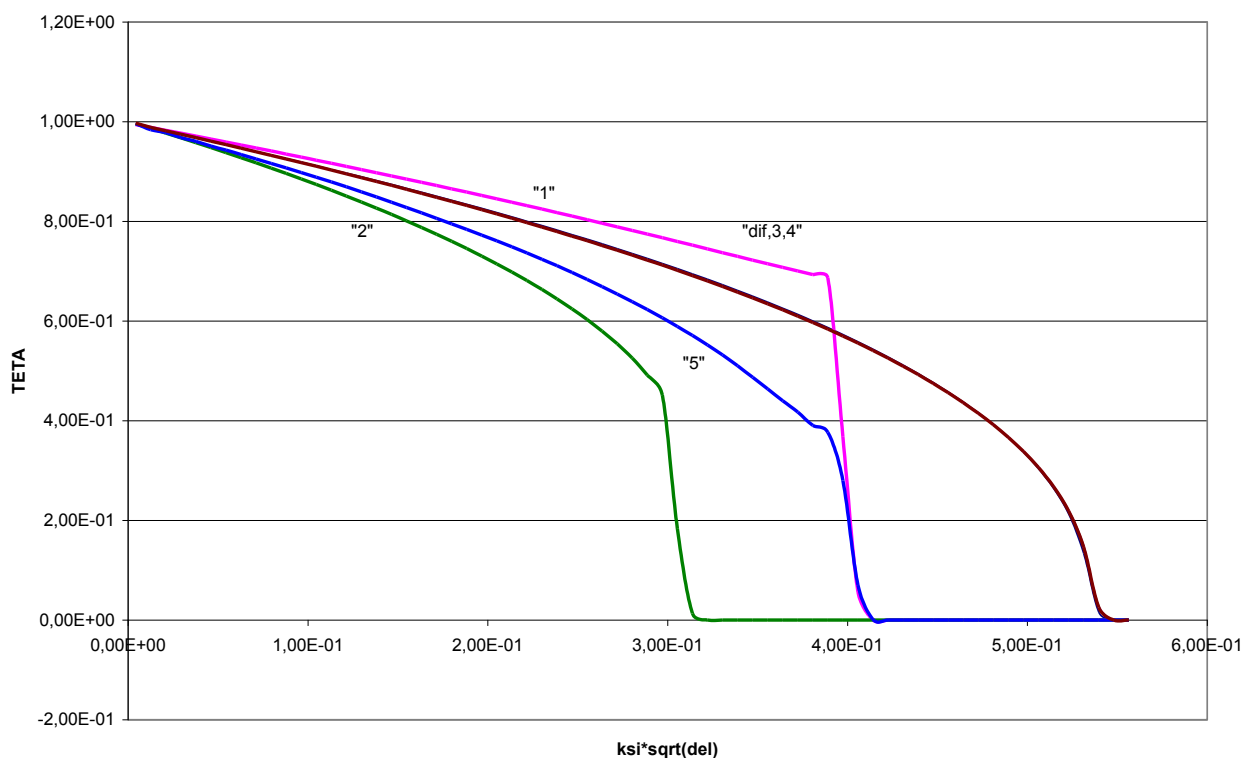


Рис. 1. Сравнение различных методик, $\delta=0.7$

Из рис. 1 видно:

- скачок температуры наблюдаем в первой и второй моделях: это понятно, так как мы пытались скорректировать поток в области нарушения условия $W_{diff} > W_{max}$;

- скачок температуры есть в модели, в которой поток рассчитывается по гиперболическому уравнению (5), но он меньше, чем по первой модели; фронты тепловой волны совпадают в этой модели и в первой модели;

- нелокальная модель, хотя и учитывает нелокальный характер переноса тепла, но в основе формулы (6) лежит диффузионный поток (т.е. мы, используя ядро, смотрим, какая часть диффузионного потока точки j доходит до i точки), поэтому она, как и диффузионное приближение, никаких скачков не имеет.

В расчете по диффузионной модели и модели 3 фронт тепловой волны опережает фронт тепловой волны, полученной по приближению 1 и 2. Это понятно, так как при $W_{diff} > W_{max}$ в модели 1 и 2 мы полагаем поток $W_{diff} = W_{max}$, т.е. уменьшаем поток.

При $\delta = 4$ $W_{diff} < W_{max}$, т.е. применимо диффузионное приближение.

Из рис. 2 видно

- результаты расчета по диффузионной, нелокальной и первой моделям практически совпадают;

- модель 2 как при $\delta = 0.7$, так при $\delta = 4$ выпадает из общей картины: такое ограничение потока некорректно – эта модель дает иной характер решения даже там, где справедливо диффузионное приближение;

- неправильно передает температуру и модель, в которой поток рассчитывается по гиперболическому уравнению (5); модель дает иной характер решения в случае, когда справедливо диффузионное приближение.

Фронт тепловой волны в моделях 2 и 5 отстает от фронта тепловой волны, полученной по диффузионному приближению, приближению 1 и нелокальной теплопроводности, приблизительно на 30%.

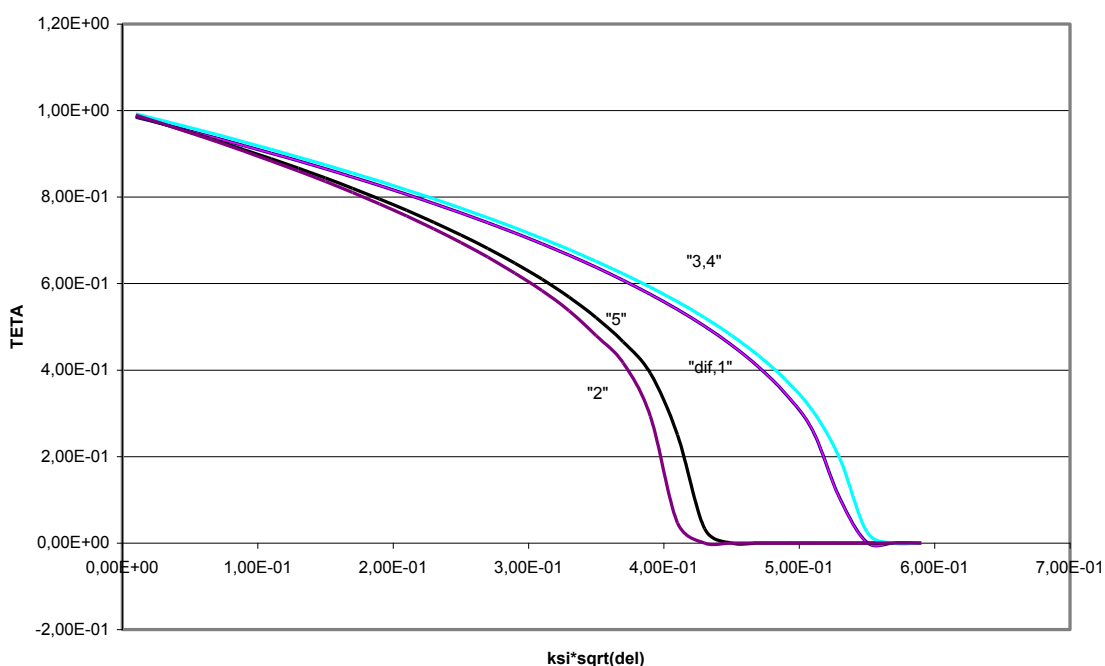


Рис. 2. Сравнение различных методик, $\delta=4$

На рисунках 3 и 4 приведены результаты счета величины $\theta(\xi) = T(\xi) / (t^{**2/3})$ с $\delta = 0.7$ и с $\delta = 4$ соответственно в зависимости от автомодельной переменной ζ для теплопереноса по модели 1 ("1") и автомодельного решения ("avt").

Видно хорошее совпадение расчетных и автомодельных решений в обоих случаях.

Но эти рисунки демонстрируют лишь правильность расчетной схемы для счета первой модели, в которой надо учесть параболичность и гиперболичность решаемого уравнения.

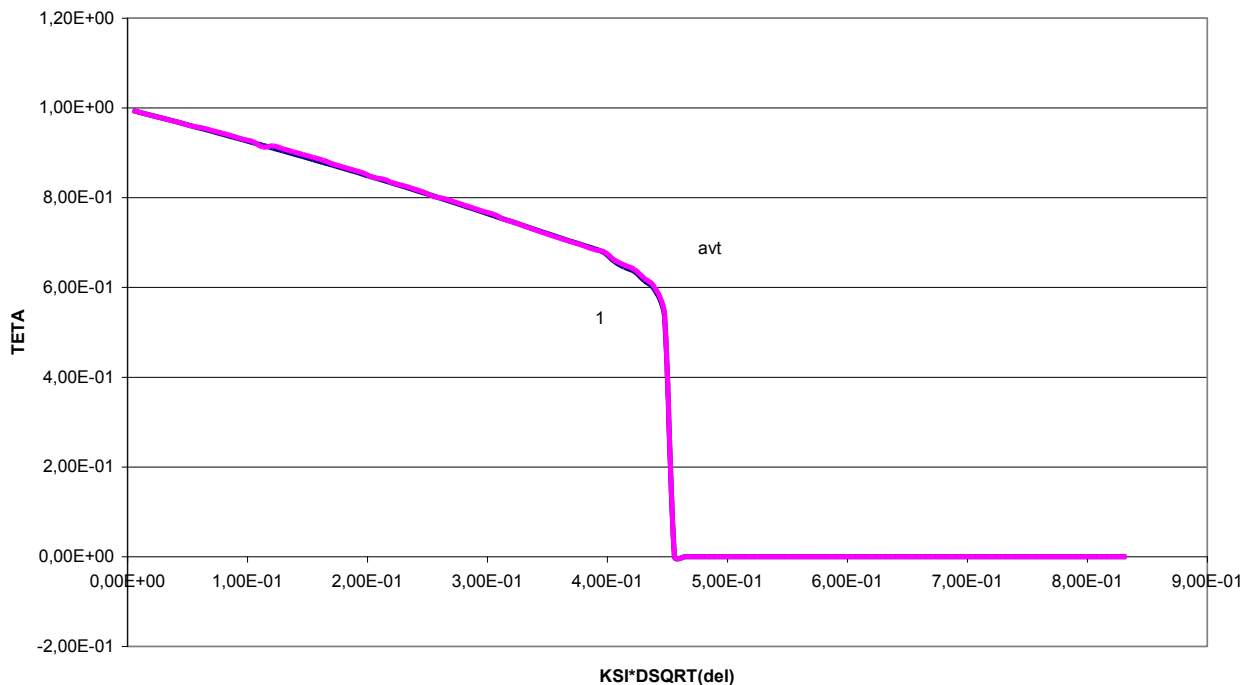


Рис. 3. Сравнение результатов счета по модели 1 с автомодельным решением, $\delta=0.7$

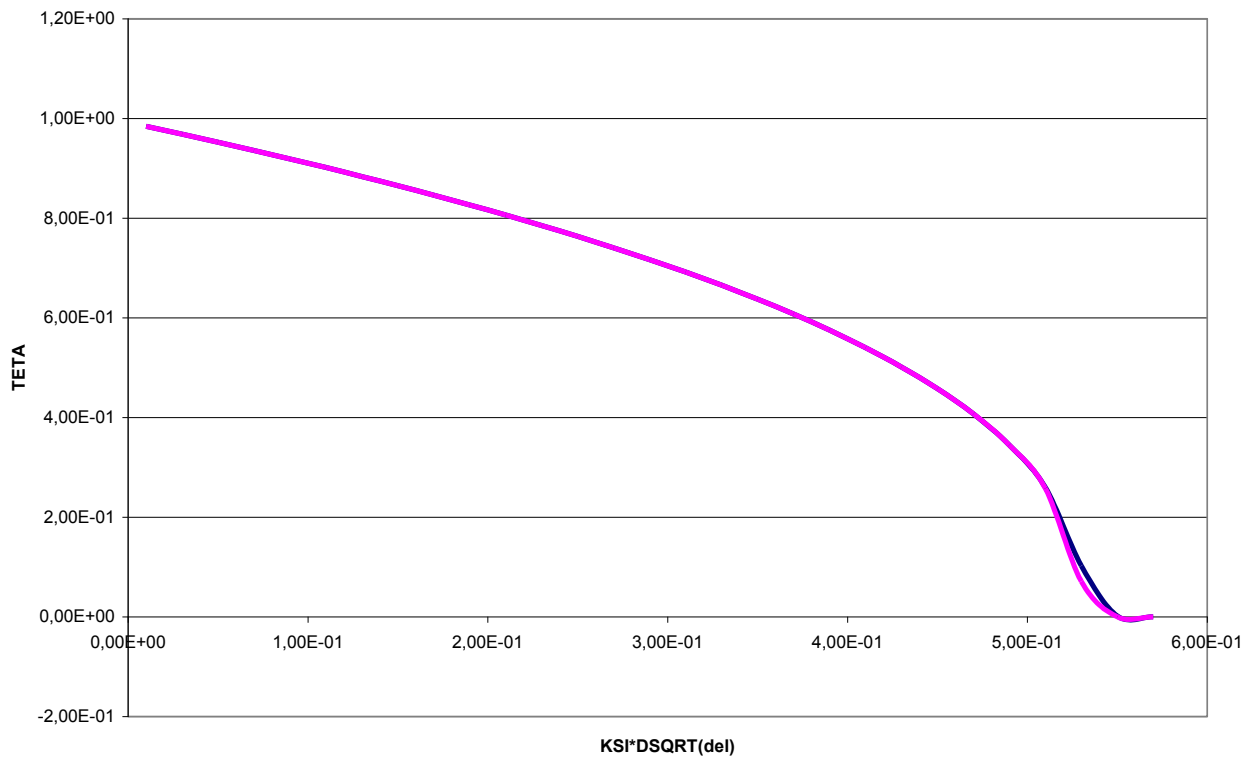


Рис. 4. Сравнение результатов счета по модели 1 с автоматическим решением, $\delta=4$

Посмотрим, как "скажутся" различные приближения для электронной и ионной теплопроводности на реальной задаче. Рассматривается мишень /18/ (рис.6) для тяжелоионного синтеза, т.е. вводится энергия от тяжелых ионов.

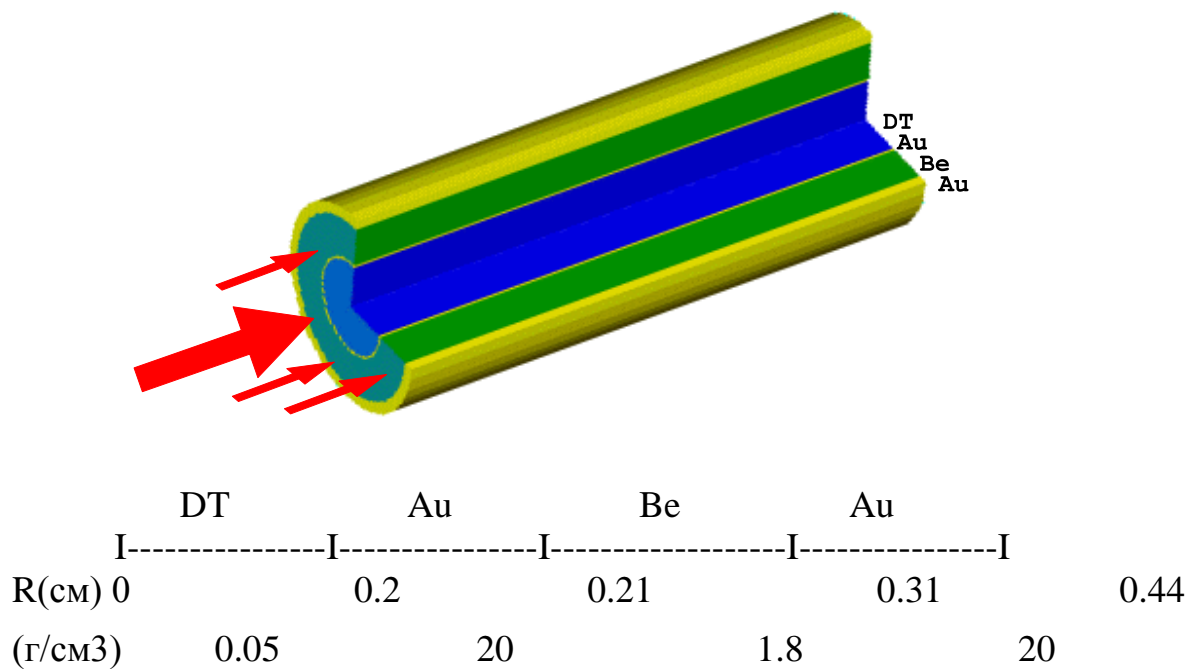


Рис. 5. Геометрия мишени для тяжелоионного синтеза

Расчеты проводились по программе, адекватно описывающей физику плазмы термоядерных мишеней: рассчитывались газодинамика в двухтемпературном приближении, перенос излучения и его взаимодействие с веществом, электронный и ионный перенос тепла, кинетика термоядерных реакций /19/.

Энергия от тяжелых ионов вкладывалась в Be так, чтобы обеспечить безударное сжатие DT области /20/.

Мишень была оптимизирована и по геометрии, и по энергии /21/. По данным расчетов для ее загорания необходимо вложить $F=21$ МДж энергии (расчеты переноса тепла проводились в диффузионном приближении). В результате горения DT области выделяется приблизительно $Q=335$ МДж, т.е. коэффициент усиления ($K=Q/F$) равен приблизительно 16. Проведенные расчеты с ограничением теплового потока по модели 1 и с нелокальным приближением не внесли значительных изменений. В обоих случаях мишень загорается и выделившаяся энергия равна 319 МДж ($K=15.1$) при расчете теплопереноса по первой модели и 313 МДж ($K=14.9$) при расчете теплопереноса по нелокальной модели.

Просчитать эту задачу с расчетом потока по гиперболическому уравнению (5) не удастся из-за слишком больших немонотонностей в решении, хотя в модельной задаче их не видно. Возможно, нужно поработать над схемой счета, но пока не видно, каким образом.

Рассмотрим также численные расчеты для лазерной мишени /21/ (рис.7):

	DT - газ	DT - лед	$Be_{1-\alpha}Cu_{\alpha}$
$R(\text{см})$	0	0.087	0.1105
(г/см^3)	0.0003	0.25	1.8

Рис.7. Геометрия лазерной мишени

На внешней границе капсулы задавалась спектральная плотность излучения, соответствующая температуре, временная зависимость которой представлена графиком функции $T(t)$ /21/.

Рассматривалось энерговыделение в DT областях (газ и лед).

Проведенные расчеты в диффузионном приближении, в приближении нелокальной теплопроводности и при ограничении потока по первой модели показали незначительные отличия в энерговыделении в DT-газе и в DT-льде: различия до 3%. Энерговыделение выше в расчете при ограничении теплового потока по первой модели. Расчеты в диффузионном приближении, в приближении нелокальной теплопроводности практически не отличаются.

Это понятно, так как в этом случае диффузионный поток мы заменили на меньший, максимальный и "вынос" энергии из DT областей меньше, чем в диффузионном приближении.

Просчитать эту задачу с расчетом потока по гиперболическому уравнению (5) не удастся так же, как и в первой задаче, из-за слишком больших немонотонностей в решении.

Заключение

1. В моделях, в которых ограничивается поток первым и вторым способами,

- наблюдаем скачок в решении;

- фронт тепловой волны в расчете отстает от фронта тепловой волны в диффузионном приближении и в нелокальном приближении.

2. Модель, в которой поток рассчитывается по гиперболическому уравнению, очень "капризна" в счете реальных задач, но даже и в модельных задачах не видно ее преимуществ перед другими схемами.

3. Поскольку все три модели, кроме 2 и той, в которой поток рассчитывается по гиперболическому уравнению, совпадают при $W_{диф} < W_{max}$, то можно сказать, что закон Фурье с диффузионным потоком правильно описывает картину течения, где справедливо диффузионное приближение.

4. Для правильного счета теплопереноса надо считать модель с ограничением потока (3), так как эта модель дает правильную картину течения в том случае, когда диффузионный поток превосходит максимальный и когда он меньше, т.е. справедливо диффузионное приближение.

Библиографический список

1. Авронин Е.Н., Зуев А.И., Карлыханов Н.Г., Крюченков В.Б., Лыков В.А., Черняков В.Е. Расчеты мишеней для ЛТС по программе ЗАРЯ // ВАНТ. Сер. Методики и программы численного решения задач математической физики, вып. 2, 1985. С. 10-28.

2. Мишин Е.В. О температуре плазменной короны ДТ-капли, нагреваемой лазером // ДАН СССР, т.215, 1974. С. 565-566.

3. Бессараб А.В., Долголева Г.В., Зарецкий А.И., Кириллов Г.А., Кочемасов Г.Г., Мазукоков В.М., Насыров Г.Ф., Рогачев В.Г. Исследование термоядерной лазерной плазмы в мишенях с обращенной короной // ДАН СССР, т. 282, 1985. С. 857-861.

4. Moses G.A. and Duberstadt J.J. Improved treatment of electron thermal conduction in plasma hydrodynamics calculations // J. The Phys. of fluids, v. 20, №5, 1977. P. 762-770.

5. Бондаренко С.В., Долголева Г.В., Новикова Е.А. Численный анализ экспериментов по генерации ударных волн в алюминии при непрямом (рентгеновском) воздействии на установке ИСКРА-5 // Квантовая электроника, 43 (№7), 2013. С. 630-637.

6. Бондаренко С.В., Новикова Е.А. Численное исследование преобразования лазерного излучения в рентгеновское в экспериментах со сферическими боксами с внутренними покрытиями из различных материалов // Квантовая электроника, 40 (№5), 2010. С.406-410.

7. Бондаренко С.В., Новикова Е.А., Шаров О.О. Анализ экспериментов по генерации рентгеновского излучения в сферических боксах на установке ИСКРА-5 // Тезисы докладов XV Международной конференции "Супервычисления и математическое моделирование", Саров, 2012. С. 101.

8. Shvarts D., Deltres J., Mc Crory R.L., Vtrdon S.P. Self-consistent reduction of the spitzes-harm electron Thermal heat flux in steep temperature gradients in laser-produced plasmas // Phys. Rev. Lett., 47, 1981, 247-250.

9. Волосевич П.П., Косырев В.И., Леванов Е.И. Об учете ограничения теплового потока в численном эксперименте / М.: Препринт ИПМ, №21, 1978, 22 с.

10. Леванов Е.И., Сотский Е.Н. О бегущих волнах в среде с теплопроводностью гиперболического типа / М.: Препринт ИПМ, №193, 1982, 26 с.

11. Luciani J., Mora R., Virmont I. Nonlocal heat transport due to steep temperature gradients // Phys. Rev. Lett., 51, 1983, P. 1664-1667.

12. Prasad M.K., Kershaw D.S. Stable solutions of nonlocal electron heat transport equations // Phys. Fluids B, Vol. 3, № 11, 1991, P. 3087-3091.

13. Epperlein E.M., Short R.W. A practical nonlocal model for electron heat transport in laser plasmas // Phys. Fluids B, Vol. 3, № 11, 1991, P. 3092-3098.

14. Maxwell J.C. On the Dynamical Theory of Gases // Philos. Trans. Roy. Soc., v.157, 1867. P. 49-88.

15. Хонькин А.Д. О распространении высокочастотного звука в разреженных одноатомных газах // Труды IV Всесоюзной конференции по динамике разреженного газа и молекулярной газовой динамике, М.: ЦАГИ, 1977. С. 300-306.

16. Подотригач Я.С., Коляно Ю.М. Обобщенная термомеханика / Киев: Наукова думка, 1976, 312 с.

17. Косарев В.Л., Леванов Е.Л., Сотский Е.Н. Об одном способе описания процесса электронной теплопроводности в высокотемпературной плазме / Препринт № 42. М.: ИПМ АН СССР, 1981, 25 с.

18. Долголева Г.В., Забродин А.В. Разработка термоядерных мишеней на основе реализации концепции безударного сжатия // Аэродинамика и газовая динамика, №2, 2002, с. 48-54.

19. Долголева Г.В. Методика расчета движения двухтемпературного излучающего газа (СНД) // Вопросы атомной науки и техники, сер.: «Методики и программы численного решения задач математической физики», вып. 2(13), 1983. С. 29-33.

20. Долголева Г.В., Забродин А.В. Кумуляция энергии в слоистых системах и реализация безударного сжатия / Москва: Физматлит, 2004.

21. Бельков С.А., Долголева Г.В., Ермолович В.Ф. Исследование влияния переноса быстрых заряженных частиц на горение термоядерных мишеней // ВАНТ, сер.: Математическое моделирование физических процессов, вып. 1, 2003. С. 51-55.

Оглавление

Введение	3
1. Приближения для описания переноса тепла, их разностная аппроксимация	4
2. Сравнение различных приближений	6
Заключение.....	12
Библиографический список.....	12