



ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • [Электронная библиотека](#)

[Препринты ИПМ](#) • [Препринт № 89 за 2013 г.](#)



Бахвалов П. А., [Козубская Т.К.](#)

Экономичная формулировка
схем с квазиодномерной
реконструкцией переменных

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Бахвалов П. А., Козубская Т.К. Экономичная формулировка схем с квазиодномерной реконструкцией переменных // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2013. № 89. 16 с. URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2013-89>

**Ордена Ленина
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М. В. Келдыша
Российской академии наук**

Бахвалов П. А., Козубская Т. К.

**Экономичная формулировка схем
с квазиодномерной реконструкцией
переменных**

Москва — 2013

Бахвалов П. А., Козубская Т. К.

Экономичная формулировка схем с квазиодномерной реконструкцией переменных

В работе рассматривается класс схем с квазиодномерной реконструкцией переменных для решения гиперболической системы уравнений на неструктурированных сетках. Приводятся схемы с определением переменных в узлах и схемы с определением переменных на ячейках. Предлагается альтернативная формулировка, позволяющая сократить затраты процессорного времени при сохранении качества счёта. Приводятся результаты экспериментального исследования данной схемы для линеаризованных уравнений Эйлера на различных сетках.

Ключевые слова: схемы повышенной точности, неструктурированные сетки, гиперболические уравнения

Pavel Alexeevich Bakhvalov, Tatiana Konstantinovna Kozubskaya

Efficient formulation for schemes with quasi-one-dimensional reconstruction of variables

In this paper we deal with a class of schemes with quasi-1D reconstruction of variables for solving hyperbolic systems on unstructured meshes. We consider both vertex-centered and cell-centered schemes. We suggest a new formulation which helps to reduce the computational costs while preserving the quality of computations. Also shown are the results of computational experiments for the linearized Euler equations on various meshes.

Key words: high-accuracy schemes, unstructured meshes, hyperbolic equations

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проекты 12-01-00486-а, 12-01-33022.

Оглавление

Введение	4
Консервативная аппроксимация производной	4
Одномерный случай	6
Многомерные равномерные сетки и схемы с одномерной реконструкцией	8
Схемы с квазиодномерной реконструкцией	9
Эффективная реализация квазиодномерного подхода	10
Тестирование	13
Заключение	17

Литература 17

Введение

Построение схем повышенной точности на неструктурированных сетках обычно связывают с реконструкцией функции полиномом. Таковыми являются конечно-объёмные схемы с полиномиальной реконструкцией переменных и схемы типа DG. Недостатком этих схем является их высокая стоимость, особенно при необходимости воспроизведения разрывов.

Альтернативный подход был предложен в работе А. Dervieux и С. Debiez [1]. Их идея заключалась в построении консервативной схемы 2-го порядка на произвольной неструктурированной сетке, которая в случае декартовой сетки вырождалась бы в схему 5-го порядка на основе 6-точечных разностей для дискретизации пространственной производной. Эта методика была применена к 2-мерному уравнению переноса. Обобщение данной методики на нелинейные задачи было впервые описано в 2006 году в работе [2]. Отметим также работу [3], в которой этой схеме была дана более простая интерпретация. В работе [4] был предложен объёмно-центрированный вариант схемы с аналогичными свойствами.

Настоящая работа продолжает исследование класса схем с квазиодномерной реконструкцией переменных, предлагая более простой алгоритм для построения схем данного класса. Схемы, построенные с использованием нового алгоритма, записываются на более узком шаблоне, чем описанные в [2-4], что позволяет снизить вычислительную стоимость расчётов.

Для простоты изложения будем рассматривать только линейные гиперболические системы уравнений с постоянными коэффициентами вида

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \operatorname{div}(\mathbf{A}u) = 0, \quad (1)$$

где u — набор переменных, $\mathbf{A} = (A_x, A_y, A_z)$ — вектор, компонентами которого являются матрицы.

Обобщение на нелинейный случай проводится по аналогии с [2-4]. Также в настоящей работе мы не будем касаться вопросов монотонизации. Будем для простоты считать, что уравнение рассматривается в трёхмерном пространстве, хотя все построения очевидным образом обобщаются на случай произвольной размерности.

Консервативная аппроксимация производной

Рассмотрим вначале случай *определения переменных в центрах сеточных ячеек*. Под центром ячейки будем понимать некоторую точку строго внутри

ячейки. Граница ячейки может быть представлена в виде $\partial C_i = \bigcup_{k \in \Omega_i} \partial C_{ik}$, где Ω_i — множество ячеек, имеющих хотя бы одну общую грань с ячейкой i , ∂C_{ik} — совокупность граней, разделяющих ячейки i и k . Далее ∂C_{ik} будем называть сегментом.

Закон сохранения для уравнения (1) может быть сформулирован в виде

$$\frac{d\bar{u}_i}{dt} = -\frac{1}{|C_i|} \int_{\partial C_i} \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} u ds, \quad (2)$$

где C_i — ячейка i , $|C_i|$ — её объём, ∂C_i — её граница, $\mathbf{n} = (n_x, n_y, n_z)$ — внешняя единичная нормаль к границе, а \bar{u}_i — среднее значение функции по ячейке C_i .

Будем аппроксимировать закон сохранения (2) следующим образом:

$$\frac{du_i}{dt} = -\frac{1}{|C_i|} \sum_{k \in \Omega_i} [(\mathbf{A} \cdot \mathbf{n}_{ik})^+ u_{ik}^L + (\mathbf{A} \cdot \mathbf{n}_{ik})^- u_{ik}^R], \quad (3)$$

где $\mathbf{n}_{ik} = \int_{\partial C_{ik}} \mathbf{n} ds$ — сумма ориентированных внешним к ячейке i образом площадей граней, входящих в ∂C_{ik} , u_{ik}^L и u_{ik}^R — значения сеточных функций, некоторым образом аппроксимированных на сегменте (с разных его сторон). Выражения $(\mathbf{A} \cdot \mathbf{n}_{ik})^\pm$ определяются по формулам $(\mathbf{A} \cdot \mathbf{n}_{ik})^\pm = \mathbf{S} \frac{\Lambda^\pm |\Lambda|}{2} \mathbf{S}^{-1}$, где \mathbf{S} , \mathbf{S}^{-1} и Λ — матрицы правых, левых собственных векторов и диагональная матрица собственных значений соответственно. Таким образом, решение сводится к системе обыкновенных дифференциальных уравнений, которое может решаться, например, методом Рунге-Кутты.

Описание конкретной схемы, следовательно, сводится к описанию алгоритма вычисления u_{ik}^L и u_{ik}^R . Будем вычислять их как линейные комбинации значений сеточных функций по некоторым наборам ячеек

$$u_{ik}^L = \sum_{j \in T_{ik}^L} \alpha_{ik,j}^L u^j, \quad u_{ik}^R = \sum_{j \in T_{ik}^R} \alpha_{ik,j}^R u^j. \quad (4)$$

Вычисление этой линейной комбинации, следуя [3-4], будем называть реконструкцией, а наборы ячеек T_{ik}^L и T_{ik}^R — шаблонами реконструкции.

Отметим, что аппроксимация u_{ik}^L и u_{ik}^R должна выбираться таким образом, чтобы компенсировать ошибку, вызванную заменой интегрального среднего \bar{u}_i на значение сеточной функции u_i , интерпретируемое как точечное значение.

В случае если значения сеточных переменных определяются в узлах сетки, построение консервативных схем требует разбиения расчётной области на контрольные объёмы, используемые для дискретизации законов сохранения. Различные способы построения контрольных объёмов, которые используются в настоящей работе, описываются, например, в [6]. Чтобы дальнейшее описание можно было вести одновременно для вершинно- и объёмно-центрированных схем (то есть для схем с определением переменных в узлах и на элементах сетки соответственно), контрольные объёмы далее будем называть ячейками сетки, а узлы исходной сетки — центрами соответствующих ячеек.

Одномерный случай

Общая запись схемы (3) в одномерном случае примет вид

$$\frac{du_i}{dt} = -\frac{1}{|C_i|} \left((A^+ u_{i+1/2}^L + A^- u_{i+1/2}^R) - (A^+ u_{i-1/2}^L + A^- u_{i-1/2}^R) \right). \quad (5)$$

Далее будем рассматривать только определение величин u_{ik}^L , величины u_{ik}^R определяются аналогичным образом.

В одномерном случае центры сеточных ячеек можно занумеровать последовательными индексами и при рассмотрении сегментов ik полагать $k \equiv i+1$. Для реконструкции будем использовать $(2M+1)$ -точечный шаблон $T_{ik}^L = \{i-M, \dots, i+M\}$, $M \geq 0$. Для удобства введём обозначение $u_{ik}^{(m)} \equiv u_{i+m}$.

На равномерной сетке коэффициенты реконструкции можно определить исходя из точности вычисления производной по схеме (5) на полиномах до $(2M+1)$ -го порядка включительно. При этом реконструкция для различных значений M примет следующий вид:

$$\begin{aligned} u_{ik}^L &= \sum_{j=-M..M} \alpha_M^j u_{ik}^{(j)}, \\ \alpha_0^0 &= 1, \\ \alpha_1^{-1} &= -\frac{1}{6}, \alpha_1^0 = \frac{5}{6}, \alpha_1^1 = \frac{1}{3}, \\ \alpha_2^{-2} &= \frac{1}{30}, \alpha_2^{-1} = -\frac{13}{60}, \alpha_2^0 = \frac{47}{60}, \alpha_2^1 = \frac{9}{20}, \alpha_2^2 = -\frac{1}{20} \end{aligned} \quad (6)$$

На неравномерной сетке конечно-разностная схема, записанная исходя из точности на полиномах до 5го порядка включительно, не является консервативной. Использование же формул (5), (6) напрямую может привести к существенной потере точности. Опишем подход для построения схемы на неравномерной сетке, который использовался при построении EBR схем в [1-3] на примере схемы с $M = 2$.

Преобразуем выражение для реконструированных значений на равномерной сетке (5) к следующему виду:

$$u_{ik}^L = u_i + \frac{h}{2} \left(-\frac{1}{15} \frac{u_{ik}^{(-1)} - u_{ik}^{(-2)}}{h} + \frac{11}{30} \frac{u_i - u_{ik}^{(-1)}}{h} + \frac{4}{5} \frac{u_{ik}^{(1)} - u_i}{h} - \frac{1}{10} \frac{u_{ik}^{(2)} - u_{ik}^{(1)}}{h} \right). \quad (7)$$

Теперь, переходя на неравномерную сетку, оставим без изменения входящие в эту формулу численные коэффициенты. Шаг сетки h же заменим на реальные шаги, имеющиеся в сетке. Так, выражения вида $(u_{ik}^{(m+1)} - u_{ik}^{(m)})/h$ заменим на разделённую разность $(u_{ik}^{(m+1)} - u_{ik}^{(m)})/(x_{ik}^{(m+1)} - x_{ik}^{(m)})$, где $x_{ik}^{(m)} = x_{i+m}$ — координата центра сеточной ячейки. Каждая из разделённых разностей аппроксимирует производную $\partial u / \partial x$ на сегменте ik с первым порядком. В силу того, что сумма коэффициентов, стоящих перед дробями, равна 1, вся скобка также аппроксимирует $\partial u / \partial x$ с первым порядком.

Множитель $h/2$, стоящий перед скобкой, заменяется на разность $x_{ik} - x_i$, где x_{ik} — координата сегмента. Таким образом, реконструированное значение u_{ik} точно на линейной функции. Это, в свою очередь, обеспечивает точность вычисления производной от линейной функции по формулам (5), (7) на произвольной неравномерной сетке.

Окончательное выражение для одномерной схемы на неравномерной сетке, полученной из (6) методом замороженных коэффициентов, будет иметь вид

$$u_{ik} = u_i + (x_{ik} - x_i) \left(-\frac{1}{15} \frac{u_{ik}^{(-1)} - u_{ik}^{(-2)}}{x_{ik}^{(-1)} - x_{ik}^{(-2)}} + \frac{11}{30} \frac{u_i - u_{ik}^{(-1)}}{x_i - x_{ik}^{(-1)}} + \frac{4}{5} \frac{u_{ik}^{(1)} - u_i}{x_{ik}^{(1)} - x_i} - \frac{1}{10} \frac{u_{ik}^{(2)} - u_{ik}^{(1)}}{x_{ik}^{(2)} - x_{ik}^{(1)}} \right). \quad (8)$$

Аналогичная форма для 3-точечной схемы имеет вид

$$u_{ik} = u_i + (x_{ik} - x_i) \left(\frac{1}{3} \frac{u_i - u_{ik}^{(-1)}}{x_i - x_{ik}^{(-1)}} + \frac{2}{3} \frac{u_{ik}^{(1)} - u_i}{x_{ik}^{(1)} - x_i} \right). \quad (9)$$

На равномерной сетке формулы (8) и (9) вырождаются в схему высокого порядка (6). Альтернативный подход для построения консервативной схемы,

точной на линейной функции и имеющей произвольный высокий порядок на равномерной сетке, приведён в [4]:

$$u_{ik} = -\frac{1}{45} \left(\frac{x_{ik} - x_{ik}^{(-2)}}{x_{ik}^{(-1)} - x_{ik}^{(-2)}} u_{ik}^{(-1)} + \frac{x_{ik}^{(-1)} - x_{ik}}{x_{ik}^{(-1)} - x_{ik}^{(-2)}} u_{ik}^{(-2)} \right) + \frac{29}{90} \left(\frac{x_{ik} - x_{ik}^{(-1)}}{x_i - x_{ik}^{(-1)}} u_i + \frac{x_i - x_{ik}}{x_i - x_{ik}^{(-1)}} u_{ik}^{(-1)} \right) + \frac{3}{5} \left(\frac{x_{ik} - x_i}{x_{ik}^{(1)} - x_i} u_{ik}^{(1)} + \frac{x_{ik}^{(1)} - x_{ik}}{x_{ik}^{(1)} - x_i} u_i \right) + \frac{1}{10} \left(\frac{x_{ik} - x_{ik}^{(1)}}{x_{ik}^{(2)} - x_{ik}^{(1)}} u_{ik}^{(2)} + \frac{x_{ik}^{(2)} - x_{ik}}{x_{ik}^{(2)} - x_{ik}^{(1)}} u_{ik}^{(1)} \right). \quad (10)$$

Многомерные равномерные сетки и схемы с одномерной реконструкцией

Введём следующее определение. Будем называть сетку **равномерной**, если она переходит в себя при пространственной трансляции на любой вектор, соединяющий центры двух сеточных ячеек. При дополнительном предположении выпуклости ячеек, сетка из одинаковых (то есть совмещаемых пространственной трансляцией) ячеек является равномерной. Будем предполагать, что при указанных трансляциях центры ячеек также переходят в центры ячеек.

Для вершинно-центрированных схем с точки зрения точности важна одинаковость не элементов исходной сетки, а контрольных объёмов. Сетка из контрольных объёмов оказывается равномерной, если выполняется два условия:

- 1) исходная сетка **трансляционно-симметрическая**, то есть инвариантна относительно трансляции на вектор любого её ребра;
- 2) процедура построения контрольных объёмов однородна по пространству.

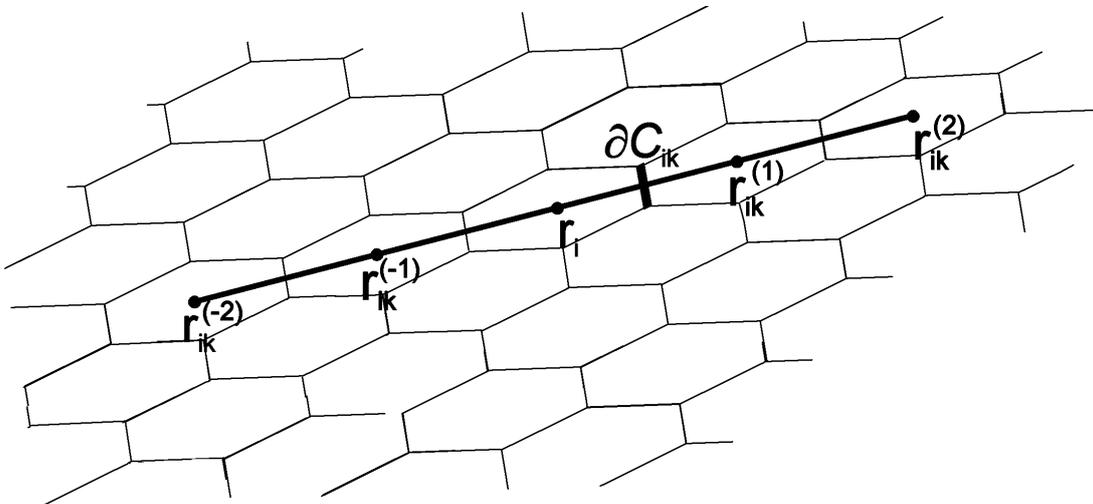


Рис. 1. 5-точечный шаблон для одномерной реконструкции

Равномерная сетка обладает двумя важными свойствами:

- 1) центры её ячеек лежат на семействе параллельных прямых на равном расстоянии друг от друга;
- 2) граница сеточной ячейки состоит из пар противоположащих сегментов.

Поэтому для определения значения u_{ik}^L в (3) можно использовать одномерную реконструкцию по этой прямой на $(2M+1)$ -точечном шаблоне. 5-точечный шаблон (случай $M=2$) изображён на рис. 1 и состоит из точек $S_{ik}^{1D} = \{\mathbf{r}_{ik}^{(-2)}, \mathbf{r}_{ik}^{(-1)}, \mathbf{r}_{ik}^{(0)} \equiv \mathbf{r}_i, \mathbf{r}_{ik}^{(1)}, \mathbf{r}_{ik}^{(2)}\}$. Формулы для вычисления значений u_{ik}^L для разных M наследуются из одномерного случая и имеют вид (6). В работах [3, 4] было показано, что такая схема обладает $(2M+1)$ -ым порядком аппроксимации.

Схемы с квазиодномерной реконструкцией

Теперь, когда определена реконструкция на неравномерной одномерной сетке, можно определить квазиодномерную реконструкцию для определения значений u_{ik}^L на неструктурированной сетке. Если не оговорено противное, будем считать, что $M=2$, то есть порядок схемы на равномерной сетке равен 5.

Под схемой с **квазиодномерной реконструкцией** для линейных задач будем понимать такую схему на неструктурированной сетке, которая построена с использованием метода линий, имеет консервативный вид (3), (4) и на равномерной сетке вырождается в описанную выше схему с одномерной реконструкцией, причём это вырождение происходит непрерывным образом.

Итак, будем строить консервативную аппроксимацию производной вида (3), (4). Рассмотрим вначале *вершинно-центрированный* случай. В работах [1, 3] предлагался следующий способ построения квазиодномерной реконструкции для определения u_{ik}^L .

1. Через узлы \mathbf{r}_i и \mathbf{r}_k проводится прямая, которую будем называть *прямой реконструкции*. Повышение точности схемы будет проводиться за счёт учёта производной функции по направлению этой прямой.
2. Разделённые разности $(u_{ik}^{(m+1)} - u_{ik}^{(m)}) / (x_{ik}^{(m+1)} - x_{ik}^{(m)})$ в (8) или (9) при $m \neq 0$ формально заменяются градиентами, определёнными на тетраэдрах, так, чтобы на трансляционно-симметрической сетке они вырождались обратно в разделённые разности (подробнее см. в [3]).
3. Интерфейсная точка, в которой значение u_{ik}^L аппроксимируется с первым порядком, лежит в середине ребра ik , то есть $(x_{ik} - x_i)$ полагается равным $|\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_i|/2$.

Такой подход обеспечивает точность на линейной функции только при использовании барицентрических контрольных объёмов (доказательство этого факта см. в [6]).

Другой подход был предложен в [4] для объёмно-центрированного случая, хотя также применим и для вершинно-центрированного.

1. Прямая реконструкции для определения u_{ik}^L проводится через центр ячейки \mathbf{r}_i и центр масс сегмента ∂C_{ik} , который обозначим за \mathbf{r}_{ik} . Таким образом, для определения u_{ik}^L и u_{ik}^R проводятся две, вообще говоря, не совпадающие друг с другом прямые.
2. Значения $u_{ik}^{(m)}$ вычисляются линейной интерполяцией в точки $\mathbf{r}_{ik}^{(m)}$, лежащие на прямой реконструкции. При этом $u_{ik}^{(0)} \equiv u_i$. $x_{ik}^{(m)}$ и x_{ik} определяются как координаты $\mathbf{r}_{ik}^{(m)}$ и \mathbf{r}_{ik} на этой прямой (выбор начала отсчёта несущественен). Подробнее см. в [4].
3. Искомая величина u_{ik}^L вычисляется по формулам (8), (9) или (10) относительно $u_{ik}^{(m)}$.

Такой подход обеспечивает точность на линейной функции на ячейках произвольной формы, однако является более затратным, так как использует разные прямые реконструкции для определения u_{ik}^L и u_{ik}^R .

Эффективная реализация квазиодномерного подхода

Недостатком объёмно-центрированной схемы, предложенной в [4], является то, что для нахождения значений $u_{ik}^{(-2)}$ и $u_{ik}^{(2)}$ используются значения на 9 ячейках, хотя для линейной интерполяции должно быть достаточно значений на 3 ячейках. Это же замечание относится и к вершинно-центрированной схеме, опубликованной в [3]. Этот факт даёт повод задуматься о возможности сокращения шаблона без ущерба для качества счёта.

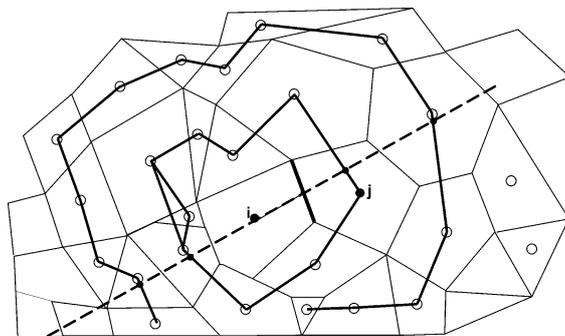


Рис. 2. Наборы отрезков, соединяющих центры ячеек из классов Ω_1 и Ω_2 и проверяемых на пересечение с лучом реконструкции

Ниже приведём алгоритм линейной интерполяции для определения $u_{ik}^{(m)}$ и $\mathbf{r}_{ik}^{(m)}$, исправляющий этот недостаток. Этот алгоритм употребим как в случае одной прямой реконструкции для определения значений u_{ik}^L и u_{ik}^R , так и в случае двух разных прямых.

Пусть требуется определить значение $u_{ik}^{(m)}$, $m < 0$. Разобьём все ячейки на классы соседства $\{\Omega_p, p \geq 0\}$ следующим образом. Положим $\Omega_0 = \{i\}$. Положим Ω_p состоящим из всех ячеек, имеющих общую грань хотя бы с одной ячейкой из Ω_{p-1} , и не входящих ни в один из предыдущих классов. Далее, составим всевозможные тройки (2D — пары) ячеек из класса $\Omega_{|m|}$, попарно имеющие общую грань¹. Каждая из этих троек (пар) определяет треугольник (отрезок) в пространстве, вершинами которого являются центры ячеек, см. рис. 2. В простейшем случае (например, в случае равномерной сетки) такие треугольники образуют замкнутый контур, внутри которого находится центр ячейки i .

Среди всех таких троек определим ту, для которой треугольник пересекает луч реконструкции, выпущенный из \mathbf{r}_i в направлении $\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_{ik}$. Если таких троек оказывается несколько, выберем такую из них, для которой эта точка пересечения лежит дальше всего от \mathbf{r}_i . Эту точку пересечения мы и возьмём в качестве точки одномерного шаблона $\mathbf{r}_{ik}^{(m)}$.

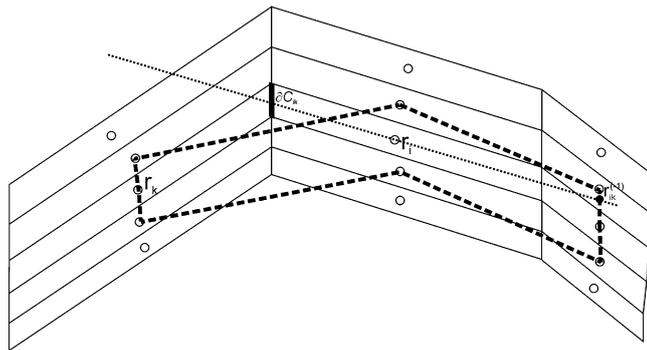


Рис. 3. Пример расчётной сетки, на которой не удаётся определить значения u_{ik}^L по предлагаемой схеме

Если не находится ни одной такой тройки, что характерно для случая приграничных сегментов, значения u_{ik}^L и u_{ik}^R вычисляются по схеме пониженного порядка на меньшем шаблоне. При определении объёмно-

¹ Возможен также другой вариант, когда составляются тройки (пары) ячеек, попарно имеющие общую точку.

центрированной схемы такая ситуация также может возникнуть, например, в пограничном слое вдоль криволинейной поверхности (см. рис. 3). На рис. 3 жирной сплошной линией отмечен сегмент ∂C_{ik} , жирной штриховой линией — пары ячеек из класса Ω_1 , имеющие общую грань. Пунктиром изображена прямая реконструкции. Как видно из рисунка, точка одномерного шаблона $\mathbf{r}_{ik}^{(-1)}$ успешно определяется описанной процедурой, тогда как при попытке определить $\mathbf{r}_{ik}^{(1)}$ выясняется, что все отрезки, соединяющие смежные ячейки из Ω_1 , пересекают её по одну сторону от центра масс сегмента \mathbf{r}_{ik} . Определение $u_{ik}^{(m)}$, $m > 0$ отличается тем, что искомым треугольник должен пересекать луч реконструкции, выпущенный из \mathbf{r}_{ik} в направлении $\mathbf{r}_{ik} - \mathbf{r}_i$. Если используется одна прямая реконструкции, следует учитывать, что $u_{ik}^{(1)}$ определяется просто как значение сеточной функции на ячейке k .

Процедура определения значения u_{ik}^L проиллюстрирована на рис. 4 и рис. 5. Отметим, что при $M = 1$ (порядок схемы на равномерной сетке равен 3) этот

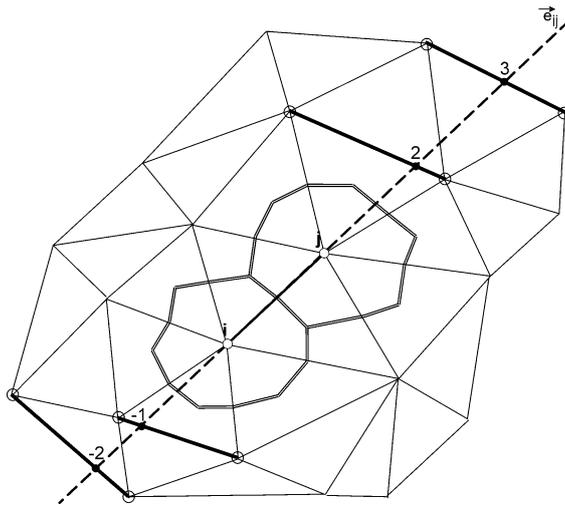


Рис. 4. Экономичный шаблон реконструкции в вершинно-центрированной схеме

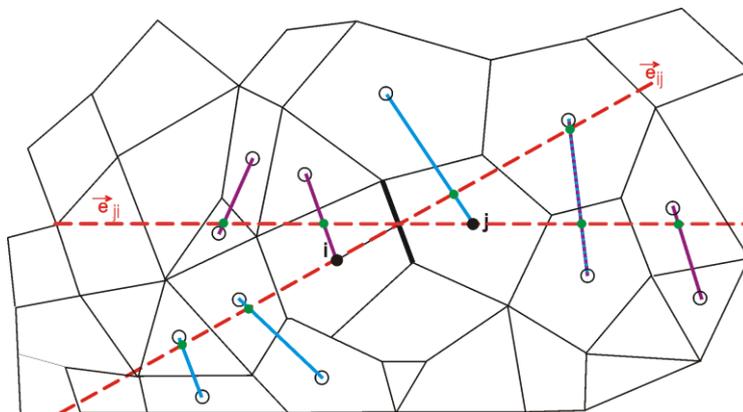


Рис. 5. Экономичный шаблон реконструкции в объёмно-центрированной схеме

алгоритм в вершинно-центрированном случае даёт тот же результат, что и опубликованный в [3]. В случае же $M \geq 2$ новый алгоритм позволяет добиться той же точности при использовании более узкого шаблона.

Таблица 1

Ширина шаблона реконструкции

Процедура реконструкции	Количество прямых реконструкции	Количество точек шаблона	
		2D	3D
Существовавшая ранее [1, 3, 4]	1	до 14	до 26
	2	до 26	до 50
Экономичная	1	10	14
	2	до 18	до 26

Количество ячеек, входящих в шаблон для определения пары значений u_{ik}^L и u_{ik}^R на сегменте при $M=2$, приведено в таблице 1. Из таблицы видно, что количество ячеек в предлагаемом экономичном шаблоне реконструкции в трёхмерном случае сокращается примерно в 2 раза. Как показывает практика, вычисление значений u_{ik}^L и u_{ik}^R при использовании явной схемы интегрирования по времени занимает около половины времени счета. Таким образом, предлагаемая модификация позволяет сделать расчёт до 25% быстрее.

Тестирование

В качестве тестовой задачи рассмотрим начальную задачу о распаде гауссового импульса для линеаризованных уравнений Эйлера:

$$\rho(x, y)|_{t=0} = p(x, y)|_{t=0} = \exp\left(-\frac{\ln 2}{b^2}(x^2 + y^2)\right), \quad u(x, y)|_{t=0} = v(x, y)|_{t=0} = 0$$

Фоновое поле полагается однородным и равным $\bar{\rho}=1$, $\bar{u}=\bar{v}=0$, $\bar{p}=1/\gamma$. Полуширина гауссиана задаётся равной $b=6$. Расчёт проводился на сетках, представленных на рис. 6. Слева приведена исходная треугольная сетка, в центре — ортоцентрические и справа — барицентрические огрублённые контрольные объёмы, построенные по этой треугольной сетке. Период сетки равнялся 2 для грубой сетки и 1 для мелкой. В таблицах 2-4 приведены ошибки относительно точного решения на момент времени $T_{max}=20$ в максимальной и интегральной нормах и посчитанные по ним численные порядки точности. Всюду использовались схемы с $M=2$ (т. е. имеющие 5-й порядок на равномерной сетке).

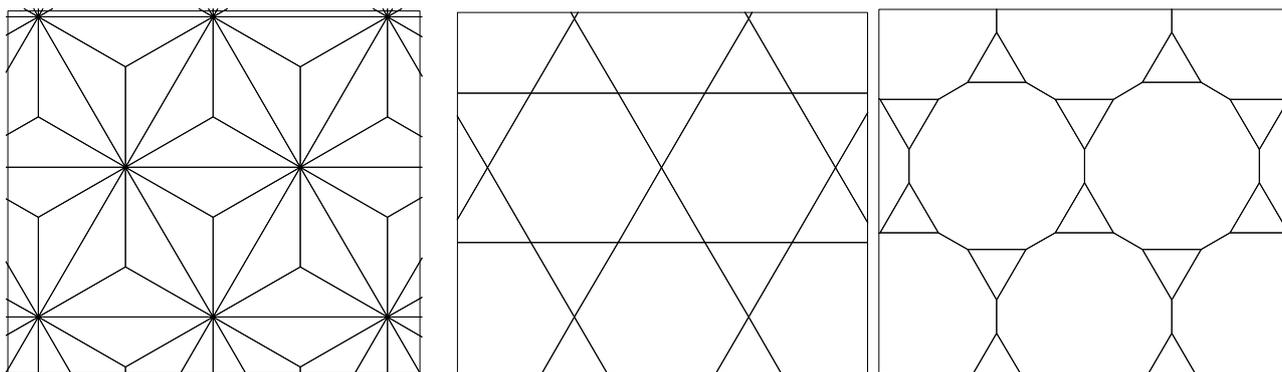


Рис. 6. Сетки странной структуры, используемые в тестовых расчётах

Таблица 2

**Ошибка аппроксимации и численный порядок точности
для объёмно-центрированной схемы**

Процедура реконструкции	C	L ₁
Исходная [4]	7.79×10^{-3}	1.53×10^{-4}
	1.27×10^{-3}	3.32×10^{-5}
	2.62	2.20
Экономичная	3.34×10^{-3}	1.02×10^{-4}
	7.17×10^{-4}	2.21×10^{-5}
	2.22	2.21

Таблица 3

**Ошибка аппроксимации и численный порядок точности
для вершинно-центрированной схемы**

Процедура реконструкции	C	L ₁
На основе узловых градиентов ([1, 2])	5.71×10^{-3}	9.14×10^{-5}
	1.47×10^{-3}	2.51×10^{-5}
	1.96	1.84
На основе производных по треугольникам ([1, 3])	6.56×10^{-3}	1.00×10^{-4}
	1.71×10^{-3}	2.57×10^{-5}
	1.94	1.96
Экономичная	8.28×10^{-3}	2.00×10^{-4}
	2.17×10^{-3}	5.09×10^{-5}
	1.93	1.97

Вначале сравним результаты расчётов, проведённые по схеме, опубликованной в [4] и по её экономичной модификации. В обоих случаях учёт неравномерности проводился с использованием формулы (10). Расчёты проводились на сетке, изображённой на рис. 6 в центре. Результаты, приведённые в таблице 2, показывают, что использование экономичной модификации схемы позволяет, помимо выигрыша во времени, незначительно улучшить качество счёта. Следует отметить, что данные численного исследования объёмно-центрированных схем, приведённые в [4], являются ошибочными.

Проведём аналогичное сравнение для вершинно-центрированных схем. Будем использовать сетку, изображённую на рис. 6 слева, и ортоцентрический способ построения контрольных объёмов. Учёт неравномерности будем проводить по формуле (8). Результаты, приведённые в таблице 3, показывают, что использование экономичной модификации схемы приводит к небольшой потере точности, которая компенсируется экономией процессорного времени. Использование других формулировок схемы на неравномерной сетке вместо (8) позволяет незначительно улучшить результат, и этот вопрос требует дополнительного исследования.

Отметим, что на рассматриваемой сетке точность на линейной функции при использовании ортоцентрических контрольных объёмов имеет место, поэтому численный порядок точности оказывается близким к 2.

Таблица 4

Ошибка аппроксимации и численный порядок точности

Определение переменных	Тип контрольных объёмов (сетка)	C	L ₁
в узлах	барицентрические	5.28×10^{-3} 1.37×10^{-3} 2.00	6.72×10^{-5} 1.79×10^{-5} 1.90
в узлах	ортоцентрические	5.71×10^{-3} 1.47×10^{-3} 1.96	9.14×10^{-5} 2.51×10^{-5} 1.84
в центрах масс ячеек	барицентрические	5.55×10^{-3} 7.25×10^{-4} 2.59	1.54×10^{-4} 1.98×10^{-5} 2.60
в центрах масс ячеек	ортоцентрические	3.34×10^{-3} 7.17×10^{-4} 2.22	1.01×10^{-4} 2.21×10^{-5} 2.20

Теперь проведём сравнение результатов расчёта по объёмно-центрированной схеме, использующей описанную в настоящей работе экономичную процедуру реконструкции, с вершинно-центрированной схемой, представленной в [3]. Расчёты по вершинно-центрированной схеме проводились на сетке, изображённой на рис. 6 слева, по объёмно-центрированным схемам — на сетках, изображённых на рис. 6 в центре и справа. Представленные в таблице 4 данные показывают, что в целом все схемы показывают близкий результат.

Чтобы продемонстрировать важность точности схемы на линейной функции, рассмотрим задачу о распространении плоской волны на неструктурированной трёхмерной сетке. Положим характерную длину сеточного ребра равной 1. Как и в предыдущем тесте, рассматривались линейризованные уравнения Эйлера. Начальные данные задавались в виде плоской волны с профилем в виде гауссиана:

$$\rho(x, y, z)|_{t=0} = p(x, y, z)|_{t=0} = \exp(-\alpha x^2)$$

$$u(x, y, z)|_{t=0} = v(x, y, z)|_{t=0} = w(x, y, z)|_{t=0} = 0$$

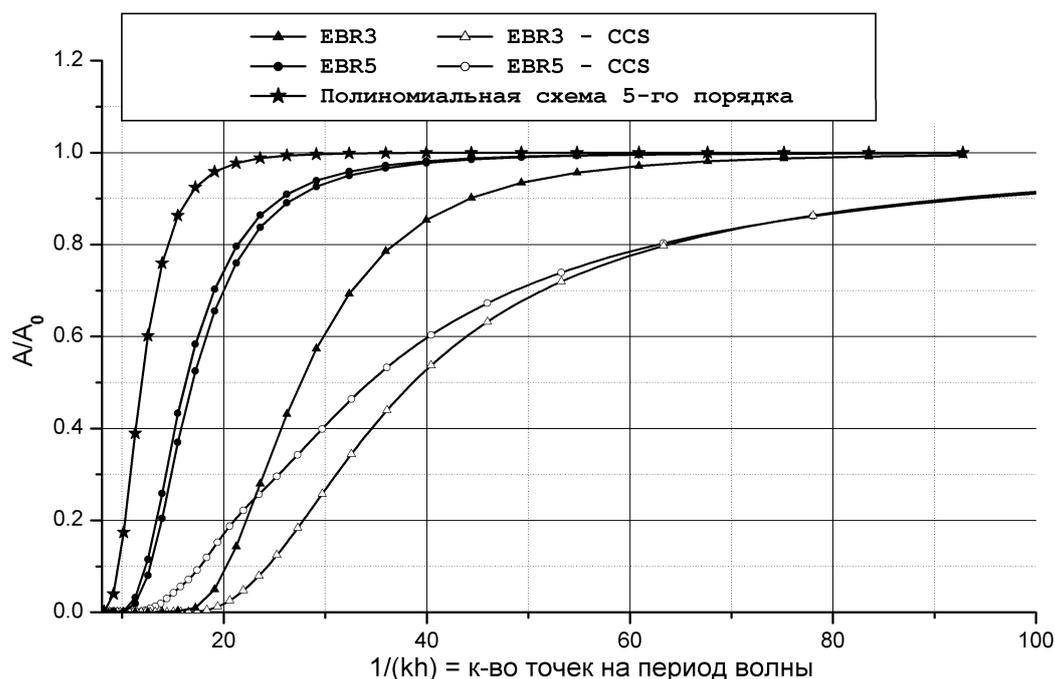


Рис. 7. Убывание амплитуды волны при прохождении через область неструктурированной сетки

На рис. 7 представлены результаты расчёта в спектральном представлении. По горизонтальной оси отложена длина волны, по вертикальной оси — отношение амплитуды волны на этой частоте в точке $x=5000$ к амплитуде в точке $x=0$. $A/A_0=0$ соответствует полному затуханию волны, $A/A_0=1$ — отсутствию амплитудной ошибки.

Звёздочками изображён спектр, полученный в результате расчёта по полиномиальной схеме 5-го порядка аппроксимации. Заполненными кругами и треугольниками — полученный в результате расчёта по схемам EBR5 ($M = 2$) и EBR3 ($M = 1$) соответственно при использовании барицентрических ячеек, а полыми кругами и треугольниками — теми же схемами при использовании ортоцентрических (CCS) ячеек. Из рисунка видно, что схемы на ортоцентрических ячейках дают заметно худший результат, чем на барицентрических. Этот факт объясняется как раз наличием точности на линейной функции схем с квазиодномерной реконструкцией переменных при использовании барицентрических ячеек, тогда как ортоцентрические ячейки такой теоретической точности не обеспечивают.

Графики ранее существовавшей и экономичной формулировок схемы EBR5 в использованном масштабе очень близки друг к другу. Амплитудная ошибка схемы с экономичной формулировкой чуть-чуть больше, чем при использовании ранее существовавшего варианта реконструкции.

Заключение

В работе предложена экономичная реализация квазиодномерного подхода для схем с определением переменных в узлах и схем с определением переменных на ячейках. При сохранении качества счёта новая формулировка позволяет сэкономить до 25% процессорного времени.

Литература

1. Debiez C., Dervieux A. Mixed-element-volume MUSCL methods with weak viscosity for steady and unsteady flow calculations // *Computers and Fluids*. 2000. Vol. 29, no. 1. — P. 89–118.
2. Abalakin I., Dervieux A., Kozubskaya T. High accuracy finite volume method for solving nonlinear aeroacoustics problems on unstructured meshes // *Chinese Journal of Aeronautics*. 2006. Vol. 19. P. 97–104.
3. Kozubskaya T., Abalakin I., Bakhalov P. Edge-based methods in CAA // VKI lecture series. Von Karman Institute for Fluid Dynamics. 2013.
4. Бахвалов П. А. Схема с квазиодномерной реконструкцией переменных на сетках из выпуклых многоугольников для решения задач аэроакустики // *Математическое моделирование*. 2013. Т. 9. С. 95–108. URL: <http://www.mathnet.ru/php/archive.phtml?wshow=paper&jrnid=mm&paperid=3404>
5. A tetrahedral-based superconvergent scheme for aeroacoustics / Gourvitch N. и др. // INRIA Report №5212, May 2004. URL: <http://hal.inria.fr/inria-00070781/en/>
6. Barth T.J. Numerical Aspects of Computing Viscous High Reynolds Number Flows on Unstructured Meshes. *AIAA paper* 91-0721. 1991.