



Абрашкин В.И., Воронов К.Е.,
Пияков И.В., Пузин Ю.Я.,
Сазонов В.В., Сёмкин Н.Д.,
Чебуков С.Ю.

Определение
вращательного движения
спутника «Бион М-1»
средствами аппаратуры
ГРАВИТОН

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Определение вращательного движения спутника «Бион М-1» средствами аппаратуры ГРАВИТОН / В.И.Абрашкин [и др.] // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2014. № 2. 44 с. URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2014-2>

**РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
Ордена Ленина
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
им. М.В.Келдыша**

**В.И. Абрашкин, К.Е. Воронов, И.В. Пияков, Ю.Я. Пузин,
В.В. Сазонов, Н.Д. Сёмкин, С.Ю. Чебуков**

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ СПУТНИКА
«БИОН М-1» СРЕДСТВАМИ АППАРАТУРЫ ГРАВИТОН**

Москва – 2014

Аннотация

Реконструировано фактическое управляемое вращательное движение спутника «Бион М-1» в режимах орбитальной и одноосной солнечной ориентации. Реконструкция выполнена по данным бортовых измерений векторов угловой скорости и напряженности магнитного поля Земли (МПЗ). Методика реконструкции основана на кинематических уравнениях вращательного движения твердого тела. В рамках этой методики данные измерений обоих типов, собранные на некотором отрезке времени, обрабатываются совместно. Измерения угловой скорости интерполируются кусочно-линейными функциями, которые подставляются в кинематические дифференциальные уравнения для кватерниона, задающего переход от приборной системы координат спутника к инерциальной (второй геоэкваatorialной) системе координат. Полученные таким образом уравнения представляют собой кинематическую модель вращательного движения спутника. Решение этих уравнений, аппроксимирующее фактическое движение, находится из условия наилучшего (в смысле метода наименьших квадратов) согласования данных измерений вектора напряженности МПЗ с его расчетными значениями. Описанная методика позволяет реконструировать фактическое вращательное движение спутника одним решением кинематических уравнений на интервалах времени продолжительностью более 5 часов. Найденные реконструкции использованы для расчета остаточных микроускорений.

V.I.Abrashkin, K.E.Voronov, I.V.Piyakov, Yu.Ya.Puzin, V.V. Sazonov, N.D.Semkin, S.Yu.Chebukov. Determining the spacecraft Bion M-1 attitude motion by means of the workstation Graviton. The paper presents the results of reconstruction of the spacecraft Bion M-1 attitude motion in two orientation modes: the orbital orientation and the single-axis solar orientation ones. The reconstruction is based on processing the measurements of two vectors: the spacecraft angular rate and the strength of the Earth magnetic field. The processing technique uses kinematical equations of the attitude motion of a rigid body. In its framework, the measurement data of both types, collected on a time interval, are processed jointly. The angular rate data are interpolated by piecewise linear functions and those functions are substituted in kinematical equations for components of the quaternion, which defines a transformation of the spacecraft coupled coordinate system to the inertial one. The equations obtained present the kinematical model of a spacecraft attitude motion. The solution of the equations, which approximates the real motion, is found by the least squares method from the condition of the best agreement between measurement and calculation data of the magnetic strength. The technique allows to reconstruct the attitude motion on time intervals more than 5 hours. The found reconstructions are used for calculation of residual accelerations onboard the spacecraft.

1. Задачи, решаемые аппаратурой ГРАВИТОН. Космический аппарат (КА) научного назначения «Бион М-1» разработан ФГУП ГНПРКЦ «ЦСКБ-Прогресс» и находился на орбите с 19 апреля по 19 мая 2013 года. В процессе функционирования КА совершил ряд динамических операций, обусловленных переходом с орбиты выведения на рабочую почти круговую орбиту с высотой около 570 км, отделением дополнительной полезной нагрузки (микроспутников и малого космического аппарата «Аист») и возвращением спускаемой капсулы на Землю. Основным режим полета КА – ориентация на Солнце нормали к плоскости солнечных батарей.

Анализ микрогравитационной обстановки на борту КА выполнялся расчетным путем наземными средствами автоматизированного рабочего места (АРМ) аппаратуры ГРАВИТОН. Бортовая часть этой аппаратуры изготовлена Самарским государственным аэрокосмическим университетом, программно-математическое и информационное обеспечение аппаратуры и АРМ разработано ГНПРКЦ «ЦСКБ-Прогресс», программно-математическое обеспечение для реконструкции вращательного движения КА и расчета остаточных микроускорений разработано ИПМ им. М. В. Келдыша РАН. Аппаратура ГРАВИТОН получала параметры движения КА от штатных бортовых устройств, измеряла магнитное поле внутри капсулы и передавала эти данные в телеметрическую систему КА, через которую они два раза в сутки передавались на Землю.

Во время полета КА «Бион М-1» с помощью АРМ оперативно обрабатывалась следующая телеметрическая информация: 1) измерения фазового вектора орбитального движения, выполняемые аппаратурой спутниковой навигации; 2) измерения угловой скорости КА, получаемые от системы управления движением; 3) измерения напряженности магнитного поля Земли (МПЗ), выполняемые бортовой частью аппаратуры ГРАВИТОН. Полученные результаты позволили реконструировать движение КА и на основе этой реконструкции рассчитать реальные остаточные микроускорения в области низких частот – менее 0.01 Гц. Именно эта область наиболее важна для интерпретации большинства космических экспериментов по микрогравитации.

Ниже приведены результаты послеполетной обработки информации, полученной на «Бионе М-1». Эта информация взята из памяти бортовых устройств и заметно полнее телеметрической. Во-первых, она покрывает более продолжительные отрезки времени. Измерения фазового вектора и угловой скорости имеются для первых 26 суток полета, а магнитные измерения – для всего полета (30 суток). Оперативные данные охватывали значительную часть суток, содержали продолжительные сплошные массивы, но все же были выборочными. Во-вторых, практически все послеполетные данные имеют шаг по времени 12 с. В оперативных данных измерения аппаратуры спутниковой навигации и магнитные измерения имели шаг по времени 1 мин.

2. Обработка измерений от бортовых средств навигации КА. Аппаратура спутниковой навигации (АСН) выдавала измерения координат и компонент скорости КА относительно гринвичской системы координат. Полученные данные имеют шаг по времени 12 с. Они обрабатывались методом наименьших

квадратов с использованием двух математических моделей: приближенной аналитической модели SGP4 [1] и стандартной численной модели, основанной на дифференциальных уравнениях движения КА в гринвичской системе координат (см., например, [2]). Во второй модели нецентральность гравитационного поля Земли учитывалась с точностью до членов порядка (36,36) включительно в разложении потенциала этого поля в ряд по шаровым функциям, плотность атмосферы рассчитывалась согласно модели ГОСТ Р 25645.116-2004. При формировании функционала метода наименьших квадратов ошибки в измерениях принимались некоррелированными с нулевыми математическими ожиданиями. Ошибки в координатах имели одинаковые стандартные отклонения σ , ошибки в компонентах скорости – одинаковые стандартные отклонения $w\sigma$. Коэффициент $w=1000c$ оставался неизменным, значение σ уточнялось при обработке.

Функционал минимизировался по 7 скалярным параметрам – значениям шестимерного фазового вектора КА на левом конце обрабатываемого временного отрезка с измерениями и баллистическому коэффициенту КА. Поскольку орбита КА была возмущенной (ориентация КА поддерживалась реактивными двигателями), оценки баллистического коэффициента не были надежными. В данном случае этот коэффициент рассматривался как формальный параметр согласования. Как правило, при обработке данных измерений на отрезке времени 1 сутки численная модель обеспечивала значения $\sigma < 20m$, модель SGP4 обеспечивала значения $\sigma < 300m$. С увеличением длины отрезка значения σ увеличивались, а с уменьшением – уменьшались.

Ошибки аппроксимации данных измерений АСН с помощью этих моделей иллюстрируются диаграммами остатков на рис. 1 – 4. Диаграммы построены следующим образом. Радиус-вектор и скорость КА в гринвичской системе координат, измеренные в момент времени t_k ($k=1,2,\dots; t_k < t_{k+1}$), обозначим \mathbf{r}_k и \mathbf{v}_k . Функции, аппроксимирующие эти измерения с помощью одной из принятых математических моделей, обозначим $\mathbf{r}(t)$, $\mathbf{v}(t)$: $\mathbf{r}(t_k) \approx \mathbf{r}_k$, $\mathbf{v}(t_k) \approx \mathbf{v}_k$. Пусть $\mathbf{V}(t) = \mathbf{v}(t) + \boldsymbol{\omega}_E \times \mathbf{r}(t)$ – аппроксимация абсолютной геоцентрической скорости КА, $\boldsymbol{\omega}_E$ – угловая скорость Земли. Введем ортонормированные векторы

$$\mathbf{e}_1(t) = \frac{\mathbf{V}(t)}{|\mathbf{V}(t)|}, \quad \mathbf{e}_2(t) = \frac{\mathbf{r}(t) \times \mathbf{V}(t)}{|\mathbf{r}(t) \times \mathbf{V}(t)|}, \quad \mathbf{e}_3(t) = \mathbf{e}_1(t) \times \mathbf{e}_2(t) \approx \frac{\mathbf{r}(t)}{|\mathbf{r}(t)|},$$

и каждую пару остатков $\delta \mathbf{r}_k = \mathbf{r}_k - \mathbf{r}(t_k)$, $\delta \mathbf{V}_k = \mathbf{V}(t_k) - \mathbf{v}_k - \boldsymbol{\omega}_E \times \mathbf{r}_k$ будем рассматривать в ее собственном базисе с ортами $\mathbf{e}_1(t_k)$, $\mathbf{e}_2(t_k)$, $\mathbf{e}_3(t_k)$. Компоненты векторов $\delta \mathbf{r}_k$ и $\delta \mathbf{V}_k$ в этом базисе обозначим соответственно ξ_{1k} , ξ_{2k} , ξ_{3k} и η_{1k} , η_{2k} , η_{3k} . Графически компоненты остатков будем представлять ломаными, звенья которых соединяют соседние по времени точки (t_k, ξ_{1k}) , (t_k, η_{1k}) и т. д. Приведенные рисунки построены для двух типичных телеметрических файлов. Рис. 1, 3 получены с помощью численной модели, рис. 2, 4 – с помощью модели SGP4. Найденные значения σ , а также средние значения величин $|\delta \mathbf{r}_k|/\sqrt{3}$ и $|\delta \mathbf{V}_k|/\sqrt{3}$, обозначенные соответственно σ_r и σ_v , приведены в подписях к ри-

сункам. Сравнительно невысокая точность аппроксимации измерений АСН численной моделью обусловлена функционированием двигателей ориентации КА. Без такого функционирования ошибки аппроксимации были бы в два-три раза ниже. Модель SGP4 продемонстрировала свою обычную точность. Хотя эта модель почти на порядок менее точна, нежели численная, она более удобна и ее точности вполне хватает для обработки данных измерений напряженности магнитного поля Земли. Именно модель SGP4 использовалась при получении большинства представленных ниже результатов.

Удобство модели SGP4 состоит еще и в том, что при уменьшении длины обрабатываемого отрезка данных ее точность быстро возрастает, тогда как точность численной модели увеличивается менее значимо. Рис. 5, 6 иллюстрируют результаты обработки измерений АСН на коротком отрезке времени. Рис. 5 получен с использованием численной модели, рис. 6 – с помощью модели SGP4. В начале этого отрезка на рис. 5 заметно возмущение орбиты КА, которое, возможно, связано с переводом КА в режим орбитальной ориентации (см. ниже). На рис. 6 такое возмущение незаметно. Как видно из последних рисунков, сокращение продолжительности обрабатываемого отрезка с измерениями заметно повышает точность их обработки даже при наличии возмущений орбиты. В случае модели SGP4 такое повышение наиболее значительно.

3. Тестирование магнитных измерений. Аппаратура ГРАВИТОН имела три трехкомпонентных магнитометра, установленных в разных частях спускаемого аппарата и занумерованных числами 1, 2 и 3. Измерения проводились в течение всего орбитального полета. Оцифровка показаний всех магнитометров выполнялась в единые моменты времени с шагом 12 с. Компоненты измеренных векторов напряженности магнитного поля выдавались в приборной системе координат $x_1x_2x_3$. Ось x_1 этой системы параллельна продольной оси КА и направлена от спускаемой капсулы к приборному отсеку; ось x_2 перпендикулярна плоскости солнечных батарей и направлена в полупространство, к которому обращена рабочая сторона батарей; ось x_3 дополняет систему до правой.

Тестирование измерений магнитометров выполнялось тремя способами. Первый и второй способы основаны на предположении, что магнитометры должны измерять в основном МПЗ. С учетом большого числа электрических цепей на борту КА это предположение выглядит несколько наивным, однако, опыт магнитных измерений на трех последних «Фотонах» позволял надеяться, что оно окажется адекватным. Третий способ заключался в сравнении данных измерений различных магнитометров между собой.

Первый способ состоял в сравнении модуля напряженности измеренного поля с модулем напряженности МПЗ, рассчитанной с помощью модели IGRF. Сравнение модулей не требует знания ориентации магнитометра; надо знать только орбитальное движение КА. Такой подход позволяет проверить данные измерений каждого магнитометра, используя минимальную дополнительную информацию. В случае достаточно точных данных уже в рамках первого способа можно уточнить их временную привязку и постоянную систематическую ошибку (смещение нуля). Как оказалось, привязка ко времени данных магнит-

ных измерений не вполне верна, и в указанных в файле с магнитными измерениями моментах времени имеется некоторый сдвиг τ . Этот сдвиг прибавлялся ко времени привязки измерения и принимался постоянным на всем временном интервале сравнения. Постоянную систематическую ошибку в измерениях компоненты поля вдоль оси x_i обозначим Δ_i ($i=1, 2, 3$). Эти величины вычитались из соответствующих измерений и также принимались постоянными на интервале сравнения. Значения величин τ и Δ_i определялись методом наименьших квадратов из условия наилучшего совпадения на этом интервале модулей измеренного и расчетного векторов напряженности [3, 4]. Длина интервала сравнения должна быть достаточно большой – порядка суток, но в ряде случаев интересны и более короткие интервалы.

Примеры сравнения приведены на рис. 7, 8 и в левых частях рис. 9 – 11. Здесь на верхних графиках изображены две кривые $H(t)$. Одна из них выражает расчетную зависимость модуля напряженности МПЗ от времени, вторая – ломаная, звенья которой соединяют модули соседних по времени векторных измерений. Модули измерений вычислены с учетом найденных поправок. Нижний график $\Delta H(t)$ иллюстрирует рассогласование верхних графиков – из модулей измерений вычтены расчетные модули. На рис. 7 представлены короткие интервалы – по одному для каждого магнитометра. Рис. 8 иллюстрирует два длинных интервала для магнитометра 1. Левые части рис. 9 – 11 иллюстрируют три коротких интервала для магнитометра 1, на которых КА находился в режиме орбитальной ориентации (см. ниже). Найденные смещения τ и Δ_i приведены в таблице. Рядом с оценкой τ в скобках приведено ее стандартное отклонение.

Таблица. Смещения в данных магнитных измерений

Интервал	σ_H, γ	τ, c	Δ_1, γ	Δ_2, γ	Δ_3, γ
Рис. 7, слева	1164	-32(5.3)	3234	-1744	3703
Рис. 7, в центре	3377	32(17)	-1880	-696	4437
Рис. 7, справа	1507	16(6.7)	-32940	-18652	48535
Рис. 8, слева	1002	-40(1.7)	2854	-1529	4603
Рис. 8, справа	1146	-48(1.2)	775	-2532	5723
Рис. 9	132	-68(1.0)	-1980	-1425	4180
Рис. 10	113	-58(1.0)	-1918	-1311	4083
Рис. 11	397	-60(0.9)	-587	-1173	4878

Анализ рисунков показывает, что скорректированные измерения магнитометра 1 наиболее точно согласуются с МПЗ – примерно так же, как на «Фотоне М-2» (см. рис. 8 и левые графики на рис. 7 и 9 – 11). Измерения магнитометра 2, даже скорректированные (средние графики на рис. 7), заметно отличаются от МПЗ, измерения магнитометра 3 (правые графики на рис. 7) неплохо согласуются с МПЗ, но смещения Δ_i весьма велики. Последнее обстоятельство

может быть причиной большой разницы в оценках τ для магнитометров 1 и 3. Видимо, вблизи магнитометра 3 было заметное магнитное поле от токовых систем КА. Ниже при определении движения КА используются только измерения магнитометра 1.

Второй способ тестирования магнитных измерений – более детальный. Он использует измерения, выполненные в режиме орбитальной ориентации КА. Для описания этого режима введем так называемую орбитальную систему координат $X_1X_2X_3$. Ее ось X_3 направлена по геоцентрическому радиусу-вектору центра масс КА, ось X_2 направлена по вектору орбитального кинетического момента КА, ось X_1 дополняет систему до правой.

В режиме орбитальной ориентации ось x_2 приборной системы координат КА направлена по оси X_3 , ось x_3 этой системы направлена противоположно оси X_2 . Будем считать, что поддержание орбитальной ориентации выполняется точно. Такое предположение и знание орбиты КА позволяет рассчитать компоненты напряженности МПЗ в приборной системе. Обозначим эти компоненты h_1 , h_2 и h_3 . Графики зависимости этих компонент от времени для трех интервалов поддержания орбитальной ориентации КА изображены в средних частях рис. 9 – 11 (плавные кривые). Более точно: здесь верхние, средние и нижние графики суть графики величин $-h_3$, $-h_2$ и h_1 . Причина смены знаков и порядка следования состоит в следующем.

Компоненты напряженности магнитного поля, измеряемые магнитометром 1, в его собственной системе координат (эта система – левая!) обозначим H_1 , H_2 и H_3 . Согласно проектной документации имеют место соотношения $H_1 = -h_3$, $H_2 = -h_2$, $H_3 = h_1$. Таким образом, плавные кривые в средних частях на рис. 9 – 11 суть графики расчетных аналогов измерений магнитометра 1 в режиме орбитальной ориентации КА. Реальные измерения отличаются от расчетных аналогов из-за разного рода ошибок. Наиболее значительные ошибки обусловлены смещениями нулей чувствительных элементов магнитометра. В данном случае смещения нулей удастся устранить, полагая их постоянными на интервале поддержания орбитальной ориентации. В рамках этого допущения смещение по каждой векторной компоненте оценивается как среднее значение разности между ее измерениями и значениями соответствующего расчетного аналога. Усреднение выполняется по моментам времени с измерениями, попавшим на рассматриваемый временной интервал. При этом учитывается указанный в таблице сдвиг в привязке магнитных измерений ко времени. Данные измерений магнитометра 1 с устраненными смещениями нулей представлены ломаными в средних частях рис. 9 – 11 рядом с графиками расчетных аналогов этих данных, а найденные описанным способом смещения в измерениях приведены в подрисуночных подписях. Эти смещения заметно отличаются от смещений, указанных в таблице.

Графики в средних частях рис. 9 – 11 показывают, что скорректированные данные измерений хорошо согласуются со своими расчетными аналогами.

В правых частях рис. 9 – 11 приведены графики разностей скорректированных измерений и их расчетных аналогов. Эти графики – ломаные, ординаты вершин которых – указанные разности, а абсциссы вершин – моменты измерений).

Третий способ состоял в определении матрицы перехода от системы координат одного магнитометра к системе координат другого и определении постоянного сдвига между измерениями магнитометров, приведенных к одной системе координат. Если бы магнитометры измеряли магнитные поля, напряженности которых отличаются на постоянную величину, то измерения второго магнитометра, пересчитанные с учетом смещения в систему координат первого магнитометра, совпали бы с измерениями последнего. Из-за разного рода расхождений полного совпадения достичь невозможно. Однако, если оба магнитометра измеряют одно и то же поле, отличие должно быть малым. Согласующие параметры (матрица перехода и постоянные смещения) определялись методом наименьших квадратов. Методика определения этих параметров описана в [5].

Примеры такого сопоставления данных измерений магнитометров аппаратуры ГРАВИТОН приведены на рис. 12, 13. На этих рисунках представлен тот же отрезок данных, что и в правой части рис. 8. Рис. 12 иллюстрирует сопоставление измерений магнитометров 1 и 2, рис. 13 построен для магнитометров 1 и 3. В левых частях этих рисунков в каждой системе координат изображены две ломаные. Вершины одной из них – соответствуют измерениям магнитометра 1, вершины другой отвечают измерениям магнитометра 2 или 3, пересчитанным по указанному правилу в систему координат магнитометра 1. Приведем полученные оценки согласующих параметров.

При согласовании измерений магнитометров 1 и 2 стандартное отклонение ошибок в каждой векторной компоненте сравниваемых данных (для разных компонент эти стандартные отклонения принимались равными) составило 3182γ . Постоянные смещения в системе координат магнитометра 2 (2533γ , -5180γ , -711γ). Матрица перехода от системы координат магнитометра 2 к системе координат магнитометра 1

$$\begin{pmatrix} -0.5646 & 0.4789 & -0.6722 \\ -0.7148 & -0.6909 & 0.1082 \\ -0.4126 & 0.5416 & 0.7324 \end{pmatrix}.$$

При согласовании измерений магнитометров 1 и 3 стандартное отклонение ошибок в каждой векторной компоненте сравниваемых данных составило 1066γ . Постоянные смещения в системе координат магнитометра 3 (-36219γ , -1666μ , 45595γ). Матрица перехода от системы координат магнитометра 3 к системе координат магнитометра 1

$$\begin{pmatrix} -0.5646 & 0.4789 & -0.6722 \\ -0.7148 & -0.6909 & 0.1082 \\ -0.4126 & 0.5416 & 0.7324 \end{pmatrix}.$$

Судя по полученным результатам, измерения магнитометров 1 и 3 находятся в хорошем согласии друг с другом, однако постоянное смещение между ними слишком велико, что соответствует данным таблицы. Измерения магнитометров 1 и 2 согласованы заметно хуже. Это видно из графиков в правых частях рис. 12 и 13. Вообще, рассогласование в измерениях пары магнитометров 1, 2 или пары 1, 3 примерно такое же, как рассогласование измерений соответствующего магнитометра 2 или 3 с расчетным МПЗ (см. рис. 7).

Используя методику третьего способа тестирования магнитометров, можно несколько усовершенствовать второй способ. В рамках последнего можно уточнить проектную матрицу перехода от собственной системы координат магнитометра к приборной системе координат. Уточнение выполняется так. В качестве измерений второго магнитометра используются расчетные значения напряженности МПЗ в приборной системе координат. Такое уточнение было выполнено, однако его результаты оказались сопоставимыми с ошибками реализации орбитальной ориентации КА. Поскольку в рамках описываемого подхода фактически уточняется матрица перехода от системы координат магнитометра к орбитальной системе, обработка магнитных измерений выполнялась с проектной матрицей перехода.

4. Реконструкция вращательного движения КА. Методика реконструкции. Реконструкция вращательного движения КА «Бион М-1» выполнялась по измерениям его угловой скорости и напряженности МПЗ. Методика реконструкции основана на кинематических уравнениях вращательного движения твердого тела. Опишем математические модели и приведем основные соотношения, используемые в этой методике.

Для описания вращательного движения КА используются три правые декартовы системы координат: введенные в предыдущем разделе приборная и орбитальная системы, а также система $Y_1Y_2Y_3$, в которой задаются двухстрочные элементы. Последняя переводится в гринвичскую систему координат поворотом вокруг оси Y_3 на угол, равный среднему звездному времени. Таким образом, система $Y_1Y_2Y_3$ весьма близка ко второй геоэкваториальной системе координат эпохи даты. В частности, плоскость Y_1Y_2 совпадает с плоскостью экватора, ось Y_3 – ось вращения Земли. Систему $Y_1Y_2Y_3$ считаем инерциальной.

Положение приборной системы $x_1x_2x_3$ относительно системы $Y_1Y_2Y_3$ зададим нормированным кватернионом $Q = (q_0, q_1, q_2, q_3)$, $q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 = 1$. Кватернионная формула перехода между этими системами координат имеет вид: $(0, Y_1, Y_2, Y_3) = Q \circ (0, x_1, x_2, x_3) \circ Q^{-1}$. Матрицу перехода от приборной системы к системе $Y_1Y_2Y_3$ обозначим $A = \| a_{ij} \|_{i,j=1}^3$, где a_{ij} – косинус угла между осями Y_i и x_j . Элементы этой матрицы выражаются через компоненты Q с помощью формул

$$\begin{aligned}
a_{11} &= q_0^2 + q_1^2 - q_2^2 - q_3^2, & a_{12} &= 2(q_1q_2 - q_0q_3), & a_{13} &= 2(q_1q_3 + q_0q_2), \\
a_{21} &= 2(q_2q_1 + q_0q_3), & a_{22} &= q_0^2 + q_2^2 - q_1^2 - q_3^2, & a_{23} &= 2(q_2q_3 - q_0q_1), \\
a_{31} &= 2(q_3q_1 - q_0q_2), & a_{32} &= 2(q_3q_2 + q_0q_1), & a_{33} &= q_0^2 + q_3^2 - q_1^2 - q_2^2.
\end{aligned}$$

Положение приборной системы координат относительно орбитальной системы ниже рассматривается в случае, когда КА находится в орбитальной ориентации. Тогда матрица перехода от приборной системы к орбитальной весьма близка к матрице

$$\begin{vmatrix} 1 & -\alpha_3 & \alpha_2 \\ \alpha_2 & -\alpha_1 & -1 \\ \alpha_3 & 1 & -\alpha_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & -\alpha_3 & \alpha_2 \\ \alpha_3 & 1 & -\alpha_1 \\ -\alpha_2 & \alpha_1 & 0 \end{vmatrix}.$$

Здесь α_i – компоненты вектора бесконечно малого поворота приборной системы относительно ее номинального положения в орбитальной ориентации. Эти компоненты имеют следующий смысл: α_1 – угол крена, α_2 – угол рысканья, α_3 – угол тангажа.

Орбитальное движение КА на представляющем интерес временном интервале описывается с помощью модели SGP4. Параметры модели определяются по данным измерений АСН (см. раздел 2). Математическую модель вращательного движения КА построим на основе кинематических уравнений, которым должен удовлетворять кватернион Q . Эти уравнения имеют вид

$$\begin{aligned}
2\dot{q}_0 &= -q_1\omega_1 - q_2\omega_2 - q_3\omega_3, & 2\dot{q}_1 &= q_0\omega_1 + q_2\omega_3 - q_3\omega_2, \\
2\dot{q}_2 &= q_0\omega_2 + q_3\omega_1 - q_1\omega_3, & 2\dot{q}_3 &= q_0\omega_3 + q_1\omega_2 - q_2\omega_1.
\end{aligned} \tag{1}$$

Здесь точка над символом означает дифференцирование по времени, ω_1 , ω_2 и ω_3 – компоненты абсолютной угловой скорости КА в приборной системе координат.

Измерения величин ω_i выполнялись непрерывно в течение большей части полета. Данные этих измерений представлены в цифровом виде на единой временной сетке с постоянным шагом 12 с. По этим данным построены непрерывные кусочно-линейные функции $\Omega_i(t)$ ($i=1, 2, 3$), которые в узлах сетки совпадают с данными измерений величин ω_i , а в промежутках между узлами линейны. Однако в уравнения (1) подставлялись не эти функции, а выражения

$$\omega_i = \Omega_i(t) + \chi_i \quad (i=1, 2, 3), \tag{2}$$

где χ_i – постоянные смещения в измерениях. Уравнения (1), (2) использовались на интервалах времени не более нескольких часов, причем смещения χ_i служили уточняемыми параметрами. В такой ситуации предположение о постоянстве этих величин оказалось вполне адекватным.

Опишем применение уравнений (1), (2) для обработки магнитных измерений, выполненных на отрезке $I = \{t: t_a \leq t \leq t_b\}$. Эти измерения также заданы на временной сетке с постоянным шагом 12с, но ее узлы не совпадают с узлами сетки, на которой заданы функции $\Omega_i(t)$. К тому же (см. раздел 3), сетку магнитных измерений приходилось смещать относительно шкалы времени АСН, используемой и для привязки измерений угловой скорости, чтобы достичь наилучшего согласования с расчетным магнитным полем. Магнитные измерения обозначим

$$t_k, h_1^{(k)}, h_2^{(k)}, h_3^{(k)} \quad (k = \dots, 0, 1, 2, \dots).$$

Величины $h_i^{(k)}$ представляют собой компоненты вектора измерений магнитометра 1 в приборной системе координат, привязанные в файле с магнитными данными к моменту времени t_k . Фактический момент времени, к которому следует привязать измерения $h_i^{(k)}$, обозначим $t_k + \tau$. Полагаем, что на отрезке I сдвиг τ остается неизменным, причем $\tau \ll t_b - t_a$.

Следуя методу наименьших квадратов, реконструкцией фактического движения спутника на отрезке I будем считать решение уравнений (1), (2), доставляющее минимум функционалу

$$\Phi = \sum_{i=1}^3 \left\{ \sum_{k \in U(\tau)} [h_i^{(k)} - \hat{h}_i(t_k + \tau)]^2 - N_\tau \Delta_i^2 \right\}, \quad (3)$$

$$\Delta_i = \frac{1}{N_\tau} \sum_{k \in U(\tau)} [h_i^{(k)} - \hat{h}_i(t_k + \tau)], \quad U(\tau) = \{k: t_k + \tau \in I\},$$

$$\hat{h}_i(t) = \sum_{j=1}^3 H_j(t) a_{ji}(t).$$

Здесь Δ_i – постоянные смещения в измерениях МПЗ, $H_i(t)$ – расчетные значения компонент напряженности МПЗ в системе координат $Y_1Y_2Y_3$ в момент времени t , N – число элементов множества U . Функции $H_j(t)$ строятся с использованием модели орбитального движения SGP4 и аналитической модели МПЗ IGRF. Функционал (3) получен преобразованием функционала метода наименьших квадратов, возникающего при уравнивании соотношений $h_i^{(k)} \approx \hat{h}_i(t_k + \tau) + \Delta_i$ ($i = 1, 2, 3; k \in U(\tau)$). Минимизация Φ выполняется по начальным условиям решения $q_j^\circ = q_j(t_a)$ ($j = 0, 1, 2, 3$) и параметрам χ_i ($i = 1, 2, 3$), τ . При этом учитывается условие нормировки

$$q_0^2(t_a) + q_1^2(t_a) + q_2^2(t_a) + q_3^2(t_a) = 1. \quad (4)$$

Для простоты письма объединим величины q_j° и χ_i в один семимерный вектор z и будем рассматривать функционал (3) как функцию $\Phi(z, \tau)$. Минимизация Φ по z и τ сводилась к вычислению функции

$$\Phi_1(\tau) = \max_z \Phi(z, \tau)$$

в последовательности точек τ_n , сходящейся к пределу $\tau_* = \operatorname{argmin} \Phi_1(\tau)$. Минимизация Φ по z при фиксированном значении τ выполнялась в несколько этапов разными методами. Некоторые детали этой минимизации описаны ниже. Выделение переменной τ из полного набора аргументов Φ вызвано ее особой ролью (в частности, зависимость $\Phi_1(\tau)$ от τ в окрестности точки τ_* – довольно слабая) и желанием упростить вычисления. Для упрощения программного кода временной отрезок I и обрабатываемый отрезок магнитных измерений выбирались таким образом, чтобы множество $U(\tau)$ не менялось в окрестности точки τ_* . Оценка этой окрестности вместе и предварительная оценка τ_* находились при проверке согласованности модуля напряженности измеренного магнитного поля с модулем напряженности МПЗ (см. раздел 3).

Описание минимизации функции Φ по z начнем с заключительного этапа, на котором применялся метод Гаусса – Ньютона [6]. На каждой итерации этого метода поправки $\Delta q_j(t_a)$ к имеющимся значениям $q_j(t_a)$ ищутся в виде (ср. уравнения (1))

$$\begin{aligned} \Delta q_0(t_a) &= -\frac{1}{2}[\theta_1 q_1(t_a) + \theta_2 q_2(t_a) + \theta_3 q_3(t_a)], \\ \Delta q_1(t_a) &= \frac{1}{2}[\theta_1 q_0(t_a) + \theta_3 q_2(t_a) - \theta_2 q_3(t_a)], \\ \Delta q_2(t_a) &= \frac{1}{2}[\theta_2 q_0(t_a) + \theta_1 q_3(t_a) - \theta_3 q_1(t_a)], \\ \Delta q_3(t_a) &= \frac{1}{2}[\theta_3 q_0(t_a) + \theta_2 q_1(t_a) - \theta_1 q_2(t_a)]. \end{aligned} \quad (5)$$

Параметры θ_i суть компоненты вектора бесконечно малого поворота, задающего изменение ориентации спутника в окрестности положения $Q(t_a)$. Эти параметры и поправки $\Delta \chi_i$ находятся из системы нормальных уравнений с матрицей $\|C_{ij}\|_{i,j=1}^6$ и правой частью $\|D_i\|_{i=1}^6$:

$$\begin{aligned} C_{ij} &= \sum_{k \in U(\tau)} \sum_{l=1}^3 A_{li}(t_k) A_{lj}(t_k) - \frac{1}{N_\tau} \sum_{l=1}^3 B_{li} B_{lj}, \\ D_i &= \sum_{k \in U(\tau)} \sum_{l=1}^3 [h_l^{(k)} - \hat{h}_l(t_k + \tau)] A_{li}(t_k) - \frac{1}{N_\tau} \sum_{l=1}^3 \Delta_l B_{li}, \\ A_{l1}(t) &= \hat{h}_2(t) \frac{\partial \varphi_3(t)}{\partial p_i} - \hat{h}_3(t) \frac{\partial \varphi_2(t)}{\partial p_i}, \\ A_{l2}(t) &= \hat{h}_3(t) \frac{\partial \varphi_1(t)}{\partial p_i} - \hat{h}_1(t) \frac{\partial \varphi_3(t)}{\partial p_i}, \end{aligned}$$

$$A_{l3}(t) = \hat{h}_1(t) \frac{\partial \varphi_2(t)}{\partial p_i} - \hat{h}_2(t) \frac{\partial \varphi_1(t)}{\partial p_i},$$

$$B_{li} = \sum_{k \in U(\tau)} A_{li}(t_k) \quad (l=1, 2, 3; i, j=1, 2, \dots, 6).$$

Здесь p_1, p_2, \dots, p_6 – обозначения величин $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \chi_1, \chi_2, \chi_3$ в указанном порядке, $\partial \varphi_l(t) / \partial p_i$ – псевдопроизводные, служащие для представления истинных производных. В частности, в предыдущих формулах $A_{li}(t) = \partial \hat{h}_l(t) / \partial p_i$, частные производные компонент кватерниона можно представить в виде

$$\frac{\partial q_0(t)}{\partial p_i} = -\frac{1}{2} \left[\frac{\partial \varphi_1(t)}{\partial p_i} q_1(t) + \frac{\partial \varphi_2(t)}{\partial p_i} q_2(t) + \frac{\partial \varphi_3(t)}{\partial p_i} q_3(t) \right],$$

$$\frac{\partial q_1(t)}{\partial p_i} = -\frac{1}{2} \left[\frac{\partial \varphi_1(t)}{\partial p_i} q_0(t) + \frac{\partial \varphi_3(t)}{\partial p_i} q_2(t) - \frac{\partial \varphi_2(t)}{\partial p_i} q_3(t) \right],$$

$$\frac{\partial q_2(t)}{\partial p_i} = -\frac{1}{2} \left[\frac{\partial \varphi_2(t)}{\partial p_i} q_0(t) + \frac{\partial \varphi_1(t)}{\partial p_i} q_3(t) - \frac{\partial \varphi_3(t)}{\partial p_i} q_1(t) \right],$$

$$\frac{\partial q_3(t)}{\partial p_i} = -\frac{1}{2} \left[\frac{\partial \varphi_3(t)}{\partial p_i} q_0(t) + \frac{\partial \varphi_2(t)}{\partial p_i} q_1(t) - \frac{\partial \varphi_1(t)}{\partial p_i} q_2(t) \right]$$

и т. д. Псевдопроизводная – это не частная производная некоторой функции по какому-то параметру. Запись ее в виде частной производной используется лишь для удобства. Такую запись следует воспринимать как единый символ с двумя индексами. Псевдопроизводная – это вектор, являющийся аналогом угловой скорости. В кинематике твердого тела угловая скорость служит для расчета производных по времени, а псевдопроизводная используется для расчета производных по параметру (ср. выписанные выражения для $\partial q_j / \partial p_i$ с уравнениями (1) и формулами (5)). В обозначении $\partial \varphi_l(t) / \partial p_i$ индекс l указывает векторную компоненту, индекс i – номер параметра, по которому выполняется дифференцирование. Значения псевдопроизводных определяются в процессе интегрирования уравнений

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial \varphi_1}{\partial p_i} &= \frac{\partial \varphi_2}{\partial p_i} \omega_3 - \frac{\partial \varphi_3}{\partial p_i} \omega_2 + \frac{\partial \omega_1}{\partial p_i}, \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial \varphi_2}{\partial p_i} &= \frac{\partial \varphi_3}{\partial p_i} \omega_1 - \frac{\partial \varphi_1}{\partial p_i} \omega_3 + \frac{\partial \omega_2}{\partial p_i}, \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial \varphi_3}{\partial p_i} &= \frac{\partial \varphi_1}{\partial p_i} \omega_2 - \frac{\partial \varphi_2}{\partial p_i} \omega_1 + \frac{\partial \omega_3}{\partial p_i}, \end{aligned} \quad (6)$$

совместно с уравнениями (1), (2). Согласно (2) производные $\partial \omega_l / \partial p_i$ равны 1 при $i=l+3$, $l=1, 2, 3$ и равны 0 в остальных случаях. Начальные условия для $\partial \varphi_l / \partial p_i$ в точке t_a равны 1 при $i=l$, $l=1, 2, 3$ и равны 0 в остальных случаях.

Прибавление найденных поправок $\Delta q_j(t_a)$ к имеющимся значениям $q_j(t_a)$ нарушает условие (4), поэтому новый кватернион ориентации нормируется. Внесенные нормировкой изменения уточненных компонент кватерниона являются величинами второго порядка относительно $\Delta q_j(t_a)$.

Интегрирование уравнений (1), (2) и уравнений в вариациях (6) выполнялось методом Рунге-Кутты 4-го порядка. Интегрирование выполнялось с локальным контролем точности, причем узлы сетки, на которой были построены кусочно-линейные функции $\Omega_i(t)$, входили в число граничных точек шагов интегрирования. Вычисление решения в точках $t_k + \tau$ (они практически всегда оказывались внутри шагов интегрирования) выполнялось с помощью интерполяционного полинома 3-го порядка. Этот полином строился по результатам вычислений на шаге правых частей уравнений (1), (2), (6), необходимых в методе Рунге-Кутты.

Использование интерполяционного полинома и возросшее быстродействие персональных компьютеров позволили осуществлять совместную обработку всех собранных данных измерений, не проводя их предварительную обработку. Это – одно из отличий описываемой методики от методик, использованных в [7 – 9]. Другое отличие заключается в использовании компонент кватерниона Q в качестве кинематических переменных уравнений движения спутника и в способе уточнения начальных условий этих переменных при реализации метода Гаусса – Ньютона. В [7 – 9] кинематическими переменными служили две строки матрицы перехода от приборной системы к базовой системе координат, начальные условия которых параметризовались тремя углами.

Вернемся к описанию методики. Чтобы обеспечить надежную сходимость описанного процесса, надо предусмотреть возможность его регуляризации и иметь достаточно точное начальное приближение точки минимума. Регуляризация сводилась к предварительному использованию метода Левенберга – Марквардта [6] перед переходом к методу Гаусса – Ньютона. Почти всегда метод Левенберга – Марквардта плавно трансформировался в метод Гаусса – Ньютона, но иногда по окончании его работы метод Гаусса – Ньютона расходился. В таком случае в качестве z_* принимался результат, полученный методом Левенберга – Марквардта; он вполне обеспечивал требуемую точность реконструкции.

Поиск начального приближения точки минимума функции $\Phi(z, \tau)$ при обработке измерений, полученных в режиме солнечной ориентации, выполнялся так. Начальное значение τ находилось посредством согласования модуля напряженности измеренного магнитного поля с модулем напряженности МПЗ (см. раздел 3). При таком значении τ и $\chi_1 = \chi_2 = \chi_3 = 0$ вычислялось решение уравнений (1), (2) с начальным условием

$$Q(t_a) = Q_2(\varphi) \circ Q_1,$$

$$Q_2(\varphi) = \left(\cos \frac{\varphi}{2}, S_1 \sin \frac{\varphi}{2}, S_2 \sin \frac{\varphi}{2}, S_3 \sin \frac{\varphi}{2} \right),$$

$$Q_1 = \left(\sqrt{\frac{1+S_2}{2}}, \frac{S_3}{\sqrt{2(1+S_2)}}, 0, -\frac{S_1}{\sqrt{2(1+S_2)}} \right).$$

Здесь S_1, S_2, S_3 – компоненты орта \mathbf{s} «Земля – Солнце» в момент t_a в системе координат $Y_1Y_2Y_3$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$. При подходящем выборе угла φ кватернион $Q = Q_2(\varphi) \circ Q_1$ описывает все положения КА, в котором его ось x_2 (нормаль к плоскости солнечных батарей) направлена по орту \mathbf{s} . Значение функционала (3) на таком решении обозначим $F(\varphi)$. Функция $F(\varphi)$ вычислялась на сетке с постоянным шагом 5° . Кватернион $Q(t_a)$, отвечающий минимальному значению F , а также использованные при вычислении F значения τ и χ_i определяли начальную точку для метода Левенберга – Марквардта.

Начальную точку для обработки измерений в режиме орбитальной ориентации составляли: значение кватерниона $Q(t_a)$, отвечающее идеальной ориентации, $\chi_1 = \chi_2 = \chi_3 = 0$ и значение τ как в предыдущем случае.

Точность аппроксимации магнитных измерений и оценки $(z_*, \tau_*) =$ будем характеризовать, следуя методу наименьших квадратов, соответствующими стандартными отклонениями. Последние вычисляются в предположении, что ошибки в измерениях некоррелированы и имеют одинаковые дисперсии, средние значения ошибок в измерениях одной и той же векторной компоненты напряженности МПЗ равны. Такой подход выбран из соображений удобства и вида функционала (3). Стандартные отклонения оценки z_* вычислялись в предположении, что значение $\tau = \tau_*$ известно. Это – так называемые условные стандартные отклонения. Вследствие соотношения (4) оценка z_* имеет вырожденную ковариационную матрицу. Чтобы избежать вырождения и сделать характеристику ошибок более наглядной, ошибки $\Delta q_j(t_a)$ в задании компонент $q_j(t_a)$ вектора z_* представим в виде (5), где теперь θ_i образуют случайный вектор бесконечно малого поворота. Величины θ_i имеют нулевые математические ожидания и вместе с ошибками остальных компонент z_* описываются ковариационной матрицей

$$K_z = \sigma_H^2 C^{-1} = \| K_{ij} \|_{i,j=1}^6, \quad \sigma_H^2 = \frac{\Phi(z_*, \tau_*)}{3N_{\tau_*} - 6}.$$

Здесь σ^2 – оценка условной дисперсии ошибок в магнитных измерениях, C – матрица $\| C_{ij} \|$, вычисленная в точке (z_*, τ_*) . Точность аппроксимации измерений будем характеризовать стандартным отклонением σ_H , точность оценки z_* – условными стандартными отклонениями $\sqrt{K_{ii}}$ ($i = 1, 2, \dots, 6$). Условные стандартные отклонения величин θ_i и χ_i будем обозначать $\sigma_{\theta i}$, $\sigma_{\chi i}$.

Безусловное стандартное отклонение σ_τ оценки τ_* вычислялось по формуле

$$\sigma_\tau^2 = 2\Phi(z_*, \tau_*) \left[(3N_{\tau_*} - 7) \frac{d^2\Phi_1(\tau_*)}{d\tau^2} \right]^{-1}.$$

Вторая производная здесь вычислялась разностным способом.

Примеры реконструкции приведены на рис. 14 – 25. Рисунки образуют пары, относящиеся к шести обработанным интервалам времени. Рис. 14 – 19 иллюстрируют интервалы орбитальной ориентации, рис. 20 – 25 – интервалы солнечной ориентации. Каждый из указанных рисунков естественным образом разбивается на две части – левую и правую. На рисунках с четными номерами (14, 16, ...) в левых частях приведены графики зависимости от времени углов, характеризующих ориентацию спутника. На рис. 14, 16 и 18 это – введенные выше углы $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$. Графики этих углов показывают, насколько точно КА поддерживал орбитальную ориентацию. Движение КА в орбитальной ориентации было реконструировано, главным образом, для проверки описываемой методики. Поскольку эти углы оказались малыми (особенно показателен рис. (18)), можно считать, что методика этот тест выдержала.

На рис. 20, 22, 24 верхние левые графики – это графики углов α и β , характеризующих отклонения оси x_2 от направления на Солнце – от орта \mathbf{s} . Они вычисляются по формулам

$$\alpha = \arcsin \frac{a_{22}S_1 - a_{12}S_2}{\sqrt{S_1^2 + S_2^2}}, \quad \beta = \arcsin \left[a_{32} \sqrt{S_1^2 + S_2^2} - \frac{S_3(a_{12}S_1 + a_{22}S_2)}{\sqrt{S_1^2 + S_2^2}} \right].$$

Эти углы отсчитываются в перпендикулярных плоскостях, пересекающихся по прямой «Земля – Солнце». Плоскость отсчета угла β содержит ось Y_3 . Направление отсчета этого угла – на север, направление отсчета угла α – на восток. Как видно из графиков углов α и β , ошибка солнечной ориентации КА на представленных отрезках данных была допустимой. Внизу слева на этих рисунках – график функции

$$\zeta(t) = \mathbf{r} \cdot \mathbf{s} + \sqrt{|\mathbf{r}|^2 - R_E^2},$$

где $R_E = 637814$ км – радиус Земли, принятой шаром. Эта функция характеризует тень Земли: в тени $\zeta < 0$, на свету $\zeta > 0$. Для удобства анализа рядом с графиком $\zeta(t)$ проведена прямая $\zeta = 0$.

В правых частях рисунков с четными номерами приведены графики функций (2). Значения сдвигов χ_i найдены из обработки магнитных измерений на соответствующем временном интервале.

Рисунки с нечетными номерами характеризуют магнитные измерения. В левых частях этих рисунков приведены графики функций $\hat{h}_i(t)$ (см. (3)) и ломаные, проходящие через точки $(t_k, h_i^{(k)} - \Delta_i)$, $k \in U(\tau_*)$. Каждая ломаная и гра-

фик аппроксимирующей ее функции $\hat{h}_i(t)$ изображены в единой системе координат. Ломаные и аппроксимирующие их графики практически совпадают, поэтому в правых частях этих рисунков приведены ломаные, проходящие через точки $(t_k, h_i^{(k)} - \hat{h}_i(t_k) - \Delta_i)$, $k \in U(\tau_*)$.

Приведем некоторые числовые характеристики двух реконструкций. В реконструкции на рис. 18, 19

$$\begin{aligned}\sigma_H &= 409\gamma, \quad \tau = -62.5\text{с}, \quad \Delta_1 = 4765\gamma, \quad \Delta_2 = 1093\gamma, \quad \Delta_3 = -544\gamma, \\ \chi_1 &= 4.86 \cdot 10^{-6} \text{с}^{-1}, \quad \chi_2 = 2.187 \cdot 10^{-5} \text{с}^{-1}, \quad \chi_3 = 6.5 \cdot 10^{-7} \text{с}^{-1}, \\ \sigma_\tau &= 0.63\text{с}, \quad \sigma_{\theta_1} = 0.0007\text{с}, \quad \sigma_{\theta_2} = 0.0010, \quad \sigma_{\theta_3} = 0.0009\text{с}, \\ \sigma_{\chi_1} &= 1.0 \cdot 10^{-6} \text{с}^{-1}, \quad \sigma_{\chi_2} = 5.3 \cdot 10^{-7} \text{с}^{-1}, \quad \sigma_{\chi_3} = 1.5 \cdot 10^{-7} \text{с}^{-1}.\end{aligned}$$

В реконструкции на рис. 20, 21

$$\begin{aligned}\sigma_H &= 643\gamma, \quad \tau = -38.9\text{с}, \quad \Delta_1 = 5348\gamma, \quad \Delta_2 = 966\gamma, \quad \Delta_3 = -1777\gamma, \\ \chi_1 &= 3.6 \cdot 10^{-7} \text{с}^{-1}, \quad \chi_2 = 6.78 \cdot 10^{-6} \text{с}^{-1}, \quad \chi_3 = 1.7 \cdot 10^{-7} \text{с}^{-1}, \\ \sigma_\tau &= 1.1\text{с}, \quad \sigma_{\theta_1} = 0.0015, \quad \sigma_{\theta_2} = 0.0015, \quad \sigma_{\theta_3} = 0.0012, \\ \sigma_{\chi_1} &= 1.3 \cdot 10^{-7} \text{с}^{-1}, \quad \sigma_{\chi_2} = 1.2 \cdot 10^{-7} \text{с}^{-1}, \quad \sigma_{\chi_3} = 1.0 \cdot 10^{-7} \text{с}^{-1}.\end{aligned}$$

Для остальных примеров некоторые характеристики приведены в подписях к рисункам. Там указаны τ , σ_H и Δ_i . Характеристики всех обработанных интервалов примерно одинаковы. Следует отметить малость смещений в показаниях угловой скорости. Вообще, движение КА в режиме солнечной ориентации было довольно однообразным.

Результаты разделов 2 – 4 полностью соответствуют результатам оперативной обработки телеметрической информации во время полета.

5. Расчет микроускорений. После того как движение КА найдено, можно рассчитать микроускорение в любой заданной точке борта в функции времени. Результаты такого расчета для движений, представленных на рис. 22 – 25, приведены на рис. 26. Микроускорения рассчитаны в точке, задаваемой радиусом-вектором $(-1\text{м}, -0.9\text{м}, 0.2\text{м})$ относительно центра масс КА. Компоненты этого вектора и компоненты микроускорений на рисунке относятся к приборной системе координат КА. Строго говоря, приведенные результаты являются неполными. Методически правильные результаты получены только для плавных участков графиков на рис. 26. В окрестностях пиковых значений рассчитанных функций значения последних далеки от реальных. Во-первых, при расчете микроускорений не учтен вклад силы, создаваемой двигателями ориентации; во-вторых, создаваемое соответствующим моментом угловое ускорение КА «размазано» на несколько больший промежуток времени, чем это было в действительности. Такое размазывание – следствие сглаживания данных измерений угловой скорости, заданных на временной сетке с достаточно редкими узлами (напомним, шаг сетки 12 с). Аккуратное моделирование показывает, что реальные пики микроускорений имеют продолжительность нескольких десятых

долей секунды и величины порядка 10^{-3} м/с^2 и более (с формальной точки зрения пики – это уже высокочастотные микроускорения).

Данная работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 14-01-00423).

Литература

1. Hoots F.R., Roehrich R.L. Models for propagation of NORAD element sets. Spacetrack report No. 3. 1988.
2. Петров Б.Н., Бажинов И.К. (ред.). Навигационное обеспечение полета орбитального комплекса «Салют-6» – «Союз» – Прогресс». М., Наука, 1985.
3. Абрашкин В.И., Богоявленский Н.Л., Воронов К.Е., Казакова А.Е., Пузин Ю.Я., Сазонов В.В., Семкин Н.Д., Чебуков С.Ю. Неуправляемое вращательное движение спутника «Фотон М-2» и квазистатические микроускорения на его борту // Космические исследования. 2007. Т. 45. № 5. С. 450-470.
4. Бойзелинк Т., Ван Бавинхов К., Абрашкин В.И., Казакова А.Е., Сазонов В.В. Определение вращательного движения спутника «Фотон М-3» по данным бортовых измерений магнитного поля Земли // Космические исследования. 2010. Т. 48. № 3. С. 252-265.
5. Панкратов В.А., Сазонов В.В. Проверка согласованности данных измерений магнитометров, установленных на борту ИСЗ // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. 2010. № 42. URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2010-42>
6. Гилл Ф., Мюррей У., Райт М. Практическая оптимизация. М., Мир, 1985.
7. Абрашкин В.И., Волков М.В., Воронов К.Е., Егоров А.В., Казакова А.Е., Панкратов В.А., Сазонов В.В., Семкин Н.Д. Определение вращательного движения спутника по данным измерений его угловой скорости и напряженности магнитного поля Земли с использованием кинематической модели движения // Космические исследования. 2005. Т. 43. № 4. С. 295-305.
8. Абрашкин В.И., Богоявленский Н.Л., Воронов К.Е., Казакова А.Е., Панкратов В.А., Сазонов В.В., Семкин Н.Д., Стратилатов Н.Р. Определение вращательного движения спутника «Фотон М-2» по данным измерений его угловой скорости и напряженности магнитного поля Земли с использованием кинематической модели движения // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. 2006. № 60.
URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2006-60>
9. Бойзелинк Т., Ван Бавинхов К., Абрашкин В.И., Казакова А.Е., Панкратов В.А., Сазонов В.В. Определение вращательного движения спутника «Фотон М-3» по данным измерений его угловой скорости и напряженности магнитного поля Земли // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша РАН. 2009. № 70. URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2009-70>

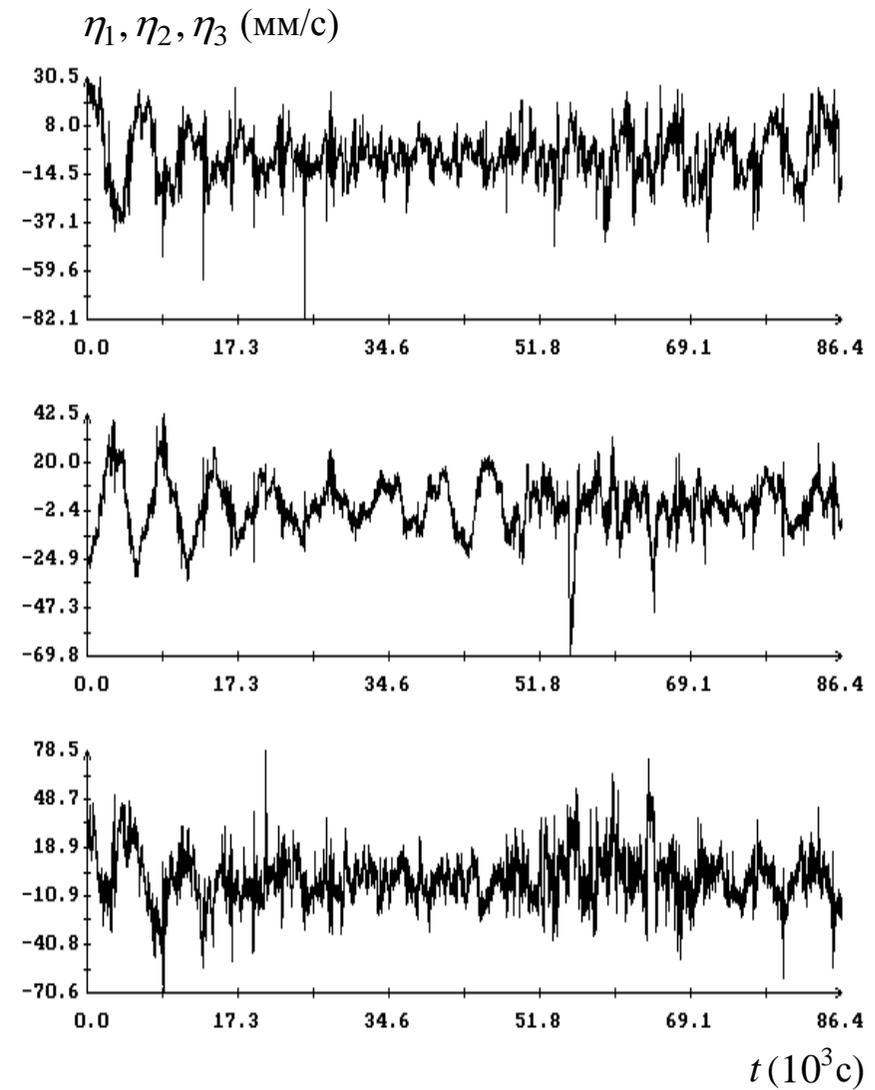
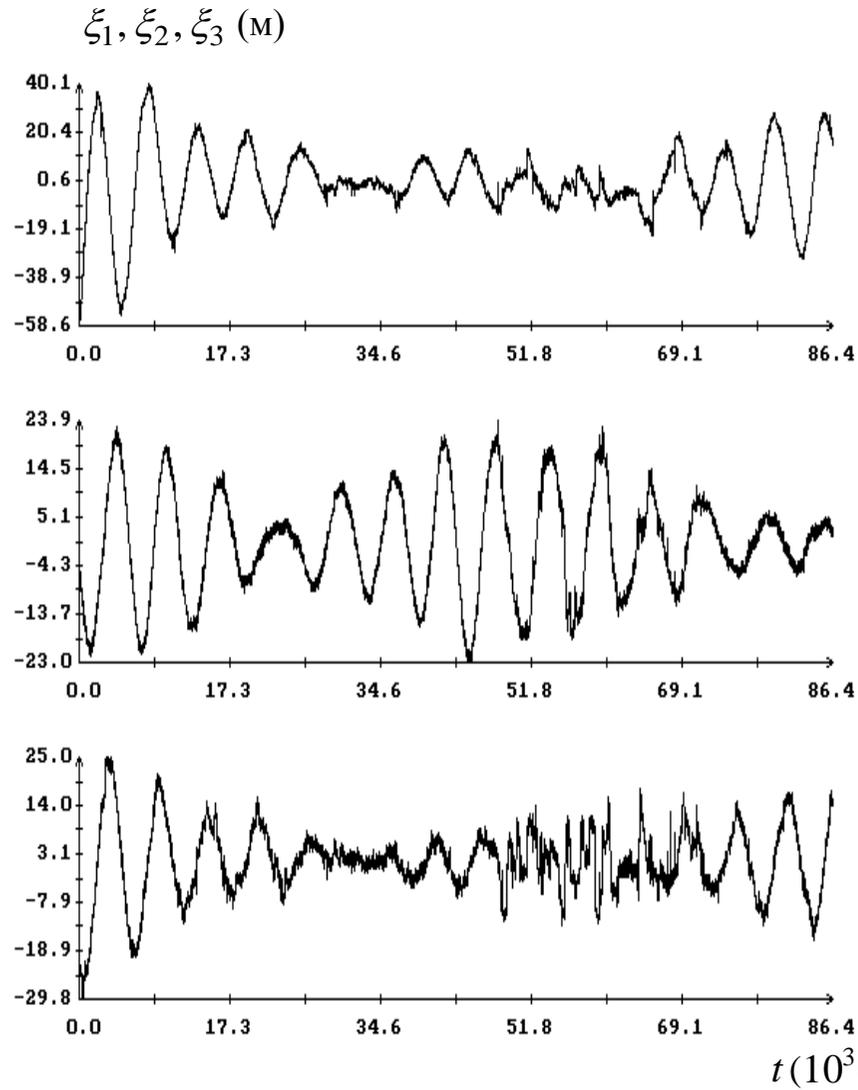


Рис. 1. Диаграммы остатков сглаживающего решения дифференциальных уравнений движения КА. Момент $t=0$ соответствует 431995 с бортового времени (20:59:55 UTC 23.04.2013), $\sigma=12.4\text{м.}$, $\sigma_r=11.2\text{м.}$, $\sigma_v=13.6\text{мм/с}$

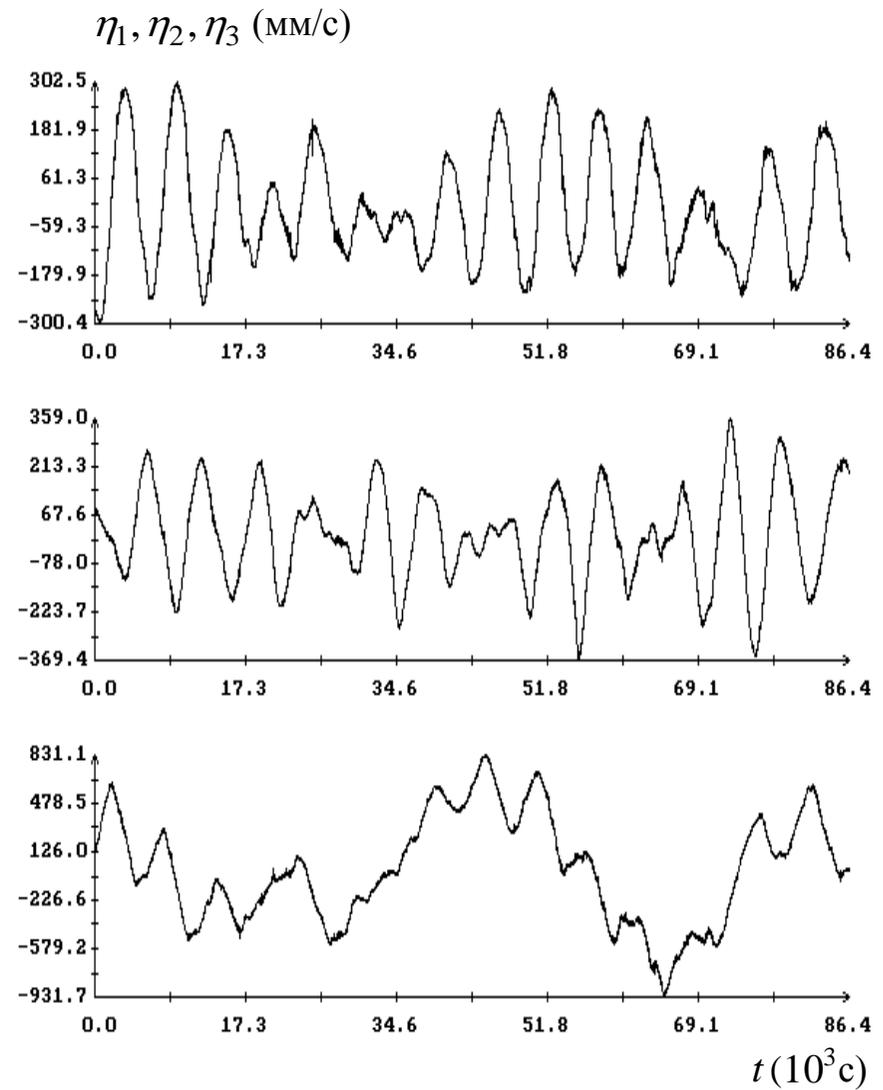
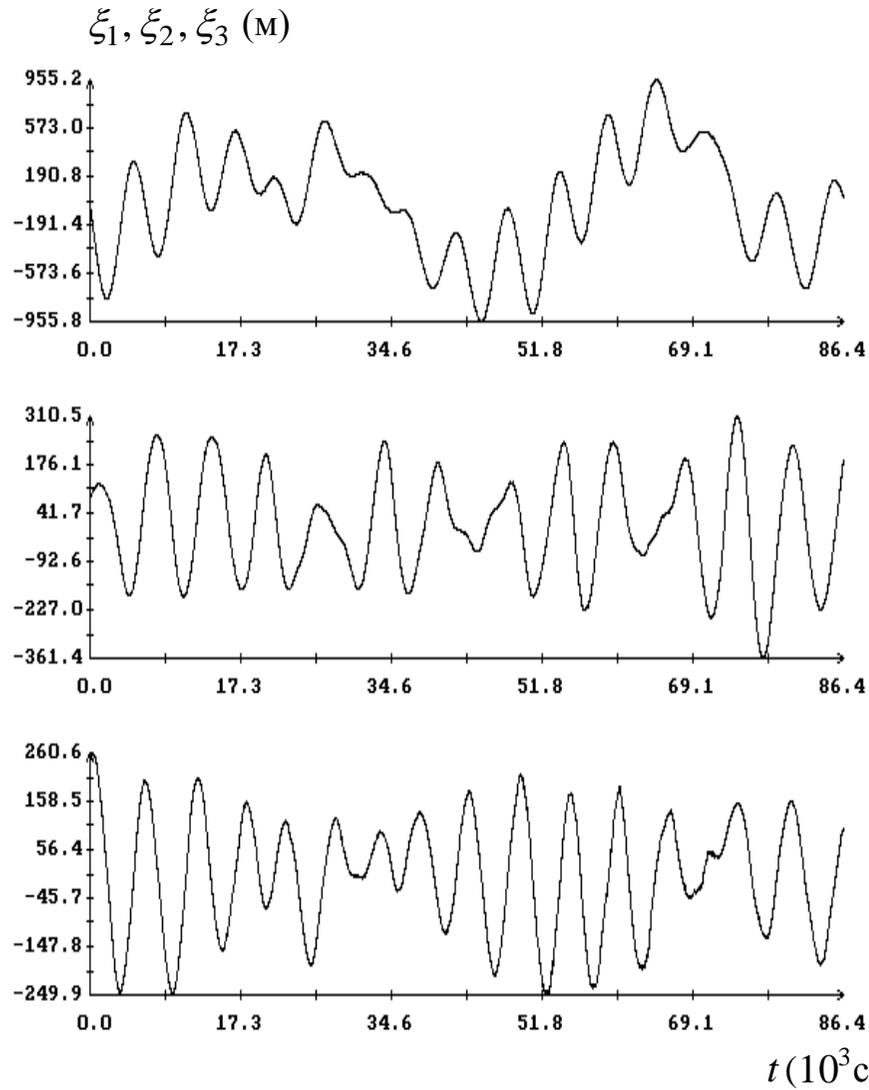


Рис. 2. Диаграммы остатков сглаживающего выражения модели SGP4. Момент $t=0$ соответствует 431995 с бортового времени (20:59:55 UTC 23.04.2013), $\sigma = 262\text{м.}$, $\sigma_r = 270\text{м.}$, $\sigma_V = 253\text{мм/с}$

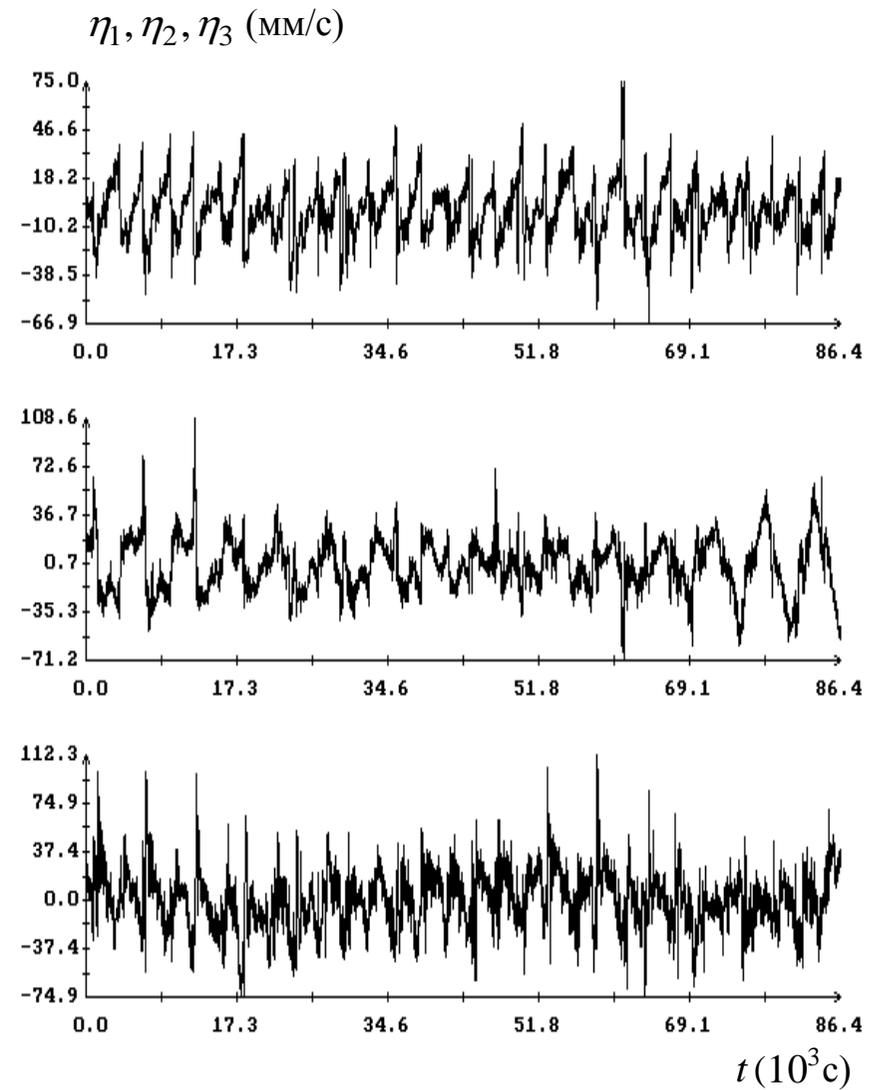
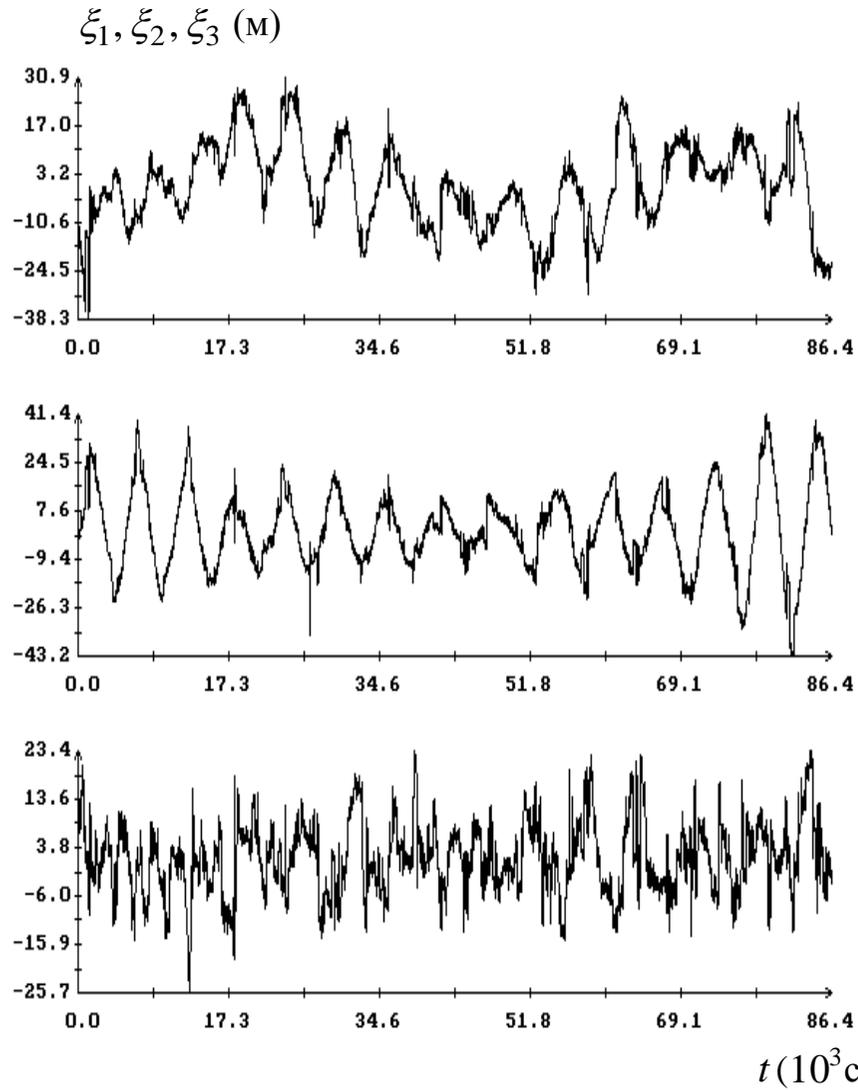
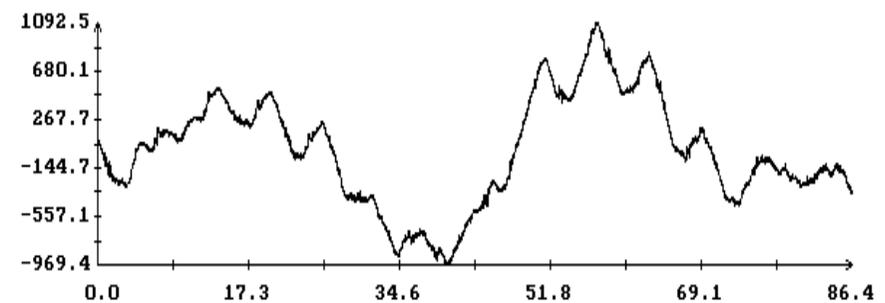
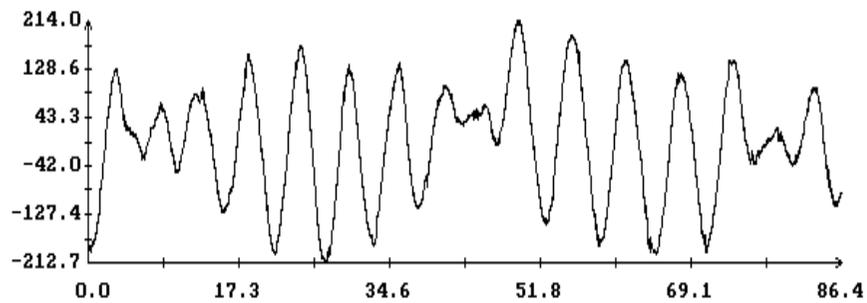
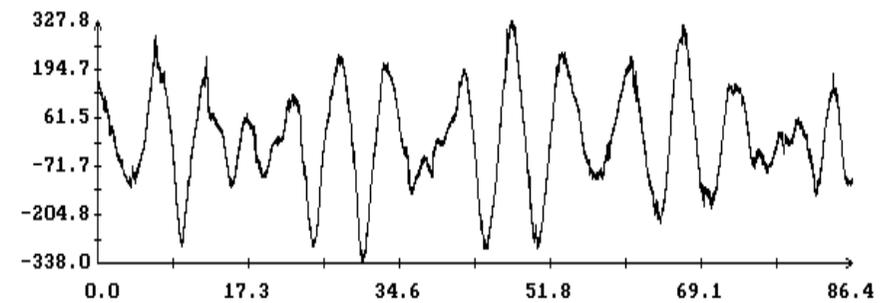
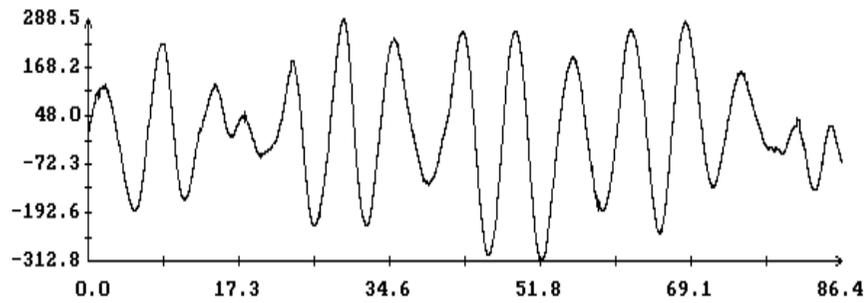
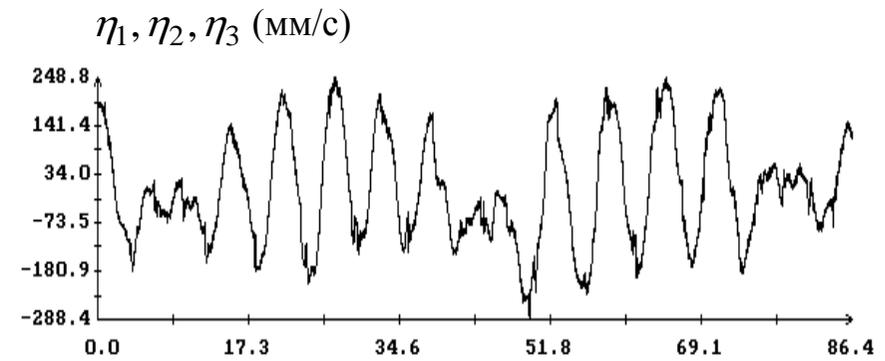
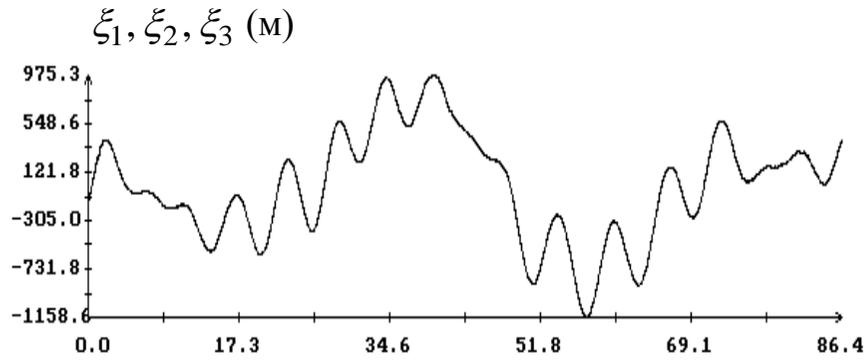


Рис. 3. Диаграммы остатков сглаживающего решения дифференциальных уравнений движения КА. Момент $t=0$ соответствует 1996063 с бортового времени (23:27:43 UTC 11.05.2013), $\sigma = 16.0\text{ м.}$, $\sigma_r = 11.5\text{ м.}$, $\sigma_v = 19.5\text{ мм/с}$



$t(10^3\text{c})$

$t(10^3\text{c})$

Рис. 4. Диаграммы остатков сглаживающего выражения модели SGP4. Момент $t=0$ соответствует 1996063 с бортового времени (23:27:43 UTC 11.05.2013), $\sigma = 285\text{м.}$, $\sigma_r = 287\text{м.}$, $\sigma_v = 283\text{мм/с}$

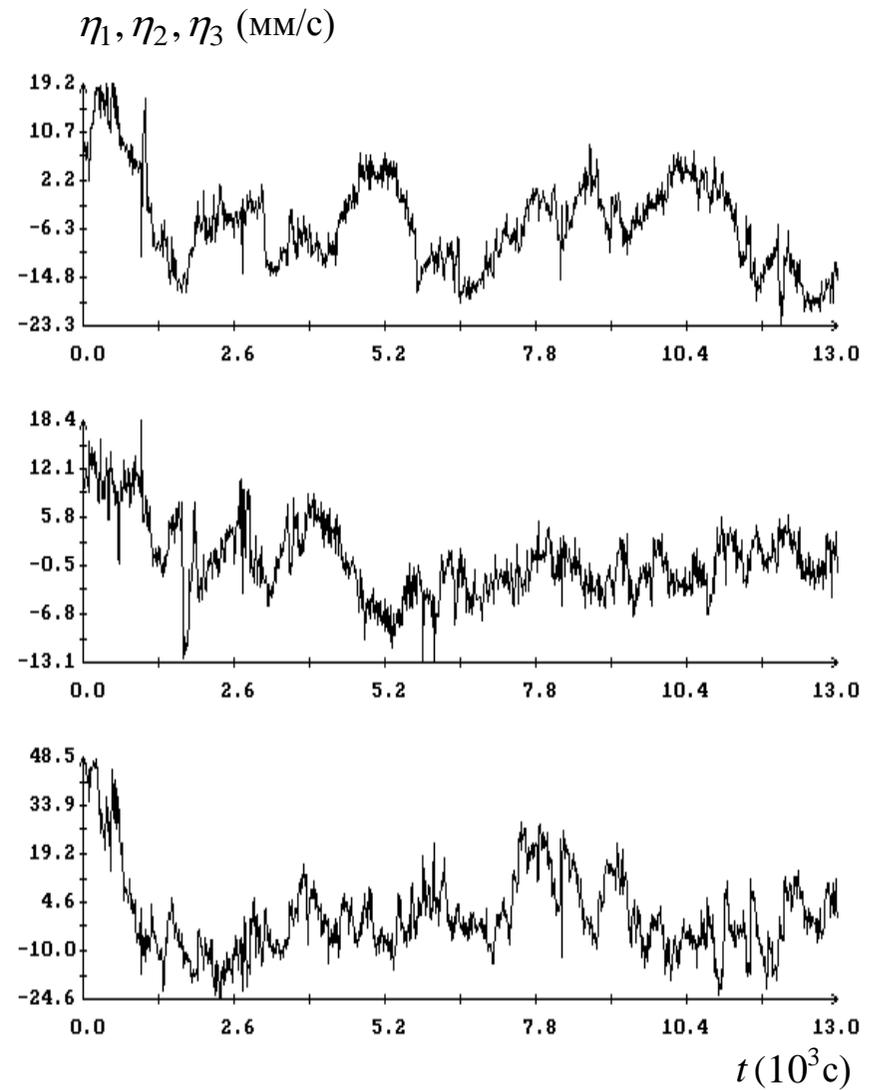
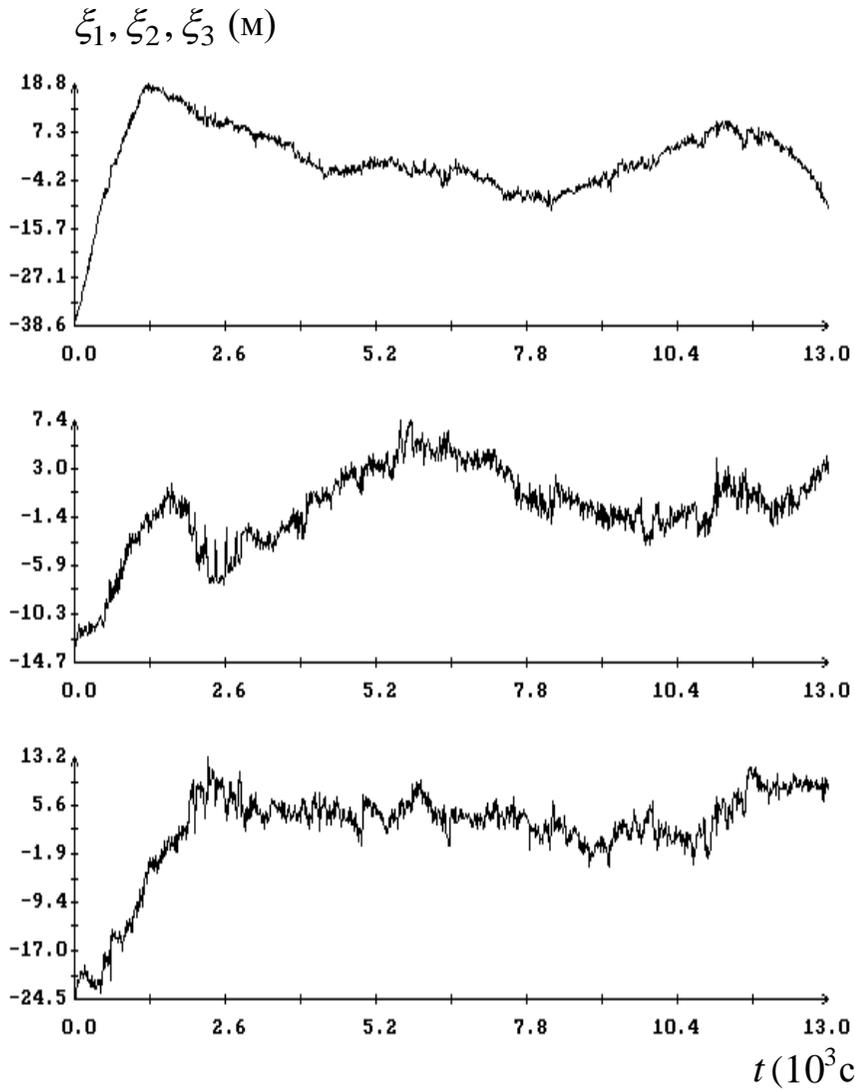


Рис. 5. Диаграммы остатков сглаживающего решения дифференциальных уравнений движения КА. Момент $t=0$ соответствует 225006 с бортового времени (11:30:06.0 UTC 21.04.2013), $\sigma = 8.4\text{м.}$, $\sigma_r = 6.9\text{м.}$, $\sigma_v = 9.7\text{мм/с}$

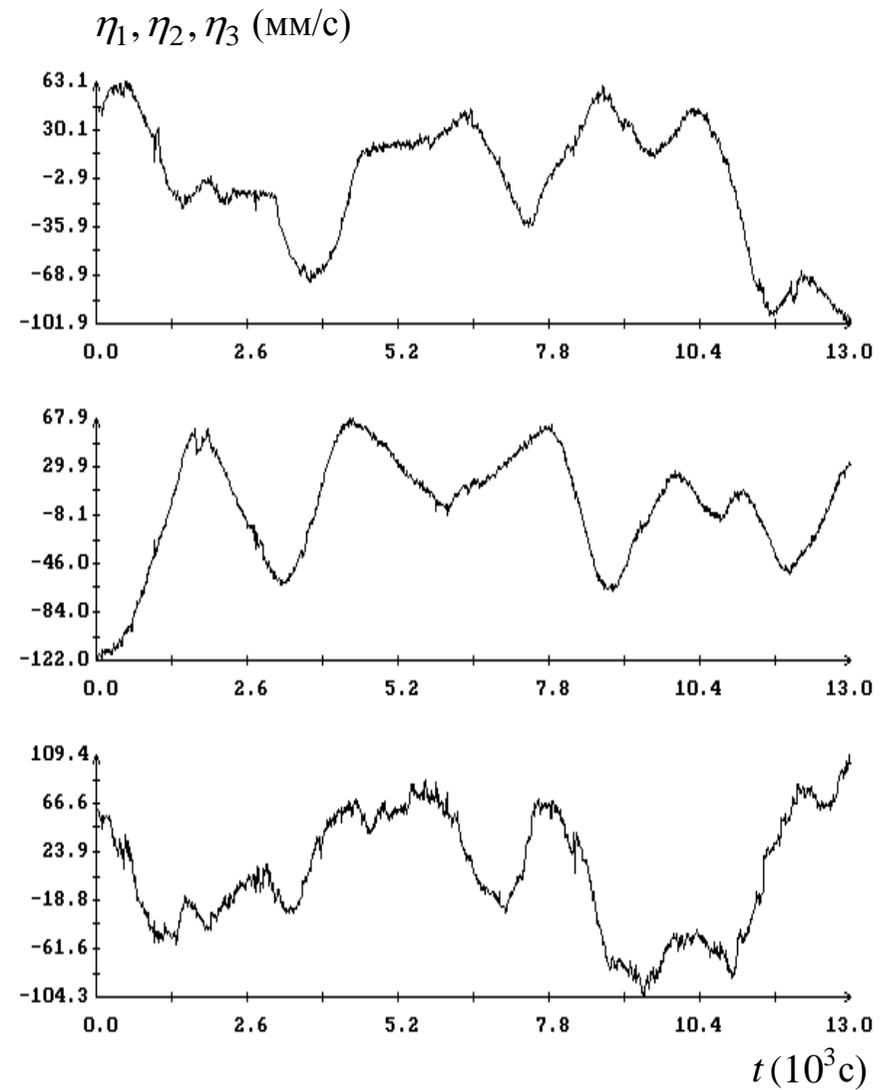
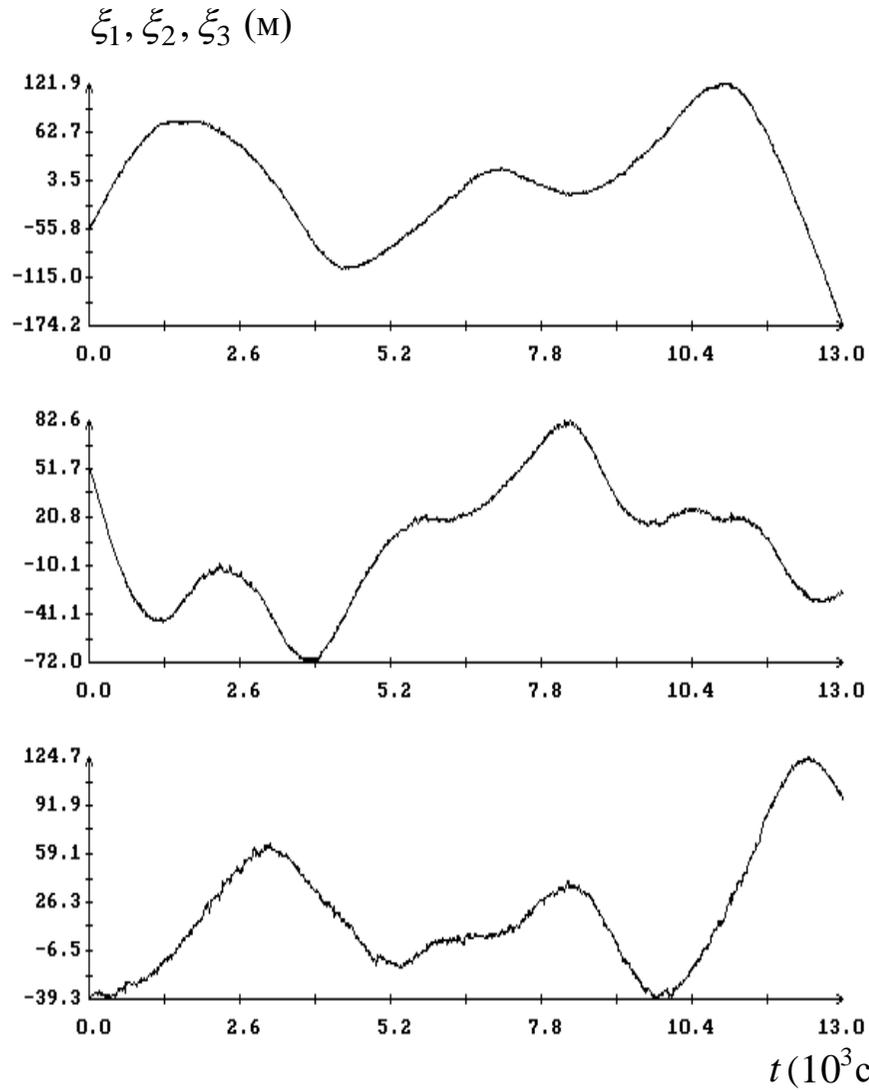


Рис. 6. Диаграммы остатков сглаживающего выражения модели SGP4. Момент $t=0$ соответствует 225006 с бортового времени (11:30:06.0 UTC 21.04.2013), $\sigma = 49\text{м.}$, $\sigma_r = 64\text{м.}$, $\sigma_v = 37\text{мм/с}$

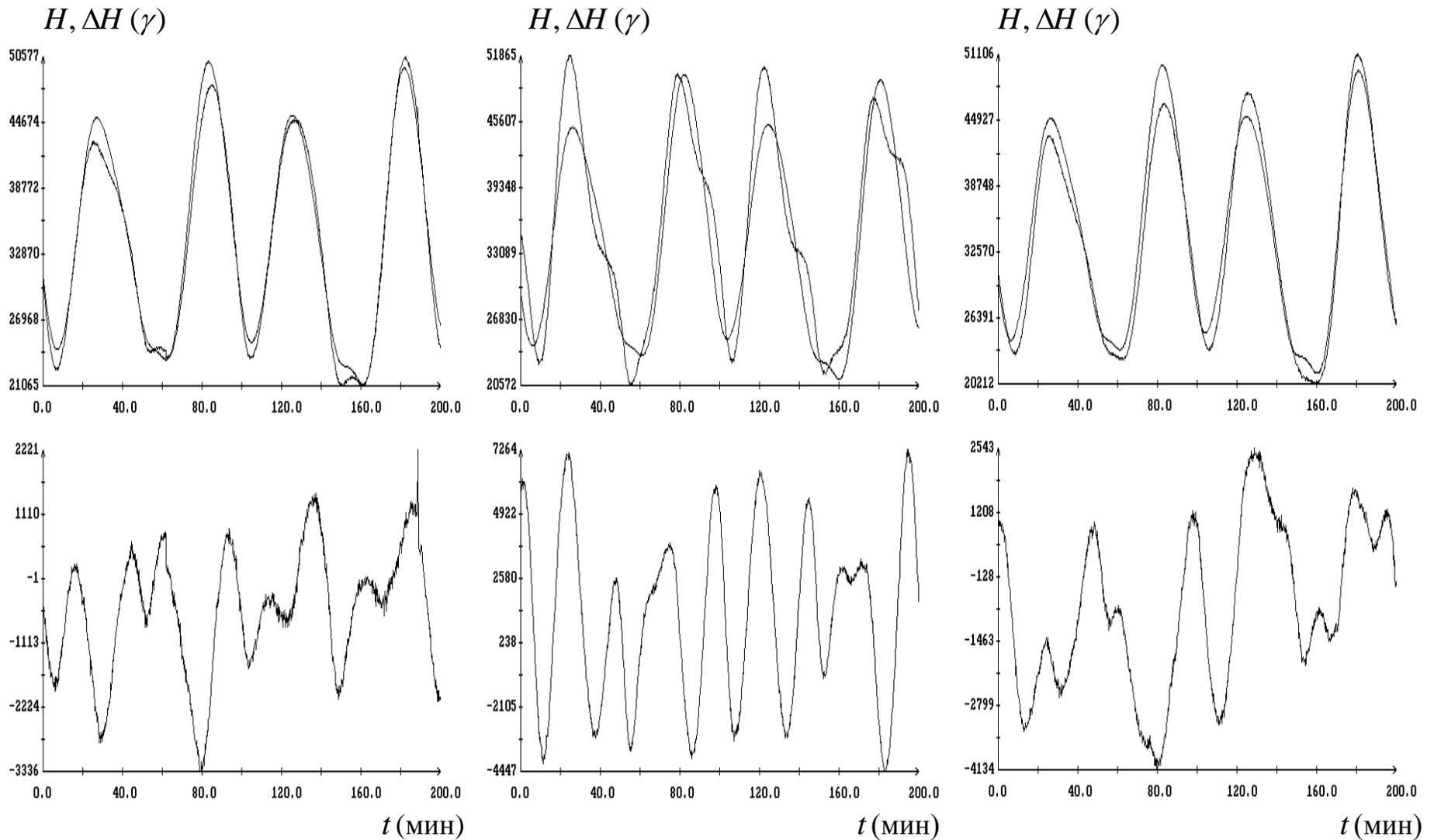


Рис. 7. Измеренные и расчетные значения модуля напряженности МПЗ для магнитометров 1 (слева), 2 (в центре) и 3 (справа). Момент $t = 0$ соответствует 431995 с бортового времени (20:59:55 UTC 23.04.2013)

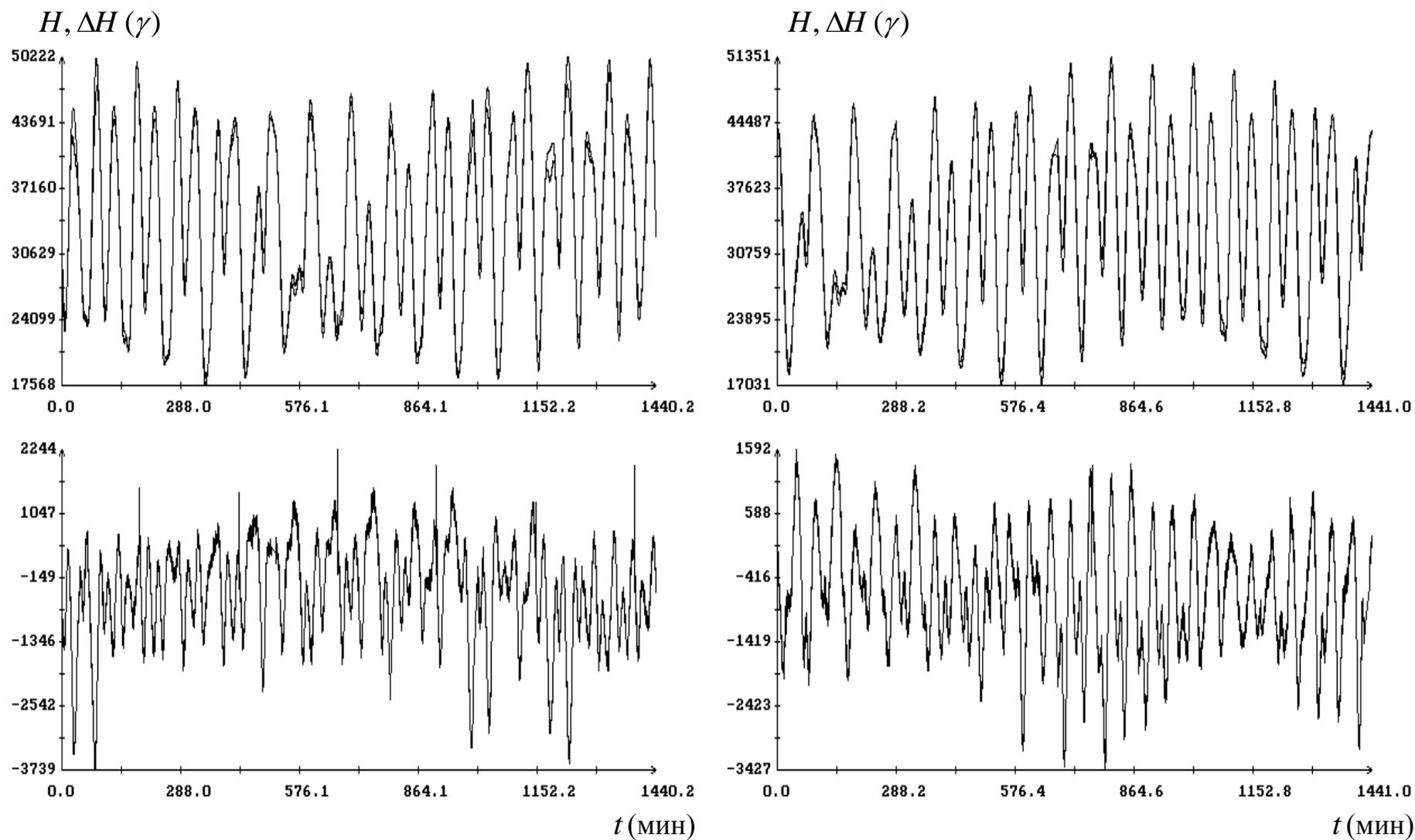


Рис. 8. Измеренные и расчетные значения модуля напряженности МПЗ для магнитометра 1. Момент $t=0$ на левых графиках соответствует 431996 с бортового времени (20:59:56 UTC 23.04.2013), на правых графиках – 1996006 с бортового времени (23:26:46 UTC 11.05.2013)

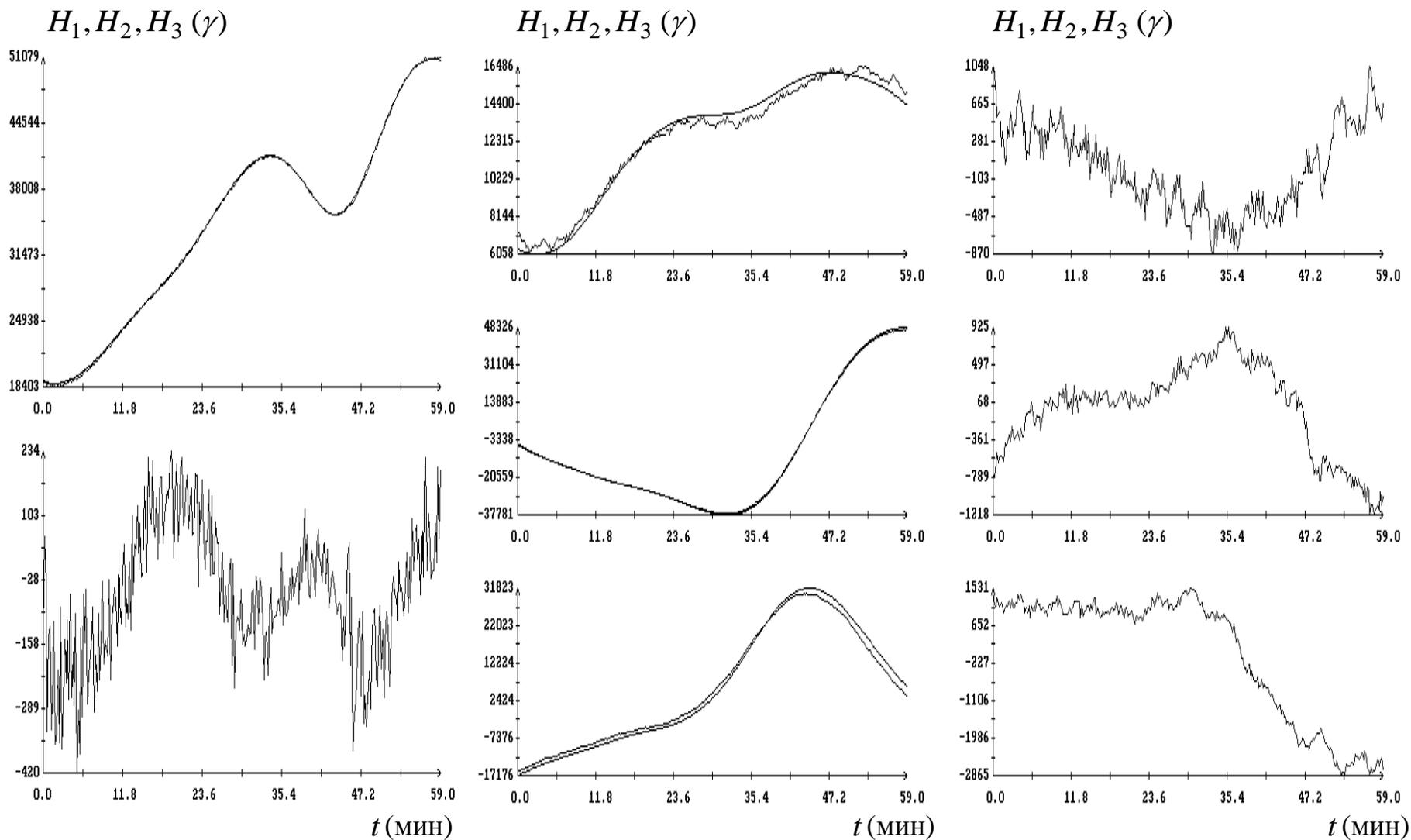


Рис. 9. Интервал орбитальной ориентации КА. Момент $t=0$ соответствует 116121с бортового времени (05:15:21 UTC 20.04.2013), $\sigma_H = 132\gamma$, $\tau = -68(1.0)\text{с}$, $\Delta_1 = 184\gamma$, $\Delta_2 = -888\gamma$, $\Delta_3 = 511\gamma$

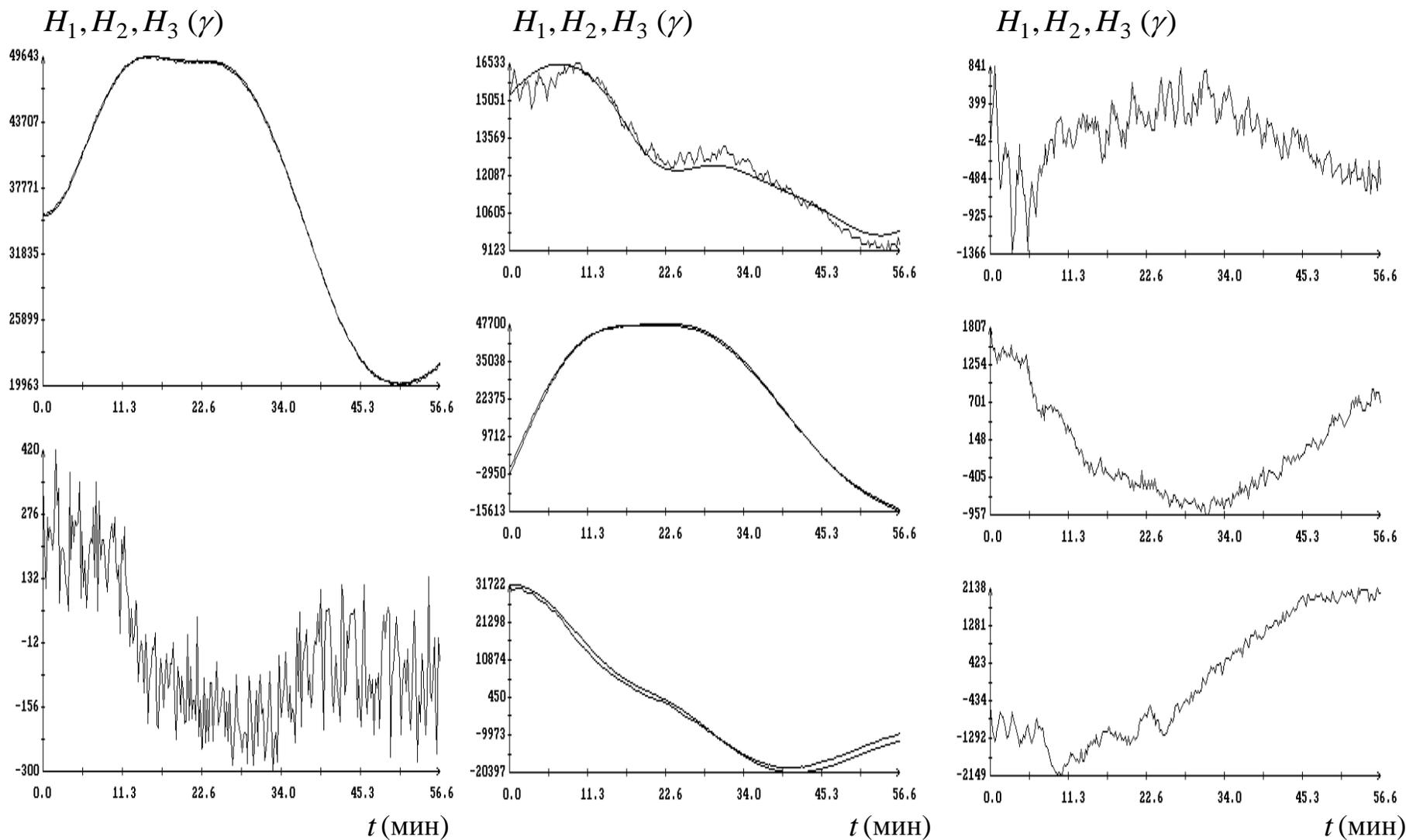


Рис. 10. Интервал орбитальной ориентации КА. Момент $t = 0$ соответствует 202149с бортового времени (05:09:09 UTC 20.04.2013), $\sigma_H = 113\gamma$, $\tau = -58(1.0)\text{с}$, $\Delta_1 = 617\gamma$, $\Delta_2 = -1789\gamma$, $\Delta_3 = 3840\gamma$

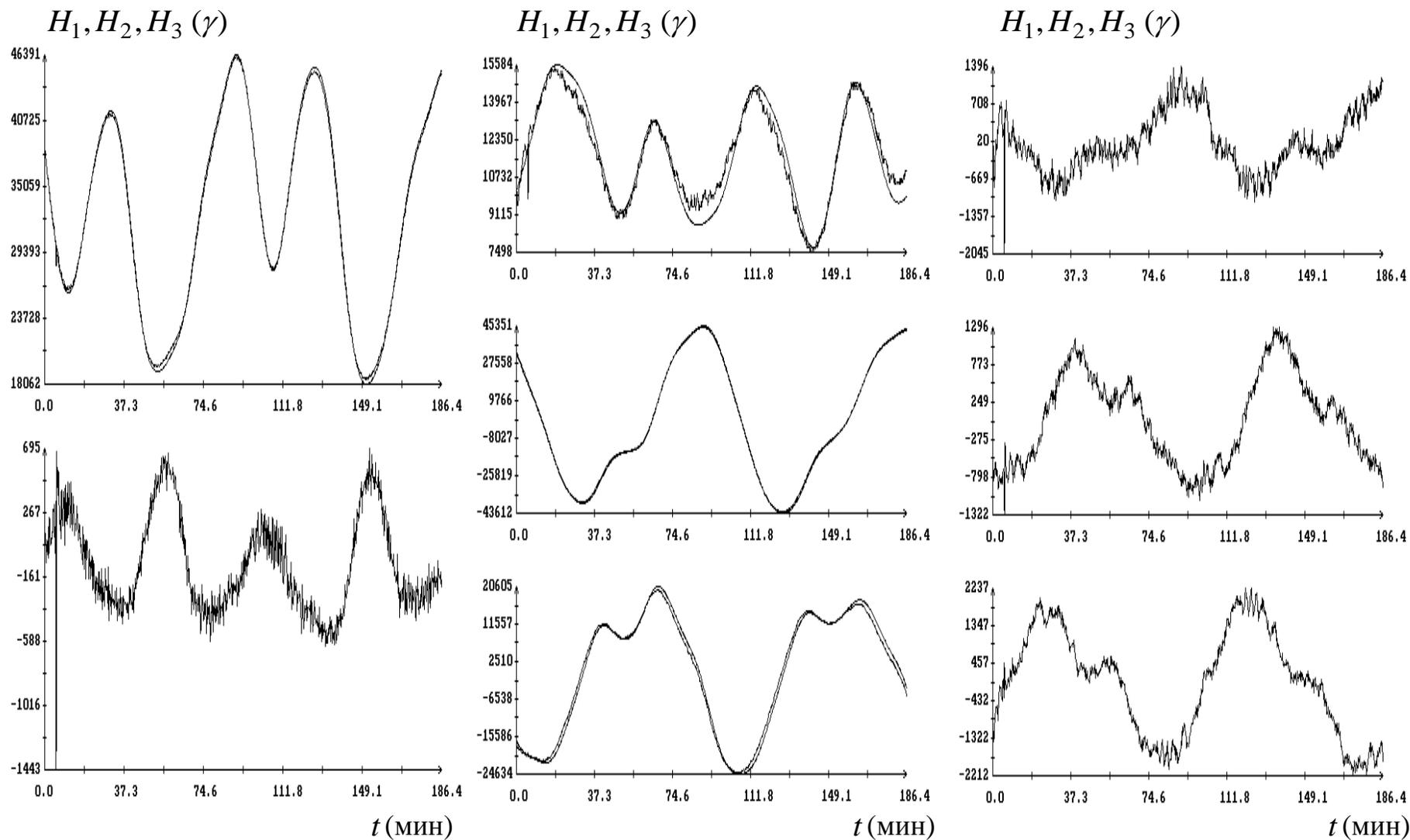


Рис. 11. Интервал орбитальной ориентации КА. Момент $t = 0$ соответствует 226989с бортового времени (05:09:09 UTC 20.04.2013), $\sigma_H = 113\gamma$, $\tau = -60(0.93)\text{с}$, $\Delta_1 = 617\gamma$, $\Delta_2 = -1789\gamma$, $\Delta_3 = 3840\gamma$

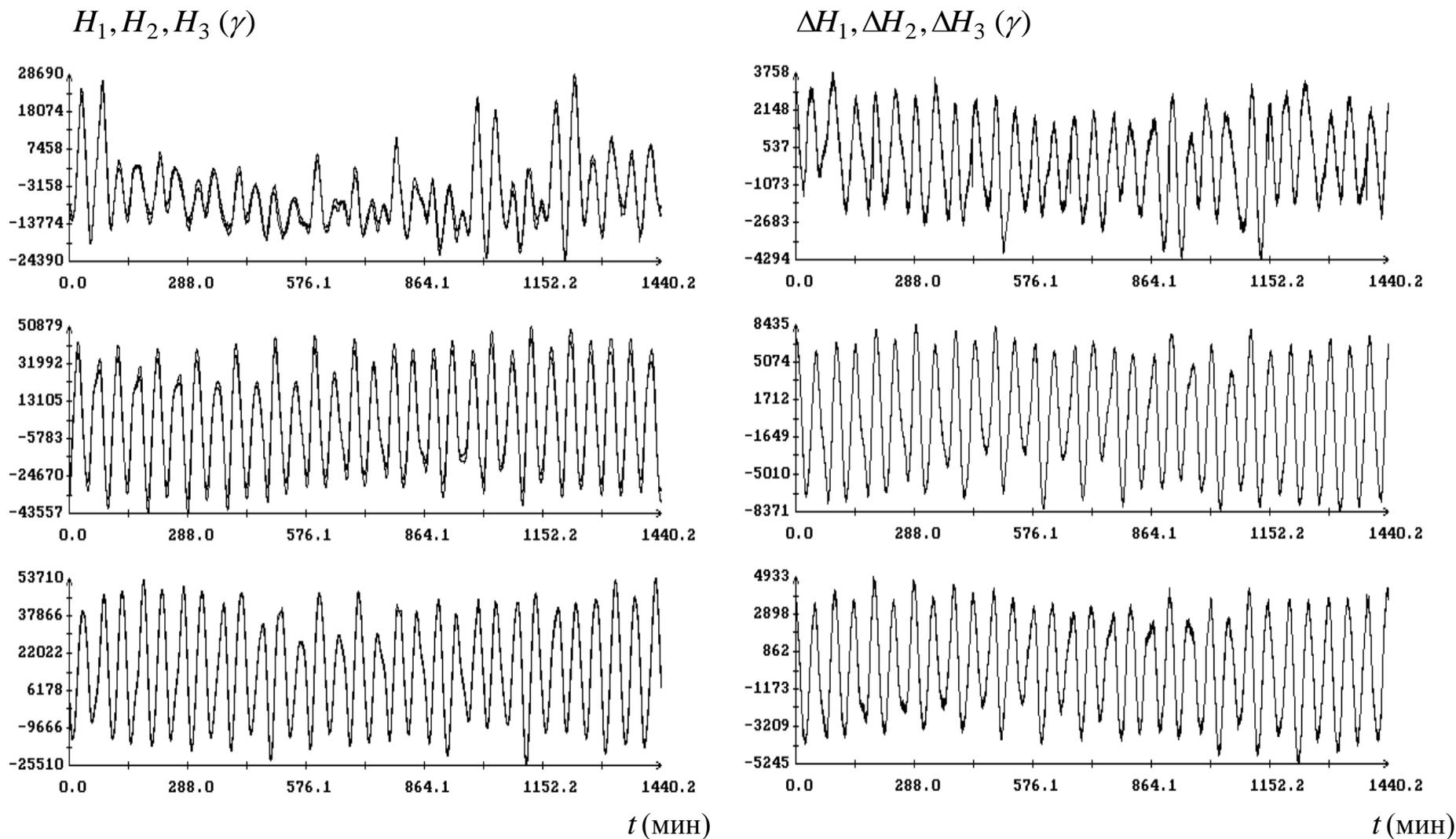


Рис. 12. Сравнение данных измерений магнитометров 1 и 2 в системе координат магнитометра 1, слева данные измерений, справа разности этих данных. Момент $t = 0$ соответствуют 431996с бортового времени (20:59:56 UTC 23.04.2013)

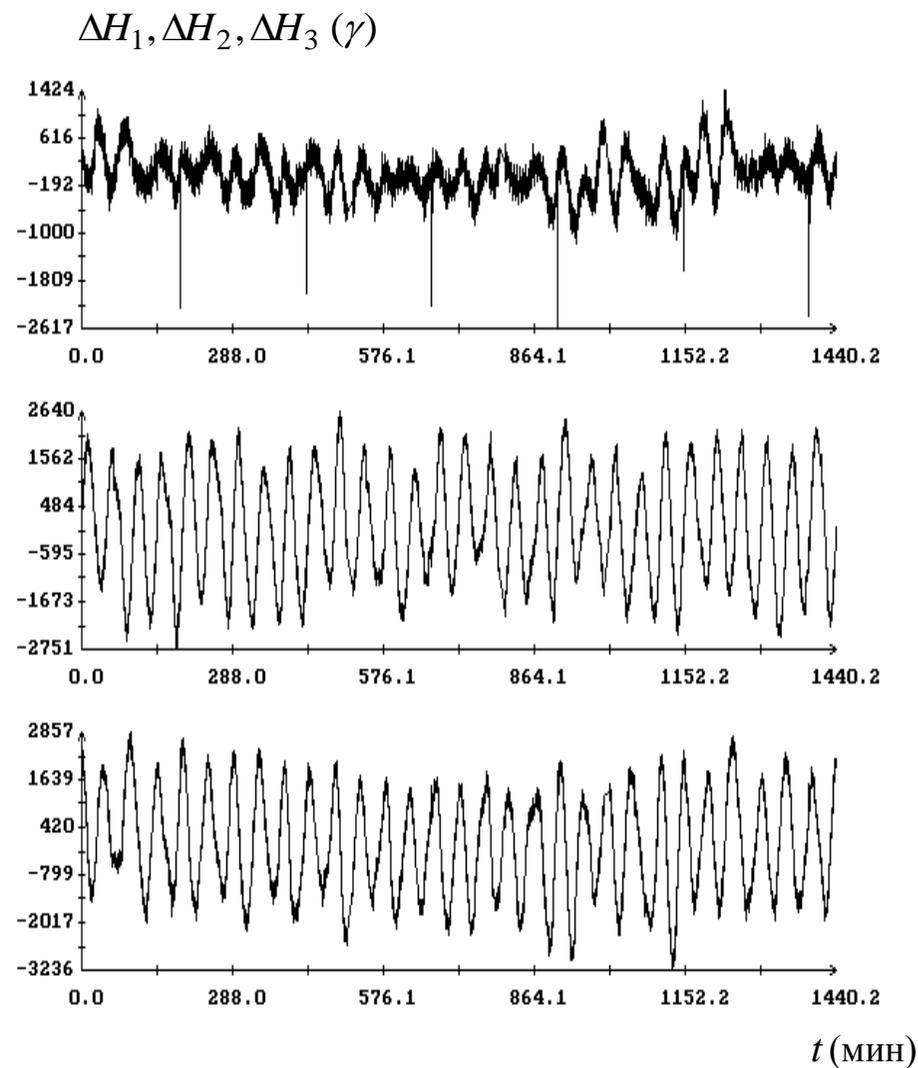
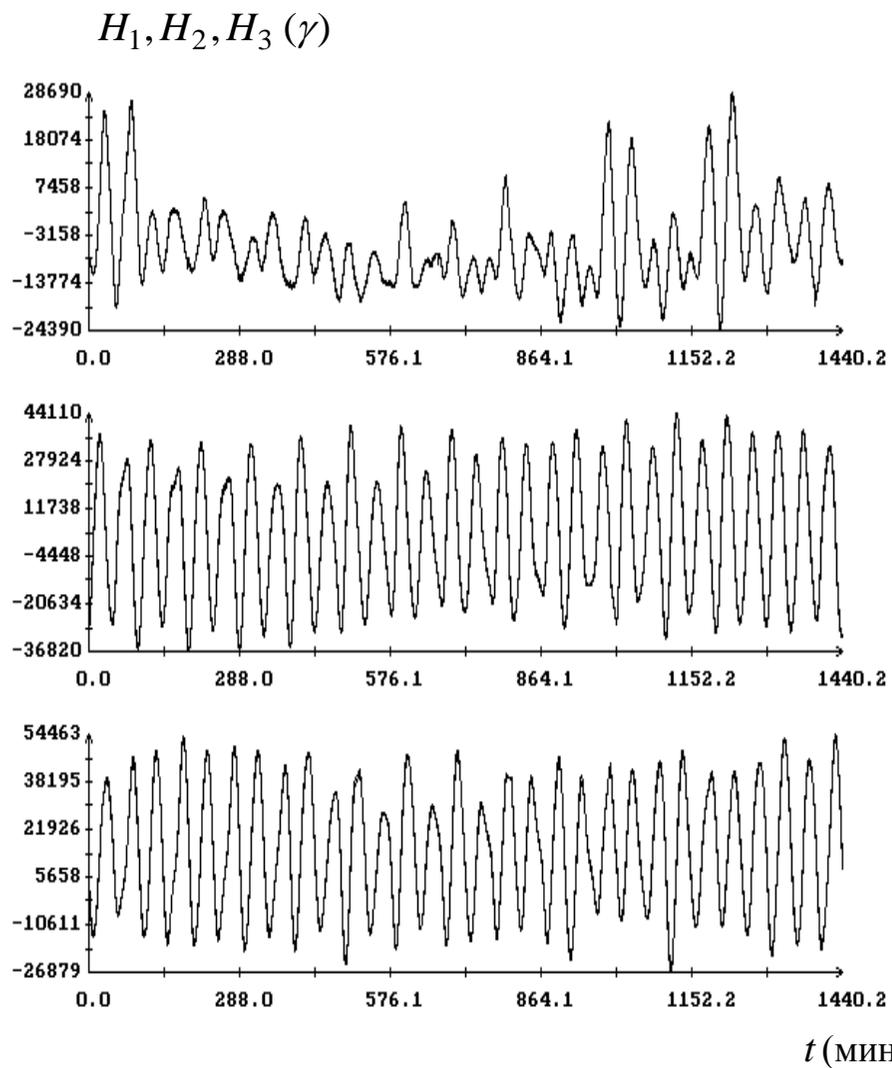
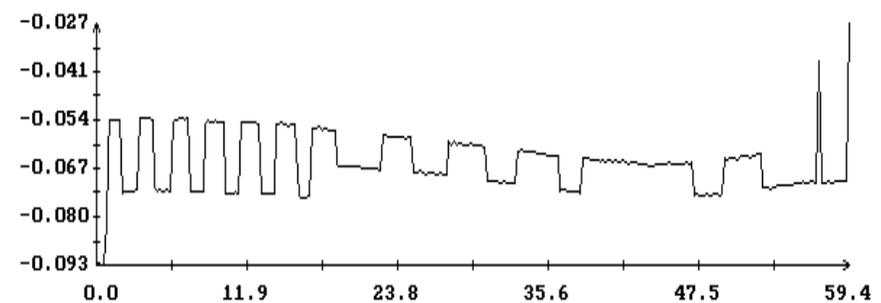
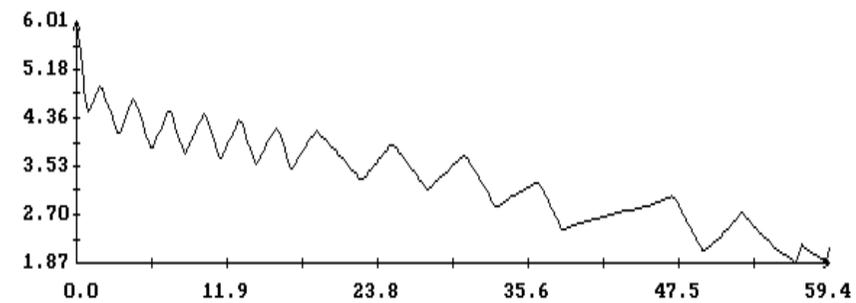
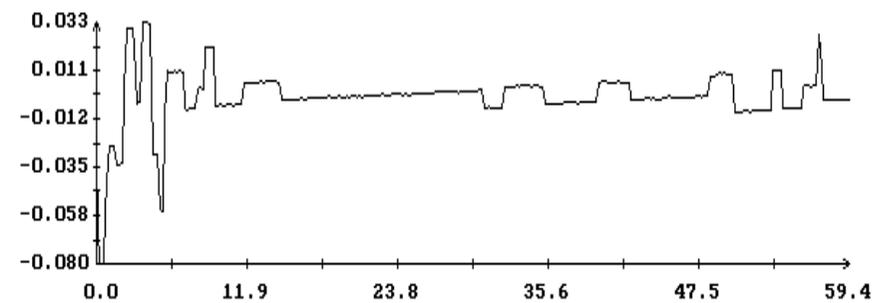
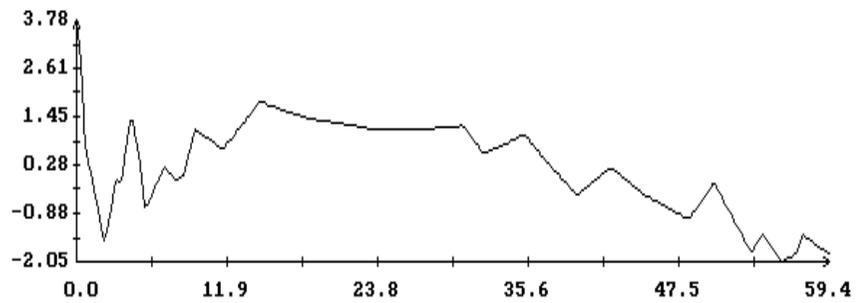
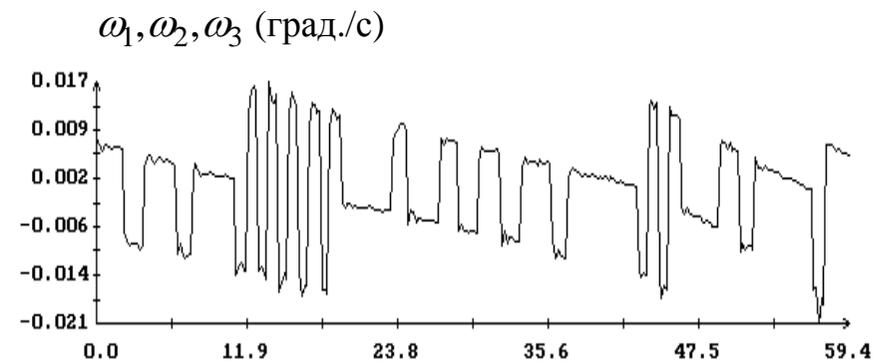
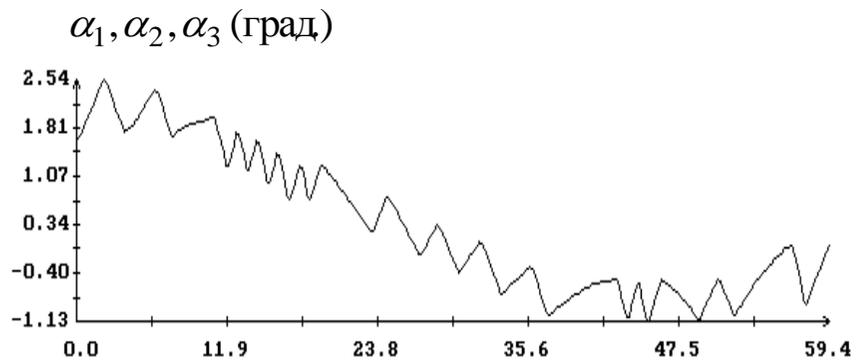


Рис. 13. Сравнение данных измерений магнитометров 1 и 3 в системе координат магнитометра 1, слева данные измерений, справа разности этих данных. Момент $t=0$ соответствуют 431996 с бортового времени (20:59:56 UTC 23.04.2013)



t ((МИН))

t ((МИН))

Рис. 14. Движение КА в орбитальной ориентации. Момент $t = 0$ на графиках отвечает 116047.7 с (05:14:07.7 UTC 20.04.2013), $\tau = -64.9$ с

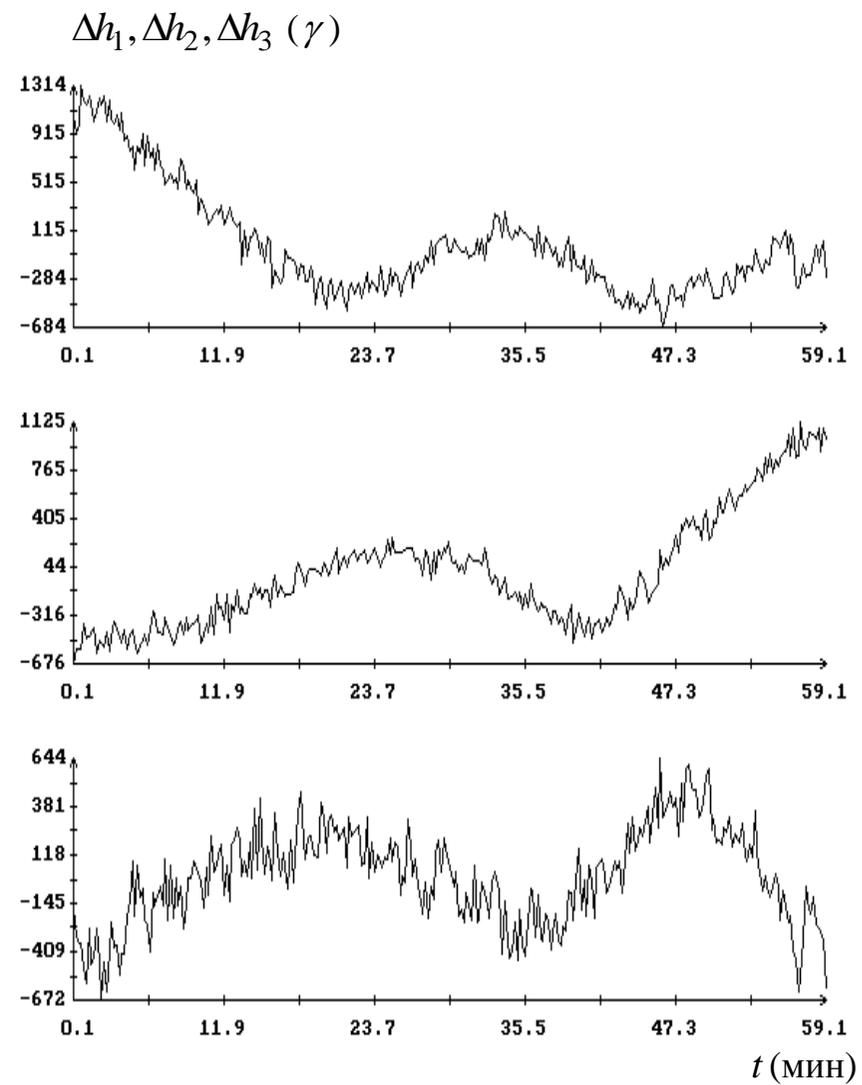
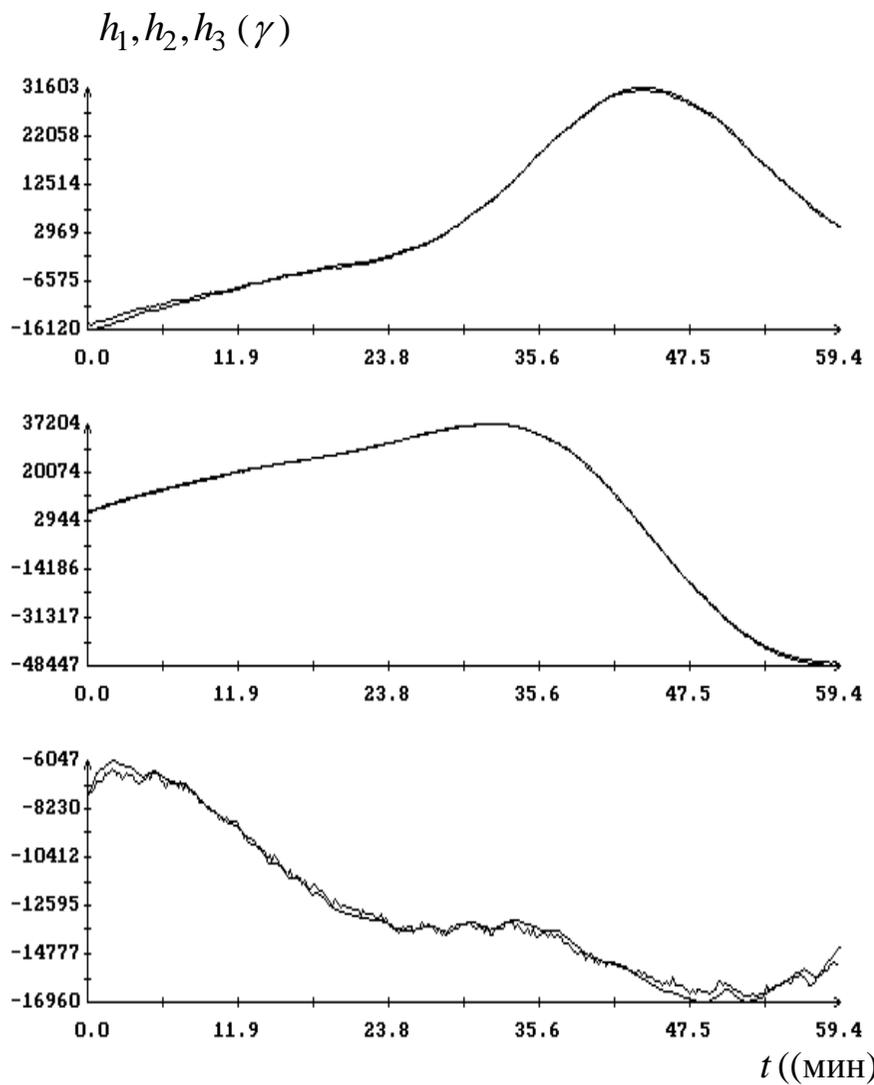
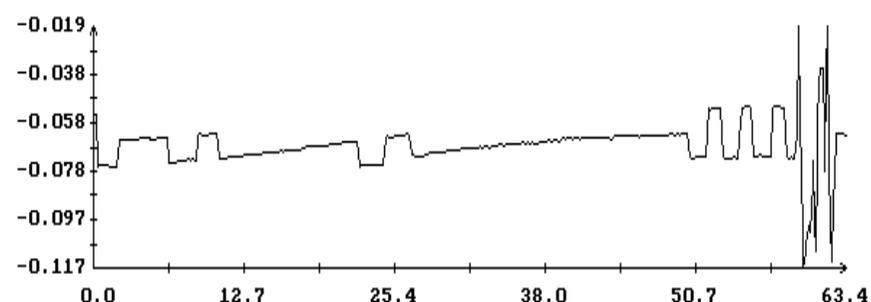
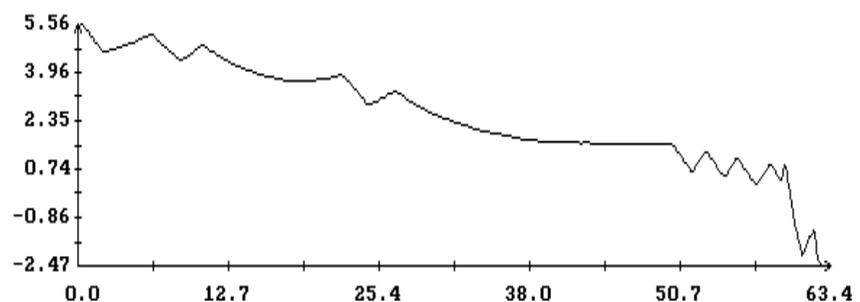
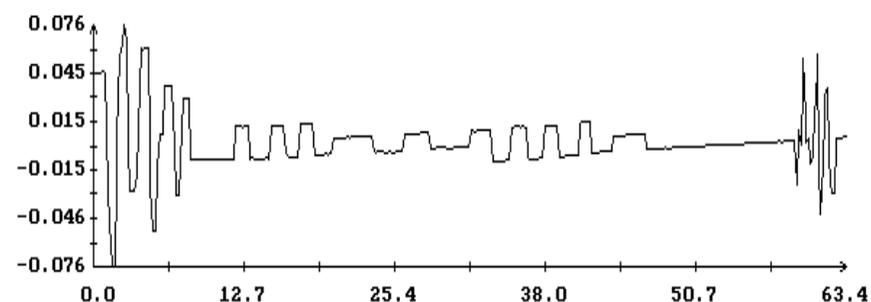
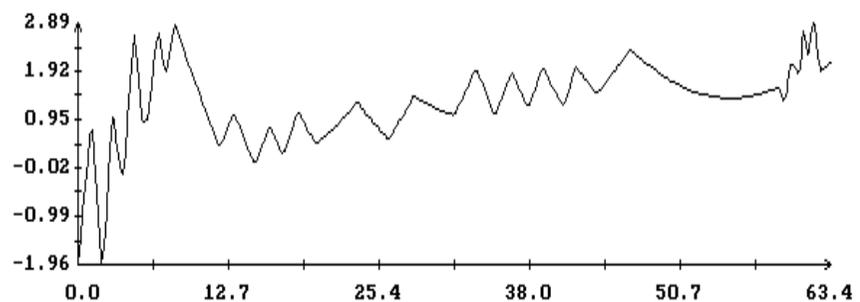
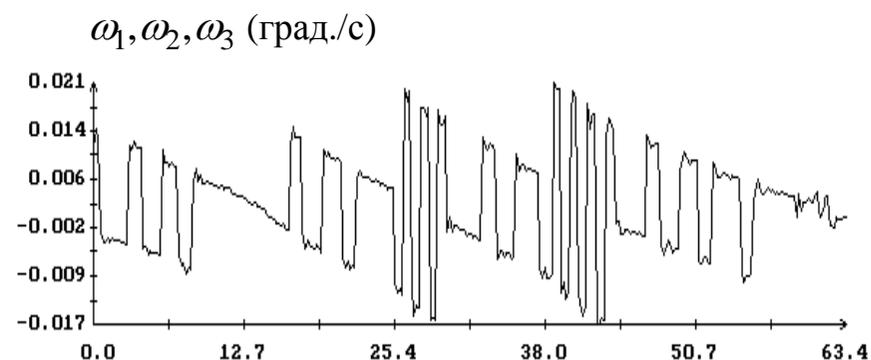
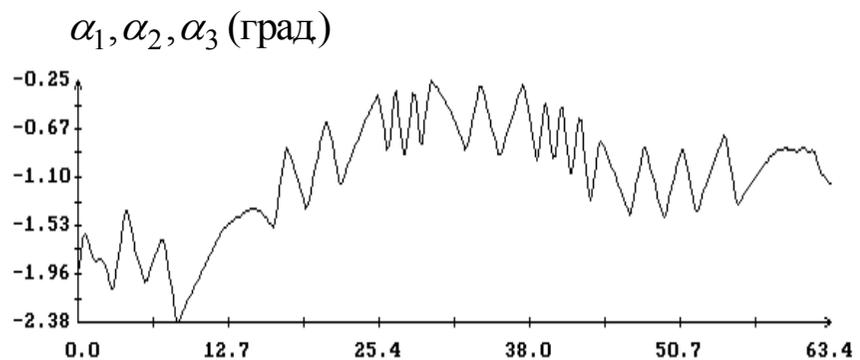


Рис. 15. Движение КА в орбитальной ориентации. Момент $t = 0$ на графиках отвечает 116047.7 с (05:14:07.7 UTC 20.04.2013), $\tau = -64.9$ с; смещения магнитных измерений (γ): 4352, 961, 48; $\sigma_H = 381\gamma$.



t ((МИН))

t (МИН)

Рис. 16. Движение КА в орбитальной ориентации. Момент $t = 0$ на графиках отвечает 202015.7 с (05:06:55.7 UTC 21.04.2013), $\tau = -62.5$ с

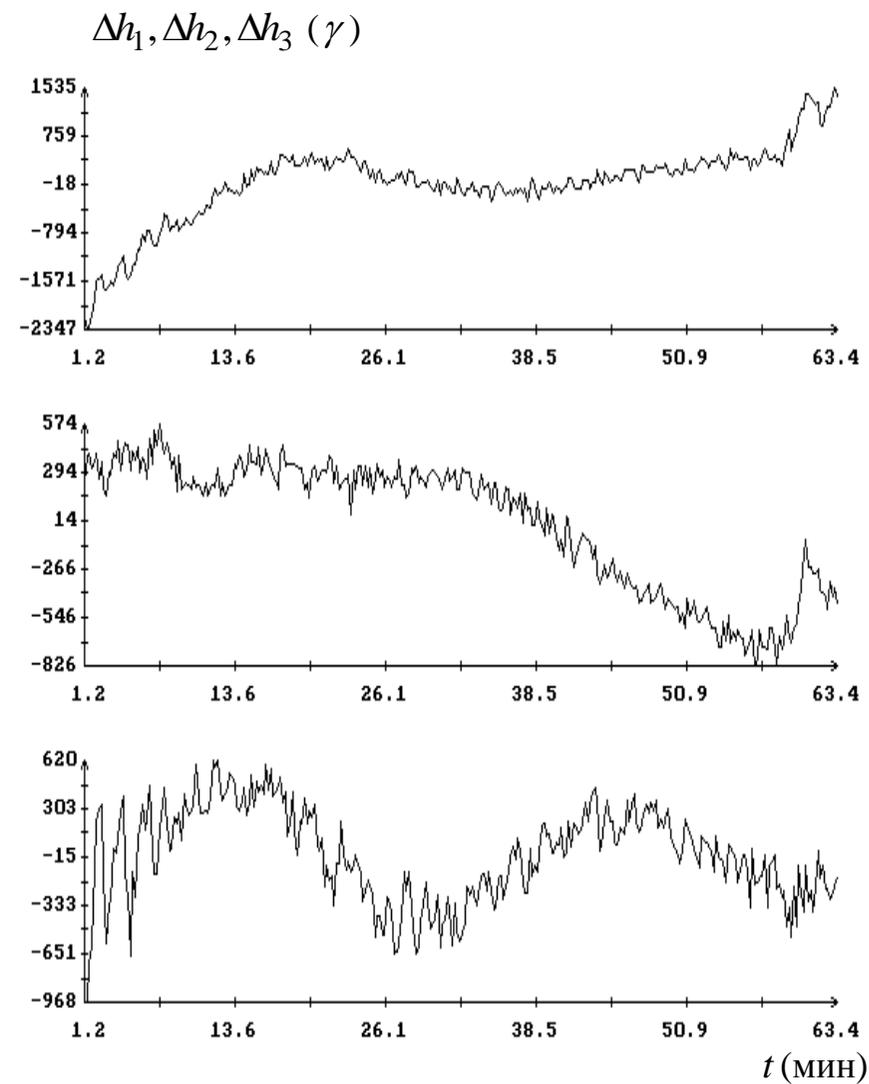
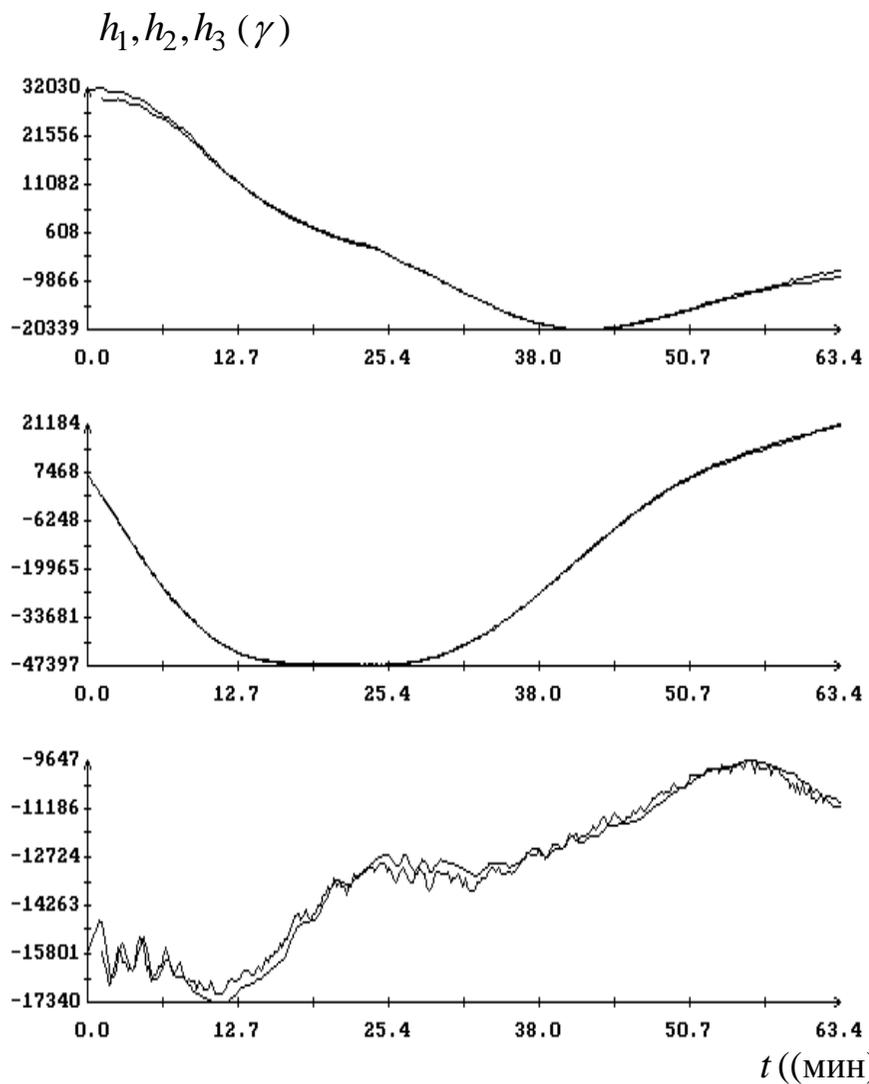
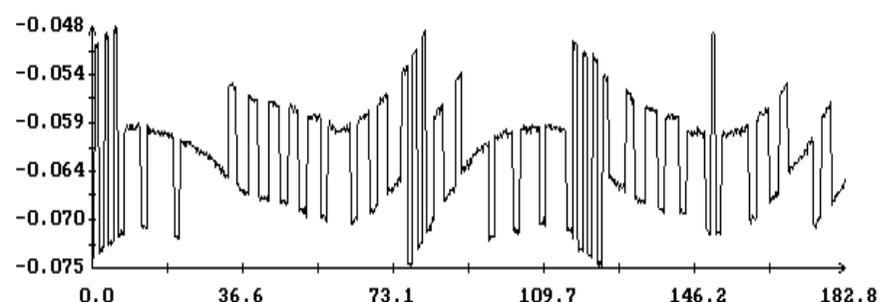
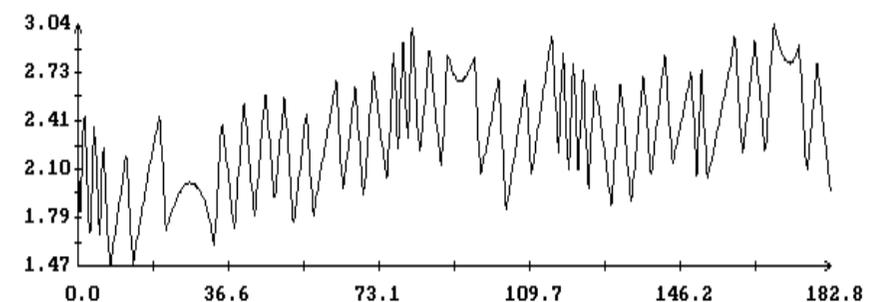
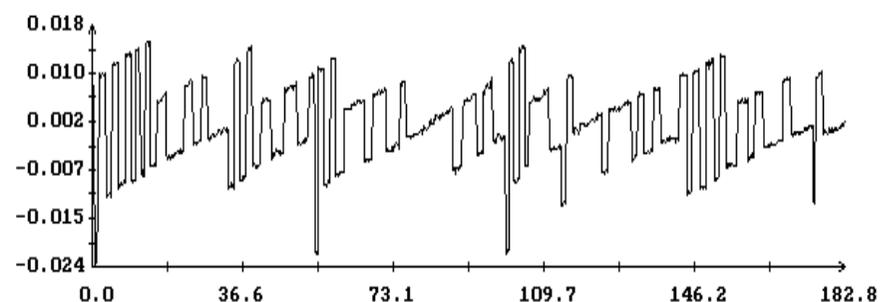
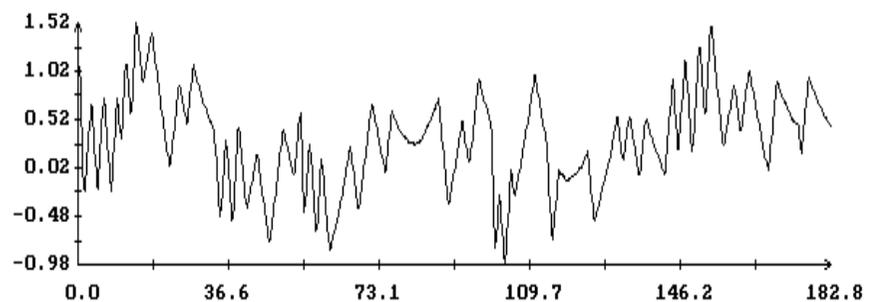
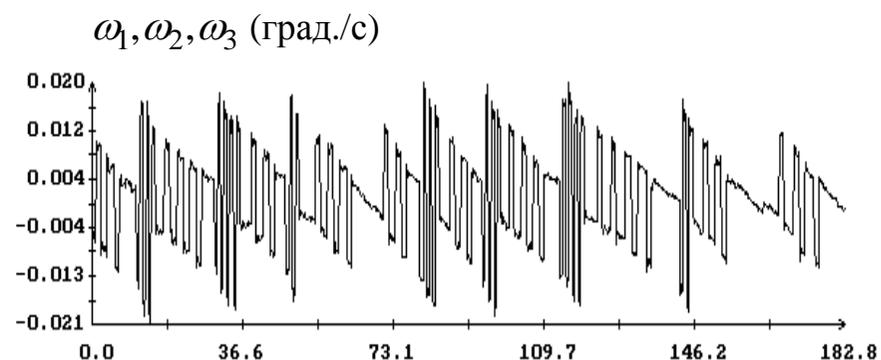
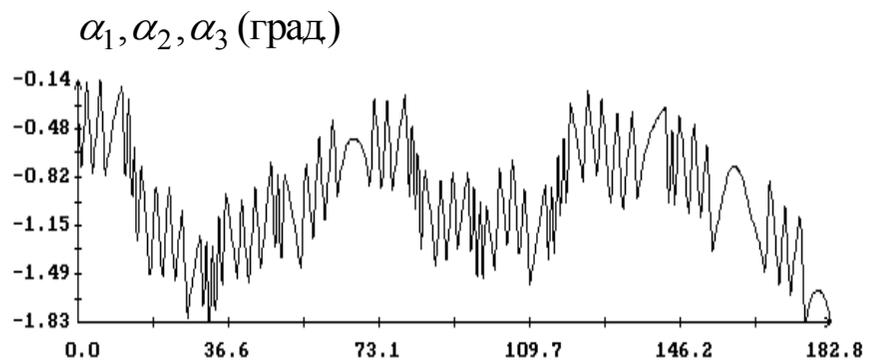


Рис. 17. Движение КА в орбитальной ориентации. Момент $t = 0$ на графиках отвечает 202015.7 с (05:06:55.7 UTC 21.04.2013), $\tau = -62.5$ с; смещения магнитных измерений (γ): 5073, 1730, -93 ; $\sigma_H = 450\gamma$



t ((МИН))

t ((МИН))

Рис. 18. Движение КА в орбитальной ориентации. Момент $t = 0$ на графиках отвечает 227131.7 с (12:05::31.7 UTC 21.04.2013), $\tau = -63.4$ с

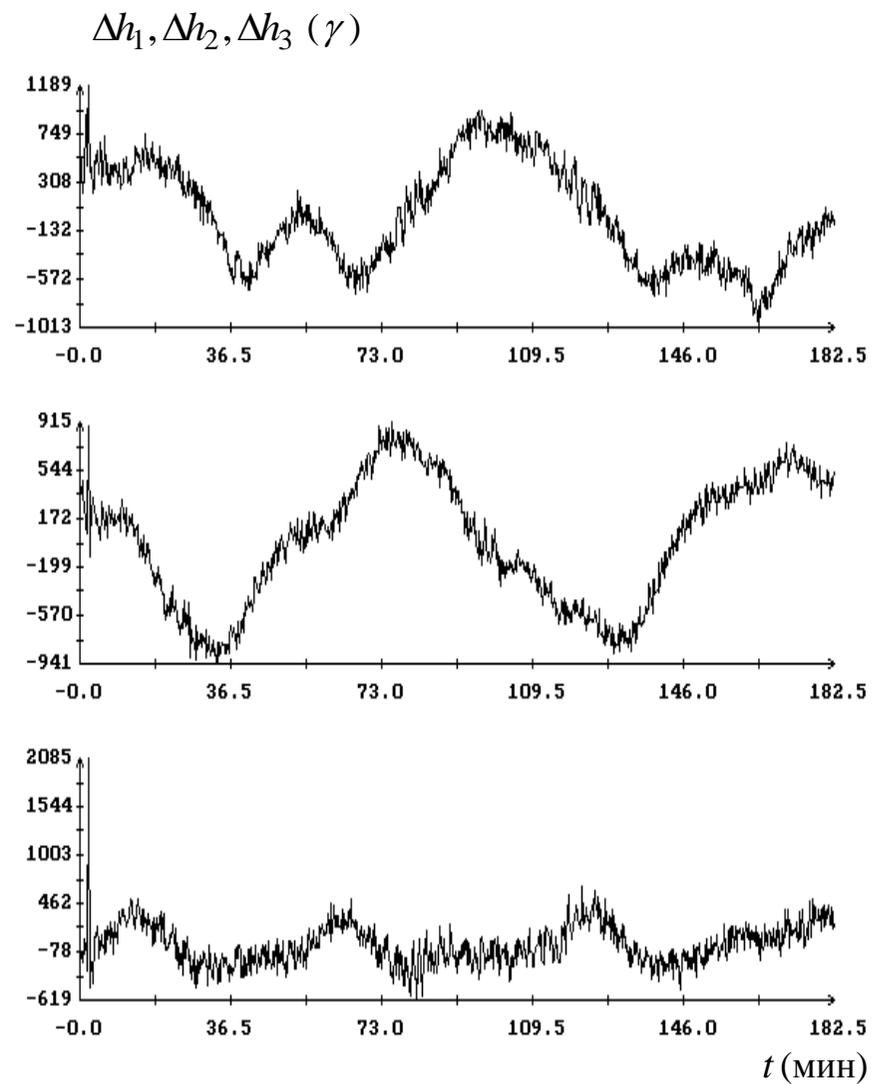
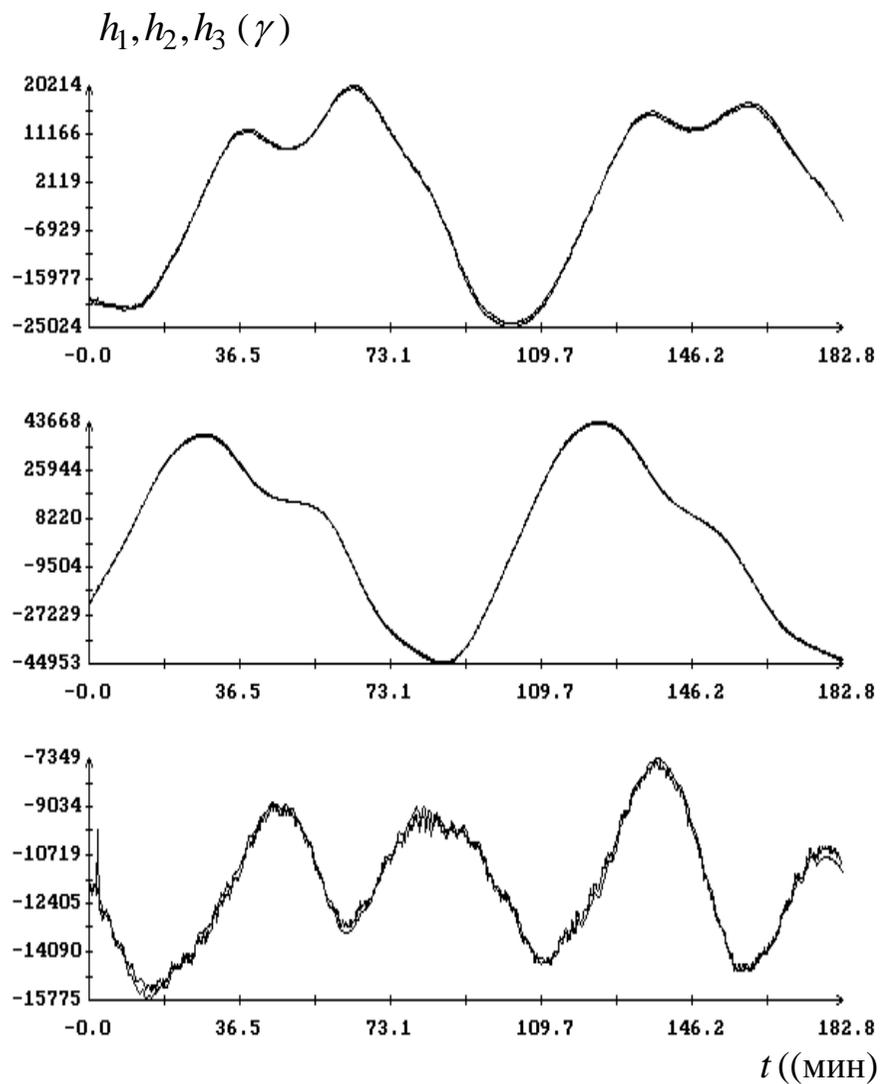


Рис. 19 Движение КА в орбитальной ориентации. Момент $t = 0$ на графиках отвечает 227131.7 с (12:05::31.7 UTC 21.04.2013), $\tau = -63.4$ с; смещения магнитных измерений (γ): 4765, 1093, -544 ; $\sigma_H = 409\gamma$

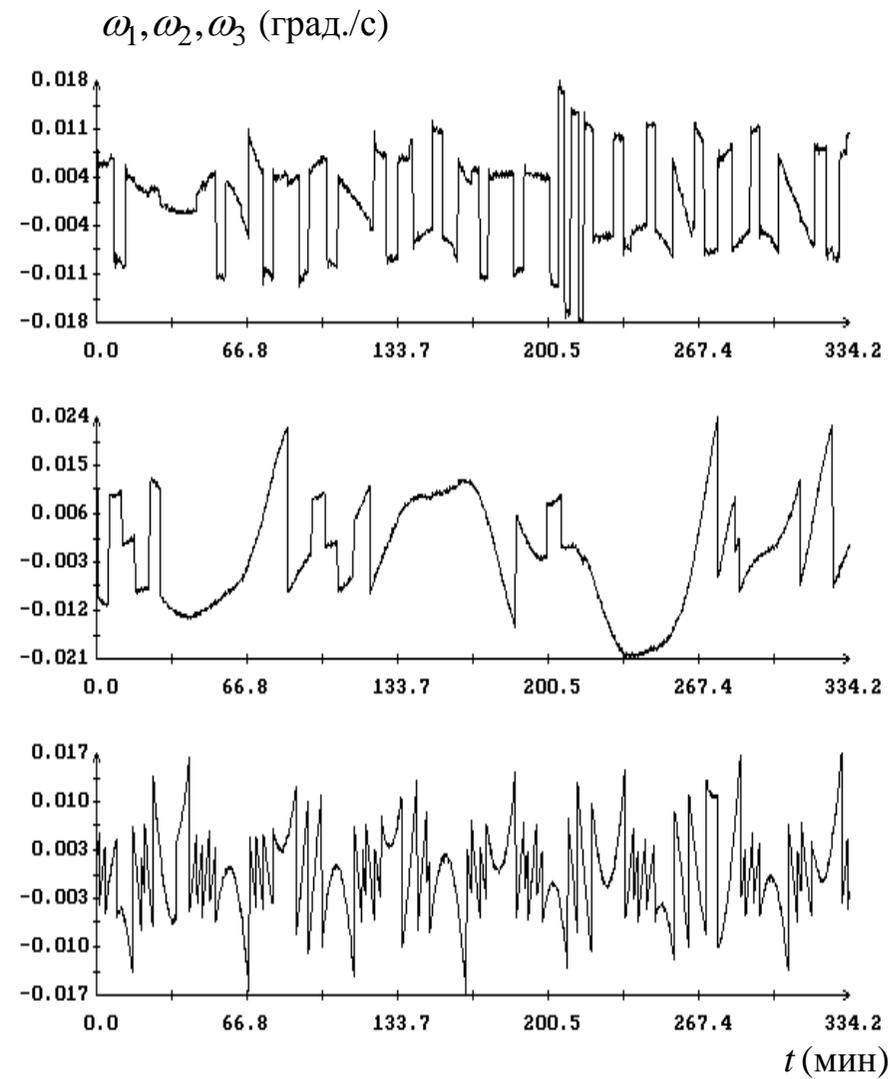
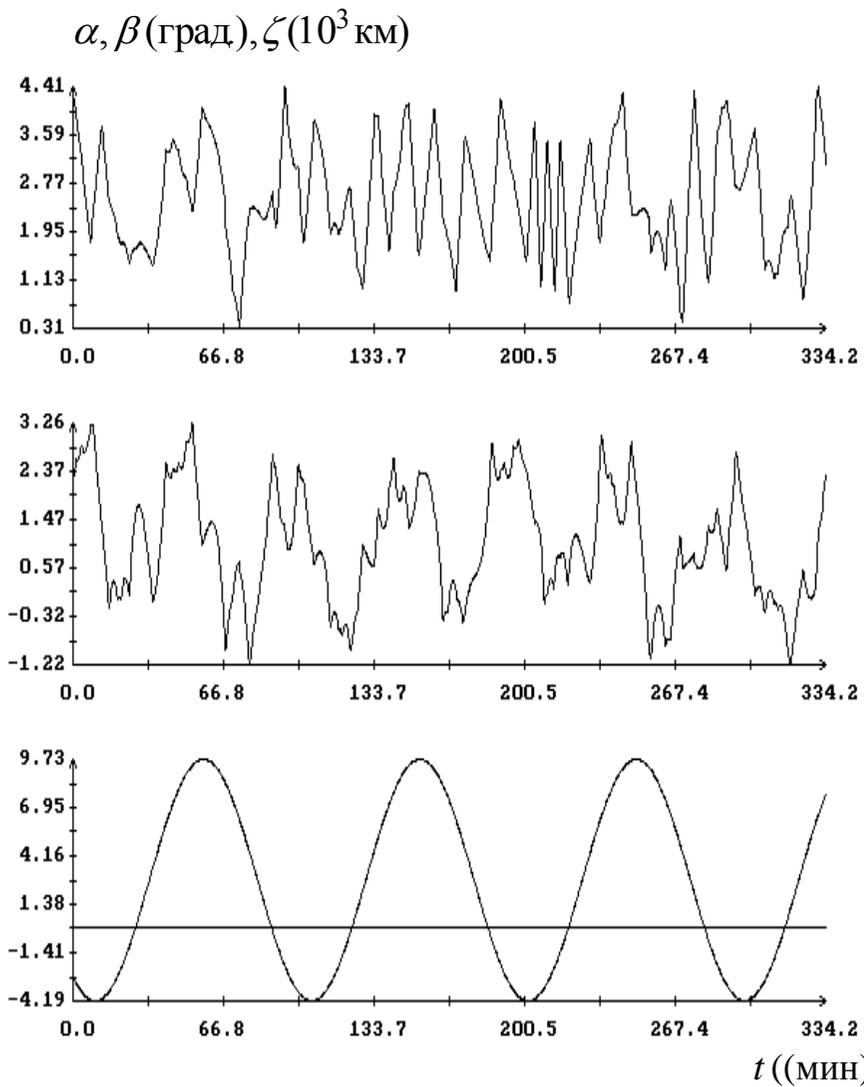


Рис. 20. Движение КА в солнечной ориентации. Момент $t=0$ на графиках отвечает 371503.7с (04:11:43.7 UTC 23.04.2013), $\tau = -38.9$ с

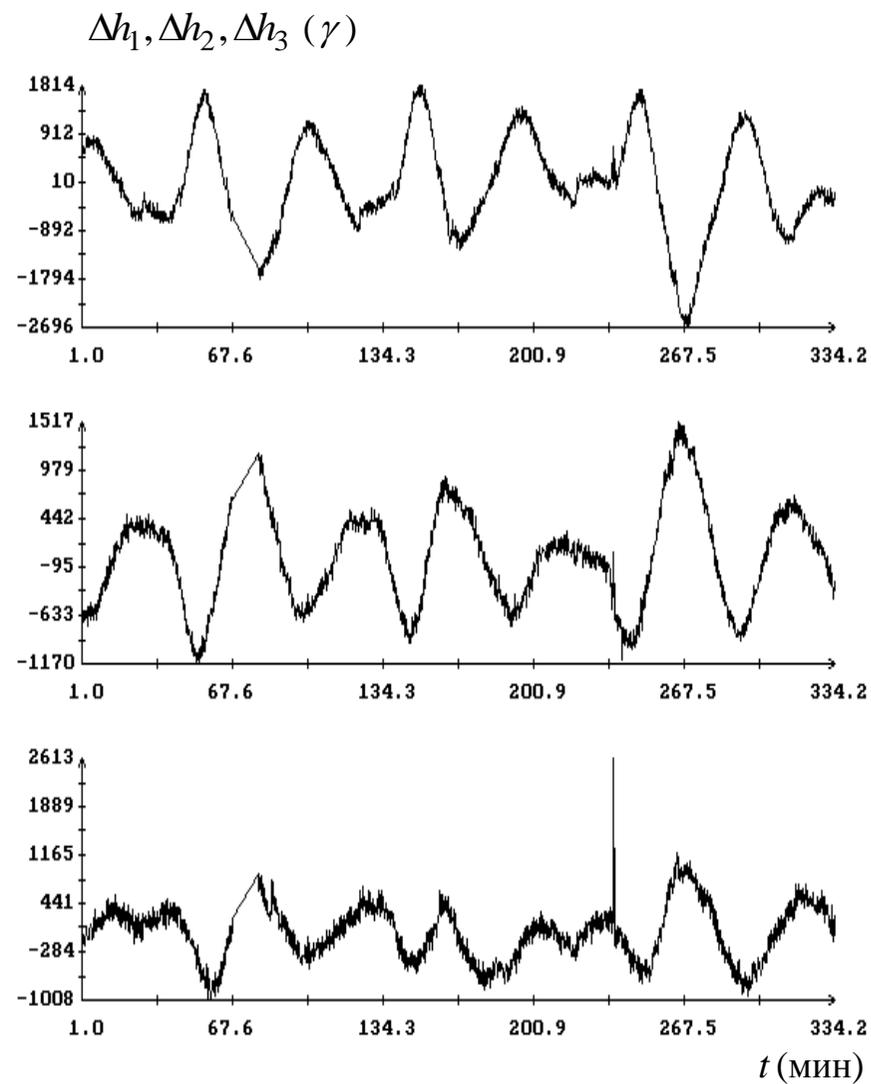
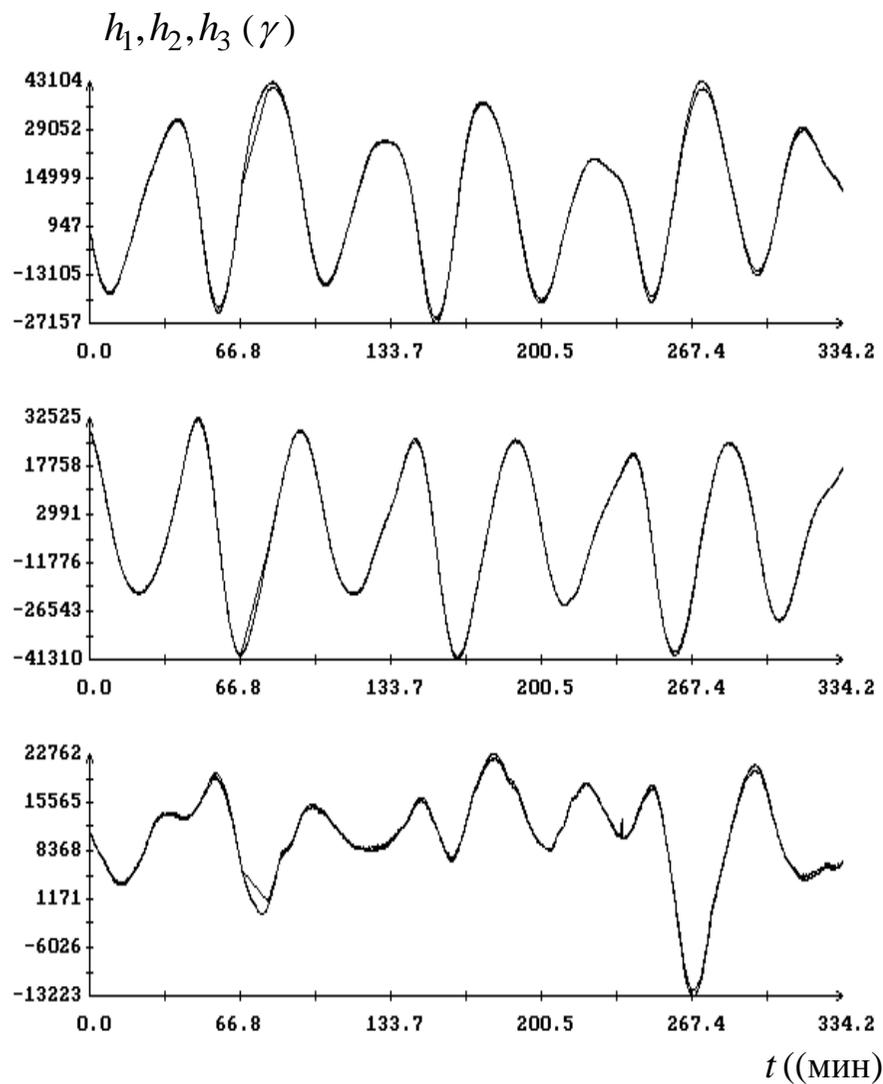
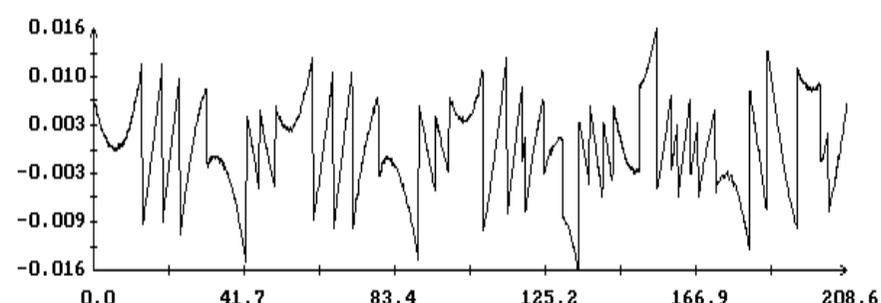
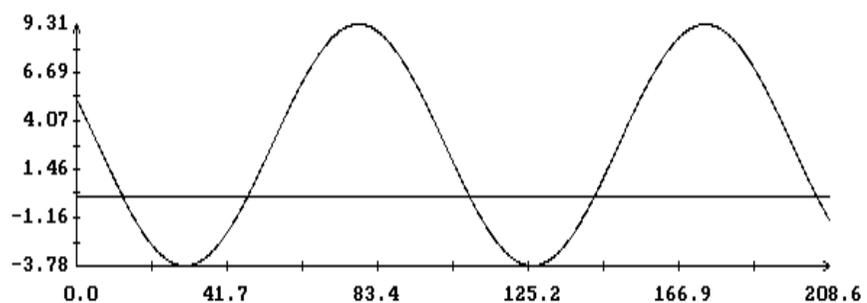
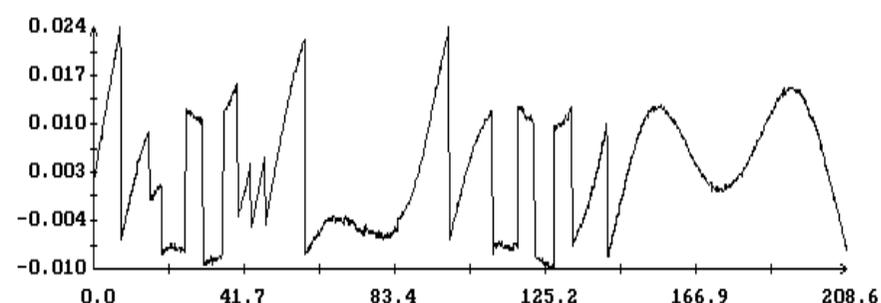
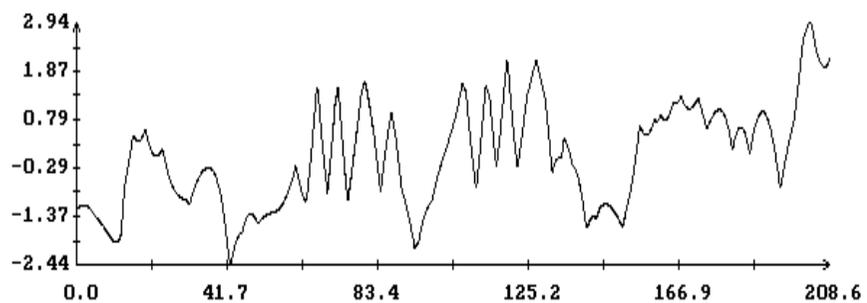
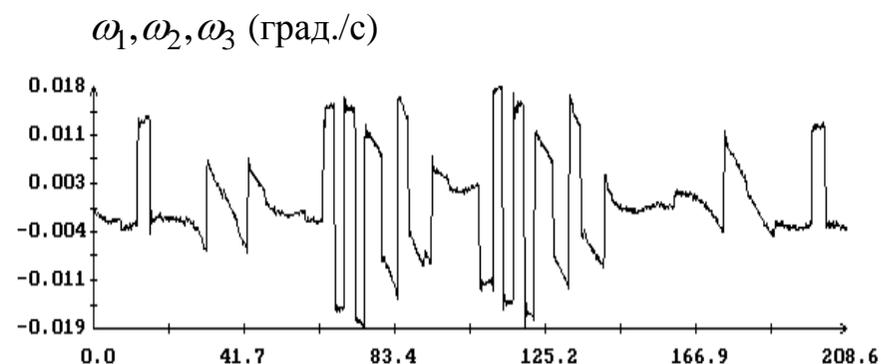
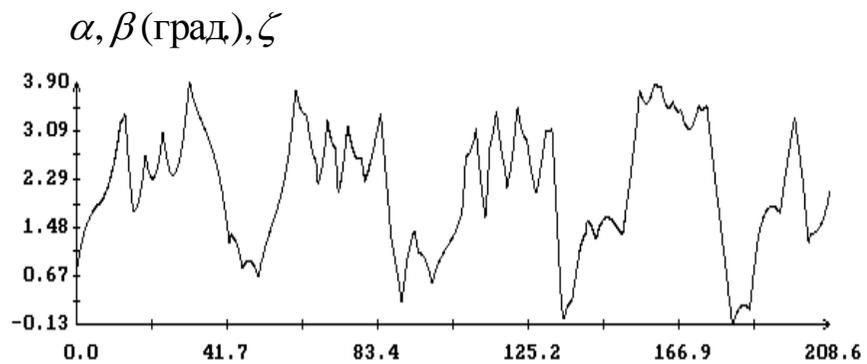


Рис. 21. Движение КА в солнечной ориентации. Момент $t = 0$ на графиках отвечает 371503.7 с (04:11:43.7 UTC 23.04.2013), $\tau = -38.9$ с; смещения магнитных измерений (γ): 5348, 966, -1777 ; $\sigma_H = 643\gamma$



t ((МИН))

t ((МИН))

Рис. 22. Движение КА в солнечной ориентации. Момент $t = 0$ на графиках отвечает 814279.7 с (07:11:19.7 UTC 28.04.2013), $\tau = -47.1$ с

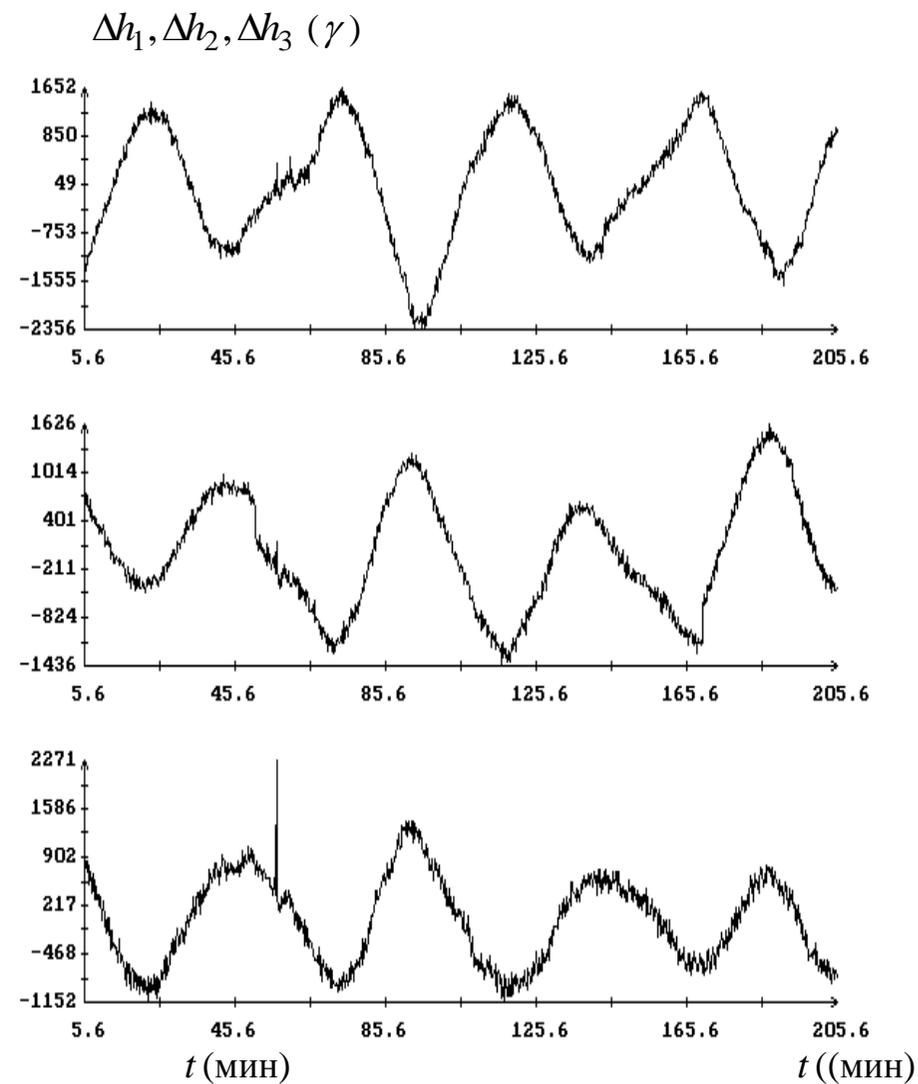
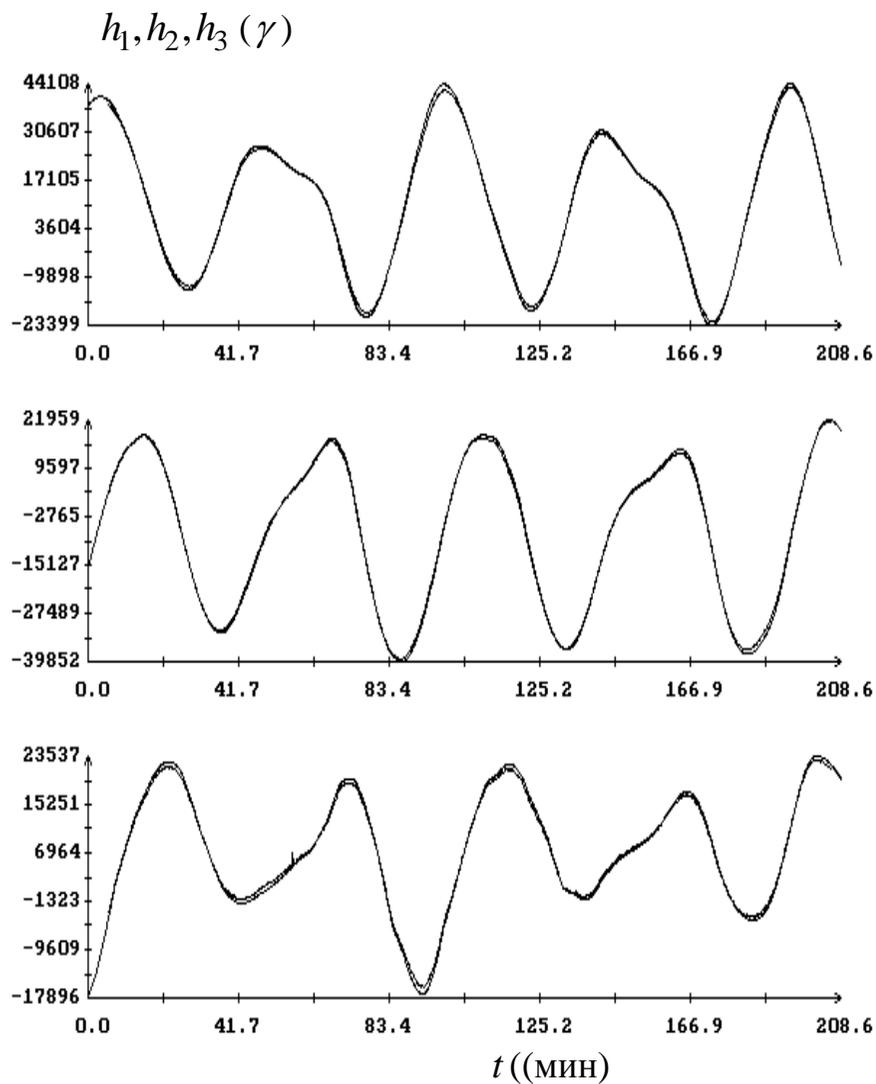


Рис. 23. Движение КА в солнечной ориентации. Момент $t = 0$ на графиках отвечает 814279.7 с (07:11:19.7 UTC 28.04.2013), $\tau = -47.1$ с смещения (γ): 5082, 1207, -1592 ; $\sigma_H = 766\gamma$

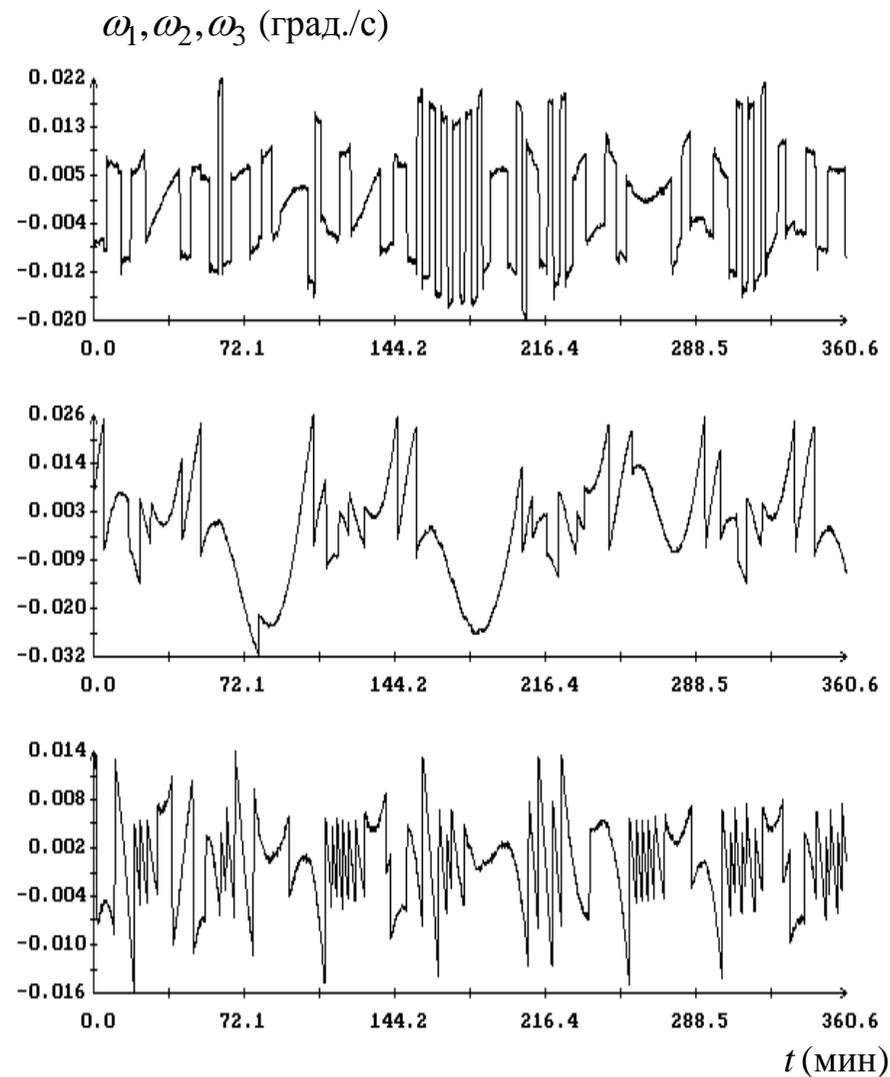
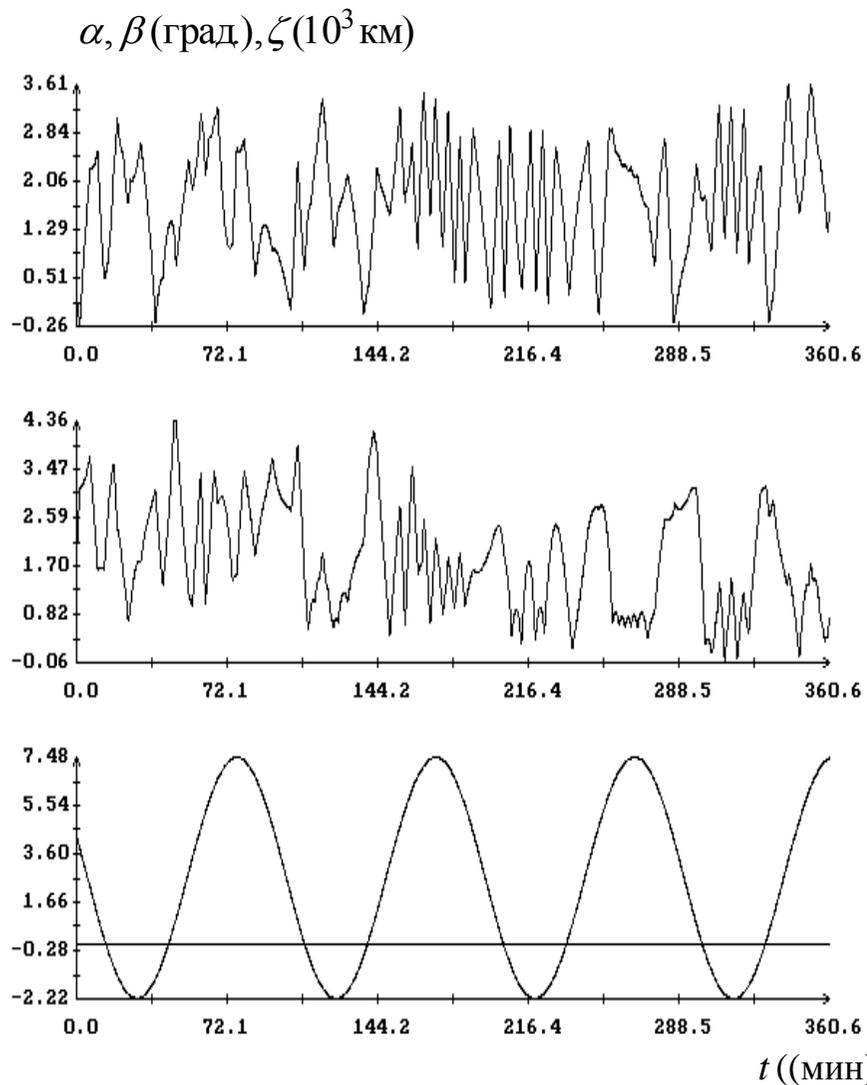


Рис. 24. Движение КА в солнечной ориентации. Момент $t=0$ на графиках отвечает 2250007.7 с (22:07:07.7 UTC 14.05.2013), $\tau = -55.5$ с

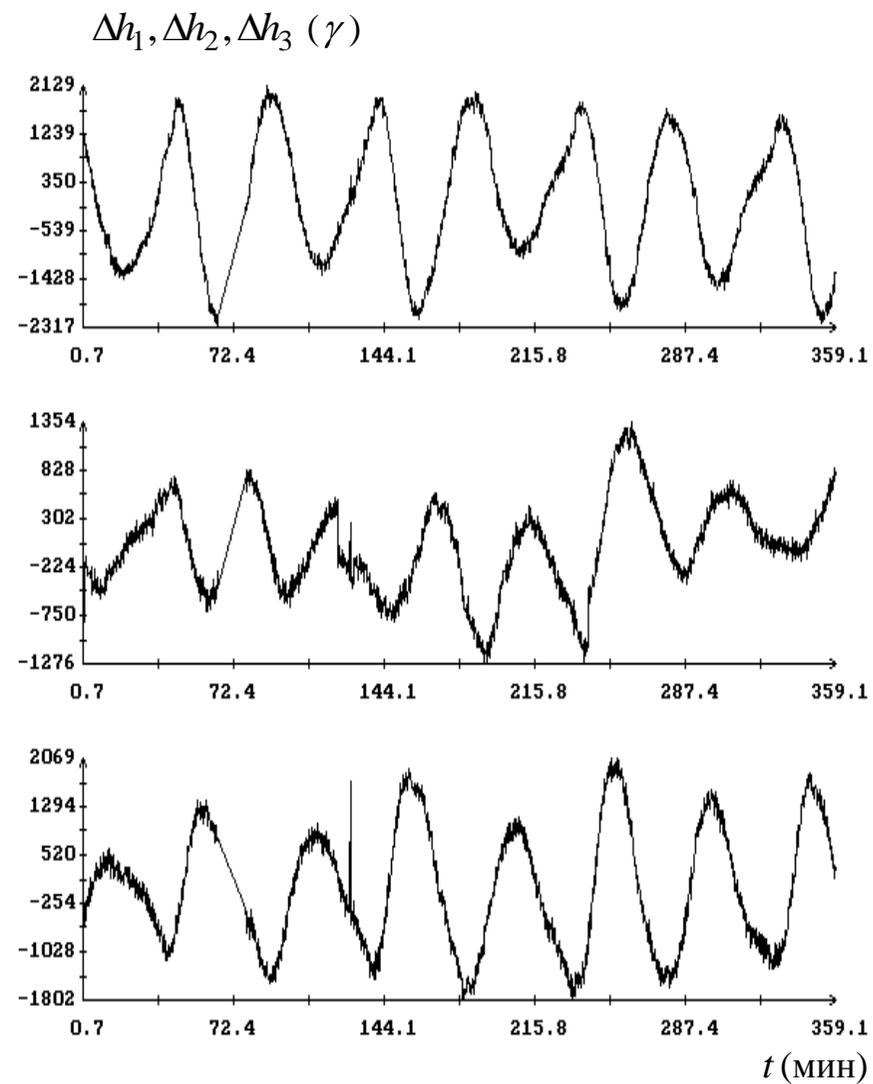
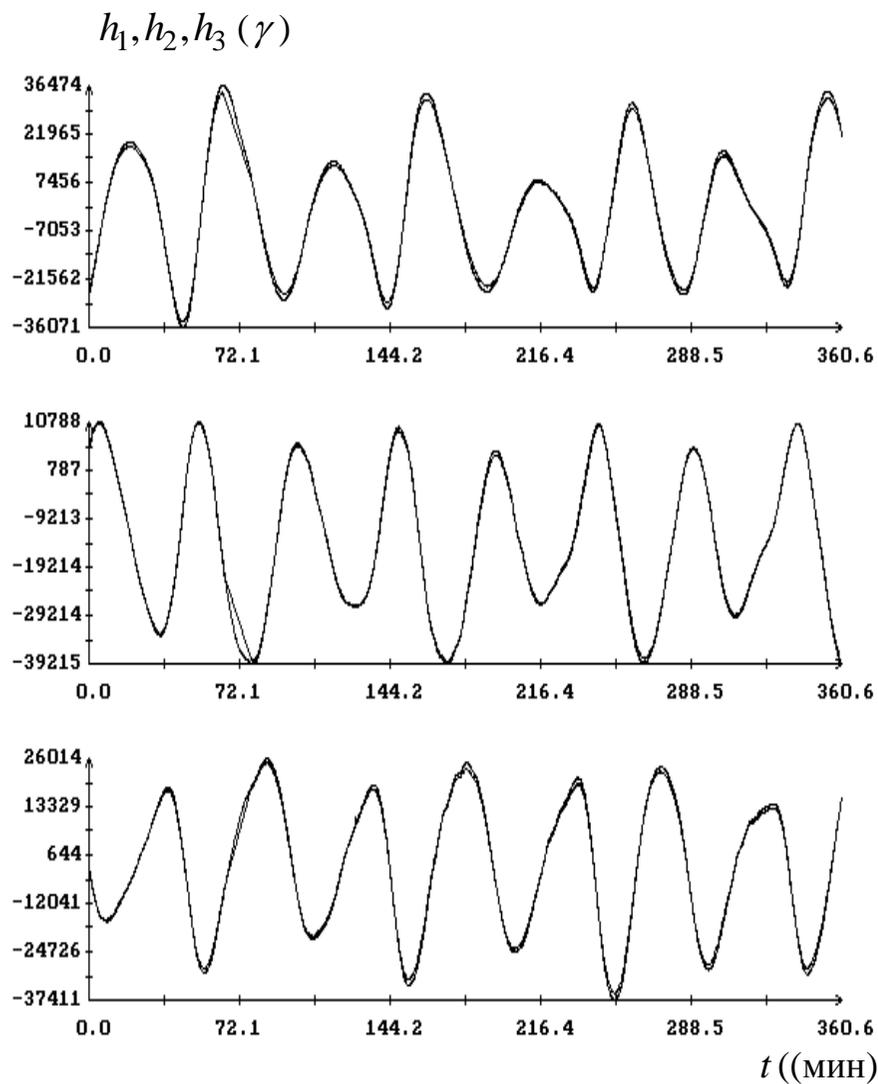


Рис. 25. Движение КА в солнечной ориентации. Момент $t = 0$ на графиках отвечает 2250007.7 с (22:07:07.7 UTC 14.05.2013), $\tau = -55.5$ с; смещения магнитных измерений (γ): 5571, 1190, -791 ; $\sigma_H = 926\gamma$

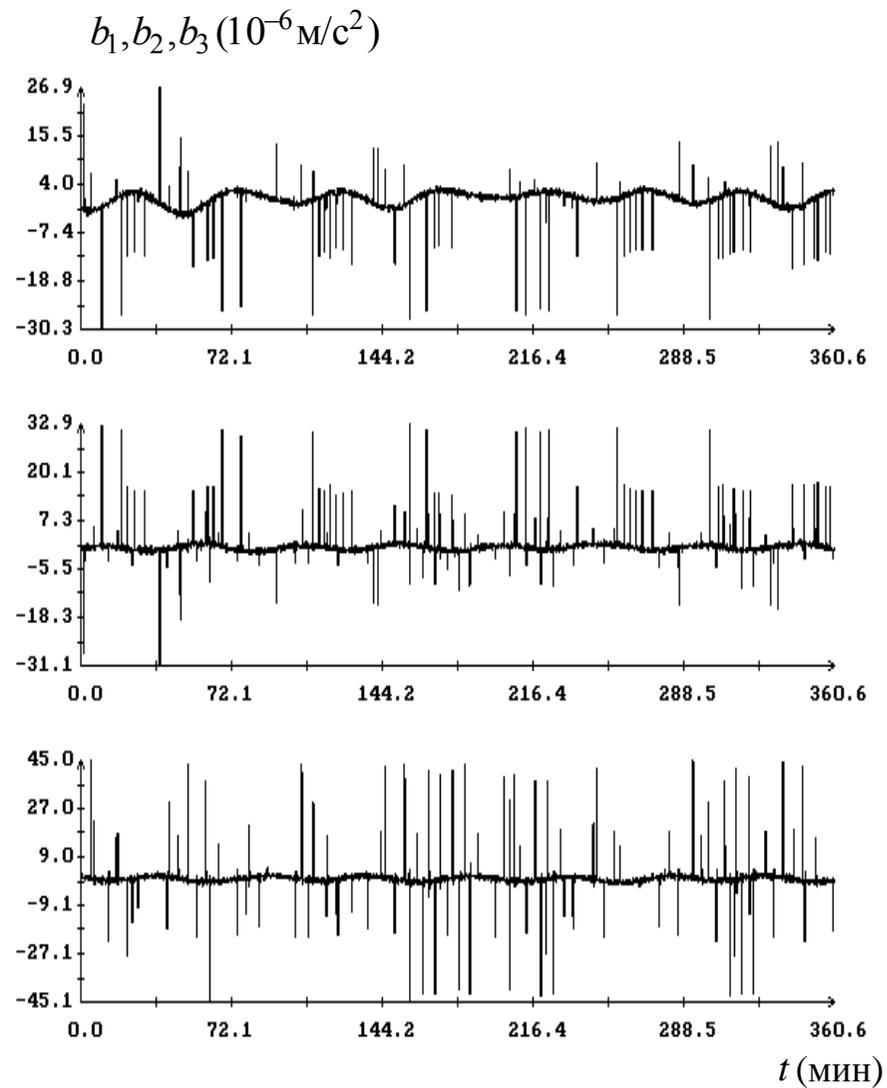
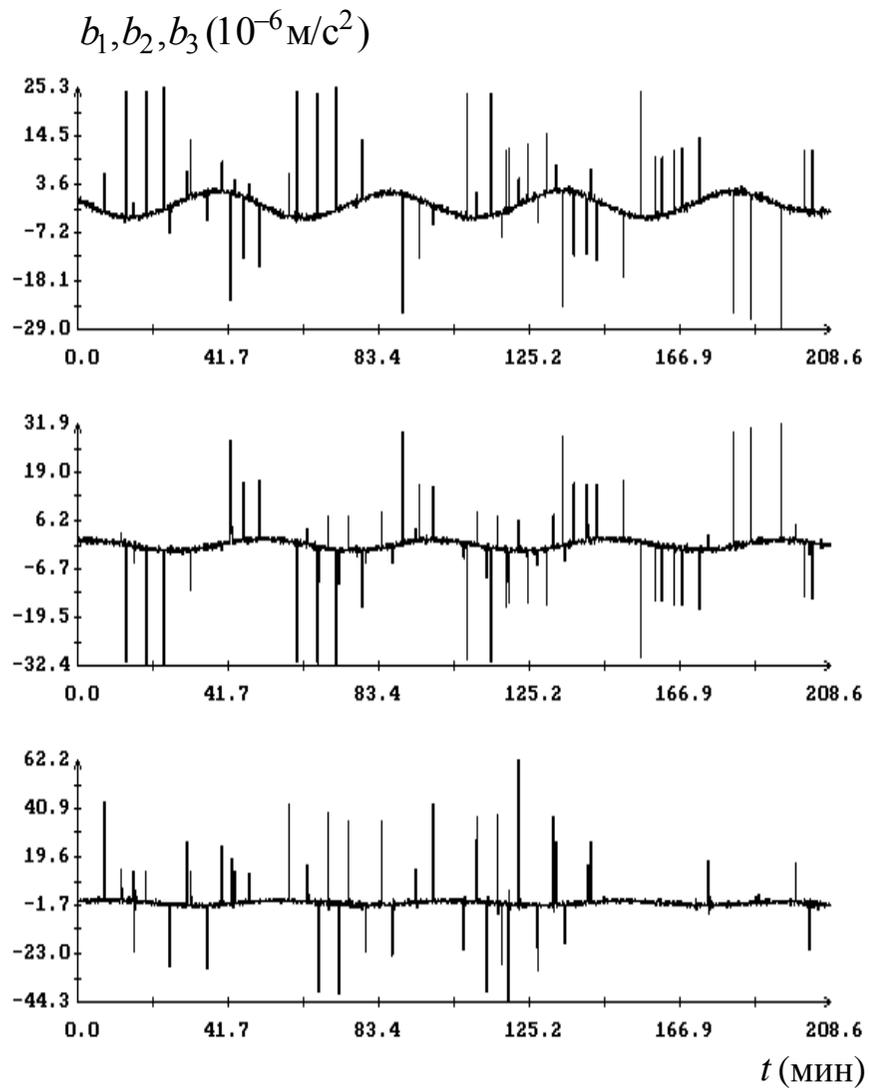


Рис. 26 Микроускорения в точке с координатами $(-1\text{м}, -0.9\text{м}, 02\text{м})$ в системе $x_1x_2x_3$. Слева – на отрезке времени, представленном на рис. 22, 23; справа – на отрезке времени, представленном на рис. 24, 25