



ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 75 за 2013 г.



Андрияш А.В., Брантов А.В.,
Быченков В.Ю., Карпов С.А.,
Потапенко И.Ф.

Релаксация теплового
возмущения в
столкновительной плазме в
1D3V геометрии

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Релаксация теплового возмущения в столкновительной плазме в 1D3V геометрии / А.В.Андрияш [и др.] // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2013. № 75. 24 с. URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2013-75>

Ордена Ленина
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М.В. Келдыша
Российской академии наук

А.В. Андрияш, А.В. Брантов, В.Ю. Быченков,
С.А. Карпов, И.Ф. Потапенко

Релаксация теплового возмущения
в столкновительной плазме в $1D3V$ геометрии

Москва
2013

**А.В. Андрияш, А.В. Брантов, В.Ю. Быченков, С.А. Карпов,
И.Ф. Потапенко**

Релаксация теплового возмущения в столкновительной плазме в 1D3V геометрии

Разработан алгоритм численного решения кинетического уравнения для плазмы с учетом столкновений в 1D3V геометрии. Нелинейный интеграл столкновений рассчитывается с помощью метода прямого дискретного моделирования типа Монте-Карло, а амбиполярное электрическое поле из условия электронейтральности на каждом шаге по времени. Представлены результаты расчетов релаксации локализованного начального возмущения температуры в столкновительной плазме в 1D3V геометрии и сравнение с данными, полученными на основе нелокальной нелинейной модели теплового переноса.

Ключевые слова: кулоновские столкновения, уравнение Ландау, уравнение Больцмана, метод Монте-Карло, нелокальный перенос

**Andriash A.V., Brantov A.V., Bychenkov V.Yu., Karpov S.A.,
Potapenko I.F.**

Temperature perturbation relaxation in a collisional plasma in 1D3V geometry

An algorithm for the numerical solution of the plasma kinetic equation in 1D3V geometry is developed. For the nonlinear collision operator the direct simulation Monte Carlo (DSMC) method is used. An ambipolar electric field corresponds to the electroneutrality condition at each timestep. The numerical results for the relaxation of the initial temperature perturbation in a collisional plasma in 1D3V geometry are presented and compared with the nonlocal heat transport model.

Key words: Coulomb collisions, Landau equation, Boltzmann equation, Monte Carlo method, nonlocal heat transport

Оглавление

Введение	3
Моделирование интеграла столкновений Ландау методом Монте-Карло . . .	5
Амбиполярное электрическое поле	9
Алгоритм численного решения неоднородного кинетического уравнения . .	10
Релаксация возмущения температуры	13
Заключение	21
Библиографический список	22

Введение

Начиная с 70-х годов прошлого века, в связи с развитием лазерной технологии и проведением первых экспериментов по лазерному термоядерному синтезу, все больше растет интерес к вопросу взаимодействия лазерного излучения большой интенсивности с плазмой. При этом возникают значительные градиенты температуры и плотности, что ставит под сомнение возможность описания реальных лазерных экспериментов в рамках классической гидродинамики [1]. К настоящему времени накоплен целый ряд экспериментальных данных, подтверждающих представления о нелокальном характере теплопереноса в лазерной плазме и свидетельствующих о невозможности описания теплового переноса в рамках гидродинамических моделей, приводящих, например, к значительной переоценке потока энергии [2] - [4]. В то же время вопрос о величине теплового потока является одним из ключевых для успешного осуществления лазерного термоядерного синтеза (ЛТС), поскольку основная часть энергии падающего лазерного излучения поглощается достаточно далеко от области горения - вблизи критической плотности, а затем переносится вглубь плазмы тепловым потоком электронов, от величины которого зависят темп нагрева, температура и сжатие мишени.

Несмотря на более чем тридцатилетнюю историю исследования проблемы нелокального переноса, следует признать, что адекватной теории, описывающей это явление, все еще нет, хотя до сих пор предпринимаются попытки создания теории, количественно объясняющей экспериментальные данные и способной прогнозировать характер переноса как в реальных условиях термоядерного синтеза, так и при нагреве твердотельных мишеней высококонтрастными лазерными импульсами.

Вместе с тем, подобная картина возникает и в других областях физики плазмы. Проблема неприменимости классических гидродинамических моделей является актуальной для описания широкого круга явлений в астрофизической плазме [5], [6], для изучения слабоионизованной, низкотемпературной плазмы [7], абляционного сжатия мишеней [8]. Для современных термоядерных исследований в системах с магнитным удержанием режим промежуточной столкновительности, для которого классические представления о переносе неприменимы, также весьма типичен [9]. Условие нелокальности переноса часто выполняется и в пристеночной плазме токамака [10].

Одним из способов решения изложенной проблемы является последовательный учет интеграла столкновений заряженных частиц в форме Ландау-Фоккера-Планка при моделировании явлений переноса в плазме, что приводит к ограничению теплового потока, о чем свидетельствует ряд работ по численному решению системы неоднородных кинетических уравнений Власова-

Ландау-Фоккера-Планка. Полноценная реализация такого подхода стала возможна лишь в последнее время в связи с ростом производительности современных компьютеров, хотя уже первые работы по кинетическому моделированию показали невозможность использования классической гидродинамики для описания реальных экспериментов, связанных с переносом в лазерной плазме, и подтвердили нелокальный характер электронного переноса (см. [11] - [13]). Кроме того, в этих работах впервые показана неприменимость классических результатов даже для небольших потоков тепла, т.е. достаточно плавных градиентов температуры, когда отношение длины свободного пробега электронов к характерному масштабу изменения температуры $\lambda_{ei}/L > 0.02$ [13].

Тем не менее, применительно например к проблеме ЛТС, наиболее полное многомерное моделирование, включающее облучение, сжатие и зажигание мишени, в настоящее время возможно и выполняется только с помощью гидродинамических кодов (например, практически все эксперименты, выполняемые на NIF (National Ignition Facility), обсчитываются с использованием гидродинамического кода LASNEX). Таким образом, создание и развитие многомерных кинетических кодов представляет не только самостоятельный научный интерес, но и, учитывая стремительный прогресс в суперкомпьютерных технологиях, является необходимым условием полноценного гидрокINETического численного моделирования сложных крупномасштабных явлений в физике плазмы.

Сложность кинетического уравнения для плазмы, особенно в пространственно неоднородном случае (уравнение Власова с интегралом столкновений ЛФП), делает невозможным эффективное использование аналитических методов, поэтому основным инструментом его решения становятся численные методы. В настоящее время существует множество кодов для численного решения неоднородного кинетического уравнения в 1D и 2D геометрии, правда в большинстве из них используются конечно-разностные методы, обобщение которых на случай трехмерного пространства со сложной геометрией расчетной области, соответствующей реальной физической картине современного эксперимента, является нетривиальной задачей, чрезвычайно затратной в вычислительном смысле. Среди альтернативных методов численного решения неоднородного кинетического уравнения, только для методов частиц усложнение, связанное с увеличением размерности пространства или изменением геометрии расчетной области, не носит принципиального характера. В том числе поэтому, приступая к работе по созданию численного кода для решения неоднородного нелинейного кинетического уравнения для плазмы с учетом столкновений в трехмерном пространстве, авторами за основу был взят именно метод частиц.

В данной работе представлен алгоритм численного решения кинетическо-

го уравнения для плазмы с учетом столкновений в 1D3V геометрии. Нелинейный оператор кулоновских столкновений рассчитывается с помощью метода прямого дискретного моделирования типа Монте-Карло. Самосогласованное электрическое поле рассчитывается в амбиполярном приближении, исходя из условия электронейтральности на каждом шаге по времени. В работе также представлены результаты моделирования релаксации локализованного начального возмущения температуры в столкновительной плазме в 1D3V геометрии и сравнение с данными, полученными на основе нелокальной нелинейной модели теплового переноса.

Моделирование интеграла столкновений Ландау методом Монте-Карло

Основным уравнением кинетической теории является нелинейное уравнение Больцмана [14]. Для функции распределения f_i частиц сорта i , зависящей от пространственной координаты \mathbf{r} , скорости \mathbf{v} и времени $t \geq 0$, оно имеет вид

$$\frac{\partial f_i}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial f_i}{\partial \mathbf{r}} + \frac{\mathbf{F}_i}{m_i} \frac{\partial f_i}{\partial \mathbf{v}} = \sum_j \hat{J}[f_i, f_j], \quad (1)$$

где m_i - масса частиц i -ого сорта, \mathbf{F}_i - сила, действующая на частицы сорта i . В правой части уравнения стоит оператор (интеграл) столкновений

$$\hat{J}[f_i, f_j] = \int_{\mathbb{R}^3 \times S^2} g_{ij}(\mathbf{u}, \mu) [f_i(\mathbf{v}', t) f_j(\mathbf{w}', t) - f_i(\mathbf{v}, t) f_j(\mathbf{w}, t)] d\boldsymbol{\omega} d\mathbf{w}. \quad (2)$$

Здесь \mathbf{v}, \mathbf{w} - скорости частиц, $\mathbf{u} = \mathbf{v} - \mathbf{w}$ - относительная скорость частиц до рассеяния, $d\boldsymbol{\omega} = 2\pi d\mu$, μ - косинус угла рассеяния в системе центра масс, $g_{ij}(\mathbf{u}, \mu) = u \sigma_{ij}(\mathbf{u}, \mu)$ - индикатрисса рассеяния, $\sigma_{ij}(\mathbf{u}, \mu)$ - дифференциальное сечение рассеяния, а величины после рассеяния помечены штрихом и определяются в соответствии с классической теорией рассеяния. Так, например, \mathbf{v}', \mathbf{w}' - скорости частиц после рассеяния определены по формулам

$$\mathbf{v}' = \frac{1}{m_i + m_j} (m_i \mathbf{v} + m_j \mathbf{w} + m_j \mathbf{u} \mathbf{n}'), \quad \mathbf{w}' = \frac{1}{m_i + m_j} (m_i \mathbf{v} + m_j \mathbf{w} - m_i \mathbf{u} \mathbf{n}'), \quad (3)$$

где $\mathbf{n}' = \mathbf{u}'/u$ - направляющий вектор относительной скорости после рассеяния. Для газа заряженных частиц (плазмы) интеграл столкновений можно записать в форме Ландау-Фоккера-Планка (ЛФП)

$$\hat{I}[f_i, f_j] = \frac{m_{ij}^2}{2m_i^2} \frac{\partial}{\partial v^\alpha} \int_{\mathbb{R}^3} d\mathbf{w} g_{ij}^{(tr)}(\mathbf{u}) \{u^2 \delta^{\alpha\beta} - u^\alpha u^\beta\} \left(\frac{\partial}{\partial v^\beta} - \frac{m_i}{m_j} \frac{\partial}{\partial w^\beta} \right) f_i(\mathbf{v}) f_j(\mathbf{w}), \quad (4)$$

где $\alpha, \beta = 1, 2, 3$ и

$$g_{ij}^{(tr)}(\mathbf{u}) = 2\pi \int_{-1}^1 d\mu g_{ij}(\mathbf{u}, \mu)(1 - \mu).$$

Столкновительный оператор для заряженных частиц (4) был впервые получен Ландау [15], как аппроксимация интеграла столкновений Больцмана (2) в предположении, что средняя энергия кулоновского взаимодействия мала по сравнению со средней кинетической энергией. Через 20 лет этот оператор был вновь выведен в форме нелинейного уравнения Фоккера-Планка [16]. По ряду причин именно эта форма уравнения стала очень популярной в численном моделировании задач управляемого термоядерного синтеза, начиная с 70х годов (см., например, [17], [18] и ссылки в них). Вывод интеграла Ландау из интеграла столкновений Больцмана для сечений рассеяния общего вида в предположении рассеяния на малые углы был сделан независимо в [14] и [19]. В работах [19], [20] было показано, что модифицированный интеграл столкновений типа Ландау может быть использован, как модель уравнения Больцмана для произвольных потенциалов взаимодействия.

Для численного решения пространственно-неоднородного кинетического уравнения используют стандартные методы расщепления по физическим процессам. Тогда наиболее нетривиальная часть решения, временной полушаг, описывающий столкновения, сводится к решению эволюционного пространственно-однородного уравнения Ландау-Фоккера-Планка на некотором временном интервале. Решение пространственно-однородного уравнения ЛФП с помощью метода прямого дискретного моделирования типа Монте-Карло подробно описано в работах [21] - [25]. Кратко напомним суть этого подхода. Для этого рассмотрим конкретный пример электронейтральной водородной плазмы. Система уравнений Ландау для электронов и ионов имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_e}{\partial t} &= \frac{1}{2} \left[Q_1^{(L)}(f_e, f_e) + Q_\gamma^{(L)}(f_e, f_i) \right], \\ \frac{\partial f_i}{\partial t} &= \frac{\gamma^2}{2} \left[Q_1^{(L)}(f_i, f_i) + Q_{1/\gamma}^{(L)}(f_i, f_e) \right], \end{aligned} \quad (5)$$

где $\gamma = m/M$ - отношение массы электрона к массе иона, и для любого $\theta > 0$

$$Q_\theta^{(L)}(f_1, f_2) = \frac{\partial}{\partial v^\alpha} \int_{\mathbb{R}^3} d\mathbf{w} R^{\alpha\beta}(\mathbf{v} - \mathbf{w}) \left(\frac{\partial}{\partial v^\beta} - \theta \frac{\partial}{\partial w^\beta} \right) f_1(\mathbf{v}) f_2(\mathbf{w}),$$

$$R^{\alpha\beta}(\mathbf{u}) = (u^2 \delta^{\alpha\beta} - u^\alpha u^\beta) / u^3, \quad \alpha, \beta = 1, 2, 3.$$

Уравнение (5) будут решаться с начальными условиями

$$f_{e,i}|_{t=0} = f_{e,i}^{(0)}(\mathbf{v}), \quad \int_{\mathbb{R}^3} d\mathbf{v} f_{e,i}^{(0)}(\mathbf{v}) = 1. \quad (6)$$

Для приближенного решения задачи (5), (6) выберем малое число $\varepsilon > 0$ и большое натуральное число N_1 . Мы будем моделировать решение этой задачи эволюцией случайного вектора

$$\mathbf{V}_N(t) = \{\mathbf{v}_1^{(e)}(t), \dots, \mathbf{v}_{N_1}^{(e)}(t); \mathbf{v}_1^{(i)}(t), \dots, \mathbf{v}_{N_1}^{(i)}(t)\} \in \mathbb{R}^{3N}, \quad N = 2N_1. \quad (7)$$

При $t = 0$ все скорости электронов $\mathbf{v}_k^{(e)}(0)$ распределяются в \mathbb{R}^3 независимо в соответствии с функцией распределения $f_e^{(0)}(\mathbf{v})$, и аналогично распределяются скорости ионов $\{\mathbf{v}_k^{(i)}(0), k = 1, \dots, N_1\}$.

Для описания временной эволюции вектора $\mathbf{V}_N(t)$ нам потребуется также три вспомогательных параметра λ_{ee} , λ_{ii} и λ_{ei} . Без ограничения общности один из этих параметров можно считать равным единице. Поэтому положим

$$\lambda_{ee} = 1, \quad \lambda_{ii} = \lambda, \quad \lambda_{ei} = \lambda_{ie} = \varkappa, \quad (8)$$

где положительные числа λ и \varkappa пока произвольны. Будем рассматривать схему с максимальным шагом по времени, поэтому

$$\tau_N = \frac{8\varepsilon}{N(1 + \lambda + 2\varkappa)}, \quad N = 2N_1. \quad (9)$$

Таким образом, время t принимает дискретные значения $t_k = k\tau_N$, $k = 0, 1, \dots$. На каждом интервале $[t_k, t_{k+1})$ происходит в точности одно столкновение. Вероятности столкновений трех возможных типов определяются равенствами

$$p_{ee} = \frac{1}{1 + \lambda + 2\varkappa}, \quad p_{ii} = \frac{\lambda}{1 + \lambda + 2\varkappa}, \quad p_{ei} = \frac{2\varkappa}{1 + \lambda + 2\varkappa}. \quad (10)$$

В простейшем варианте можно выбрать $\lambda = \varkappa = 1$, тогда

$$\tau_N = 2\varepsilon/N, \quad p_{ee} = p_{ii} = 1/4, \quad p_{ei} = 1/2. \quad (11)$$

После того, как решено какое из трех событий, определяемых вероятностями (10), действительно произошло, выбирается случайная пара скоростей частиц соответствующих сортов и "производится столкновение". Мы кратко опишем, как это делается в случае δ -образных функций

$$g_{ij}(u, \mu) = \frac{\lambda_{ij}}{2\pi\varepsilon} \delta \left[1 - \mu - 2 \text{Min} \left\{ \frac{Z_i^2 Z_j^2}{\lambda_{ij}} \left(\frac{m}{m_{ij}} \right)^2 \frac{\varepsilon}{u^3}, 1 \right\} \right], \quad i, j = 1, \dots, n. \quad (12)$$

в соответствующей системе уравнений Больцмана (1) - (2).

При столкновении двух электронов выбирается пара скоростей

$$\mathbf{v}_r^{(e)} = \mathbf{v}, \quad \mathbf{v}_s^{(e)} = \mathbf{w}, \quad 1 \leq r < s \leq N_1.$$

Скорости после столкновения имеют вид

$$\mathbf{v}_r^{(e)'} = \frac{1}{2}(\mathbf{v} + \mathbf{w} + |\mathbf{v} - \mathbf{w}|\boldsymbol{\omega}), \quad \mathbf{v}_s^{(e)'} = \frac{1}{2}(\mathbf{v} + \mathbf{w} - |\mathbf{v} - \mathbf{w}|\boldsymbol{\omega}), \quad \boldsymbol{\omega} \in \mathbb{S}^2,$$

где единичный вектор $\boldsymbol{\omega}$ определяется в декартовых координатах с осью Ox вдоль вектора $\mathbf{u} = \mathbf{v} - \mathbf{w}$ следующим образом:

$$\boldsymbol{\omega} = \left\{ \sqrt{1 - \mu^2} \cos \varphi, \sqrt{1 - \mu^2} \sin \varphi, \mu \right\}, \quad (13)$$

где φ - это случайный угол, равномерно распределенный на интервале $[0, 2\pi)$,

$$\mu = \mu_{ee} = 1 - 2 \operatorname{Min} \left\{ \frac{4\varepsilon}{u^3}, 1 \right\}, \quad \mathbf{u} = \mathbf{v} - \mathbf{w}. \quad (14)$$

Столкновение двух ионов описывается совершенно аналогично. Единственная разница состоит в том, что в формуле (13) μ определяется следующим образом:

$$\mu = \mu_{ii} = 1 - 2 \operatorname{Min} \left\{ \frac{4\varepsilon\gamma^2}{\lambda u^3}, 1 \right\}, \quad \mathbf{u} = \mathbf{v} - \mathbf{w}, \quad \gamma = m/M. \quad (15)$$

Наконец, для столкновения электрона с ионом мы выбираем скорости

$$\mathbf{v}_r^{(e)} = \mathbf{v}, \quad \mathbf{v}_s^{(i)} = \mathbf{w}, \quad 1 \leq r, s \leq N_1,$$

и преобразуем их по формулам

$$\mathbf{v}_r^{(e)'} = \frac{m\mathbf{v} + M\mathbf{w} + M|\mathbf{u}|\boldsymbol{\omega}}{m + M}, \quad \mathbf{v}_s^{(i)'} = \frac{m\mathbf{v} + M\mathbf{w} - m|\mathbf{u}|\boldsymbol{\omega}}{m + M}, \quad \mathbf{u} = \mathbf{v} - \mathbf{w},$$

где в системе координат с осью Ox вдоль вектора \mathbf{u} справедлива та же формула (13), в которой

$$\mu = \mu_{ei} = 1 - 2 \operatorname{Min} \left\{ \frac{\varepsilon(1 + \gamma)^2}{\varkappa u^3}, 1 \right\}, \quad \mathbf{u} = \mathbf{v} - \mathbf{w}, \quad \gamma = m/M. \quad (16)$$

Преобразование этих формул к произвольной системе координат достаточно очевидно (см., например, [26]) и для краткости опущено.

Таким образом, отправляясь от начального вектора $\mathbf{V}_N(0)$, мы получаем новый вектор $\mathbf{V}_N(\tau_N)$ после первого столкновения. Далее весь процесс вычислений повторяется без изменений и счетчик времени увеличивается при каждом столкновении на величину τ_N (9).

Расчёт амбиполярного электрического поля

При решении неоднородного кинетического уравнения для расчета движения частиц плазмы необходимо учитывать самосогласованное электромагнитное поле. В общем случае, оно является решением системы уравнений Власова-Максвелла, которую, как составную часть численного решения неоднородного кинетического уравнения (1) методом расщепления по физическим процессам, следует разрешать на каждом шаге по времени. В частном случае, когда магнитное поле отсутствует, для вычисления электростатического поля применяется уравнение Пуассона. Такой подход, однако, является малоэффективным, если речь идет о задачах, где продолжительность времени счета составляет от нескольких десятков до сотен характерных времен электрон-ионных столкновений τ_{ei} , поскольку критерием устойчивости численного решения уравнения Пуассона является ограничение шага по времени $\Delta t < 2\omega_p^{-1}$, а $\tau_{ei}\omega_p \ll 1$. Поэтому в некоторых работах, посвященных переносу в плазме ЛТС (см., например, [27] - [29]), применяется упрощенная модель амбиполярного электрического поля, подробно изложенная в статье [29]. Согласно этой работе, представив функцию распределения в виде $f_e = f_0 + f_1 \cdot \mu$, где $\mu = v_x/v$, и подставив это разложение в уравнение (1) с интегралом столкновений (4) для электронов, получим для функций f_0, f_1 систему уравнений

$$\begin{aligned} \frac{2}{3} \frac{\partial f_1}{\partial x} - \frac{2}{3} \frac{eE(x)}{m_e} \frac{1}{v^2} \frac{\partial}{\partial v} (v^2 f_1) &= J^0[f_0], \\ \frac{\partial f_1}{\partial x} - \frac{eE(x)}{m_e} \frac{\partial f_0}{\partial v} + \nu_{ei}(v) f_1 &= 0. \end{aligned} \quad (17)$$

Здесь $\nu_{ei}(v) = Y_{ei}/v^3$, где $Y_{ei} = 4\pi Z e^4 \Lambda n_e / m_e^2$, и мы дополнительно воспользовались квазистационарным приближением, согласно которому при $Z \gg 1$ в сильностолкновительном пределе можно пренебречь зависимостью электронной функции распределения от времени, а также сделали предположение, что электрон-электронный интеграл столкновений $I_{ee}[f_e, f_e] \simeq J^0[f_0]$, т.е. зависит только от изотропных потенциалов Розенблюта.

Домножив второе уравнение системы (17) на v^6 и проинтегрировав по скорости, из условия ток равен нулю

$$j_x = e \int f v_x d^3v = \frac{4\pi}{3} e \int f_1 v^3 dv = 0, \quad (18)$$

получим выражение для амбиполярного поля

$$\frac{e\mathbf{E}_0}{m_e} = -\frac{\nabla \int f_0 v^7 dv}{6 \int f_0 v^5 dv}, \quad (19)$$

которое при $f_0 = f_m$ переходит в классическое выражение

$$e\mathbf{E}_m = -kT_e \left(\frac{\nabla n_e}{n_e} + \frac{5}{2} \frac{\nabla T_e}{T_e} \right),$$

где f_m - функция распределения Максвелла. Следует отметить, что отличие функции распределения f_0 от максвелловской начинает проявляться уже при $k_0 \lambda_{ei} > 0.06/\sqrt{Z}$, где $k_0 \sim \delta L^{-1}$, а $\delta L \sim T_e/\nabla T_e$ - характерный масштаб неоднородности температуры.

Алгоритм численного решения неоднородного кинетического уравнения

Введем следующие безразмерные единицы

$$\tilde{t} = t\nu_0, \quad \tilde{\mathbf{v}} = \frac{\mathbf{v}}{v_{T_0}}, \quad \tilde{x} = \frac{x}{l_0},$$

здесь $l_0 = v_{T_0}\nu_0^{-1}$, $\nu_0 = 2\pi\Lambda e^4/m^2v_{T_0}^3$, $v_{T_0} = \sqrt{3kT_0/m}$ - начальная тепловая скорость, Λ - кулоновский логарифм, а e и m - заряд и масса электрона.

Пусть пространство неоднородно вдоль оси Ox , рассмотрим расчетную область размера $L \gg \delta L$, где δL - характерный масштаб неоднородности задачи. Разобьем эту область на N_c ячеек и введем пространственно-временную сетку $\omega = \omega_h \times \omega_t$, где

$$\begin{aligned} \omega_h &= \{X_{k+1} = X_k + h_{k+1}, k = 0, 1, \dots, N_c - 1, X_0 = -L/2, X_{N_c} = L/2\}, \\ \omega_t &= \{t^{n+1} = t^n + \Delta t, n = 0, 1, \dots, t^0 = 0\}, \end{aligned}$$

для расчета электрического поля.

Поскольку интеграл столкновений (4) описывает изменение функции распределения только в пространстве скоростей и не влияет на ее эволюцию в координатном пространстве. Вычислительный алгоритм можно представить в виде системы операторов, последовательно расщепленных по физическому действию. На каждом временном шаге необходимо решить две вспомогательные задачи:

$$\begin{aligned} 1. \quad \frac{D\varphi}{Dt} &= 0, \quad \varphi(t^{n-1}) = f(t^{n-1}) \Rightarrow \varphi(t^n), \\ 2. \quad \frac{\partial \tilde{f}}{\partial t} &= \hat{I}[\tilde{f}, \tilde{f}], \quad \tilde{f}(t^{n-1}) = \varphi(t^n) \Rightarrow f(t^n), \end{aligned}$$

где $f(t^n)$ - искомая функция распределения, а дифференциальный оператор $D/Dt \equiv \partial/\partial t + v_x \partial/\partial x + F_x/m \partial/\partial v_x$.

Затем необходимо задать начальное распределение частиц внутри ячейки, в соответствии с заданными начальными профилями температуры и плотности. Для этого каждую частицу будем характеризовать координатой и тремя проекциями скорости, т.е. набором из четырех чисел $\{v_{xj}, v_{yj}, v_{zj}, x_j\}$, где j - номер частицы. Начальное распределение по скорости с заданной температурой для каждой ячейки можно выбрать либо максвелловским, либо в виде δ -функции, т.е. изотропным моноэнергетическим. Принципиальное отличие между ними состоит в том, что для формирования начального максвелловского распределения с заданной температурой, необходимо сравнительно большое число частиц $N_p \geq 5000$ в каждой ячейке, в то время как при изотропном моноэнергетическом начальном распределении число частиц на одну ячейку ограничено снизу лишь условиями применимости метода Монте-Карло для моделирования оператора столкновений, т.е. $N_p \geq 100$. Однако, чтобы получить из изотропного моноэнергетического распределения максвелловское, необходим предварительный, до непосредственного начала моделирования, этап расчета одних только столкновений частиц внутри ячейки (без пространственного переноса и действия полей), отвечающий релаксации начального распределения к максвелловскому. Кроме того, чем меньше число частиц на одну ячейку, тем хуже описание "хвоста" и высоких моментов функции распределения. Окончательный выбор начального распределения зависит от конкретной задачи.

Граничные условия можно выбрать периодическими или отражательными. Последнее означает, что частицы, попавшие на границу расчетной области, отражаются от нее зеркально, что приводит к тому, что поток частиц на границе равен нулю.

Алгоритм расчета координат и скоростей частиц на $(n + 1)$ -ом шаге по времени состоит из следующих этапов:

1. Вычисляются координаты частиц на полуцелом шаге по времени

$$x_j^{n+1/2} = x_j^n + v_{xj}^n \Delta t/2, \quad (20)$$

где j - номер частицы из k -ой ячейки.

2. Рассчитываются скорости частиц на новом шаге по времени

$$v_{xj}^{n+1} = v_{xj}^n - E(x_j^{n+1/2}) \Delta t. \quad (21)$$

Здесь E - электрическое поле, расчет которого происходит следующим образом:

Сначала в каждой ячейке вычисляются моменты изотропной части безразмерной функции распределения

$$M_r = \int \tilde{f}_0 v^{r+2} dv = \frac{1}{N_p} \sum_{j=1}^{N_p} v^r,$$

где

$$\tilde{f}_0 = \frac{1}{N_p} \sum_{j=1}^{N_p} \frac{1}{v_j^2} \delta(v - v_j),$$

а N_p - количество электронов в рассматриваемой ячейке. Вычисленные значения моментов приписываются середине соответствующей ячейки, поэтому они оказываются смещены на половину шага по координате относительно границ ячейки, которые совпадают с узлами пространственной сетки ω_h .

Далее по формуле (19), аппроксимированной с помощью центральной разности, вычисляется амбиполярное электрическое поле в узлах сетки. Для расчета значения поля внутри k -ой ячейки в точке $x_j^{n+1/2} \in [X_{k-1}, X_k]$, где находится j -ая частица в момент времени $t^{n+1/2}$, применяется интерполяционная формула Лагранжа

$$E^*(x_j) = E_{k-1} \frac{X_k - x_j}{X_k - X_{k-1}} + E_k \frac{x_j - X_{k-1}}{X_k - X_{k-1}}.$$

После чего реализуется итерационный процесс, суть которого обеспечить выполнение условия квазинейтральности плазмы на $(n + 1)$ -ом шаге по времени. По формулам

$$\begin{aligned} v_{x_j}^{(s)} &= v_{x_j}^{(s-1)} - E^{(s-1)} \Delta t, \\ x_j^{(s)} &= x_j^{n+1/2} + v_{x_j}^{(s)} \Delta t / 2, \end{aligned} \quad (22)$$

где $s \geq 1$ - номер итерации, $v_{x_j}^{(0)} = v_{x_j}^n$, $E^{(0)} = E^*(x_j^{n+1/2})$, рассчитываются предварительные скорости и координаты частиц на $(n + 1)$ -ом шаге по времени, после чего по формуле

$$j_x^{(s)} = en_e \langle v_x^{(s)} \rangle = e \int f^{(s)} v_x d^3v = \frac{e}{N_p} \sum_{i=1}^{N_p} v_{x_i}^{(s)}$$

в каждой ячейке вычисляется электрический ток. Если возникающий ток по модулю меньше наперед заданного параметра ζ , который характеризует точность выполнения условия квазинейтральности плазмы, то $v_{x_j}^{n+1} = v_{x_j}^{(s)}$, и мы переходим к следующему пункту алгоритма. Если же $|j_x^{(s)}| > \zeta$, то для электрического поля $E^{(s-1)}$ вычисляется поправка $\Delta E^{(s)} = \langle v_x^{(s)} \rangle / \Delta t$, затем выполняется следующая итерация по формуле (22).

3. Вычисляются координаты частиц в момент времени t^{n+1}

$$x_j^{n+1} = x_j^{n+1/2} + v_{x_j}^{n+1} \Delta t / 2.$$

4. Производятся столкновения частиц внутри ячейки (согласно общей методике, изложенной в разделе 1):

- случайно выбирается пара сталкивающихся частиц с номерами α и β ,
- вычисляются новые скорости частиц $(\mathbf{v}'_\alpha, \mathbf{v}'_\beta)$ после столкновения

$$\mathbf{v}'_\alpha = \frac{1}{m_\alpha + m_\beta} (m_\alpha \mathbf{v}_\alpha + m_\beta \mathbf{v}_\beta + m_\beta \mathbf{u} \mathbf{n}'), \quad \mathbf{v}'_\beta = \frac{1}{m_\alpha + m_\beta} (m_\alpha \mathbf{v}_\alpha + m_\beta \mathbf{v}_\beta - m_\alpha \mathbf{u} \mathbf{n}'),$$

где $\mathbf{v}_\alpha = \mathbf{v}_\alpha^{n+1}$, $\mathbf{v}_\beta = \mathbf{v}_\beta^{n+1}$ - скорости частиц рассчитанные в пункте 2, \mathbf{n}' - единичный вектор, компоненты которого, заданные в системе координат, связанной с центром масс рассеивающихся частиц и осью Ox , направленной вдоль вектора \mathbf{u} относительной скорости до рассеяния, равны

$$\left\{ \sqrt{1 - \mu^2} \cos \varphi, \sqrt{1 - \mu^2} \sin \varphi, \mu \right\}.$$

Здесь

$$\mu = 1 - 2 \text{Min} \left\{ \left(\frac{m_e}{m_{\alpha\beta}} \right)^2 \frac{Z_\alpha^2 Z_\beta^2 \varepsilon}{u^3}, 1 \right\},$$

где Z_α - заряд частицы с номером α , $m_{\alpha\beta}$ - приведенная масса, m_e - масса электрона, а φ - случайный угол, равномерно распределенный на $[0, 2\pi)$,

- счетчик времени τ увеличивается на $2\varepsilon/N_p$, где N_p - число частиц в данной ячейке.

Затем шаг 4 повторяется до тех пор, пока $\tau < \Delta t$.

Далее переходим к следующему шагу по времени.

В процессе каждого расчета формируются файлы, содержащие зависимость моментов функции распределения от координаты в различные моменты времени. Затем, после проведения серии из K расчетов, происходит окончательная обработка (усреднение) полученных результатов.

Релаксация возмущения температуры

В качестве примера работы представленного кинетического кода рассмотрим задачу о релаксации локализованного начального возмущения температуры, созданного, например, коротким лазерным импульсом. Если длительность лазерного импульса короче характерного времени релаксации температуры, то можно рассматривать эволюцию горячего пятна, как начальную задачу с заданным локализованным профилем температуры в момент времени $t = 0$.

С помощью разработанного кода найдем численное решение кинетического уравнения для функции распределения электронов f_e :

$$\frac{\partial f_e}{\partial t} + v_x \frac{\partial f_e}{\partial x} - \frac{eE}{m_e} \frac{\partial f_e}{\partial v_x} = I_{ee}(f_e, f_e) + I_{ei}(f_e, f_i^{(M)}). \quad (23)$$

В начальный момент времени электроны имеют максвелловское распределение по скоростям с профилем температуры гауссова вида

$$T_e(x, t = 0) = T_0 + T_1 \exp(-x^2/\delta L^2), \quad (24)$$

где характерный пространственный масштаб неоднородности δL (размер горячего пятна) изменяется от $\delta L = 5 \lambda_{ei}(T_0)$ до $\delta L = 10^3 \lambda_{ei}(T_0)$.

Наиболее важной характеристикой в данной задаче (применительно к исследованиям, связанным с ЛТС) является величина теплового потока, возникающего при релаксации горячего пятна. В кинетической теории тепловой поток является моментом функции распределения и определяется по формуле

$$\mathbf{q} = \frac{m}{2} \int_{\mathbb{R}^3} d\mathbf{v} f_e(\mathbf{v}, t) \mathbf{V}^2 \mathbf{V},$$

здесь $\mathbf{V} = \mathbf{v} - \mathbf{u}_e$ и \mathbf{u}_e - направленная скорость электронов. После обезразмеривания этого выражения на $n_e v_{T_0} T_0$ и подстановки в него безразмерной функции распределения в виде $\tilde{f}_e = 1/N_e \sum_{j=1}^{N_e} \delta(\tilde{\mathbf{v}} - \tilde{\mathbf{v}}_j(t))$ получим для теплового потока в данной ячейке

$$\tilde{\mathbf{q}} = \frac{1}{2N_e} \sum_{j=1}^{N_e} \tilde{\mathbf{V}}_j^2 \tilde{\mathbf{V}}_j, \quad (25)$$

где j - номер частицы в ячейке, а тильдой обозначены безразмерные переменные. В случае плавного градиента температуры для расчета теплового потока применима формула Спитцера-Харма, которая после соответствующего обезразмеривания принимает вид

$$\tilde{\mathbf{q}}_{SH}(\tilde{\mathbf{x}}) = -\frac{128}{3\pi} \frac{Z_i + 0.24}{Z_i + 4.2} \left(\frac{T}{T_0}\right)^{\frac{5}{2}} \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \tilde{\mathbf{x}}}. \quad (26)$$

Однако уже при $k_0 \lambda_{ei} > 0.06/\sqrt{Z}$, где $k_0 \sim \delta L^{-1}$, классическая теория переноса, а вместе с ней и формула (26), начинают расходиться с экспериментальными данными. В случае же резких градиентов, когда $\delta L \sim \lambda_{ei}$, применение формулы (26) приводит вообще к нефизическому результату: тепловой поток превышает свое максимально возможное значение $\sim n_e v_{T_e} T_e$, соответствующее потоку свободных электронов.

Таким образом, следует ожидать, что профиль теплового потока, полученный из численного решения кинетического уравнения по формуле (25), с увеличением характерного масштаба пространственной неоднородности δL будет приближаться к зависимости, соответствующей формуле Спитцера-Харма (26), оставаясь при этом ниже максимального значения $n_e v_{T_0} T_0$.

Чтобы проверить сходимость профиля теплового потока к зависимости, соответствующей формуле Спитцера-Харма, с увеличением характерного масштаба пространственной неоднородности δL , можно выполнить тест Эпперлейна-Шорта [30]. Для этого рассматривается периодическое одномодовое начальное возмущение

$$\delta T(x, t = 0) = \delta T \cos(kx),$$

где $k = 2\pi/L$. Здесь размер расчетной области L совпадает с характерным масштабом пространственной неоднородности δL . Для расчета релаксации такого возмущения следует выбрать отражательные граничные условия, тогда с течением времени профиль температуры будет сохранять форму $\cos(kx)$ только с меньшей амплитудой. Следует отметить, что изучение релаксации такого одномодового возмущения позволяет судить и о релаксации произвольного теплового возмущения заданного пространственного масштаба, поскольку оно может быть качественно охарактеризовано определенной фурье-компонентой, вносящей основной вклад в температурное распределение.

Коэффициент теплопроводности κ вычисляется как отношение $q/\nabla T$

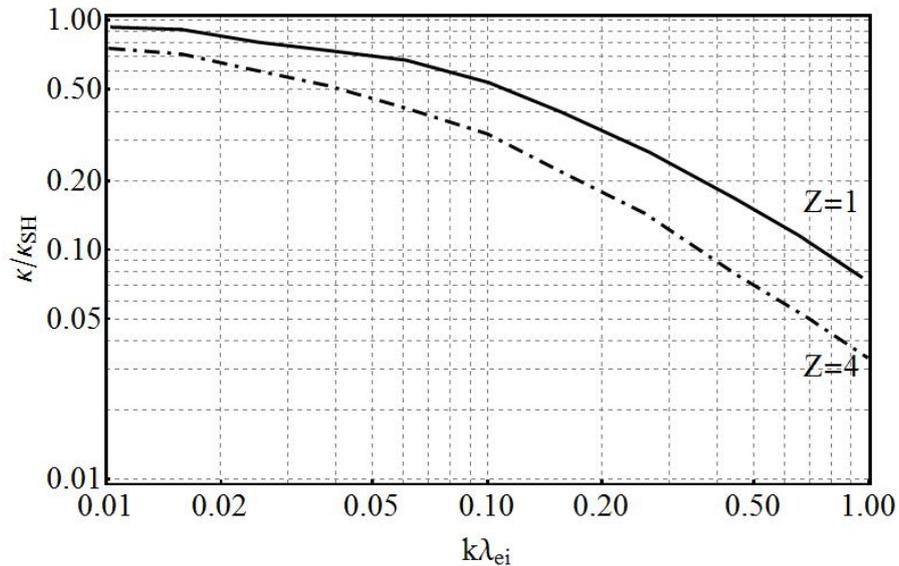


Рис. 1. Зависимость отношения коэффициента теплопроводности κ к коэффициенту теплопроводности Спитцера-Харма κ_{SH} от обратной величины характерного масштаба пространственной неоднородности δL для амплитуды начального возмущения $\delta T = 0.1$ и зарядов иона $Z = 1$ и $Z = 4$.

после достижения своего рода "состояния равновесия", когда отношение $q/\kappa_{SH}\nabla T$ становится постоянным в каждой точке пространства и в любой последующий момент времени. На рис. 1 представлена зависимость отношения коэффициента теплопроводности κ к коэффициенту теплопроводности Спитцера-Харма κ_{SH} от параметра $k\lambda_{ei}$, т.е. обратной величины характерного масштаба пространственной неоднородности δL , для амплитуды начального возмущения $\delta T = 0.1$ и зарядов иона $Z = 1$ и $Z = 4$. Из рисунка видно, что отношение κ/κ_{SH} по мере уменьшения параметра $k\lambda_{ei}$ стремится к 1, причем кривая $Z = 1$ практически достигает $\kappa/\kappa_{SH} = 1$ при $k\lambda_{ei} \sim 10^{-2}$.

Вернемся к задаче о релаксации начального теплового возмущения (24). Как следует из рис. 1, в области параметров $0.01 < k\lambda_{ei} < 1$ величина теплового потока начинает существенно отличаться от значений, получающихся по формуле (26), и для описания кинетических эффектов связанных с нелокальным переносом требуется новое интегральное выражение для теплового потока электронов

$$q(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} q_{SH}(x')G(x, x', T(x'))dx', \quad q_{SH} = -\kappa_{SH}\frac{\partial T_e}{\partial x}. \quad (27)$$

На основании точной кинетической теории для малых возмущений в работе [31] было предложено следующее интегральное ядро $G(x, x')$:

$$G(x, x') = \frac{\xi(\eta)}{\pi a \lambda_{ei}}, \quad \xi = \int_0^{\infty} \frac{dp \cos(\eta p)}{1 + p^{0.9}}, \quad \eta = \frac{|x - x'|}{a \lambda_{ei}}, \quad a = 10 \frac{Z + 5}{Z + 12}. \quad (28)$$

Для рассматриваемого диапазона градиентов температуры данное выражение хорошо воспроизводит результаты точной линейной теории переноса, что дает основание использовать его для сравнения с результатами численного моделирования.

Ниже приведено сравнение результатов численного моделирования релаксации начального теплового возмущения, проведенного при помощи описанного в настоящей работе 1D3V кода, с результатами, полученными на основе нелокальной нелинейной модели теплового переноса (27) - (28) и данными численного моделирования, приведенными в работах [31], [32].

На рис. 2 - 7 представлено сравнение профилей теплового потока и температуры, полученных в результате численного моделирования с помощью 1D3V кода (сплошная кривая), с результатами нелокальной модели переноса (27) - (28) (пунктирная кривая) и численного моделирования, приведенного в работе [32] (точечная кривая), для различных параметров расчета. Напомним введенные ранее обозначения: N_p - начальное число частиц на одну ячейку, K - количество расчетов, по которым проводилось усреднение, T_1 - максимальное значение начального возмущения температуры, L - размер расчетной области, δL - характерный масштаб неоднородности температуры

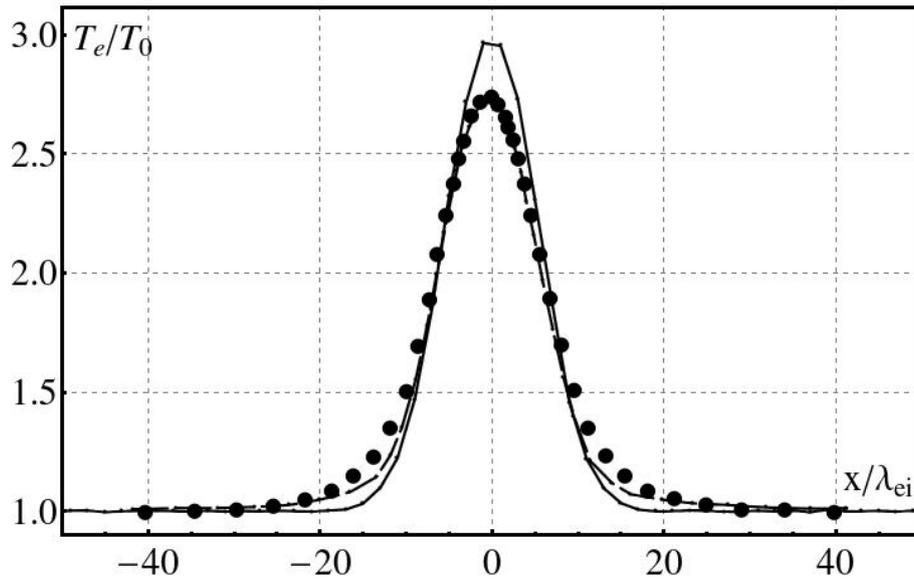


Рис. 2. Профиль температуры в момент времени $t\nu_{ei} = 3.6$, полученный в результате численного моделирования с помощью 1D3V кода с параметрами $N_p = 5000$, $K = 1$, $T_1 = 3$, $\delta L = 5\lambda_{ei}$, $L = 200\lambda_{ei}$, $Z = 10$, $N_c = 100$ (сплошная кривая), в сравнении с результатами нелокальной модели переноса (27) - (28) (пунктирная кривая) и численного моделирования, приведенного в работе [32] (точечная кривая).

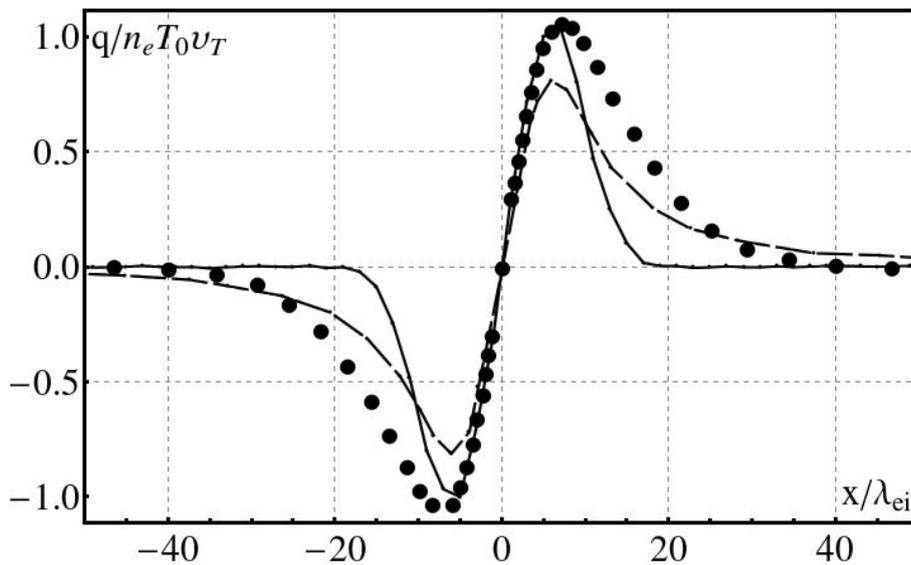


Рис. 3. Профиль теплового потока в момент времени $t\nu_{ei} = 3.6$, полученный в результате численного моделирования с помощью 1D3V кода с параметрами $N_p = 5000$, $K = 1$, $T_1 = 3$, $\delta L = 5\lambda_{ei}$, $L = 200\lambda_{ei}$, $Z = 10$, $N_c = 100$ (сплошная кривая), в сравнении с результатами нелокальной модели переноса (27) - (28) (пунктирная кривая) и численного моделирования, приведенного в работе [32] (точечная кривая).

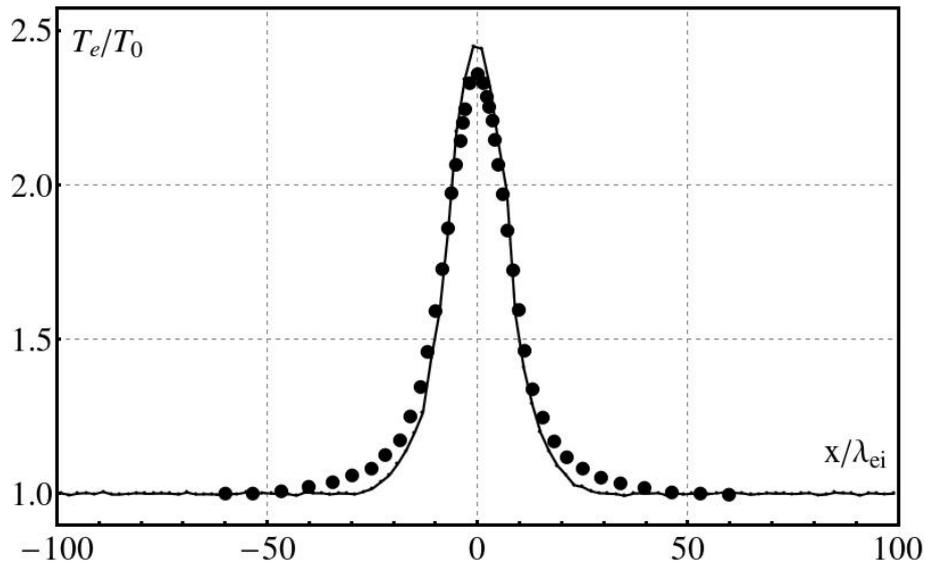


Рис. 4. Профиль температуры в момент времени $t\nu_{ei} = 7.2$, полученный в результате численного моделирования с помощью 1D3V кода с параметрами $N_p = 5000$, $K = 1$, $T_1 = 3$, $\delta L = 5\lambda_{ei}$, $L = 200\lambda_{ei}$, $Z = 10$, $N_c = 100$ (сплошная кривая), в сравнении с результатами нелокальной модели переноса (27) - (28) (пунктирная кривая) и численного моделирования, приведенного в работе [32] (точечная кривая).

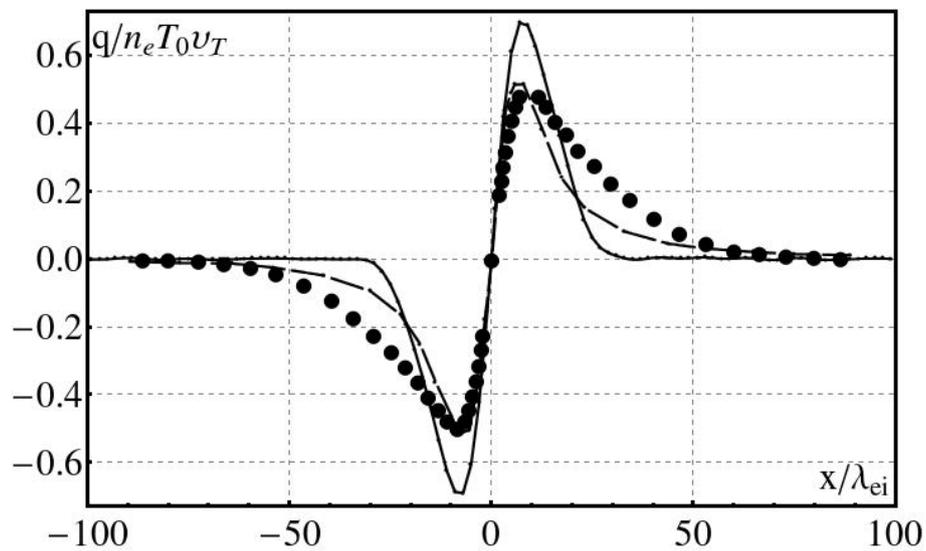


Рис. 5. Профиль теплового потока в момент времени $t\nu_{ei} = 7.2$, полученный в результате численного моделирования с помощью 1D3V кода с параметрами $N_p = 5000$, $K = 1$, $T_1 = 3$, $\delta L = 5\lambda_{ei}$, $L = 200\lambda_{ei}$, $Z = 10$, $N_c = 100$ (сплошная кривая), в сравнении с результатами нелокальной модели переноса (27) - (28) (пунктирная кривая) и численного моделирования, приведенного в работе [32] (точечная кривая).

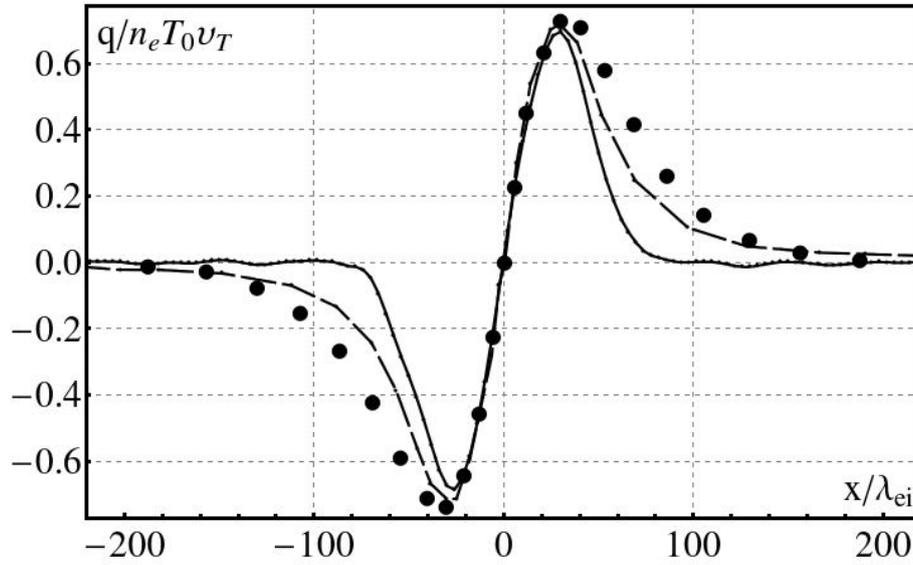


Рис. 6. Профиль теплового потока в момент времени $t\nu_{ei} = 14.55$, полученный в результате численного моделирования с помощью 1D3V кода с параметрами $N_p = 2000$, $K = 5$, $T_1 = 3$, $\delta L = 30\lambda_{ei}$, $L = 800\lambda_{ei}$, $Z = 10$, $N_c = 200$ (сплошная кривая), в сравнении с результатами нелокальной модели переноса (27) - (28) (пунктирная кривая) и численного моделирования, приведенного в работе [32] (точечная кривая).

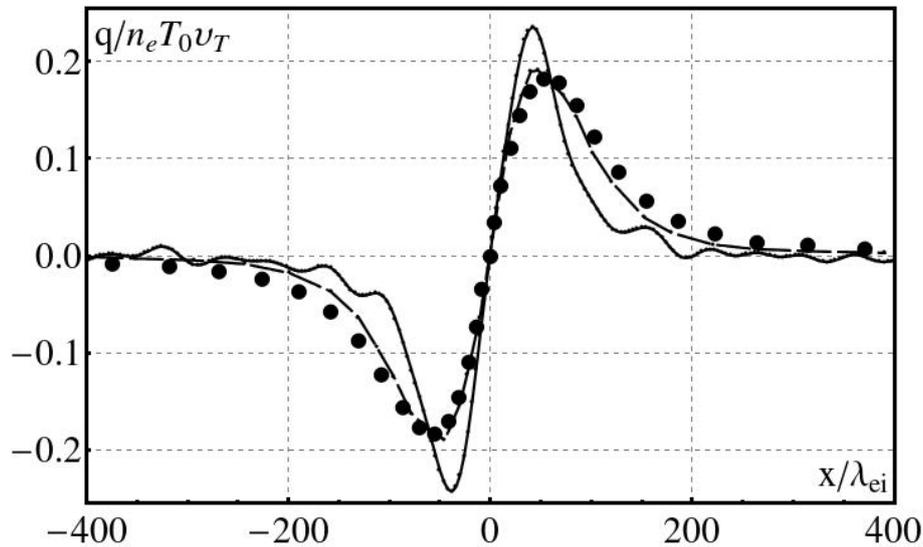


Рис. 7. Профиль теплового потока в момент времени $t\nu_{ei} = 87.3$, полученный в результате численного моделирования с помощью 1D3V кода с параметрами $N_p = 2000$, $K = 5$, $T_1 = 3$, $\delta L = 30\lambda_{ei}$, $L = 800\lambda_{ei}$, $Z = 10$, $N_c = 200$ (сплошная кривая), в сравнении с результатами нелокальной модели переноса (27) - (28) (пунктирная кривая) и численного моделирования, приведенного в работе [32] (точечная кривая).

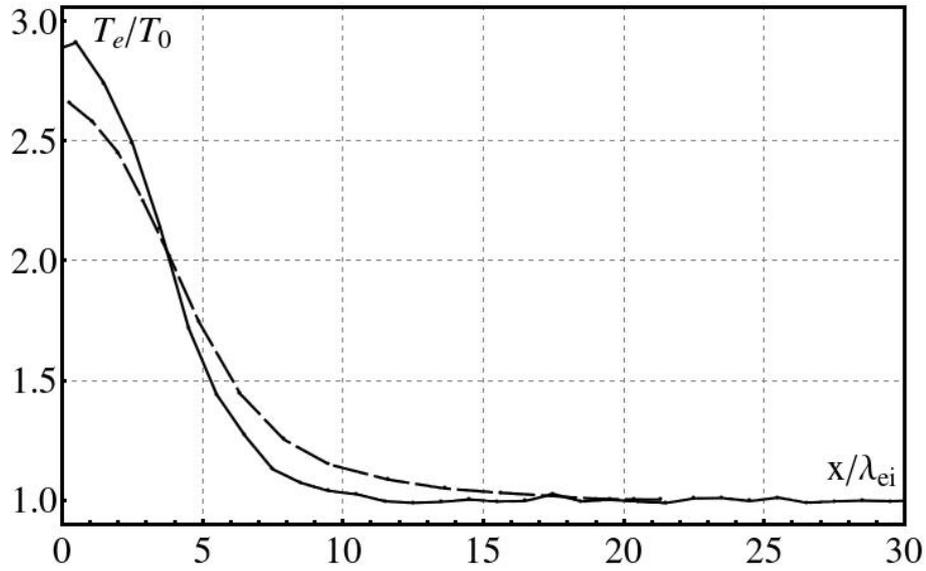


Рис. 8. Профиль температуры в момент времени $t\nu_{ei} = 2.655$, полученный в результате численного моделирования с помощью 1D3V кода с параметрами $N_p = 5000$, $K = 1$, $T_1 = 3$, $\delta L = 3\lambda_{ei}$, $L = 300\lambda_{ei}$, $Z = 1$, $N_c = 200$ (сплошная кривая), в сравнении с результатами численного моделирования, приведенного в работе [31] (пунктирная кривая).

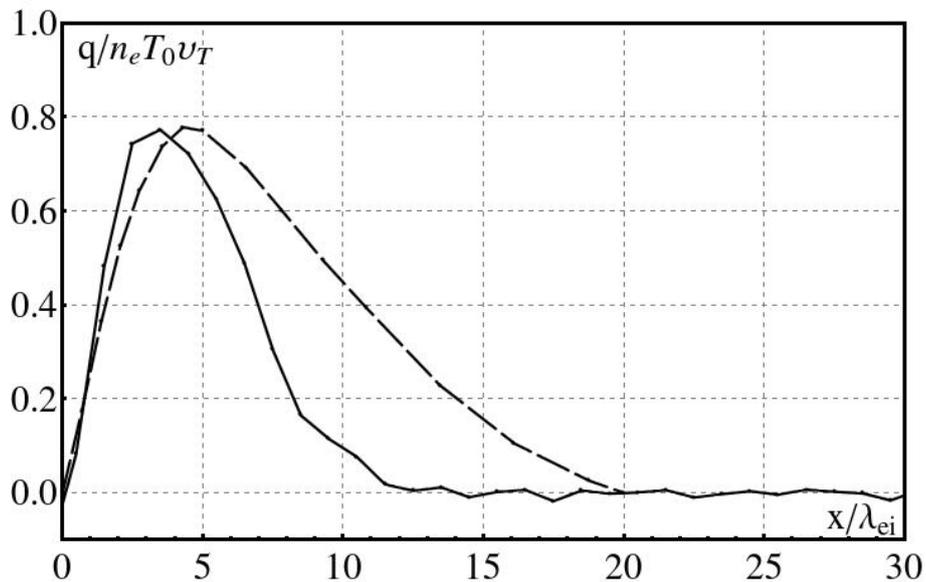


Рис. 9. Профиль теплового потока в момент времени $t\nu_{ei} = 2.655$, полученный в результате численного моделирования с помощью 1D3V кода с параметрами $N_p = 5000$, $K = 1$, $T_1 = 3$, $\delta L = 3\lambda_{ei}$, $L = 300\lambda_{ei}$, $Z = 1$, $N_c = 200$ (сплошная кривая), в сравнении с результатами численного моделирования, приведенного в работе [31] (пунктирная кривая).

в начальный момент времени, N_c - количество ячеек, на которые разбита расчетная область, и Z - заряд ионов. На рис. 8, 9 представлено сравнение профилей теплового потока и температуры, полученных в результате численного моделирования с помощью 1D3V кода (сплошная кривая), с данными численного моделирования, приведенными в работе [31] (пунктирная кривая).

Представленные графики демонстрируют хорошее согласие между результатами численного моделирования, выполненного с помощью разработанного 1D3V кинетического кода, и результатами нелокальной модели переноса, полученными в работе [31], а также данными численного моделирования из работ [31], [32]: отличие в профилях температуры и вблизи максимума профиля теплового потока составляет $\sim 10\%$. В то же время отличия, возникающие на фронте теплового потока (ближе к краям расчетной области), являются существенными, а причины их появления требуют дальнейшего анализа. Тем не менее, результаты моделирования демонстрируют правильное ограничение величины теплового потока за счет последовательного учета интеграла столкновений частиц в плазме, что по сути и является одной из основных целей данного моделирования.

Заключение

Разработан одномерный в геометрическом и трёхмерный в пространстве скоростей 1D3V код для численного решения кинетического уравнения для электронов с учетом кулоновских столкновений. Нелинейный интеграл e - e и e - i соударений рассчитывается с помощью метода прямого дискретного моделирования Монте-Карло, алгоритм которого встроен в метод частиц для одномерного уравнения Власова. Самосогласованное электрическое поле рассчитывается в амбиполярном приближении из условия зарядовой нейтральности на каждом шаге по времени.

С помощью разработанного кинетического кода выполнено моделирование релаксации начального возмущения температуры в столкновительной плазме, которое имеет вид пятна (типа гауссового распределения) в геометрическом пространстве с различной степенью локализации в нём. Приведено сравнение результатов проведенных расчетов с данными, полученными на основе нелокальной нелинейной модели теплового переноса и предыдущими численными результатами, полученными для данной задачи. Сравнения показали хорошее согласие результатов с предыдущими работами по данной задаче. Продемонстрировано правильное ограничение величины теплового потока за счет последовательного учета столкновений частиц в плазме.

Авторы благодарны С.Е. Куратову за полезные обсуждения. И.Ф. П. благодарит финансовую поддержку программы ПФИ ТЗ (3.2) ОМН РАН.

Библиографический список

- [1] Bickerton R.J. Thermalconduction limitation in laser fusion // Nucl. Fusion, 1973, v. 13, p. 457.
- [2] De Groot J.S., Estabrook K.G., Glenzer S.H., Kruer W.L., Matte J.P. Nonlocal electron heat transport in laser driven hohlraums // Bull. Am. Phys. Soc., 1993, v.42, p. 1997.
- [3] Kruer W.L. Electron-energy transport in laser-produced plasmas // Comments Plasma Phys., 1979, v. 5, p. 69.
- [4] Delettrez J. Thermal electron transport in direct-drive laser fusion // Can. J. Phys., 1986, v. 64, p. 932.
- [5] Forslund D.W. Instabilities associated with heat conduction in the solar wind and their consequences // J. Geophys. Res., 1970, v. 17, p. 75.
- [6] Snyder P.B., Hammet G.W., Dorland W. Landau fluid models of collisionless magnetohydrodynamics // Phys. Plasmas, 1997, v. 4, p. 3974.
- [7] Furkal E., Smolyakov A.I., Hirose A. Nonlocal electron kinetics in a weakly ionized plasma // Phys. Rev. E, 1998, v. 58, p. 965.
- [8] Malone R.C., McCrory R.L., Morse R.L. Indication of strongly flux-limited electron thermal conduction in laser- target experiments // Phys. Rev. Lett., 1975, v. 34, p. 721.
- [9] Chang Z., Callen J.D. Unified fluid/kinetic description of plasma microinstabilities. Part I: Basic equation in a sheared slab geometry // Phys. Fluids B, 1992, v. 4, p. 1167.
- [10] Batishchev O.V., Krasheninnikov S.I., Catto P.J., Batishcheva A.A., Sigmar D.J., Xu X.Q., Byers J.A., Rognlien T.D., Cohen R.H., Shoucri M.M., Shkarofskii I.P. Kinetic effects in tokamak scrape-off layer plasmas // Phys. Plasmas, 1997, v. 4, p. 1672.
- [11] Shvarts D., Delettrez J., McCrory R.L., Verdon C.P. Self-consistent reduction of the Spitzer-Harm electron thermal heat flux in steep temperature gradients in laser-produced plasmas // Phys. Rev. Lett., 1981, v. 47, p. 267.
- [12] Gray D.R., Kilkenny J.D. The measurements of ion-acoustic turbulence and reduced thermal conductivity caused by a large temperature gradient in a laser heated plasma // Plasma Physics, 1980, v. 22, p. 81.

- [13] Bell A.R., Evans R.G., Nicholas D.J. Electron energy transport in steep temperature gradients in laser-produced plasmas // *Phys. Rev. Lett.*, 1981, v. 46, p. 263.
- [14] Черчиньяни К. Теория и приложения уравнения Больцмана. - Москва: Мир, 1978, 496 с.
- [15] Ландау Л.Д. Кинетическое уравнение в случае кулоновского взаимодействия // *ЖЭТФ*, 1937, № 7, 203.
- [16] Rosenbluth M.N., MacDonald W.M., Judd D. Fokker-Planck equation for an inverse-square force // *Phys.Rev.*, 1957, v. 107, p. 1.
- [17] Днестровский Ю.Н., Костомаров Д.П. Математическое моделирование плазмы. - М.: Наука, 1982, 338 с.
- [18] Karney C.F.F. Fokker-Planck and quasi linear code // *Computer Physics Reports*, 1986, v. 4, p. 183-244.
- [19] Бобылев А.В. О разложении интеграла столкновений Больцмана в ряд Ландау // *ДАН СССР*, 1975, т. 225, № 3, с. 535-538.
- [20] Бобылев А.В. Приближение Ландау в кинетической теории газов и плазмы // *Препринт ИПМ им. М.В.Келдыша, АН СССР*, 1974, № 76, 49 с.
- [21] Bobylev A.V., Nanbu K. Theory of collision algorithms for gases and plasmas based on the Boltzmann equation and the Landau-Fokker-Planck equation // *Phys. Rev. E.*, 2000, v. 61, p. 4576-4586.
- [22] Бобылев А.В., Карпов С.А., Потапенко И.Ф. Метод Монте-Карло для двухкомпонентной плазмы // *Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша.2012. № 21. 27 с. URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2012-21>*
- [23] Бобылев А.В., Карпов С.А., Потапенко И.Ф. Методы типа Монте-Карло для моделирования кулоновских столкновений в многокомпонентной плазме // *Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2012. № 26. 32 с. URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2012-26>*
- [24] Бобылев А.В., Потапенко И.Ф., Карпов С.А. Метод Монте-Карло для двухкомпонентной плазмы // *Математическое моделирование*, 2012, т. 24, № 9, с. 35-49.
- [25] Bobylev A.V., Potapenko I.F., Karpov S.A. DSMC methods for multicomponent plasmas // *AIP Conference Proceedings*. 2012, v. 1501, p. 541-548.

- [26] Nanbu K. Theory of cumulative small-angle collisions in plasmas // Phys.Rev. E. 1997. Vol. 55. Pp. 4642-4652.
- [27] Detering F., Bychenkov V.Yu., Rozmus W., Sydora R., Capjack C.E. Langevin representation of laser heating in PIC simulations // Computer Physics Communications, 2002, v. 143, p. 48-53.
- [28] Joyce G., Lampe M., Slinker S.P., Manheimer W.M. Electrostatic particle-in-cell simulation technique for quasineutral plasma // J.Comput.Phys., 1997, v. 138, p. 540-562.
- [29] Schurtz G.P., Nicolai Ph.D., Busquet M. A nonlocal electron conduction model for multidimensional radiation hydrodynamics codes // Physics of Plasmas, 2000, v. 7, p. 4238.
- [30] Epperlein E.M., Short R.W. A practical nonlocal model for electron heat transport in laser plasmas // Phys. Fluids B, 1991, v. 3, p. 3092.
- [31] Batishchev O.V., Bychenkov V.Yu., Detering F., Rozmus W., Sydora R., Capjack C.E., Novikov V.N. Heat transport and electron distribution function in laser produced plasmas with hot spots // Phys. Plasmas, 2002, v. 9, p. 2302.
- [32] Brantov A.V., Bychenkov V.Yu., Batishchev O.V., Rozmus W. Nonlocal heat wave propagation due to skin layer plasma heating by short laser pulses // Comp. Phys. Comm., 2004, v. 164, p. 67.