ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 94 за 2013 г.

Брюно А.Д., Горючкина И.В.

Сходимость степенных разложений решений ОДУ

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Брюно А.Д., Горючкина И.В. Сходимость степенных разложений решений ОДУ // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2013. № 94. 16 с. URL: http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2013-94

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
ИМЕНИ М.В. КЕЛДЫША

А. Д. Брюно, И. В. Горючкина

СХОДИМОСТЬ СТЕПЕННЫХ РАЗЛОЖЕНИЙ РЕШЕНИЙ ОДУ

Москва, 2013 г.

УДК 517.91

А. Д. Брюно, И. В. Горючкина. Сходимость степенных разложений решений ОДУ. Препринт института прикладной математики им. М. В. Келдыша РАН, Москва, 2013.

Рассматривается обыкновенное дифференциальное уравнение, содержащее переменные и производные в вещественных степенях, и его формальные решения в виде асимптотических разложений по комплексным степеням независимой переменной с постоянными коэффициентами. Описывается схема доказательства сходимости этих разложений при условии, что порядок производной в ведущем операторе уравнения равен порядку уравнения.

A. D. Bruno, I. V. Goryuchkina. Convergence of power expansions of solutions to an ODE. Preprint of the Keldysh Institute of Applied Mathematics of RAS. Moscow, 2013.

We consider an ordinary differential equation, containing variables and derivatives in real powers, and its formal solutions in form of the asymptotic expansions in complex powers of independent variable with constant coefficients. We describe a way of proof of the convergence these expansions under condition that the order of derivative in the leading operator of the equation is equal to the order of the equation.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 11-01-00023-а).

Электронная библиотека: www.keldysh.ru

§1. Степенные асимптотики решений [1, 2, 3]

1.1. Основные определения и постановка задачи. Пусть x – независимая и y – зависимая переменные, $x, y \in \mathbb{C}$. Положим $X = (x, y)$.

Дифференциальным мономом $a(x, y)$ называется произведение обычного монома

$$c\,x^{r_1}y^{r_2} \stackrel{\text{def}}{=} c\,X^R, \tag{1.1}$$

где $c = \text{const} \in \mathbb{C}$, $r_1 \in \mathbb{C}$, $r_2 \in \mathbb{R}$, $R = (r_1, r_2)$, и конечного числа производных вида

$$d^l y/dx^l, \quad l \in \mathbb{N}. \tag{1.2}$$

Сумма дифференциальных мономов

$$f(X) = \sum a_i(X) \tag{1.3}$$

называется *дифференциальной суммой.*

Пусть задано обыкновенное дифференциальное уравнение

$$f(X) = 0, \tag{1.4}$$

где $f(X)$ – дифференциальная сумма, в которую y входит в целых степенях. Положим

$$\omega = \begin{cases} -1, & \text{если } \ x \to 0, \\ \ \ 1, & \text{если } \ x \to \infty. \end{cases} \tag{1.5}$$

Пусть $x \to 0$ или $x \to \infty$ и решение уравнения (1.4) имеет вид

$$y = c_r x^r + o\left(|x|^{\rho+\varepsilon}\right), \tag{1.6}$$

где коэффициент $c_r = \text{const} \in \mathbb{C}$, $c_r \neq 0$, показатель степени $r = \rho + i\,\sigma$, ρ, σ, $\varepsilon \in \mathbb{R}$ и $\omega\varepsilon < 0$. Тогда выражение

$$y = c_r x^r, \quad c_r \neq 0 \tag{1.7}$$

является *степенной асимптотикой* решения (1.6).

Задача 1. *Для заданного уравнения* (1.4) *с вещественными показателями* r_1 *найти все степенные асимптотики* (1.7) *его решений вида* (1.6) *с комплексными показателями* r.

Для решения задачи 1 степенная геометрия дает теорию и алгоритмы, основанные на выделении укороченных уравнений.

1.2. Выделение укороченных уравнений. Пусть в дифференциальную сумму $f(X)$ переменная x входит только в вещественных степенях. Тогда каждому дифференциальному моному $a(X)$ ставится в соответствие его (векторный) *показатель степени* $Q(a) = (q_1, q_2) \in \mathbb{R}^2$ по следующим правилам. Для монома вида (1.1) имеем $Q(cX^R) = R$, т. е. $Q(cx^{r_1}y^{r_2}) = (r_1,\ r_2)$; для производной (1.2) имеем $Q(d^l y/dx^l) = (-l, 1)$; при умножении дифференциальных мономов их показатели степени складываются, как векторы $Q(a_1 a_2) = Q(a_1) + Q(a_2)$. Множество $\mathbf{S}(f)$ показателей степени $Q(a_i)$ всех дифференциальных мономов $a_i(X)$, входящих в дифференциальную сумму (1.3), называется *носителем суммы* $f(X)$. Очевидно, $\mathbf{S}(f) \in \mathbb{R}^2$. Через $f_Q(X)$ обозначим сумму тех мономов $a_i(X)$ из (1.3), у которых $Q(a_i) = Q$. Тогда дифференциальную сумму (1.3) можно записать в виде $f(X) = \sum f_Q(X)$ по $Q \in \mathbf{S}(f)$. Замыкание выпуклой оболочки $\Gamma(f)$ носителя $\mathbf{S}(f)$ называется *многоугольником суммы* $f(X)$. Граница $\partial\Gamma(f)$ многоугольника $\Gamma(f)$ состоит из вершин $\Gamma_j^{(0)}$ и ребер $\Gamma_j^{(1)}$. Их называют (обобщенными) *гранями* $\Gamma_j^{(d)}$, где верхний индекс указывает размерность грани, а нижний – ее номер. Каждой грани $\Gamma_j^{(d)}$ соответствует *укороченная сумма*

$$\hat{f}_j^{(d)}(X) = \sum a_i(X) \ \text{ по } \ Q(a_i) \in \mathbf{S}(f) \cap \Gamma_j^{(d)}. \tag{1.8}$$

Пусть плоскость $\mathbb{R}_*^2$ сопряжена плоскости $\mathbb{R}^2$ так, что для $P = (p_1, p_2) \in \mathbb{R}_*^2$ и $Q = (q_1, q_2) \in \mathbb{R}^2$ определено скалярное произведение $\langle P, Q \rangle \stackrel{\text{def}}{=} p_1 q_1 + p_2 q_2$. Каждой грани $\Gamma_j^{(d)}$ в плоскости $\mathbb{R}_*^2$ соответствует свой *нормальный конус*

$$\mathbf{U}_j^{(d)} = \left\{ \begin{array}{ll} P: & \langle P, Q \rangle = \langle P, Q' \rangle, \quad Q, Q' \in \mathbf{S}_j^{(d)}, \\ & \langle P, Q \rangle > \langle P, Q'' \rangle, \quad Q'' \in \mathbf{S}(f) \setminus \mathbf{S}_j^{(d)} \end{array} \right\}.$$

Пусть вектор N_j – это внешняя нормаль к ребру $\Gamma_j^{(d)}$. Для ребра $\Gamma_j^{(1)}$ нормальный конус $\mathbf{U}_j^{(1)}$ – это луч, который направлен от ребра $\Gamma_j^{(1)}$ наружу многоугольника $\Gamma(f)$ и натянут на вектор N_j. Для вершины $\Gamma_j^{(0)}$ нормальный конус $\mathbf{U}_j^{(0)}$ – это открытый сектор (угол) на плоскости $\mathbb{R}_*^2$ с вершиной в нуле $P = 0$, ограниченный лучами, являющимися нормальными конусами ребер, примыкающих к вершине $\Gamma_j^{(0)}$.

Итак, каждой грани $\Gamma_j^{(d)}$ соответствуют: нормальный конус $\mathbf{U}_j^{(d)}$ в $\mathbb{R}_*^2$ и укороченное уравнение

$$\hat{f}_j^{(d)}(X) = 0. \tag{1.9}$$

Теорема 1.1. *Если уравнение* (1.4) *имеет решение* (1.6) *и* $\omega(1,\ \rho) \in \mathbf{U}_j^{(d)}$, *то укорочение* (1.7) *решения* (1.6) *является решением укороченного уравнения* (1.8), (1.9).

Поэтому для нахождения всех укороченных решений (1.7) уравнения (1.4) надо вычислить: носитель $\mathbf{S}(f)$, многоугольник $\Gamma(f)$, все его грани $\Gamma_j^{(d)}$, нормальные конусы ребер $\mathbf{U}_j^{(1)}$ и нормальные конусы вершин $\mathbf{U}_j^{(0)}$. Затем для каждого укороченного уравнения (1.8), (1.9) надо найти все его решения (1.7), у которых один из векторов $\pm(1,\ \rho)$ лежит в нормальном конусе $\mathbf{U}_j^{(d)}$. Если $d = 0$, то это означает, что один из векторов $\pm(1, \rho)$ лежит в $\mathbf{U}_j^{(d)}$. Если $d = 1$, то это свойство всегда выполнено.

1.3. Решение укороченного уравнения. Здесь рассмотрим по отдельности два случая: вершины $\Gamma_j^{(0)}$ и ребра $\Gamma_j^{(1)}$. Вершине $\Gamma_j^{(0)} = \{Q\}$ соответствует укороченное уравнение (1.9) с точечным носителем Q и с $d = 0$. Положим $g(X) \stackrel{\text{def}}{=} X^{-Q} \hat{f}_j^{(0)}(X)$, тогда решение (1.7) уравнения (1.9) удовлетворяет уравнению $g(X) = 0$. Подставляя $y = cx^r$ в $g(X)$, получаем, что $g(x, cx^r)$ не зависит от x и c и является многочленом от r, т. е. $g(x, cx^r) \equiv \chi(r)$, где $\chi(r)$ – *характеристический многочлен* дифференциальной суммы $\hat{f}_j^{(0)}(X)$. Следовательно, для решения (1.7) уравнения (1.9) показатель r является корнем характеристического уравнения

$$\chi(r) \stackrel{\text{def}}{=} g(x, x^r) = 0, \tag{1.10}$$

а коэффициент c_r – произвольный. Из корней r_i уравнения (1.10) надо отобрать только те, для которых один из векторов $\omega(1, \rho)$, где $\omega = \pm 1$, лежит в нормальном конусе $\mathbf{U}_j^{(0)}$ вершины $\Gamma_j^{(0)}$. При этом значение ω определяется однозначно. Соответствующие выражения (1.7) с произвольной константой c_r являются кандидатами на роль укороченных решений уравнения (1.4).

Укороченное уравнение (1.9) называется *алгебраическим*, если оно не содержит производных.

Замечание 1.1. Если укороченное уравнение (1.9) с $d = 0$ является алгебраическим, то оно не имеет решений вида (1.7). Поэтому укорочения, состоящие из одного алгебраического монома, можно не рассматривать.

Ребру $\Gamma_j^{(1)}$ соответствует укороченное уравнение (1.9) с $d = 1$, нормальный конус $\mathbf{U}_j^{(1)}$ которого является лучом $\{\lambda N_j,\ \lambda > 0\}$. Включением $\omega(1, \rho) \in \mathbf{U}_j^{(1)}$ однозначно определяются показатель степени ρ укороченного решения (1.7) и значение $\omega = \pm 1$ в (1.5). Возможны 2 вида решений.

Вид 1. $\sigma = 0$. Для определения коэффициента c_r надо выражение (1.7) подставить в укороченное уравнение (1.9). После сокращения на некоторую степень x получаем алгебраическое *определяющее уравнение* для коэффициента c_r

$$\tilde{f}(c_r) \stackrel{\text{def}}{=} x^{-s} \hat{f}_j^{(1)}(x, c_r x^r) = 0. \tag{1.11}$$

Каждому его корню $c_r = c_r^{(i)} \neq 0$ соответствует свое выражение (1.7), которое является кандидатом на роль укороченного решения уравнения (1.4). При этом, согласно (1.5), если в нормальном конусе $\mathbf{U}_j^{(1)}$ координата $p_1 < 0$, то $x \to 0$, а, если $p_1 > 0$, то $x \to \infty$.

Вид 2. Для каждой точки $Q = (q_1, q_2)$ носителя укороченного уравнения (1.9) вычисляется характеристическое уравнение $\chi_Q(\rho + i\,\sigma) = 0$, $Q \in \mathbf{S}(f) \bigcap \Gamma_j^{(1)}$, где ρ фиксировано наклоном ребра $\Gamma_j^{(1)}$. Если все эти уравнения имеют общее решение σ, то получаем семейство укороченных решений (1.7), где $r = \rho + i\,\sigma$, а комплексная постоянная c_r произвольна.

Итак, каждое укороченное уравнение (1.9) имеет несколько подходящих решений (1.7) с $\omega(1,\,\rho) \subset \mathbf{U}_j^{(d)}$. Объединим их в непрерывные по ω, r, c_r и параметрам уравнения (1.4) семейства.

Если нас интересуют не все решения (1.6) уравнения (1.4), а только те, у которых $\omega(1,\,\rho)$ лежит в некотором заданном конусе $\mathcal{K}$, то $\mathcal{K}$ называется *конусом задачи.* Например, для укороченного уравнения (1.9) нормальный конус $\mathbf{U}_j^{(d)}$ является конусом задачи, если нет других ограничений.

1.4. Критические числа укороченного решения. Если найдено укороченное решение (1.7), то замена

$$y = c_r x^r + z \tag{1.12}$$

приводит уравнение (1.4) к виду

$$\tilde{f}(x,z) \stackrel{\text{def}}{=} f(x, c_r x^r + z) = 0, \tag{1.13}$$

где $\tilde{f}(x,z)$ – дифференциальная сумма, все точки $Q = (q_1, q_2)$ ее комплексного носителя $\mathbf{S}(\tilde{f})$ имеют $q_1 \in \mathbb{C}$ и $q_2 \in \mathbb{Z}$, $q_2 \geq 0$. *Вещественным носителем* $\tilde{\mathbf{S}}(\tilde{f})$ будем называть множество точек $\tilde{Q} = (\mathrm{Re} q_1,\ q_2) \in \mathbb{R}^2$. К уравнению (1.13) можно применить описанные выше вычисления (т. е. вещественного носителя, многоугольника, укорочений и т.д.) и получить для решения (1.6) следующий член разложения $c_{k_0} x^{k_0}$, у которого $\mathrm{Re}\, k_0 > \mathrm{Re}\, r$, если $x \to 0$, и $\mathrm{Re}\, k_0 < \mathrm{Re}\, r$, если $x \to \infty$. Следовательно, получилась задача 1 для уравнения (1.13), но теперь с конусом задачи

$$\mathcal{K} = \{k = p_2/p_1 :\ \mathrm{Re}\, k\omega < \mathrm{Re}\, r\omega,\ p_1\omega > 0\}\,. \tag{1.14}$$

Однако во многих случаях дифференциальная сумма $\tilde{f}(x,z)$ имеет специальный вид, что позволяет существенно сократить вычисления разложений решения (1.6). Предположим, что уравнение (1.13) имеет вид

$$\tilde{f}(x,z) \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{L}(x)z + h(x,z) = 0, \tag{1.15}$$

где $\mathcal{L}(x)$ – линейный дифференциальный оператор и носитель $\mathbf{S}(\mathcal{L}z)$ состоит из одной точки $(v,1)$, ее вещественная часть точка $(\operatorname{Re} v,\ 1)$ является вершиной $\tilde{\Gamma}_1^{(0)}$ многоугольника $\Gamma(\tilde{f})$, у всех точек $Q=(q_1,q_2)$ носителя $\mathbf{S}(h)$ координата $q_2\geq 0$ и нет точки Q с $\tilde{Q}=(\operatorname{Re} v,1)$, нормальный конус вершины $\tilde{\Gamma}_1^{(0)}$ содержит вектор $P=(p_1,p_2)$ с $p_1\omega>0$.

По аналогии с известной в функциональном анализе производной Фреше мы введем формальную *производную Фреше* (или *первую вариацию*) $\delta f(x,y)/\delta y$ дифференциальной суммы $f(x,y)$, которая обладает следующими свойствами и определяется ими:

$$\delta(cx^{q_1}y^{q_2})/\delta y = cq_2x^{q_1}y^{q_2-1}, \qquad \delta(d^l y/dx^l)/\delta y = d^l/dx^l,$$

$$\delta(f+g)/\delta y = \delta f/\delta y + \delta g/\delta y, \qquad \delta(fg)/\delta y = (\delta f/\delta y)g + f(\delta g/\delta y).$$

Согласно второму свойству первая вариация – это линейный дифференциальный оператор, т. е. имеет вид

$$\sum_{k=0}^{l} g_k(x,y)\frac{d^k}{dx^k}, \tag{1.16}$$

где $g_k(x,y)$ суть дифференциальные суммы.

Теорема 1.2. *Пусть* (1.7) *– решение укороченного уравнения* (1.9) *с* $\omega(1,\ \rho)\in\mathbf{U}_j^{(d)}$. *Тогда в уравнении* (1.15) *оператор*

$$\mathcal{L}(x)=\frac{\delta\hat{f}_j^{(d)}(x,y)}{\delta y} \quad \textit{на} \quad y=c_r x^r, \tag{1.17}$$

т. е. равен первой вариации, вычисленной на решении (1.7). *При этом* $\mathbf{S}(\mathcal{L}z)=(v,1)$, *где* $v=\langle\ Q_1,(1,r)\ \rangle - r$ *с* $Q_1\in\Gamma_j^{(d)}$.

Следовательно, после подстановки (1.13) уравнение (1.4) принимает вид (1.15), если $\mathcal{L}(x)\not\equiv 0$.

Пусть $\nu(k)$ – характеристический многочлен дифференциальной суммы $\mathcal{L}(x)z$, т. е.

$$\nu(k)=x^{-v-k}\mathcal{L}(x)x^k. \tag{1.18}$$

Если $\nu(k)\not\equiv 0$, то корни $k_1,\ldots,k_s$ многочлена $\nu(k)$ называются *собственными значениями укороченного решения* (1.7). Те из вещественных собственных чисел k_i, которые лежат в конусе задачи, т. е. удовлетворяют неравенствам (1.14), называются *критическими числами*. Они играют важную роль при нахождении разложения решения (1.6).

Замечание 1.2. Степенное решение (1.7) алгебраического укороченного уравнения (1.9) с $d=1$ может быть только вида 1, и оно не имеет собственных значений и критических чисел, ибо для него $\nu(k)\equiv\nu_0=\mathrm{const}=\dfrac{\partial\hat{f}_j^{(1)}}{\partial y}(1,c_r)$.

Если c_r – простой корень уравнения (1.11), то $\nu_0\neq 0$. Если c_r – кратный корень уравнения (1.11), то $\nu_0=0$.

Если $\mathcal{L}(x)\not\equiv 0$, то $\nu(k)\not\equiv 0$. Если же $\mathcal{L}(x)\equiv 0$, то для уравнения (1.13) с учетом конуса задачи (1.14) надо вычислять его решения, как описано в пп. 1.2, 1.3.

§ 2. Степенные и степенно-логарифмические разложения [2, 3]

2.1. Постановка задачи. Если для уравнения (1.15) с $\nu(k)\not\equiv 0$ искать решения в виде степенного ряда

$$z=\sum c_k x^k,\quad \omega\mathrm{Re}\,k<\omega\mathrm{Re}\,r, \tag{2.1}$$

где $c_k=\mathrm{const}\in\mathbb{C}$, то такое *степенное разложение решений* существует только при определенных условиях. При этом основное условие – это отсутствие критических значений. Если же не накладывать этих условий, то получаются разложения вида (2.1), где c_k суть многочлены от $\ln x$.

Рассмотрим уравнение (1.15), т. е.

$$\tilde{f}(x,z)\overset{\text{def}}{=}\mathcal{L}(x)z+h(x,z)=0, \tag{2.2}$$

где $\tilde{f}(x,z)$ – дифференциальная сумма, в которую z входит в целых неотрицательных степенях, а x – в комплексных, $\mathcal{L}(x)$ – линейный дифференциальный оператор.

Задача 2. *Для уравнения* (2.2) *найти все разложения его решений вида*

$$z=\sum\beta_k(\ln x)x^k, \tag{2.3}$$

где β_k суть многочлены от $\ln x$ с комплексными коэффициентами и показатели k или Re k *лежат в конусе задачи* (1.14), *если он есть.*

Разложения (2.3) называются *степенно-логарифмическими.*

2.2. Носитель разложения решения. Для определенности на слагаемые в уравнении (2.2) наложим следующие условия.

Условие 2.1. *Точка* $(\mathrm{Re}\,v,1)$ *является вершиной многоугольника* $\Gamma(\tilde{f})$. *В сумме* $\tilde{f}(x,z)$ *ей соответствует слагаемое* $\mathcal{L}(x)z$ *и только оно.*

Если уравнение (2.2) получено из (1.4) и $\mathcal{L} \not\equiv 0$, то это условие выполняется автоматически. Если это условие выполнено, то дифференциальная сумма $\mathcal{L}(x)z$ имеет характеристический многочлен (1.18) и $\nu(k) \not\equiv 0$.

Параллельно сдвинем носитель $\mathbf{S}(\tilde{f})$ на вектор $(-v, -1)$. Тогда вершина $(v, 1)$, соответствующая члену $\mathcal{L}(x)z$, перейдет в начало координат. Пусть задано такое вещественное число r, что для всякой точки $Q' \in \mathbf{S}' \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{S}(\tilde{f}) - (v, 1)$ скалярное произведение $\operatorname{Re}\langle \omega R, Q' \rangle \leqslant 0$, где $R = (1, r)$.

Пусть $\mathbf{S}'_+$ – множество конечных сумм векторов $Q' \in \mathbf{S}'$. Обозначим $\mathbf{K} = \mathbf{S}'_+ \bigcap \{q_2 = -1\} \subset \mathbb{C}$. Пусть комплексные числа $k_1, \ldots, k_s$ удовлетворяют неравенству $\operatorname{Re} k\omega < \operatorname{Re} r\omega$ из (1.14). Пусть $\mathbf{S}'_+(k_1, \ldots, k_s)$ – множество конечных сумм векторов $Q' \in \mathbf{S}'$ и векторов $(k_1, -1), \ldots, (k_s, -1)$. Обозначим

$$\mathbf{K}(k_1, \ldots, k_s) = \mathbf{S}'_+(k_1, \ldots, k_s) \bigcap \{q_2 = -1\} \subset \mathbb{C}. \tag{2.4}$$

Предложение 2.1. *Множество $\mathbf{K}(k_1, \ldots, k_s)$ не имеет точек накопления в $\mathbb{C}$, если $\tilde{\mathbf{S}}(\tilde{f})$ не имеет точек накопления в $\mathbb{R}^2$.*

Предложение 2.2. *Пусть $\Gamma_j^{(0)}$ – такая вершина многоугольника $\Gamma(f)$ уравнения (1.4), что соответствующее укороченное уравнение (1.9) имеет решение (1.7) с $\omega(1, \rho) \in \bar{\mathbf{U}}_j^{(0)}$ и все точки сдвинутого носителя $\mathbf{S}(f) - \Gamma_j^{(0)}$ представляются в виде $\sum_{i=1}^{m} l_i M_i$, где целые $l_i \geq 0$, а $M_i \in \mathbb{R}^2$ – некоторые векторы. Тогда для множества $\mathbf{K}$ уравнения (2.2) справедливо включение $\mathbf{K} \subset \left\{ k = r + \sum_{i=1}^{m} l_i r_i,\ \text{целые } l_i \geq 0,\ \sum_{i=1}^{m} l_i > 0 \right\}$, где $r_i = -\omega\langle (1, r), M_i \rangle$, $i = 1, \ldots, m$.*

Здесь $\bar{\mathbf{U}}_j^{(0)}$ означает замыкание конуса $\mathbf{U}_j^{(0)}$ и $\operatorname{Re} r_i > 0$.

Предложение 2.3. *Если множество $\mathbf{K} = \left\{ k = r + \sum_{i=1}^{m} l_i r_i,\ \text{целые } l_i \geq 0, \sum_{i=1}^{m} l_i > 0 \right\}$, то множество (2.4) имеет вид*

$$\mathbf{K}(k_1, \ldots, k_s) = \left\{ k = r + \sum_{i=1}^{m} l_i r_i + \sum_{j=1}^{s} m(k_j - r),\ \text{целые } l_i, m_j \geq 0, \right.$$
$$\left. \sum_{i=1}^{m} l_i + \sum_{j=1}^{s} m_j > 0 \right\}. \tag{2.5}$$

2.3. Вычисление разложений

Теорема 2.1. *Если уравнение* (2.2) *удовлетворяет условию* 2.1, *то оно имеет формальное решение*

$$z = z^*(x) \overset{\text{def}}{=} \sum \beta_k(\ln x)x^k, \quad k \in \mathbf{K}(k_1, \dots, k_s), \tag{2.6}$$

где $\beta_k(\ln x)$ *суть многочлены от* $\ln x$ *и* $k_1, \dots, k_s$ *– критические числа укороченного решения* (1.7).

Множество $\mathbf{K}(k_1, \dots, k_s)$ – это максимально возможный (теоретический) носитель разложения (2.6). Фактический носитель в нем содержится.

Действительно, двигаясь по точкам k множества (2.4) в направлении возрастания $-\omega(k - r)$, для каждого коэффициента β_k из (2.6) получаем линейное уравнение

$$\mathcal{L}(x)\beta_k x^k + \theta_k x^{k+v} = 0, \tag{2.7}$$

где θ_k – многочлен от коэффициентов β_j и их производных с $-\omega\mathrm{Re}\,(j - r) < -\omega\mathrm{Re}\,(k - r)$, т. е. $-\omega\mathrm{Re}\,j < -\omega\mathrm{Re}\,k$. Кроме того, коэффициент θ_k зависит от коэффициентов суммы h в (2.2). На самом деле, θ_k – это коэффициент при x^{k+v} в сумме

$$h\left(x, \sum_{-\omega\mathrm{Re}\,r < -\omega\mathrm{Re}\,j < -\omega\mathrm{Re}\,k} \beta_j x^j\right). \tag{2.8}$$

Пусть утверждение теоремы справедливо для всех β_j с $-\omega\mathrm{Re}\,j < -\omega\mathrm{Re}\,k$. Тогда θ_k является многочленом от $\xi \overset{\text{def}}{=} \ln x$.

Лемма 2.1. *Уравнение* (2.7) *эквивалентно линейному дифференциальному уравнению*

$$\mathcal{N}_k(\xi)\beta_k(\xi) + \theta_k(\xi) \overset{\text{def}}{=} \sum \frac{1}{m!}\nu^{(m)}(k)\beta_k^{(m)}(\xi) + \theta_k(\xi) = 0, \tag{2.9}$$

где $\nu^{(m)}(k) = \left.\dfrac{d^m\nu(q)}{dq^m}\right|_{q=k}, \ \beta_k^{(m)} = \dfrac{d^m\beta_k(\xi)}{d\xi^m}, \ m = 0, 1, 2, \dots$

Пусть $\mu(k)$ – наименьшее значение m, для которого $\nu^{(m)}(k) \neq 0$, и $\lambda(k)$ – степень многочлена $\theta_k(\xi)$; при этом $\lambda(k) = -1$, если $\theta_k \equiv 0$.

Лемма 2.2. *Пусть* $\theta_k(\xi)$ *– многочлен степени* $\lambda(k)$, *тогда уравнение* (2.9) *имеет решение* $\beta_k(\xi)$, *являющееся многочленом степени* $\mu(k) + \lambda(k)$ *и содержащее* $\mu(k)$ *произвольных коэффициентов.*

Замечание 2.1. Зная оператор $\mathcal{L}(x)$ и носитель $\mathbf{K}(k_1, \ldots, k_s)$ разложения (2.6), можно вычислять его коэффициенты прямо по исходному уравнению $f(x, y) = 0$, ибо коэффициент при x^k в сумме (2.8) совпадает с коэффициентом при x^{k+v} в сумме $f\left(x, c_r x^r + \sum\limits_{-\omega \mathrm{Re}\, r < -\omega \mathrm{Re}\, j < -\omega \mathrm{Re}\, k} \beta_j x^j\right)$. Следовательно, вычислив начальный отрезок разложения $y = c_r x^r + \sum \beta_j x^j$ и подставив его в $f(x, y)$, получаем функцию θ_k в уравнении (2.9). В сложных случаях это уравнение можно решать так, как описано в лемме 2.2.

Говорят, что для критического числа k_i выполнено *условие совместности*, если для $k = k_i$ в уравнении (2.7) $\theta_k \equiv 0$.

Следствие 2.1. *Пусть в уравнении* (2.7) θ_k *– многочлен от* $\ln x$ *степени* $\lambda(k)$.

Если в уравнении (2.7) *число* k *не является критическим и* $\theta_k = \mathrm{const}$, *то уравнение* (2.7) *сводится к уравнению*

$$\nu(k)\beta_k + \theta_k = 0, \tag{2.10}$$

которое имеет решение $\beta_k = -\theta_k/\nu(k)$. *Аналогично, если* θ_k *многочлен от* $\ln x$ *степени* $\lambda(k)$ *и* $\nu(k) \neq 0$, *тогда существует решение уравнения* (2.7), *где* β_k *многочлен от* $\ln x$ *степени* $\lambda(k)$.

Если в уравнении (2.7) *число* k *– некратное критическое число и* $\theta_k = \mathrm{const}$, *то* β_k *ищем в виде* $\beta_k = \alpha_k + \gamma_k \ln x$, *и для него уравнение* (2.7) *принимает вид*

$$\nu'(k)\gamma_k + \theta_k = 0. \tag{2.11}$$

Оно имеет решение $\gamma_k = -\theta_k/\nu'(k)$. *При этом* α_k *– произвольное число. Если* $\theta_k = 0$ *(т. е. выполняется условие совместности), тогда* $\gamma_k = 0$ *и* $\beta_k = \alpha_k$ *– произвольная постоянная. Следовательно, в этом случае логарифмов не возникает.*

Как правило, удается вычислить не все разложение (2.6), а только его начальный отрезок. При этом желательно, чтобы этот отрезок содержал критические значения $k_1, \ldots, k_s$. Тогда он содержит все произвольные постоянные разложения.

Замечание 2.2. В ситуации теоремы 2.1 разложение (2.6) может содержать логарифм $\ln x$ только в двух случаях: а) если в множестве $\mathbf{K}(k_1, \ldots, k_{i-1}, k_i, \ldots, k_s)$ лежит критическое число k_i, для которого не выполнено условие совместности; б) если среди чисел $k_1, \ldots, k_s$ имеется кратное критическое число.

§3. Сходимость степенных разложений

Если для уравнения (2.2) разложение (2.3) сходится для достаточно малых $|x|^{-\omega}$, то этому разложению соответствует решение уравнения (2.2). Максимальный порядок производной в дифференциальной сумме $\tilde{f}(x,z)$ назовем ее *порядком дифференцирования* и обозначим $\pi^*(\tilde{f})$.

Теорема 3.1. *Для дифференциальной суммы $\tilde{f}$ уравнения* (2.2) *степенное разложение его решения* (2.3) *сходится для достаточно малых $|x|^{-\omega} \neq 0$ и $|\arg x| \leqslant \pi$, если $\pi^*(\mathcal{L}z) = \pi^*(\tilde{f}) = n$.*

Очевидно, что $\pi^*(\tilde{f}) = \pi^*(f)$, но, вообще говоря, $\pi^*(\mathcal{L}z) \leqslant \pi^*(\hat{f})$, хотя строгое неравенство здесь имеется только в вырожденных случаях.

Эта теорема была сформулирована в [2] без доказательства. В [3] приведено ее доказательство в случае рациональных показателей степени формального решения, а в [4] – в случае одной нерациональной образующей в множестве этих показателей. Предлагаемое ниже доказательство обобщает доказательство в [4].

Доказательство наметим для случая $x \to 0$, т. е. $\omega = -1$. Сделаем степенное преобразование

$$z = x^r u. \tag{3.1}$$

Тогда критические числа k_i переходят в числа $æ_i = k_i - r$, $i = 1, \dots, s$, и решение (2.1) переходит в решение

$$u = \sum c_k x^{k-r}, \ \operatorname{Re} k > \operatorname{Re} r, \tag{3.2}$$

с носителем

$$\mathbf{K}^*(æ_1, \dots, æ_s) = \left\{ k = \sum_{i=1}^{m} l_i r_i + \sum_{j=1}^{s} m_j æ_j;\ l_i, m_j \geqslant 0, \sum_{i=0}^{m} l_i + \sum_{j=0}^{s} m_j > 0 \right\}. \tag{3.3}$$

Пусть $q_2^{**} = \max q_2$ по $Q = (q_1, q_2) \in \mathbf{S}(f)$ и $\mathcal{S}(q_2^{**}) = \{0, 1, \dots, q_2^{**}\}$ – множество целых неотрицательных чисел $q \leqslant q_2^*$. При преобразовании (3.1) уравнение (2.2) перейдет в уравнение

$$f^*(x,u) \stackrel{\text{def}}{=} \tilde{f}(x, x^r u) \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{L}^*(x)u + h^*(x,u) = 0. \tag{3.4}$$

При этом носитель $\mathbf{S}(f^*) = \{Q^* = (q_1^*, q_2^*)\}$ получается из носителя $\mathbf{S}(\tilde{f}) = \{Q = (q_1, q_2)\}$ линейным преобразованием $q_1^* = q_1 + r q_2$, $q_2^* = q_2$. В частности, точка $(v, 1)$ переходит в точку $(v + r, 1)$. Обозначим $\mathbf{K}^* = \left\{ v + r + \sum\limits_{i=1}^{m} l_i r_i, \right.$ целые $\left. l_i \geqslant 0,\ \sum\limits_{i=0}^{m} l_i > 0 \right\}$.

Лемма 3.1. $\mathbf{S}(f^*) \subset \mathbf{K}^* \times \mathcal{S}(q_2^{**})$, *где* $\times$ *означает прямое произведение.*

Разделим уравнение (3.4) на x^{v+r}, получим уравнение

$$\mathcal{L}^{**}(x)u + h^{**}(x,u) = 0. \tag{3.5}$$

Носитель $\mathbf{S}(\mathcal{L}^{**}u) = (0,1)$, а носитель $\mathbf{S}(h^{**})$ лежит в прямом произведении

$$\mathbf{K}^{**} \times \mathcal{S}(q_2^{**}), \tag{3.6}$$

где

$$\mathbf{K}^{**} = \left\{ k = \sum_{i=1}^{m} l_i r_i, \text{ целые } l_i \geqslant 0, \ \sum_{i=0}^{m} l_i > 0 \right\} \tag{3.7}$$

и $\mathbf{S}(h^{**}) = \{Q = (q_1, q_2)\}$ устроено следующим образом:

а) $q_2 \in \mathbb{Z}$, $q_2 \geqslant 0$;

б) если $q_2 = 0$ или $q_2 = 1$, то $\operatorname{Re} q_1 > 0$;

в) если $q_2 > 1$, то $\operatorname{Re} q_1 \geqslant 0$.

Лемма 3.2. *Если носитель ряда* $u(x)$ *лежит в множестве* (3.3), *то это верно и для ряда* $x^l u^{(l)}(x)$, $l \in \mathbb{N}$.

Множество таких рядов замкнуто также относительно сложения и умножения. Пусть $N \geqslant \max\{\pi^*(f) = n, |æ_1|, \ldots, |æ_s|\}$.

Сделаем замену

$$u = \sum c_k x^{k-v} + w, \ 0 < \operatorname{Re}(k - v) < N. \tag{3.8}$$

Лемма 3.3. *При замене* (3.8) *уравнение* (3.5) *перейдет в уравнение*

$$\mathcal{L}^{**}(x)w + g(x,w) = 0, \tag{3.9}$$

где $\mathbf{S}(g)$ *лежит в прямом произведении*

$$\mathbf{K}^*(æ_1, \ldots, æ_s) \times \mathcal{S}(q_2^{**}) \tag{3.10}$$

(*см.* (3.3)) *и обладает свойствами* а), б), в).

Рассмотрим два ряда:

$$w = \sum c_k x^k, \ c_k \in \mathbb{C}, \operatorname{Re} k > N, \ k \in \mathbb{C}, \tag{3.11}$$

и

$$W = \sum C_k x^k, \ 0 \leqslant C_k \in \mathbb{R} \tag{3.12}$$

с одинаковыми комплексными носителями. Будем говорить, что ряд (3.12) *мажорирует* ряд (3.11), если $|c_k| \leqslant C_k$ для всех k.

Если ряд (3.12) равномерно сходится при $|x| < \epsilon$ и $|\arg x| \leqslant \pi$, то, вообще говоря, ряд (3.11) не обязан равномерно сходиться там же.

Продифференцировав ряд (3.12) n раз, получим ряд

$$W^{(n)} = \sum C_k(k-n+1)\cdot\ldots\cdot(k-1)k\,x^{k-n}. \tag{3.13}$$

Этому ряду поставим в соответствие *ассоциированный ряд*

$$W_a = \sum C_k|(k-n+1)\cdot\ldots\cdot(k-1)k|\,x^{k-n}. \tag{3.14}$$

Если ряд W мажорирует ряд w, то ряд W_a мажорирует n раз продифференцированный ряд (3.11).

Для уравнения (3.9) построим такое уравнение

$$\Delta\, x^n W_a - G_1(x,\, x^n\, W_a) = 0, \;\; 0 < \Delta = \text{const} \in \mathbb{R}, \tag{3.15}$$

где левая часть – это дифференциальная сумма без производных, содержащая x в комплексных степенях, а W_a – в целых, которое имеет формальное решение (3.13), мажорирующее формальную n-ую производную формального решения (3.11) уравнения (3.9).

Для этого запишем уравнение (3.9) в виде

$$\mathcal{L}^{**}(x)w = -g(x,w). \tag{3.16}$$

Напомним, что $\mathcal{L}^{**}(x)x^k = x^k\nu(k)$.

Лемма 3.4. *Существует такое* $\Delta = \text{const} \in \mathbb{R}$, $\Delta > 0$, *что при* $k > N$, $|\nu(k)| > \Delta > 0$. *Это* Δ *и поместим в уравнение* (3.15).

Функцию $G_1(x,\, x^n W_a)$ построим по функции $-g_1$. Для этого сначала в дифференциальной сумме $-g_1$ заменим все коэффициенты на их модули, а затем заменим функцию w и все ее производные $w^{(l)}$ на выражения $x^{n-l}\, W_a$:

$$w^{(l)} \longrightarrow x^{n-l}\, W_a, \; n \geqslant l \geqslant 0. \tag{3.17}$$

Заметим, что если $w = x^\rho$, $\rho \in \mathbb{C}$, где $\operatorname{Re}\rho > n$, $|x| > 0$, то $w^{(l)} = \rho(\rho - 1)\ldots(\rho-l+1)\,x^{\rho-l}$, а $x^{n-l}w^{(n)} = \rho(\rho-1)\ldots(\rho-n+1)\,x^{\rho-l}$, и во втором случае модуль коэффициента не меньше, чем модуль коэффициента в первом случае, а показатели степени совпадают.

Носители рядов (3.13) и (3.14) совпадают. Векторный показатель степени $Q(W^{(n)}) = (-n, 1)$. Положим $Q(W_a) = (-n, 1)$. Тогда комплексные носители сумм $-g_1(x,\, w,\, w',\, \ldots,\, w^{(n)})$ и $G_1(x,\, x^n W_a)$ совпадают и лежат в множестве (3.10).

Подставим ряд (3.11) в уравнение (3.9). Затем упорядочим члены в порядке неубывания вещественных частей показателей степени переменной x и, в случае когда вещественные части равны, в порядке возрастания мнимых частей. Поскольку ряд (3.11) удовлетворяет уравнению (3.9), то, приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x, получаем систему уравнений

$$\nu(k)c_k - b_k = 0, \tag{3.18}$$

где $\operatorname{Re} k > N$, коэффициенты b_k зависят от коэффициентов уравнения (3.9) и от коэффициентов c_l разложения (3.11) с $N < \operatorname{Re} l < \operatorname{Re} k$.

Далее подставим ряд (3.14) в уравнение (3.15). Для коэффициентов C_k этого ряда получаются равенства, аналогичные равенствам (3.19), т. е.

$$\Delta\ |k(k-1)\ldots(k-n+1)|C_k - B_k = 0, \tag{3.19}$$

где коэффициенты B_k зависят от коэффициентов уравнения (3.15) и от предыдущих коэффициентов C_l.

Лемма 3.5. *Если все $C_l \geqslant |c_l|$ для $N < \operatorname{Re} l < \operatorname{Re} k$, то $B_k \geqslant |b_k|$.*

Из лемм 3.4 и 3.5 следует, что $C_k = \dfrac{B_k}{\Delta\ |\,(k(k-1)\ldots(k-n+1))\,|} \geqslant |c_k| = \dfrac{|b_k|}{|\nu(k)|}$. Таким образом, решение (3.14) уравнения (3.15) мажорирует n раз продифференцированный ряд (3.11).

Теперь покажем, что ряд (3.14) сходится. Для этого в уравнении (3.15) положим

$$x^n\, W_a \stackrel{\text{def}}{=} Z \tag{3.20}$$

и запишем его в виде

$$\Delta\ Z - G_1(x,\, Z) = 0. \tag{3.21}$$

При этом носители уравнений (3.9), (3.15) и (3.21) совпадают.

Уравнение (3.21) содержит x в комплексных степенях с неотрицательными вещественными частями, а Z – в целых неотрицательных. Мы хотим перейти от уравнения с двумя переменными и комплексными показателями степени, к уравнению с $m + s + 1$ переменными, но целыми неотрицательными показателями степени. Для этого сделаем в уравнении (3.21) преобразование

$$\xi_i = x^{r_i},\ \ \eta_j = x^{æ_j},\ \ i = 1, \ldots, m,\ \ j = 1, \ldots, s. \tag{3.22}$$

Уравнение (3.15) записывается в виде

$$F^* \stackrel{\mathrm{def}}{=} \Delta Z - G_2(\xi_1, \dots, \xi_m, \eta_1, \dots, \eta_s, Z) = 0, \tag{3.23}$$

куда все переменные входят в целых неотрицательных степенях, т.е. F^* – многочлен от ξ_i, η_j и Z. При

$$\xi_1 = \dots = \xi_m = \eta_1 = \dots = \eta_s = 0 = Z \tag{3.24}$$

производная $\dfrac{\partial F^*}{\partial Z} = \Delta \neq 0$.

По аналитической версии теоремы Коши о неявной функции существует аналитическое вблизи нуля (3.24) решение $Z(\xi_1, \dots, \xi_m, \eta_1, \dots, \eta_s)$, $Z(0, 0) = 0$ уравнения (3.23), т.е. при $|\xi_1|, \dots, |\xi_m|$, $|\eta_1|, \dots, |\eta_s| < \epsilon$.

Согласно (3.22) и тому, что $\mathrm{Re}\, r_i$, $\mathrm{Re}\, æ_j > 0$, эти неравенства выполнены при достаточно малом

$$|x| < \epsilon_1 \text{ и } |\arg x| \leqslant \pi. \tag{3.25}$$

Следовательно, при этих x ряд $u^{(n)}(x)$ равномерно сходится. Поэтому при условиях (3.25) равномерно сходится и ряд $u(x)$. Доказательство окончено.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Брюно А.Д.* Степенная геометрия в алгебраических и дифференциальных уравнениях. М.: Физматлит, 1998.

2. *Брюно А.Д.* Асимптотики и разложения решений обыкновенного дифференциального уравнения // УМН. 2004. Т. 59. №3. С. 31–80.

3. *Брюно А.Д., Горючкина И.В.* Асимптотические разложения решений шестого уравнения Пенлеве // Труды московского математического общества. 2010. Т. 71. С. 6–118.

4. *Горючкина И.В.* О сходимости степенного ряда с нерациональными показателями степени, являющегося формальным решением алгебраического ОДУ // Препринт №65 Института прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН, Москва. 2013. 24 с. `http://www.keldysh.ru/papers/2013/prep2013_65.pdf`