



ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 95 за 2013 г.



Подлазов А.В., Щетинина Д.П.

Модель роста социальной
сети

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Подлазов А.В., Щетинина Д.П. Модель роста социальной сети // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2013. № 95. 16 с. URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2013-95>

**Ордена Ленина
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М.В.Келдыша
Российской академии наук**

А.В. Подлазов, Д.П. Щетинина

Модель роста социальной сети

Москва — 2013

А.В. Подлазов, Д.П. Щетинина

Модель роста социальной сети

В работе предлагается новая модель роста социальной сети, предполагающая случайное присоединение новых вершин, преимущественный выбор вершин для установления связей с уже существующими и ограничение второго конца этих связей соседями соседей.

Данная модель порождает граф, вершины которого распределены по числу связей степенным образом с показателем распределения, варьирующимся в широком диапазоне значений.

Для модели дано среднеполевое квазилинейное описание, позволяющее констатировать существенную кластеризацию вершин с большим числом связей и предложить ряд аппроксимаций компьютерных результатов.

Ключевые слова: малые миры, социальные сети, масштабная инвариантность, степенные распределения, вершинная корреляция, кластеризация, конкурентный рост, преимущественное присоединение

A.V. Podlazov, D.P. Shchetinina

The model of social network growth

We propose a new model of social network growth. This model bases on the following assumptions: the random attachment of new vertices, the preferential choice of vertices for creating links with existing vertices and the restriction of the second ends of these links by the neighbors of the neighbors.

The model generates the graph with power-law distributed vertices degree. The exponent of the distribution varies in a wide range.

We give a mean-field quasi-linear description for the model. This description allows to claim essential customization of high-order vertices and to propose a number of approximations for the results of simulations.

Key words: small-worlds, social networks, scale invariance, power laws, vertex correlation, cauterization, concurrency growth, preferential attachment

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проекты 12-06-00402 и 13-01-00617).

ВВЕДЕНИЕ

Структура социальных связей, возникающих между людьми как при реальном, так и при виртуальном общении, подчиняется особому классу закономерностей [1,2,3]. Социальные сети относятся к так называемым *малым мирам* – графам, обладающим при значительном числе вершин сравнительно небольшим диаметром.

Важнейшей характеристикой вершины в графе связей является ее *валентность*, или *степень*, – число x имеющихся у нее связей (в литературе чаще употребляется второй термин, однако поскольку далее речь идет о степен-

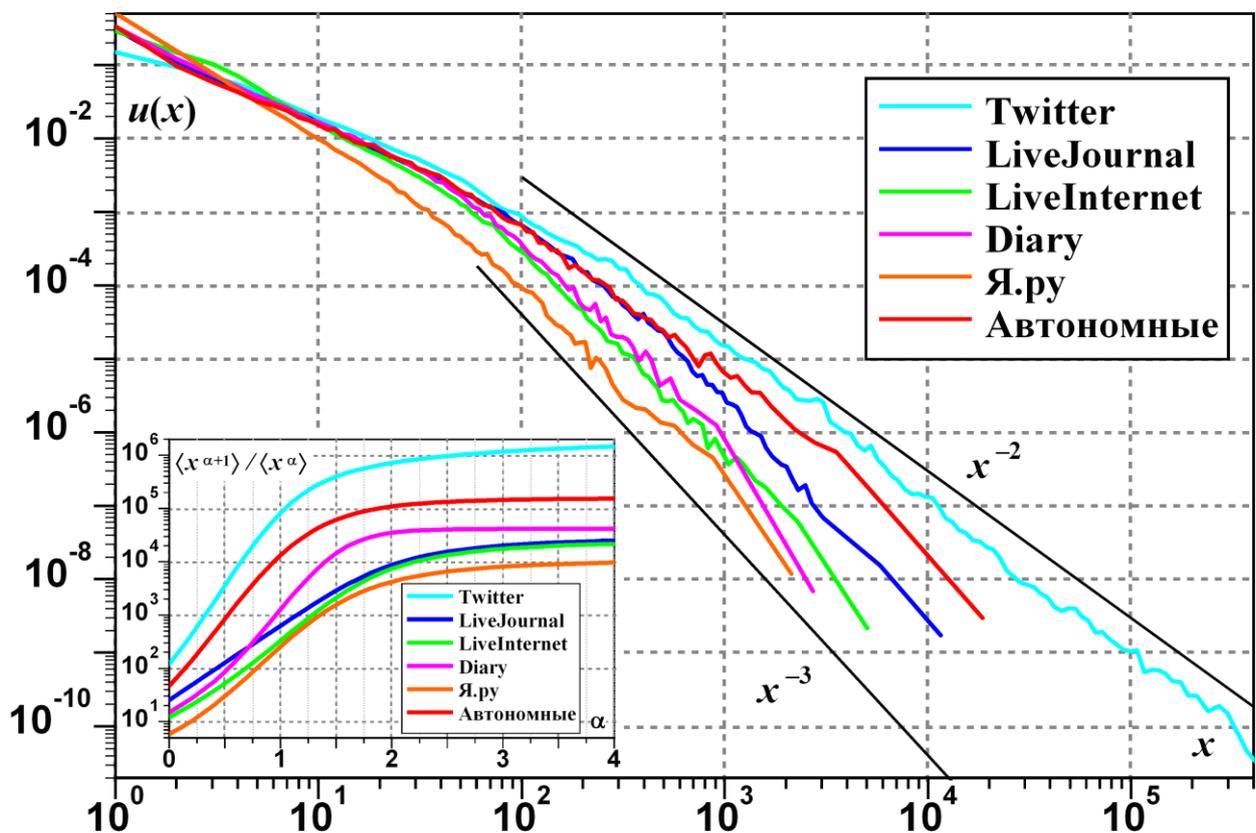


Рис. 1. Распределение блогов на различных площадках по числу читателей

Для достаточно популярных (от нескольких десятков читателей) блогов плотность вероятности имеет степенной вид, представляемый в двойном логарифмическом масштабе прямой линией.

На врезке – отношение последовательных моментов распределения. Переход графиков от возрастания к насыщению соответствует значению абсциссы, совпадающему с показателем распределения, пересечение с осью ординат – средней, а горизонтальная асимптота – максимальной зарегистрированной величине x .

По данным рейтинга блогов рунета Яндекса: <http://blogs.yandex.ru/top/>. В силу особенностей регистрации для некоторых блогов число читателей может быть занижено. Для блогов Я.ру из рассмотрения исключен блог самого Яндекса, превосходящий по числу читателей следующие за ним по популярности блоги на полтора порядка.

ных зависимостях, во избежание путаницы мы будем пользоваться первым). Для малых миров типичны степенные распределения вершин по валентности с плотностью вероятности вида

$$u(x) \sim x^{-(1+\alpha)}. \quad (1)$$

Если для отношений людей в реальном мире непосредственный подсчет связей затруднен, то для интернет-сообществ он не представляет особой трудности. Инструменты создания блогов (сетевых дневников) дают возможность подсчета числа читателей (фолловеров, зафреднивших и т.п.) – пользователей, подписавшихся на блог для получения публикуемой в нем информации и/или проявивших личный интерес к его владельцу.

Рассматривая всё интернет-сообщество, обитающих в нем блогеров и подписки на них, соответственно, как граф, его вершины и связи, можно описать свойства такой сети. На рис. 1 приведены графики плотности распределения блогов по числу читателей для 6 различных сообществ: [Twitter](#), [LiveJournal](#) (Живой журнал), [LiveInternet](#), [Diary](#), [Я.ру](#) и [Автономные блоги](#). Все они имеют степенной участок шириной в 2÷3 порядка, описываемый формулой (1) с показателем α , лежащим в диапазоне от 1 до 2.

Важной особенностью связей вида автор–читатель является их направленный характер, однако, как показал анализ данных по Живому журналу, распределения вершин по числу входящих (читатели), исходящих (читаемые) и взаимных связей обладают примерно одинаковыми статистическими свойствами [4]. Поэтому далее мы для простоты не будем различать направление связей, считая граф социальной сети неориентированным, а интерес пользователей к друг другу – взаимным.

Целью настоящей работы является построение и исследование модели роста социальной сети, воспроизводящей распределение вершин по валентности и опирающейся на реалистичные посылки.

ЛИНЕЙНЫЙ РОСТ

Механизм возникновения распределений вида (1) в растущих системах хорошо известен [5,6]. Он связан с конкуренцией за ресурс, при которой дальнейшее развитие происходит тем быстрее, чем больше уже достигнутые результаты. Применительно к росту социальных сетей это означает, что чем выше валентность, тем быстрее она увеличивается. Это вполне логично, поскольку и при реальном, и при сетевом общении человек в единицу времени знакомится с тем большим числом новых интересных ему людей, чем обширнее его контакты. Ускоряющееся развитие предполагает принципиальную открытость системы, т.е. постоянное присоединение к сети новых вершин.

Будем различать *первичные связи*, образующиеся с присоединяемыми новыми вершинами, от *вторичных*, которые связывают уже существующие вер-

шины. Выбор вершин для образования связи может осуществляться по различным алгоритмам, простейшими из которых являются алгоритмы, использующие только информацию о валентности данной вершины. При этом вероятность образования связи с данной вершиной принимается пропорциональной x^z , поскольку нет оснований полагать наличие каких-либо характерных масштабов для данного процесса, что означает возможность использования только однородных функций x . Наиболее интересны здесь случаи $z=0$ и $z=1$, соответствующие *случайному* и *преимущественному* способам присоединения.

При случайном присоединении вероятность того, что связь будет образована с данной вершиной, не зависит от ее характеристик и равна просто $1/n(t)$, где $n(t)$ – общее число вершин графа в момент времени t . При преимущественном присоединении вероятность образования связи с вершиной i , уже имеющей x_i связей, дается отношением $x_i/S(t)$, где суммарная валентность

$$S(t) = \sum_{i=1}^{n(t)} x_i(t)$$

равна удвоенному числу связей графа в момент времени t .

Пусть на очередном шаге времени к графу добавляются p_0 и p_1 новых вершин, присоединяющихся, соответственно, случайным и преимущественным образом. При этом образуется $p = p_0 + p_1$ новых связей. Таким образом, общее число вершин графа

$$n(t) = pt,$$

если считать, что его рост начинается при $t=0$ с пустого места.

Пусть, кроме того, происходит образование $s = (s_0 + s_1)/2$ вторичных связей так, что в s_0 случаях их концы выбираются случайным образом, а в s_1 случаях – преимущественным. Тогда средняя скорость роста валентности вершины i описывается уравнением

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{p_0 + s_0}{n(t)} x_i + \frac{x_i(p_1 + s_1)}{S(t)}. \quad (2)$$

Система таких уравнений дополняется начальными условиями

$$x_i(t_i) = 1,$$

связывающими номера вершин i в порядке их присоединения к графу с моментами присоединения $t_i = i/p$, когда эти вершины имеют ровно одну, только что образованную, связь.

Суммируя уравнения (2) по всем имеющимся, а также по присоединяемым вершинам, получаем уравнение для роста суммарной валентности

$$\frac{dS}{dt} = (2p_0 + s_0) + (2p_1 + s_1),$$

где двойки, возникшие перед p_0 и p_1 , отвечают вторым концам связей, ведущих к новым вершинам, изменение валентности которых еще не описывалось уравнениями (2).

Интегрируя это уравнение, находим

$$S(t) = 2(p + s) \cdot t.$$

С учетом полученных формул закон роста вершин может быть переписан в виде системы уравнений

$$\frac{dx_i}{dt} = f(x_i, t) = \frac{g(x_i)}{t}, \quad (3)$$

где
$$g(x) = \frac{p_0 + s_0}{p} + \frac{p_1 + s_1}{2(p + s)} x.$$

Пусть распределение вершин по валентности имеет плотность вероятности $u(x, t)$, тогда в момент времени t наличествует всего $N(x, t) = u(x, t) \cdot n(t)$ вершин валентности x . Запишем уравнение неразрывности для поля скоростей $f(x, t)$ из системы (3)

$$\frac{\partial}{\partial x}(fN) + \frac{\partial}{\partial t} N = 0. \quad (4)$$

Предполагая стационарный вид плотности распределения вершин $u(x, t) = u(x)$ и используя известный вид функций $n(t)$ и $f(x, t)$, уравнение (4) можно упростить до вида

$$\frac{\partial}{\partial x} \ln(f(x, t) \cdot u(x)) = -\frac{1}{g(x)},$$

что дает

$$u(x) = \frac{1}{g(x)} e^{-\int \frac{d\xi}{g(\xi)}} \sim g(x)^{-(1+\alpha)},$$

где
$$\alpha = 2 \frac{p + s}{p_1 + s_1}. \quad (5)$$

Поскольку функция $g(x)$ линейна по своему аргументу, при больших x распределение вершин по валентности описывается формулой (1).

МОДЕЛЬ РОСТА СЕТИ

Если единственный процесс – преимущественное присоединение новых вершин, т.е. $p_0 = s_0 = s_1 = 0$, то растущий граф имеет вид дерева, характеризуемого, согласно формуле (5), показателем $\alpha = 2$. Этот случай подробно разбирается в работах [1,2,3].

Однако, как мы видели из рис. 1, эта величина ограничивает сверху диапазон значений показателя, наблюдаемых на практике. Применение к формуле (5) условия $\alpha < 2$ приводит к соотношению на параметры модели $2p_0 + s_0 < s_1$. Таким образом, на показатель распределения принципиальным образом влияет преимущественное присоединение при образовании вторичных, а не первичных связей.

Кроме того, при описании роста социальных сетей предположение о преимущественном первичном присоединении не является реалистичным. Новичок в тот момент, когда он только присоединяется к сети, никоим образом не может оценить валентность ее вершин. В принципе старожилы сети сами могли бы вести охоту за новичками с интенсивностью, пропорциональной своей валентности, однако такой сценарий, возможный при установлении экономических отношений, для социальных представляется неправдоподобным. Поэтому далее разумно положить $p_1 = 0$ и $p_0 > 0$, считая, что первичное присоединение происходит только случайным образом.

После того, как вершина присоединилась к сети и начала жить согласно ее логике, преимущественное присоединение становится не только возможным, но и неизбежным, поскольку сетевая активность вершины тем выше, чем больше у нее связей. Показатель распределения вершин возникающей сети по валентности находится из формулы (5)

$$\alpha = 1 + \frac{2p_0 + s_0}{s_1}.$$

Соотношение параметров s_0 и s_1 определяется алгоритмом, согласно которому находится другой конец образуемой вторичной связи. Если он с вероятностью a выбирается преимущественным образом, а с вероятностью $1-a$ – случайным, то $s_0 = s(1-a)$ и $s_1 = s(1+a)$. Таким образом, $0 \leq s_0 \leq s_1$. В простейшем случае $a=1$ показатель распределения может принимать любое значение, большее 1, в зависимости от соотношения параметров.

Хотя модель, основанная на указанных правилах, уже удовлетворительно описывает реальность, сами правила остаются нереалистичными. В действительности социальные связи не устанавливаются с произвольными участника-

ми. Принцип преимущественного присоединения достаточен для разумной оценки скорости образования связей вершиной данной валентности, но не дает информации о том, с кем должны быть установлены эти связи.

Разумно считать, что вторичные связи устанавливаются только между относительно близкими вершинами. Для блогосферы это связано с просмотром чужой френд-ленты, перепостами, обсуждениями сообщений в блогах общих друзей и другими видами интернет-активности, при которой может произойти знакомство соседей второго уровня. В реальной жизни ситуация аналогична – нового человека в компании представляет присутствующим их с ним общий знакомый. Поэтому в предлагаемой модели предусмотрено связывание только вершин, имеющих общего соседа.

Правила модели таковы. На очередном шаге к графу присоединяются случайным образом p новых вершин, а кроме того, делается s попыток образования вторичных связей по следующему алгоритму. Выбирается вершина с вероятностью, пропорциональной ее валентности, у нее выбирается случайный сосед, у которого тоже выбирается случайный сосед. Если последний еще не связан с

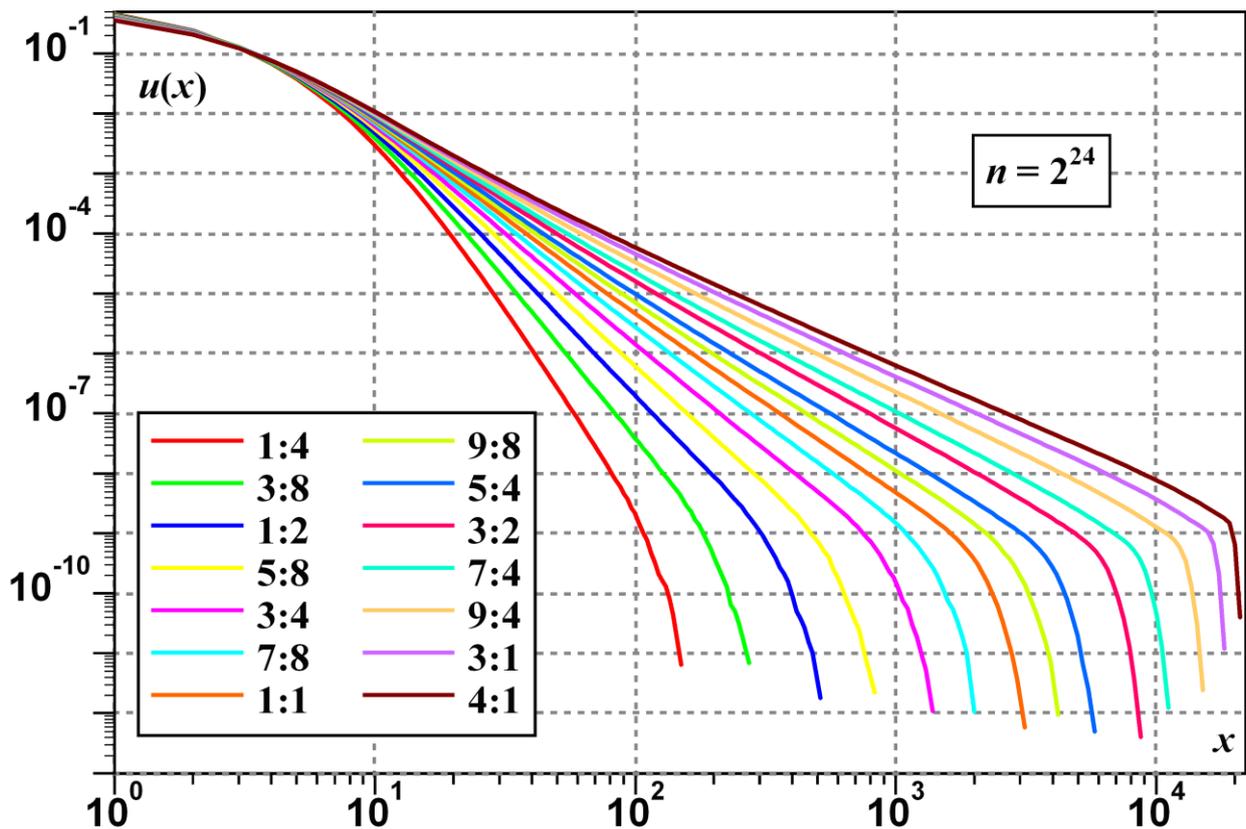


Рис. 2. Распределение вершин по валентности при различных отношениях $s:p$

В двойном логарифмическом масштабе линейные участки графиков соответствуют степенному виду плотности (1).

Показатель распределения α тем больше (график идет круче), чем выше доля первичных среди всех образуемых связей.

этой вершиной и не совпадает с ней, то между ними возникает связь. В противном случае попытка установления вторичной связи считается потерянной.

Моделирование по описанным правилам приводит к возникновению масштабно-инвариантной сети, описываемой степенным распределением, примеры которого представлены на рис. 2.

КОНЕЧНО-РАЗМЕРНЫЙ СКЕЙЛИНГ

Свойства возникающей сети и, в частности, показатель распределения вершин зависят исключительно от отношения скоростей образования вторичных и первичных связей, которое является единственным параметром модели. Кроме него, состояние системы зависит от достигнутого ей к текущему моменту времени размера, характеристикой которого служит число вершин в графе $n(t)$.

Учет размера системы существенен, поскольку запись плотности (1) является математической идеализацией, применимой лишь в ограниченном диапазоне значений аргумента, называемом *промежуточной асимптотикой*. Отклонение плотности от степенного вида при больших x может быть учтено с помощью *метода конечно-размерного скейлинга*, предполагающего замену формулы (1) более общим выражением вида

$$u(x) = n^{-\beta} \cdot h(xn^{-\nu}),$$

где скейлинговая функция $h(y) \sim y^{-(1+\alpha)}$ при $y \ll 1$ и убывает быстрее любой степени y при $y \rightarrow \infty$.

Как правило, в промежуточной асимптотике плотность распределения не зависит от размера системы. В этом случае показатели связаны *скейлинговым соотношением* $\beta = \nu(1 + \alpha)$, позволяющим при обработке экспериментальных результатов находить показатель распределения α путем подбора таких значений скейлинговых показателей ν и β , при которых совмещаются графики зависимостей $n^{\beta} \cdot u(x)$ от $n^{-\nu} \cdot x$, полученные при разных значениях n .

Если же с ростом размера системы доля событий, относящихся к промежуточной асимптотике, убывает как $n^{-\kappa}$, то скейлинговое соотношение усложняется до вида $\beta = \nu(1 + \alpha) + \kappa$, который уже менее пригоден для нахождения показателя α , поскольку показатель κ требуется определять отдельно, что вносит дополнительные погрешности.

Рис. 3 дает примеры применения конечно-размерного скейлинга для анализа результатов модели. Как можно видеть, при различных ее параметрах качество скейлингового анализа оказывается весьма различным. Поэтому для получения используемых далее оценок показателя брался коэффициент графиков на рис. 2, а скейлинговое поведение плотности лишь проверялось. Без такой проверки в ряде случаев достаточно сложно было бы понять, какую именно часть графиков плотности следует приближать степенной зависимостью, а для

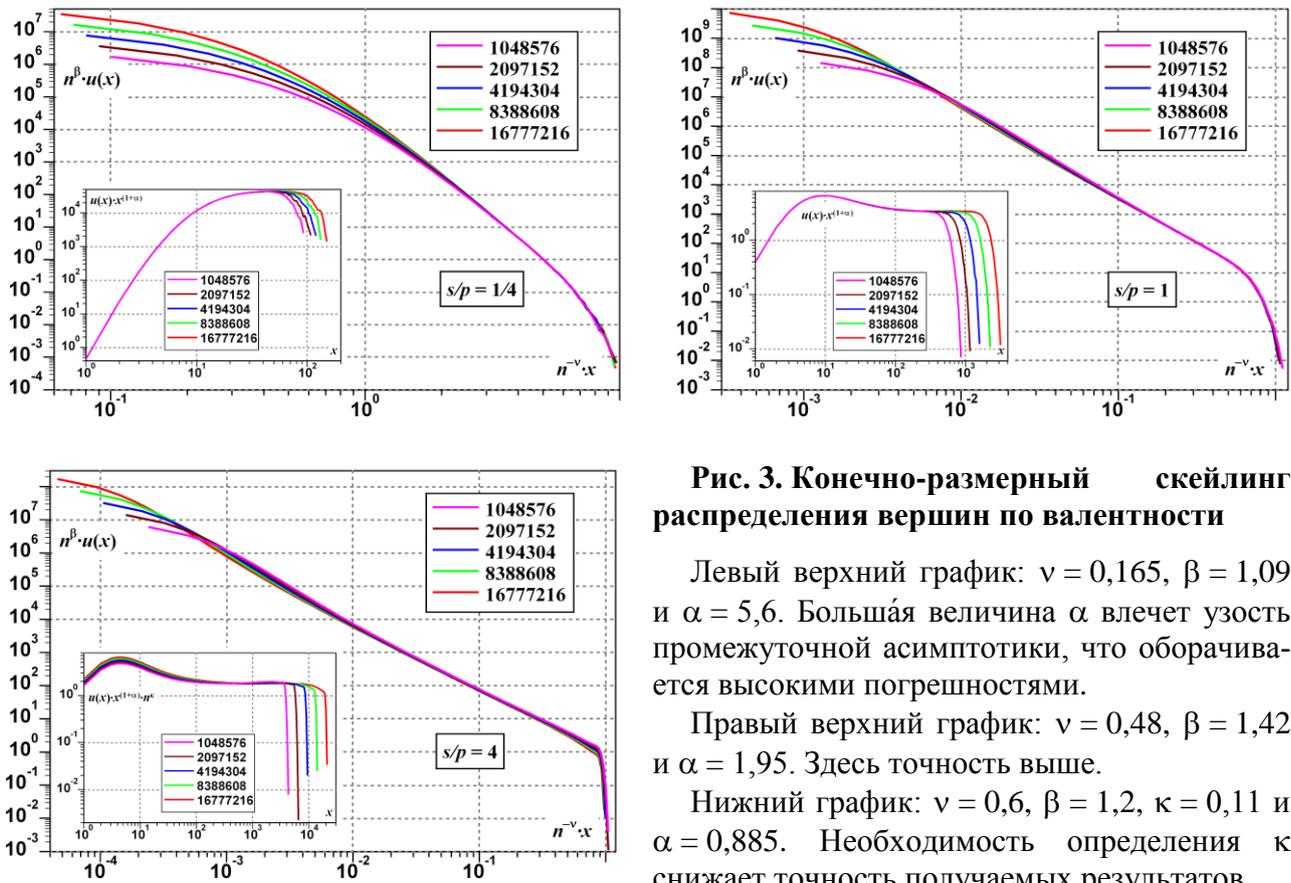


Рис. 3. Конечно-размерный скейлинг распределения вершин по валентности

Левый верхний график: $\nu = 0,165$, $\beta = 1,09$ и $\alpha = 5,6$. Большая величина α влечет узость промежуточной асимптотики, что оборачивается высокими погрешностями.

Правый верхний график: $\nu = 0,48$, $\beta = 1,42$ и $\alpha = 1,95$. Здесь точность выше.

Нижний график: $\nu = 0,6$, $\beta = 1,2$, $\kappa = 0,11$ и $\alpha = 0,885$. Необходимость определения κ снижает точность получаемых результатов.

малых значений s/p и вовсе возникали бы сомнения в степенном виде распределения.

ИССЛЕДОВАНИЕ МОДЕЛИ

Предложенные правила роста не описываются уравнением (2), т.к. выбор другого конца вторичной связи уже не представляется в виде комбинации случайного и преимущественного присоединения. Однако мы, тем не менее, попытаемся аппроксимировать вероятность для вершины быть присоединенной линейной функцией ее валентности. Кроме того, будем считать вероятность удачного образования второй связи одинаковой для всех вершин и равной q . При этом мы получаем среднеполевой аналог уравнения (2):

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{p + qs(1-a)}{n(t)} + \frac{x_i qs(1+a)}{S(t)},$$

где параметр a , как и ранее, равен вероятности того, что другой конец вторичной связи выбирается преимущественным образом. Суммирование этих уравнений по всем вершинам дает

$$S(t) = 2(p + qs) \cdot t = k \cdot n(t), \quad (6)$$

где $k = 2(1 + qs/p)$. (7)

Простота экспериментальной регистрации зависимостей $n(t)$ и $S(t)$ дает возможность определить зависимость коэффициента роста k от соотношения скоростей образования связей, что позволяет вычислить вероятность q . Однако линейный вид зависимости (6) соответствует стационарному режиму роста сети, который устанавливается лишь после некоторого переходного процесса, который, как видно из рис. 4, может занимать весьма продолжительное время. Возникновение переходного процесса обусловлено произвольностью того графа-затравки, с которого начинается рост сети.

Для уточнения экспериментальных значений k применялась следующая процедура. Угловой коэффициент графика $S(n)$ определялся в ограниченном окне и рассматривался как функция $k(n_c)$ центра этого окна n_c . Далее подбирался такой показатель $0 < \varepsilon < 1$, чтобы зависимость k от $n_c^{-\varepsilon}$ имела вид прямой линии, пересечение которой с осью ординат и рассматривалось как истинное

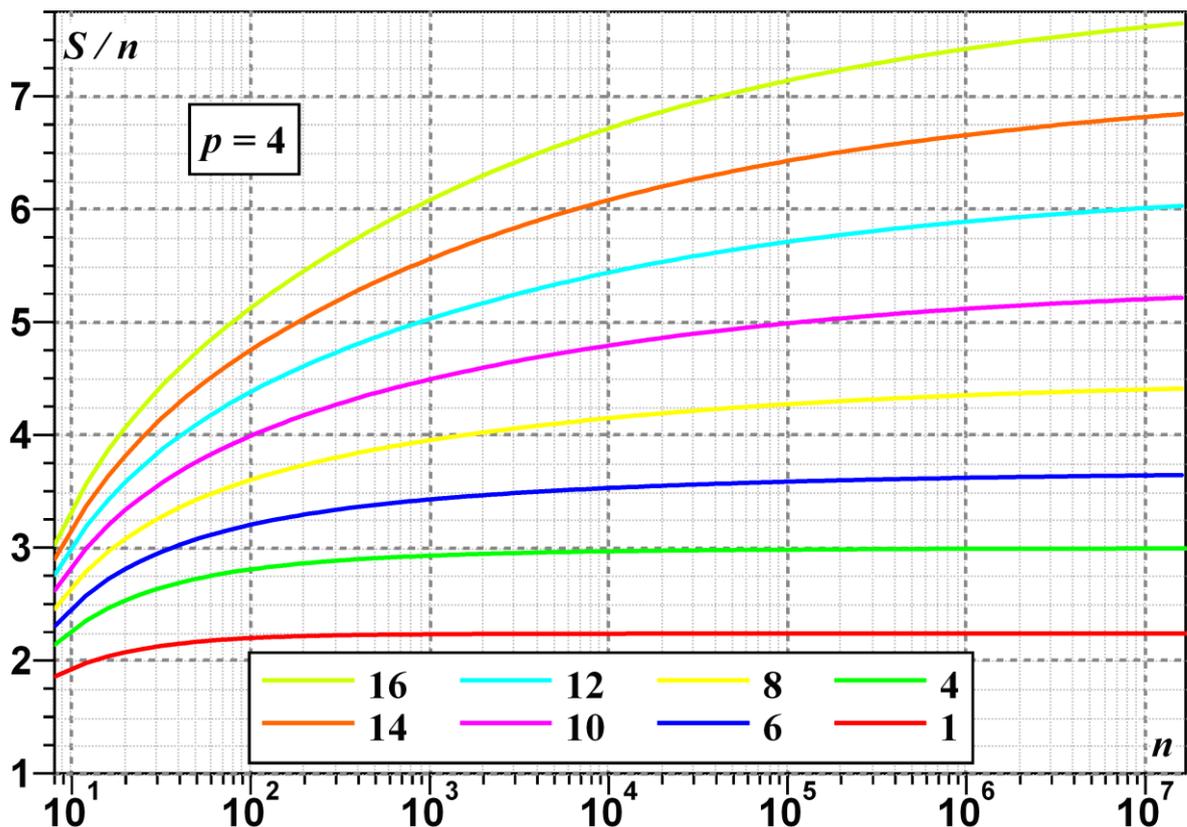


Рис. 4. Изменение оценки коэффициента роста по мере роста размера графа при различных значениях s и фиксированном p

Зависимость $S(n)$ является прямой пропорциональностью лишь в пределе $t \rightarrow \infty$. Определяющий ее коэффициент отношения S/n выходит на стационар тем позже, чем выше доля вторичных связей и меньше показатель распределения.

значение коэффициента роста, соответствующее $n = \infty$. Заметим, что коэффициент детерминации для экстраполирующей прямой никогда не опускался ниже 99,9%.

Рис. 5 демонстрирует наличие двух режимов функционирования модели. При преобладании первичного присоединения разность $k - 2$ прямо пропорциональна отношению s/p с коэффициентом, очень близким к единице, а при преобладании вторичного присоединения зависимость между этими величинами остается линейной, но уже не проходит через начало координат.

Как можно видеть из врезки к рис. 5, по мере увеличения роли вторичного присоединения, вероятность успешного образования вторичной связи возрастает от значений, немногим меньших $\frac{1}{2}$, соответствующих случаю $s \ll p$, до примерно $\frac{7}{8}$, соответствующих случаю $s \gg p$. Низкая вероятность успеха образования вторичной связи при доминировании первичного присоединения объясняется тем, что в бедном связями графе у большинства вершин соседей второго уровня мало и среди них с большой вероятностью может попасться сама вершина, пытающаяся образовать связь.

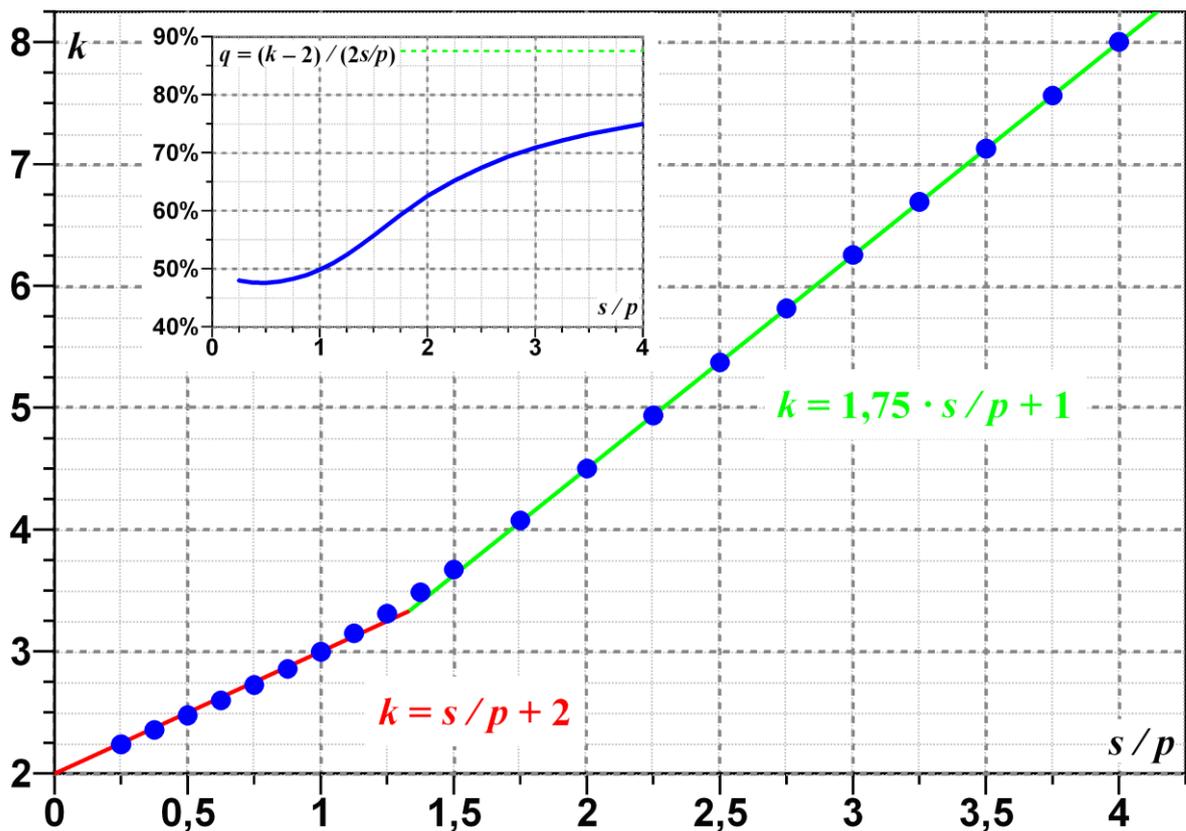


Рис. 5. Зависимость коэффициента роста графа от отношения $s:p$

График имеет два идеально линейных участка, переход между которым происходит примерно при $s:p \approx 4:3$.

На врезке: вероятность успеха образования вторичной связи. Пунктиром показано ее предельное значение, получаемое экстраполяцией второго линейного участка.

Для рассматриваемого приближения формула (5) заменяется записью

$$\alpha = 2 \frac{p + qs}{qs(1 + a)},$$

что с учетом формулы (7) дает соотношение

$$\frac{2k}{k-2} = \alpha(1 + a), \tag{8}$$

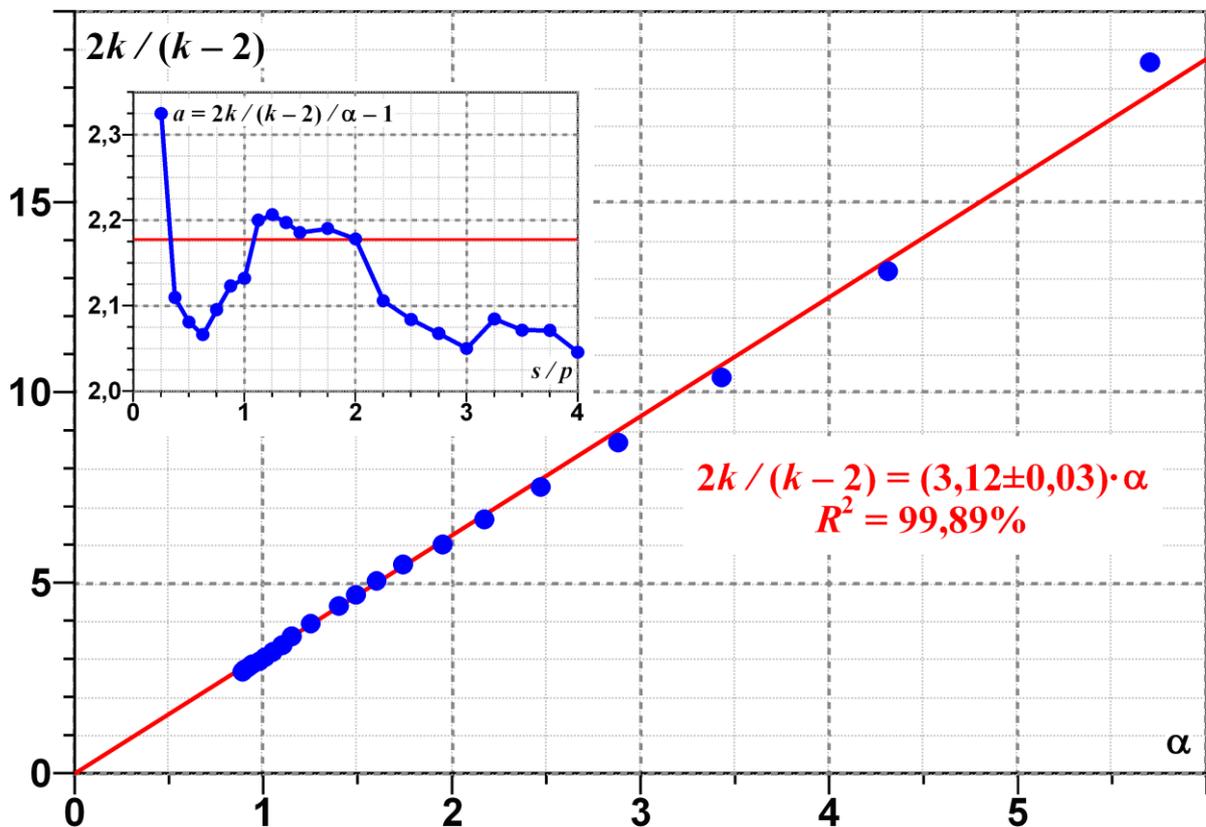


Рис. 6. Определение вероятности того, что выбор второго конца связи осуществляется преимущественным образом

Формула (8) предсказывает прямую пропорциональность между показателем α и комбинацией $2k/(k-2)$. Каждая из этих величин определяется экспериментально для различных p и s . Угловой коэффициент графика дает значение $1+a$.

На врезке: значение a в зависимости от отношения $s:p$. Колебания локальных значений не только существенно превышают погрешность определения углового коэффициента, но и являются скоррелированными, что лишней раз напоминает о приблизительном характере используемых формул. Примечательно, что локальная оценка величины a максимальна при малом отношении $s:p$, при котором показатель α определяется с наибольшей погрешностью, а также – в области перехода между двумя режимами на рис. 5. Это может свидетельствовать о некотором завышении оценки величины a , которое при построении аппроксимаций разумно принять приближенно равным 2.

позволяющее экспериментально определить a , как показано на рис. 6.

Полученный результат требует объяснения. С одной стороны, экспериментальное подтверждение прямой пропорциональности между величинами, входящими в соотношение (8), свидетельствует о работоспособности использованного линейного приближения вероятности того, что вершина окажется присоединенной. Но с другой стороны, полученная величина вероятности $a > 1$ нефизична. Буквальная ее интерпретация предполагала бы не только создание на каждом шаге непредусмотренных правилами модели вторичных связей, но и несоздание или даже уничтожение некоторого числа первичных.

Парадоксальность этого результата означает ограниченную применимость линейного приближения. Вершины, имеющие много связей, склонны к кластеризации, поэтому вероятность быть присоединенной, скорее всего, возрастает с валентностью вершины быстрее, чем линейно, что и учитывается тем эффективным значением величины a , которое было получено при обработке результатов эксперимента по формулам линейного приближения.

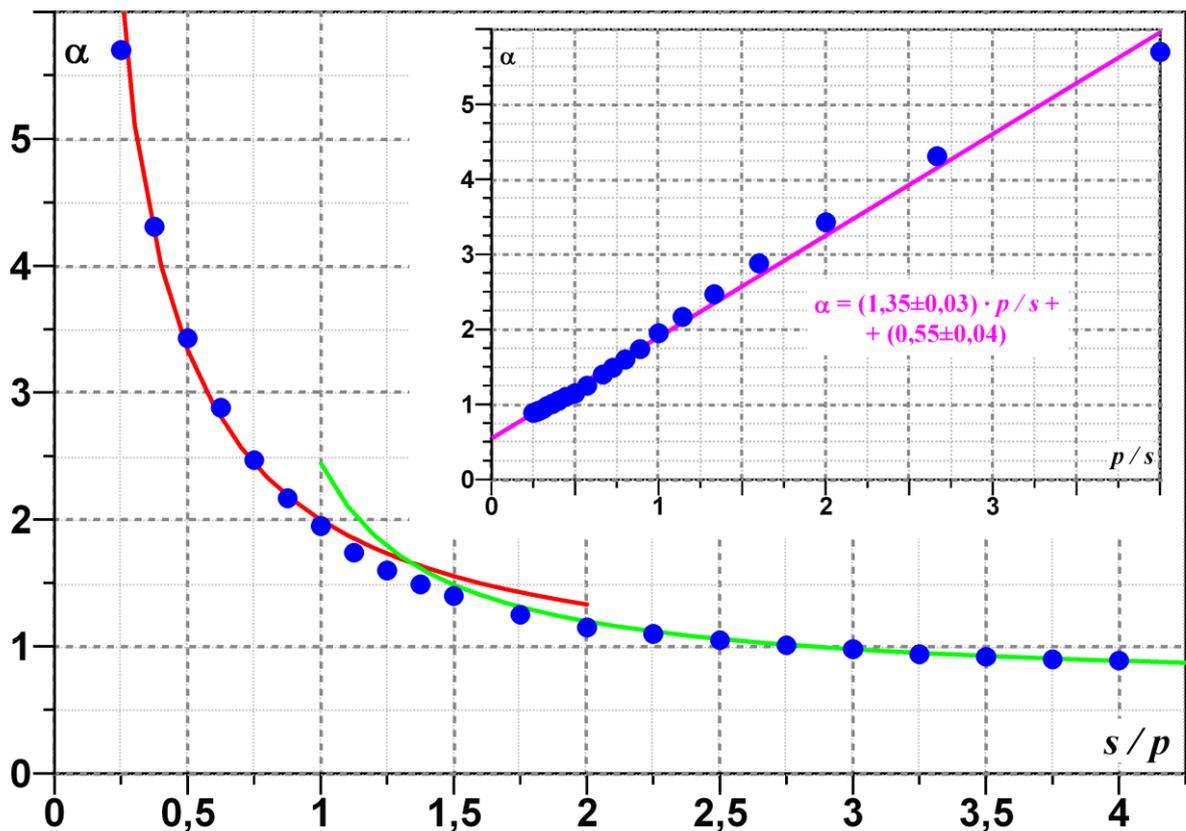


Рис. 7. Зависимость показателя распределения от соотношения скоростей образования первичных и вторичных связей

Показатель α как функции отношения s/p на и ее аппроксимации на основе оценки $a_{eff} = 2$ и двух линейных графиков $k(s/p)$, приведенных на рис. 5.

На врезке: α как функция отношения p/s хорошо приближается линейной зависимостью, которая, является возможной альтернативой данных аппроксимаций.

На основе экспериментально определенных значений эффективной вероятности $a_{eff} \approx 2$ и параметров зависимостей, построенных на рис. 5, можно построить аппроксимации и для зависимости показателя распределения вершин от параметров модели

$$\alpha \approx \frac{2}{3} \cdot \begin{cases} 1 + \frac{2p}{s} & s \ll p \\ \frac{7s+4p}{7s-4p} & s \gg p \end{cases},$$

графики которых, показанные на рис. 7, очень хорошо приближают экспериментальные значения показателя. Если эти аппроксимации останутся приблизительно верными за пределами рассмотренного диапазона параметров модели, то минимально возможное значение показателя распределения окажется $\alpha_{min} \approx 2/3$.

Впрочем, поскольку данные аппроксимации не подтверждены никакими строгими расчетами, нельзя исключать иных вариантов. Например, как можно видеть на врезке к рис. 7, для показателя распределения имеется и другая, не менее точная, аппроксимация, дающая значение $\alpha_{min} \approx 0,55$.

В любом случае экспериментально зафиксированные значения $\alpha < 1$ следует считать не следствием низкой точности обработки результатов эксперимента, а важным свойством модели.

Выводы

Преимущественное присоединение играет ключевую роль в возникновении масштабно-инвариантных графов. Однако для моделей роста социальных сетей использование этого принципа является реалистичным только при установлении вторичных связей, тогда как присоединение новых вершин разумно производить случайным образом. Кроме того, вторичные связи чаще возникают между ближними вершинами, а не между дальними.

Модель, построенная на основе этих соображений, демонстрирует степенное распределение вершин по числу связей. Показатель распределения варьируется в широком диапазоне значений в зависимости от соотношения интенсивностей образования первичных связей и вторичных связей.

Теоретическое исследование модели, выполненное в квазилинейном среднеполевом приближении, демонстрирует хорошее совпадение с экспериментом на уровне вида получающихся зависимостей. Однако экспериментальная оценка входящих в них величин приводит к парадоксальным результатам, которые означают существенно нелинейную зависимость вероятности того, что вершина будет присоединена, от ее валентности. Данное обстоятельство связано с значимой кластеризацией вершин, имеющих высокую валентность.

Литература

1. *Barabási A.-L., Albert R* Emergence of scaling in random networks // *Science*. 1999. V.286, p.509-512.
2. *Barabási A.-L., Albert R, Jeong H*. Scale-free characteristics of random networks: The topology of the world-wide web // *Physica A*. 2000. V.281, p.69-77.
3. *Albert R, Barabási A.-L*. Statistical mechanics of complex networks // *Rev. Mod. Phys.* 2002. V.74, N1, p47-97.
4. *Митин Н.А., Подлазов А.В., Щетинина Д.П.* Исследование сетевых свойств Живого журнала. – Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2012. № 78. 16 с. URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2012-78>
5. *Подлазов А.В.* Распределение конкурентов, масштабная инвариантность состояния и модели линейного роста // *Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика*. 2002. Т.10, №1-2, с.20-43.
6. *Подлазов А.В.* Закон Ципфа и модели конкурентного роста // *Новое в синергетике. Нелинейность в современном естествознании* / Ред. Г.Г.Малинецкий / Синергетика: от прошлого к будущему. – М.: ЛИБРОКОМ, 2009. С.229-256.

Содержание

Введение	3
Линейный рост.....	4
Модель роста сети	7
Конечно-размерный скейлинг	9
Исследование модели.....	10
Выводы	15