ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 97 за 2013 г.

Парусникова А.В.

Порядки Жевре решений четвертого уравнения Пенлеве в случае общего положения

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Парусникова А.В. Порядки Жевре решений четвертого уравнения Пенлеве в случае общего положения // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2013. № 97. 12 с. URL: http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2013-97

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
ИМЕНИ М.В. КЕЛДЫША

А. В. Парусникова

ПОРЯДКИ ЖЕВРЕ РЕШЕНИЙ ЧЕТВЕРТОГО УРАВНЕНИЯ ПЕНЛЕВЕ В СЛУЧАЕ ОБЩЕГО ПОЛОЖЕНИЯ

Москва, 2013 г.

УДК 517.925

А. В. Парусникова. Порядки Жевре решений четвертого уравнения Пенлеве в случае общего положения. Препринт института прикладной математики им. М. В. Келдыша РАН, Москва, 2013.

В данной работе рассматривается вопрос о суммируемости по Жевре степенных разложений решений четвёртого уравнения Пенлеве в окрестности бесконечности с случае общего положения $\alpha\beta \neq 0$. Для анализа используются методы французской и японской школ, алгоритмы сравниваются с алгоритмами степенной геометрии.

A. V. Parusnikova. Gevrey orders of solutions to the fourth Painlevé equation near infinity. Preprint of the Keldysh Institute of Applied Mathematics of RAS. Moscow, 2013.

We consider the fourth Painlevé equation and its formal power series solutions near infinity obtained if $\alpha\beta \neq 0$. We obtain Gevrey orders of each power series solution using the methods of French and Japanese schools and compare these algorithms with algorithms of Power Geometry.

Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований, грант 11-01-00023-а.

Электронная библиотека: www.keldysh.ru

1 Общая теория

Пусть V — открытый сектор с вершиной в бесконечности на расширенной комплексной плоскости или римановой поверхности логарифма, т. е. $V = \{z : |z| > R, \operatorname{Arg} z \in (\varphi_1, \varphi_2)\}$. w — голоморфная на V функция и $\hat{w} = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k z^{-k}$ некоторый формальный ряд, принадлежащий $\mathbb{C}[[1/z]]$.

Говорят, что *w асимптотически приближается рядом $\hat{w}$ на V*, если для любого замкнутого подсектора Y из V и любого $m \in \mathbb{N}$ существует постоянная $M_{Y,m} > 0$:

$$|z^m||w(z) - \sum_{p=0}^{m-1} a_p z^{-p}| < M_{Y,m}.$$

Если существуют постоянные A_Y, C, такие, что $M_{Y,m} = C(m!)^{1/k} A_Y^m$, для некоторого A_Y^m, то говорят, что *w асимптотически приближается по Жевре порядка $1/k$ рядом $\hat{w}$ на V*. Обозначаем $\hat{w} \in \mathbb{C}[[z]]_{1/k}$.

Для $G(z, Y, Y_1, \ldots, Y_n)$ — аналитической функции $n + 2$ переменных — рассмотрим уравнение

$$G(z, w, Dw, \ldots, D^n w) = 0. \tag{1}$$

Пусть $\hat{w} \in \mathbb{C}[[1/z]]$ — формальный ряд, являющийся решением дифференциального уравнения (1), а D — оператор $z\dfrac{d}{dz}$.

Теорема 1. *(Рамис, Сибуйя, 1989, [3], [6]) Пусть $\hat{w} \in \mathbb{C}[[z]]_{1/k}$ является решением уравнения (1). Тогда существует $k' > 0$: для любого открытого сектора V с вершиной в бесконечности, имеющего размыкание $< \min(\pi/k, \pi/k')$ и с достаточно большим R, существует функция w, являющаяся решением ОДУ (1), асимптотически приближаемая рядом $\hat{w}$ в смысле Жевре порядка $1/k$.*

Следующая теорема содержит условие на многоугольник Ньютона, процесс построения которого мы сейчас опишем.

Линейному дифференциальному оператору

$$L = \sum_{k=0}^{n} a_k(z) D^k, \text{ где } a_k(z) \in \mathbb{C}[z][[1/z]],\ a_k(z) = \sum_{j=j_k}^{\infty} a_{j,k} z^{-j},$$

$$a_{j,k} = \mathrm{const} \in \mathbb{C}.$$

сопоставим набор точек плоскости $(k,\, j_k)$, $k = 0, \ldots, n$ — *носитель оператора.* Определим [3] множество

$$N = \bigcup_{k=0}^{n} \{(q_1, q_2) : q_1 \le k,\ q_2 \ge j_{k,0}\}.$$

Возьмём минимальное выпуклое множество в полуплоскости $q_1 \geq 0$, содержащее N. Граница этого множества называется *многоугольником Ньютона линейного дифференциального оператора* L.

Теорема 2. *(Перрон, Мальгранж, Рамис, Сибуйя в разных случаях, [3]) Пусть* $\hat{w} \in \mathbb{C}[[z]]$ *— формальное решение уравнения* (1), *тогда* $\hat{w}$ *сходится или имеет точный порядок Жевре* s, *где* $s \in \{0, \frac{1}{k_1}, \ldots, \frac{1}{k_P}\}$, *а* $0 < k_1 < \ldots < k_P < +\infty$ *— все строго положительные наклоны сторон многоугольника Ньютона* $N(G, \hat{w})$ *к оси абсцисс.*

Теорема 2 сформулирована для нелинейного дифференциального уравнения (1) и его формального решения $\hat{w}$.

В частном случае $\dfrac{\partial G}{\partial Y_n}(z, \hat{w}, , \ldots, \hat{w}^{(n)}) \neq 0$ многоугольник Ньютона такого уравнения на формальном решении может быть построен (согласно замечанию A.2.4.3 из [3]) как многоугольник оператора

$$L_0 = \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{\partial G}{\partial Y_k}(z, \hat{w}, D\hat{w}, \ldots, D^n \hat{w}) \right) D^k. \tag{2}$$

2 Нахождение экспоненциальных разложений

Рассмотрим ОДУ порядка n вида

$$f(z, w) = 0, \tag{3}$$

где $f = f(z, w)$ — *дифференциальная сумма*, т.е. многочлен от переменных z, w и производных $dw/dz, \ldots, dw^n/dz^n$. Каждому *дифференциальному моному* $a(z, w)$ в дифференциальной сумме (3) ставим в соответствие его *двумерный показатель степени* $Q(a(z, w)) = (q_1, q_2)$ по следующим правилам:

$$Q(cz^r w^s) = (r, s); \qquad Q\left(\frac{d^l w}{dz^l}\right) = (-l, 1);$$

$$Q(a(z, w) b(z, w)) = Q(a(z, w)) + Q(b(z, w)).$$

Множество двумерных показателей дифференциальных мономов в дифференциальной сумме f называется *носителем дифференциальной суммы* f и обозначается $\mathbf{S}(f)$. Выпуклая оболочка $\Gamma(f)$ носителя $\mathbf{S}(f)$ называется *многоугольником дифференциальной суммы* f, граница $\partial\Gamma(f)$ многоугольника

$\Gamma(f)$ состоит из вершин $\Gamma_j^{(0)}$ и ребер $\Gamma_j^{(1)}$. Они называются *обобщёнными гранями* $\Gamma_j^{(d)}$, где верхний индекс указывает размерность грани, а нижний — её номер. Каждой грани $\Gamma_j^{(d)}$ соответствует *укороченная сумма*

$$\hat{f}_j^{(d)}(z,w)=\sum_{i\in I} a_i(z,w), \text{ где } I=\{i:\ Q(a_i(z,w))\in \mathbf{S}(f)\cap\Gamma_j^{(d)}\}.$$

Укороченное уравнение — это уравнение вида $\hat{f}_j^{(d)}(z,w)=0$, его решение называется *укороченным решением уравнения* $f(z,w)=0$.

Определим на плоскости (p_1,p_2) *нормальные конусы* $U_j^{(d)}$ к граням $\Gamma_j^{(d)}$: для ребра $\Gamma^{(1)}$ с внешней нормалью $N=(n_1,n_2)$ нормальный конус $U^{(1)}=\{(p_1,p_2)\ :\ (p_1,p_2)=\lambda N, \lambda\in\mathbb{R}, \lambda>0\}$, для вершины $\Gamma^{(0)}$, принадлежащей рёбрам $\Gamma_1^{(d)}$ и $\Gamma_2^{(d)}$ с внешними нормалями N_1 и N_2, нормальный конус $U^{(0)}=\{(p_1,p_2)\ :\ (p_1,p_2)=\lambda_1 N_1+\lambda_2 N_2, \lambda_1,\lambda_2\in\mathbb{R},\ \lambda_1>0, \lambda_2>0\}$. Плоскость (p_1,p_2) представляется в виде объединения непересекающихся нормальных конусов к обобщённым граням многоугольника $\Gamma(f)$.

Пусть у уравнения $f(z,w)=0$ есть соответствующее грани $\Gamma_j^{(d)}$ асимптотическое разложение решения вида

$$w=c_r z^r+\sum_{s\in\mathbf{K}} c_s z^s, \text{ где } r,\ s,\ c_r,\ c_s=\text{const},\ r,\ s,\ c_r,\ c_s\in\mathbb{R}, \tag{4}$$

$\mathbf{K}\subset\{s: s>r\}$ для разложений при $z\to 0$ и $\mathbf{K}\subset\{s: s<r\}$ для разложений при $z\to\infty$; множество $\mathbf{K}$ счётно, т. е. рассмотрим решение в виде степенного разложения [4] $w=b_0(z)$ с вещественными показателями степени. Обозначим через $\pi(g)$ максимальный порядок производной, входящей в некоторую дифференциальную сумму g. Очевидно, что для $g=f$ порядок $\pi(f)=n$. Если $\pi(f_j^{(d)})<n$, то разложение (4) может иметь экспоненциальную добавку вида

$$C\,\exp(\varphi(z)), \tag{5}$$

где $\varphi=\varphi(z)$ таково, что $\varphi'(z)$ — степенное разложение с вещественными показателями степени и с вещественными коэффициентами (разложение вида (4)).

Более того, в [2] сформулирована следующая

Теорема 3. *Каждой экспоненциальной добавке* (5) *соответствует её характеристический многочлен* $\mu(k)$ *порядка* $\pi(f)$. *Если ни одно из целых чисел* $k>1$ *не является корнем многочлена* $\mu(k)$, *то степенное разложение* (4) *решения уравнения* $f(z,w)=0$ *и его экспоненциальная добавка* (5) *продолжаются в виде экспоненциального разложения*

$$w=b_0(z)+C\,\exp(\varphi(z))+\sum_{k=2}^{\infty} b_k(z)C^k\exp(k\varphi(z))$$

решений полного уравнения $f(z,w)=0$, где $b_k(z), \varphi'(z)$ — степенные разложения.

Опишем вычисления добавки (5) и её характеристического многочлена $\mu(k)$. После подстановки $w = b_0(z) + u$ исходное уравнение (3) принимает вид

$$f(z, b_0(z)+u) \stackrel{def}{=} \tilde{f}(z,u) \stackrel{def}{=} \mathcal{M}(z)u + g(z,u) = 0, \tag{6}$$

где $\mathcal{M}(z)$ — линейный дифференциальный оператор, и у всех точек $Q = (q_1, q_2)$ носителя $\mathbf{S}(g)$ координата $q_2 \geq 2$. Так что $u \equiv 0$ является решением уравнения (6), соответствующим рассматриваемому степенному решению (4) уравнения (3). При этом

$$\mathcal{M}(z) = \frac{\delta f}{\delta w} \text{ на } \ w = b_0(z). \tag{7}$$

Многоугольник $\Gamma(\tilde{f})$ уравнения (6) имеет горизонтальное ребро $\Gamma_1^{(1)}$ с $q_2 = 1$, соответствующее сумме $\mathcal{M}(z)u$, т. е. $\Gamma_1^{(1)} = \Gamma(\mathcal{M}(z)u)$. После логарифмического преобразования $\zeta = d\ln u/dz$ укороченное уравнение $\mathcal{M}(z)u = 0$ перейдёт в уравнение

$$h(z,\zeta)u \stackrel{def}{=} \mathcal{M}(z)u = 0, \tag{8}$$

где $h(z,\zeta)$ — дифференциальная сумма, и конус задачи

$$\tilde{\mathcal{K}}_\omega = \{\tilde{P} = (\tilde{p}_1, \tilde{p}_2) : \tilde{p}_1 + \tilde{p}_2 > 0, \ \operatorname{sgn} \tilde{p}_1 = \omega\},$$

$$\text{где } \omega = \begin{cases} \ \ 1, & z \ \to \infty \\ -1, & z \ \to 0 \end{cases}.$$

Многоугольник $\Gamma(h)$ обозначим $\tilde{\Gamma}$, а его грани — как $\tilde{\Gamma}_j^{(d)}$. Пусть $\tilde{\Gamma}_i^{(1)}$ — ребро с внешней нормалью $\tilde{N}_i = (1, \rho)$, лежащей в конусе задачи $\tilde{\mathcal{K}}_\omega$. Тогда ребру $\tilde{\Gamma}_i^{(1)}$ соответствует укороченное уравнение $\hat{h}_i^{(1)}(z,\zeta) = 0$, которое является алгебраическим. Полагая $\zeta = \varkappa z^\rho$, получаем для $\varkappa$ определяющее уравнение $\hat{h}_i^{(1)}(1, \varkappa) = 0$. Пусть $\varkappa = \varkappa^*$ — один из его корней. Ему соответствуют однозначное степенное разложение решения уравнения (8)

$$\zeta = \varkappa^* z^\rho + \sum_{\sigma \in \mathbf{K}} \varkappa_\sigma z^\sigma \stackrel{def}{=} \varphi'(z), \text{ где } \mathbf{K} \subset \{\omega \mathrm{Re}\ \sigma < \omega \mathrm{Re}\ \rho\},$$

и характеристический многочлен $\mu(k) = \hat{h}_i^{(1)}(1, \varkappa^* k)$. Его можно получить из оператора $\hat{h}_i^{(1)}(z, \zeta, \dfrac{d}{d\zeta}, \ldots, \dfrac{d^m}{dz^m})$, заменяя в нём $\dfrac{d^l}{dz^l}$, $l = 0, 1, \ldots, m$, на $k^l \zeta^l$, а ζ — на $\varkappa^*$. Подробнее см. в [2].

3 Сравнение конструкций

Покажем, что оператор (2) совпадает с оператором $\mathcal{M}$ (7).

Пусть $(a_{j,\,k})$ — матрица перехода от базиса $D,\ D^2,\ \ldots,\ D^n$ к базису $\dfrac{d}{dz},\ z^2\dfrac{d^2}{dz^2},\ \ldots,\ z^n\dfrac{d^n}{dz^n}$ в пространстве линейных дифференциальных операторов. Можно проверить, что элемент $a_{j,\,k}$ равен $a_{j,\,k} = S(j,k)$, где $S(j,k)$ — число Стирлинга второго рода.Утверждение легко доказывается по индукции, с учётом того, что для элементов матрицы перехода выполнено $a_{j+1,\,k+1} = a_{j,\,k} + (k+1)a_{j,\,k+1}$. Матрица перехода — нижнетреугольная, на диагонали стоят единицы ($S(j,j) = 1$). Обратная матрица $(a^{j,k})$ также является нижнетреугольной, а её элементы $a^{j,k} = (-1)^{j-k}s(j,k)$, где $s(j,k)$ — число Стирлинга первого рода.

Пусть $G(z,w,Dw,\ \ldots,\ D^n w) = F(z,w,z\dfrac{d}{dz},\ \ldots,\ z^n\dfrac{d^n}{dz^n})$, т. е. $G(z,Y,Y_1,\ldots,\ Y_n) = F(z,Y,X_1,\ \ldots,\ X_n)$. Оператор (2) перепишем через $z^k\dfrac{d^k}{dz^k}$ (в формуле $\delta_{j,l}$ — символ Кронекера):

$$L_0 = \sum_{k=0}^{n}\sum_{l=0}^{n}\frac{\partial F}{\partial X_l}\frac{\partial X_l}{\partial Y_k}D^k = \sum_{k=0}^{n}\sum_{l=0}^{n}\frac{\partial F}{\partial X_l}a^{l,\,k}\sum_{j=0}^{n}a_{k,\,j}z^j\frac{d^j}{dz^j} =$$

$$= \sum_{l=0}^{n}\frac{\partial F}{\partial X_l}\sum_{j=0}^{n}z^j\frac{d^j}{dz^j}\sum_{k=0}^{n}a^{l,k}a_{k,j} = \sum_{l=0}^{n}\frac{\partial F}{\partial X_l}\sum_{j=0}^{n}z^j\delta_{j,l}\frac{d^j}{dz^j} = \sum_{l=0}^{n}\frac{\partial F}{\partial X_l}z^l\frac{d^l}{dz^l},$$

а это и есть первая вариация дифференциальной суммы F. Посчитанная на ряде $\hat{w}$, она совпадает с оператором $\mathcal{M}$ из [2].

Таким образом, для построения многоугольника Ньютона уравнения $F(z,w,w',\ldots,w^{(n)}) = 0$ на решении $\hat{w}$ нужно:

1) вычислить первую вариацию $\dfrac{\delta F}{\delta w}$ на решении $\hat{w}$;

2) сделать замену, заданную матрицей $(-1)^{j-k}s(j,k)$;

3) проверить выполнение условия $\dfrac{\partial G}{\partial Y_n}(z,\hat{w},\,,D\hat{w},\,,\ldots,\ D^n\hat{w}) \neq 0$;

4) найти множество точек $(k,\ j_{k,\,0})$, $k = 0,\ \ldots,\ n$;

5) построить их выпуклую оболочку на правой полуплоскости.

Замечание 1. Действия пунктов 2 и 3 можно поменять местами — вместо условия $\dfrac{\partial G}{\partial Y_n}(z,\hat{w},\,,D\hat{w},\,,\ldots,\ D^n\hat{w}) \neq 0$ проверять выполнение

$$\frac{\partial F}{\partial X_n}(z,\hat{w},\,,\hat{w}',\,,\ldots,\ \hat{w}^{(n)}) \neq 0.$$

Замечание 2. Для вычисления используется многоугольник Ньютона, рассматриваемый в работе [3], но легко показать, что можно получать порядок Жевре разложения и по многоугольнику уравнения, используемому в степенной геометрии [4]. А именно, в операторе $\mathcal{M}(z)$ [2], применённом к u, сделать замену $u = \ln y$ (сократить на u) и для полученной дифференциальной суммы, зависящей от z и y, построить многоугольник. В условии теоремы 2 наклоны (тангенсы углов) будут заменены на котангенсы.

4 Четвёртое уравнение Пенлеве

Рассматривается четвёртое уравнение Пенлеве
$$w'' = \frac{(w')^2}{w} - \frac{3}{2}w^3 + 4zw^2 + 2(z^2 - \alpha)w + \frac{\beta}{w}, \tag{9}$$
где α, β — комплексные параметры, z — независимая, w — зависимая комплексные переменные, и его формальные решения в окрестности бесконечности, записанные в виде степенных рядов. Такие решения получены в работах [1], [5].

При $\alpha\beta \neq 0$ существуют следующие четыре семейства разложений:
$$-2z - \frac{\alpha}{z} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_{2k+1,1}}{z^{2k+1}}; \tag{10}$$
$$-\frac{2z}{3} + \frac{\alpha}{z} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_{2k+1,2}}{z^{2k+1}}; \tag{11}$$
$$(-1)^l \frac{\sqrt{-\frac{\beta}{2}}}{z} - \frac{\alpha(-1)^l\sqrt{-\frac{\beta}{2}} - 1}{2z^2} + \sum_{k=3}^{\infty} \frac{a_{k,l}}{z^k},\ l = 3, 4. \tag{12}$$

Коэффициенты $a_{s,l} \in \mathbb{C}$, $l = 1, 2, 3, 4$ — однозначно определённые постоянные: при фиксированных значениях параметров α, β коэффициенты однозначно определяются как решения невырожденной системы линейных уравнений.

Теорема 4. *Ряды* (10), (11) *имеют порядок Жевре 1/2, ряды* (12) *имеют порядок Жевре 2/5.*

Доказательство. Применим теорему 2, взяв в качестве уравнения (1) уравнение (9), домноженное на w, с перенесёнными в правую часть членами уравнения:
$$-ww'' + (w')^2 - \frac{3}{2}w^4 + 4zw^3 + 2(z^2 - \alpha)w^2 + \beta = 0, \tag{13}$$

а в качестве $\hat{w}$ последовательно рассмотрим его формальные решения (10), (11), (12).

В случае, если главная часть не является нулевой, легко сводим ситуацию к ситуации с нулевой главной частью заменой; говорим о порядке Жевре регулярной части ряда.

Первая вариация уравнения P_4, представленного в виде дифференциальной суммы (13), равна

$$-w\frac{d^2}{dz^2} + 2w'\frac{d}{dz} - zw'' + 6w^3 + 2zw^2 + 4(z^2-\alpha)w =$$
$$= D^2(-\frac{2w}{z^2}) + D\left(\frac{2w'}{z} + \frac{2w}{z^2}\right) - zw'' + 6w^3 + 2zw^2 + 4(z^2-\alpha)w). \qquad (14)$$

Подставим в выражение (14) ряд (10), переписываем выражение через операторы D, D^2 и выписываем коэффициенты при операторах D^2, D и тождественном операторе, содержащие максимальную степень по z:

$$\frac{4}{z}D^2 - \frac{4}{z}D + 96z^4,$$

носитель такого оператора состоит из точек $(0,-4)$, $(1,1)$, $(2,1)$, многоугольник показан на рис. 1.

Аналогичную выкладку проведём для ряда (11). Получим оператор

$$\frac{4}{3z}D^2 - \frac{4}{3z}D + \frac{96}{9}z^4,$$

носитель которого тоже состоит из точек $(0,-4)$, $(1,1)$, $(2,1)$, единственный положительный наклон сторон многоугольника Ньютона равен $5/2$, отсюда, согласно теореме 2, ряды (10), (11) имеют порядок Жевре $2/5$ (Рис. 1).

Для рядов (12) получаем операторы

$$\frac{(-1)^{l+1}\sqrt{-2\beta}}{z^3}D^2 + \frac{(-1)^{l+1}\sqrt{\dfrac{-\beta}{2}}\alpha+1}{z^4}D + 4(-1)^l\sqrt{-2\beta}z,\ l=3,\,4.$$

Их носители совпадают, состоят из точек $(0,-1)$, $(1,4)$, $(2,3)$, единственный положительный наклон сторон многоугольника Ньютона равен 2 (многоугольник изображён на рис. 2), отсюда, согласно теореме 2, ряды (12) имеют порядок Жевре $1/2$.

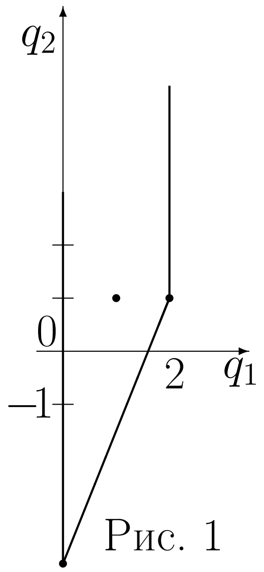

Рис. 1

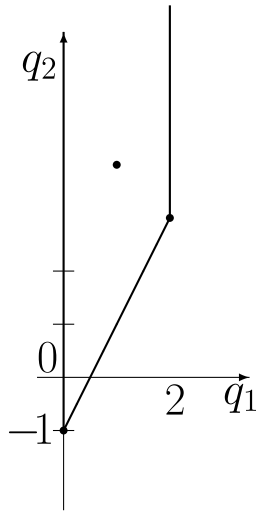

Рис. 2

Доказательство теоремы 4 окончено.

Утверждение 1. *Существуют* $k' \geq 0$ *и* $R_0 \in \mathbb{R}_+$ *такие, что для любого открытого сектора* $\{z : |z| > R \geq R_0, \operatorname{Arg} z \in (\varphi_1, \varphi_2)\}$, $\varphi_2 - \varphi_1 < \pi/k' \leq 2\pi$ *существует решение четвёртого уравнения Пенлеве, асимптотически приближаемое рядом* (10) *по Жевре порядка 1/2. Такое же утверждение верно для ряда* (11). *Существуют* $k' \geq 0$ *и* $R_0 \in \mathbb{R}_+$, *такие, что для любого открытого сектора* $\{z : |z| > R \geq R_0, \operatorname{Arg} z \in (\varphi_1, \varphi_2)\}$, $\varphi_2 - \varphi_1 < \pi/k' \leq 5\pi/2$ *существует решение четвёртого уравнения Пенлеве, асимптотически приближаемое рядом* (12) *по Жевре порядка 2/5.*

Утверждение является следствием теорем 1 и 4.

Благодарности. Я выражаю благодарность профессору А. Д. Брюно за проявленный к работе интерес.

Список литературы

[1] В. И. Громак, Н. А. Лукашевич, Аналитические свойства решений уравнений Пенлеве // "Университетское", Минск, 1990. 157 с.

[2] А. Д. Брюно. Экспоненциальные разложения решений обыкновенного дифференциального уравнения // ДАН, 2012, т. 443, № 5. С. 539-544.

[3] Y. Sibuya, Linear Differential Equations in the Complex Domain: Problems of Analytic Continuation // Providence: AMS, 1985.

[4] А. Д. Брюно. Асимптотики и разложения решений обыкновенного дифференциального уравнения // УМН, 2004, т. 59, № 3. С. 31-80.

[5] A. D. Bruno. Power Geometry as a new calculus // Analysis and Applications - ISAAC 2001 (Eds. H.G.W. Begehr, R.P. Gilbert and M.W. Wong). Kluwer Academic Publishers: Dordrecht/ Boston/ London, 2003, p. 51-71.

[6] Ж. П. Рамис. Расходящиеся ряды и асимптотическая теория // Ин-т компьютерных исследований, Москва–Ижевск, 2002.