



ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 4 за 2014 г.



Беляев М.Ю., Матвеева Т.В.,
Монахов М.И., Рулёв Д.Н.,
Сазонов В.В.

Эксперименты с
вращательным движением
космических кораблей
«Прогресс»

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Эксперименты с вращательным движением космических кораблей «Прогресс» / М.Ю.Беляев [и др.] // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2014. № 4. 39 с. URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2014-4>

**РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
Ордена Ленина
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
им. М.В.Келдыша**

**М.Ю. Беляев, Т.В. Матвеева, М.И. Монахов,
Д.Н. Рулёв, В.В. Сазонов**

**ЭКСПЕРИМЕНТЫ С ВРАЩАТЕЛЬНЫМ ДВИЖЕНИЕМ
КОСМИЧЕСКИХ КОРАБЛЕЙ «ПРОГРЕСС»**

Москва – 2014

Аннотация

Реконструировано неуправляемое вращательное движение космических кораблей «Прогресс М-15М» и «Прогресс М-17М» во время экспериментов, проводившихся в режиме одноосной солнечной ориентации (так называемая закрутка на Солнце). Начальные условия движения в этом режиме – закрутка корабля с угловой скоростью $2.2^\circ/\text{с}$ вокруг направленной на Солнце нормали к плоскости солнечных батарей. Продолжительность режима – несколько орбитальных витков. Реконструкция выполнена с помощью интегральных статистических методик по телеметрическим значениям компонент угловой скорости корабля и тока, снимаемого с его солнечных батарей. Исследованы два варианта реализации режима в полете «Прогресса М-17М», отвечающие начальным закруткам вокруг разных, но близких осей. Эксперименты с закрутками выполнены в порядке подготовки к проведению на кораблях «Прогресс» экспериментов с датчиком конвекции ДАКОН.

M.Yu.Belyaev, T.V.Matveeva, M.I.Monakhov, D.N. Rulev, V.V.Sazonov.
Experiments with attitude motion of spacecraft Progress. We reconstructed the uncontrolled attitude motion of the spacecraft Progress M-15M and Progress M-17M during experiments carried out in the mode of single-axis solar orientation. At the beginning of the oriented motion, the spacecraft rotated around the normal to solar batteries with angular rate 2.2 deg./s and the normal was directed to the Sun. The oriented motion lasted for a few orbit revolutions. The reconstruction was made using measurements of the spacecraft angular rate and the electric current from their solar batteries. The measurement data, collected in a time interval about a few tens minutes, were processed simultaneously by statistical methods and integration of the spacecraft attitude motion equations. The estimations of the mathematical model parameters and initial conditions of the attitude motion were obtained as a result of such processing. We investigated two variants of the orientation mode realized in the flight of Progress M-17M when the spacecraft was rotates around different but near axes. The experiments were made for preparation to the experiments with convection sensor DACON-M.

1. Закрутка на Солнце – один из штатных режимов автономного полета космических кораблей (КК) «Прогресс». В этом режиме КК совершает движение, близкое к стационарному вращению вокруг своей главной центральной оси максимального момента инерции, отклонение которой от направления на Солнце не превосходит нескольких градусов. Такое движение – одна из возможных реализаций режима одноосной солнечной ориентации КК. Начальные условия движения в этом режиме – закрутка корабля с угловой скоростью $2.2^\circ/\text{с}$ вокруг направленной на Солнце нормали к плоскости солнечных батарей. По своим амплитудно-частотным характеристикам микроускорения на борту КК в этом режиме очень удачно подходят для экспериментов с датчиком конвекции ДАКОН [1]. С одной стороны, они достаточно велики в области низких частот, а с другой стороны, имеют чисто дискретный спектр с небольшим числом гармоник. Это упростит анализ показаний датчика.

Для такого анализа необходимо знать реальные квазистатические микроускорения, имевшие место во время проведения экспериментов. Эти микроускорения можно найти расчетным путем, реконструировав вращательное движение КК. Реконструкция закруток «Прогрессов» выполняется по телеметрическим значениям компонент угловой скорости корабля в его строительной системе координат и тока, вырабатываемого солнечными батареями. Данные измерений, собранные на некотором интервале времени, обрабатываются совместно методом наименьших квадратов с помощью интегрирования уравнений движения КК относительно центра масс. В результате обработки оцениваются начальные условия движения и параметры используемых математических моделей. Такой способ реконструкции вращательного движения был опробован на КК «Прогресс М» с номерами 11М, 13М и 14М [2].

Ниже описываются результаты реконструкции закруток на КК «Прогресс М-15М» и «Прогресс М-17М». Основное внимание уделяется закруткам последнего КК, выполненным в апреле 2013 г. Тогда были сделаны попытки направить начальную угловую скорость не по строительной оси, совпадающей с нормалью к плоскости солнечных батарей, а по главной центральной оси максимального момента инерции, которая отклонялась от указанной нормали примерно на 5° . А именно, в начальный момент времени нормаль к плоскости солнечных батарей выставлялась на Солнце, но закрутка КК выполнялась вокруг главной центральной оси инерции.

Выставка начальной угловой скорости по главной центральной оси инерции уменьшает (в идеальном случае устраняет) нутационное движение КК и позволяет получить дополнительный вариант микрогравитационных условий для проведения экспериментов с датчиком конвекции. Заметим, что более мягкие микрогравитационные условия на КК «Прогресс» получаются при реализации режимов вращательного движения, описанных в [3 – 6]. Эти режимы обеспечивают малый уровень микроускорений и могут быть использованы для экспериментов с более гравитационно-чувствительными системами.

2. Математическая модель вращательного движения космического корабля. КК считается твердым телом. Для записи уравнений движения кораб-

ля относительно центра масс и соотношений, используемых при обработке данных измерений, вводятся две правые декартовы системы координат. Строительная система $Oy_1y_2y_3$ жестко связана с корпусом КК. Точка O – центр масс корабля, ось Oy_1 параллельна его продольной оси и направлена от стыковочного узла к агрегатному отсеку, ось Oy_2 перпендикулярна плоскости солнечных батарей (СБ). В этой системе интерпретируются данные измерений угловой скорости. Светочувствительная сторона СБ обращена к полупространству $y_2 > 0$. Система $Ox_1x_2x_3$ образована главными центральными осями инерции КК. Оси Ox_i составляют малые углы с осями Oy_i ($i = 1, 2, 3$).

Положение системы $Ox_1x_2x_3$ относительно системы $Oy_1y_2y_3$ будем задавать углами γ , α и β , которые введем посредством следующего условия. Система $Oy_1y_2y_3$ может быть переведена в систему $Ox_1x_2x_3$ тремя последовательными поворотами: 1) на угол α вокруг оси Oy_2 , 2) на угол β вокруг новой оси Oy_3 , 3) на угол γ вокруг новой оси Oy_1 , совпадающей с осью Ox_1 . Матрицу перехода от системы $Ox_1x_2x_3$ к системе $Oy_1y_2y_3$ обозначим $\|a_{ij}\|_{i,j=1}^3$, где a_{ij} – косинус угла между осями Oy_i и Ox_j . Элементы этой матрицы выражаются через введенные углы с помощью формул

$$\begin{aligned} a_{11} &= \cos\alpha \cos\beta, & a_{12} &= \sin\alpha \sin\gamma - \cos\alpha \sin\beta \cos\gamma, \\ a_{21} &= \sin\beta, & a_{22} &= \cos\beta \cos\gamma, \\ a_{31} &= -\sin\alpha \cos\beta, & a_{32} &= \cos\alpha \sin\gamma + \sin\alpha \sin\beta \cos\gamma, \\ & & a_{13} &= \sin\alpha \cos\gamma + \cos\alpha \sin\beta \sin\gamma, \\ & & a_{23} &= -\cos\beta \sin\gamma, \\ & & a_{33} &= \cos\alpha \cos\gamma - \sin\alpha \sin\beta \sin\gamma. \end{aligned}$$

Введем обозначения: s_i – компоненты орта направления «Земля – Солнце» в системе $Oy_1y_2y_3$, ω_i и Ω_i ($i = 1, 2, 3$) – компоненты абсолютной угловой скорости КК в системах координат $Ox_1x_2x_3$ и $Oy_1y_2y_3$ соответственно. Имеют место соотношения

$$\Omega_i = \sum_{k=1}^3 a_{ik} \omega_k \quad (i = 1, 2, 3). \quad (1)$$

Уравнения движения КК относительно центра масс образованы динамическими уравнениями Эйлера

$$\dot{\omega}_1 = \mu \omega_2 \omega_3, \quad \dot{\omega}_2 = \frac{\mu' - \mu}{1 - \mu\mu'} \omega_1 \omega_3, \quad \dot{\omega}_3 = -\mu' \omega_1 \omega_2 \quad (2)$$

и кинематическими уравнениями Пуассона

$$\dot{s}_1 = s_2 \Omega_3 - s_3 \Omega_2, \quad \dot{s}_2 = s_3 \Omega_1 - s_1 \Omega_3, \quad \dot{s}_3 = s_1 \Omega_2 - s_2 \Omega_1. \quad (3)$$

Здесь точка над символом означает дифференцирование по времени t ,

$$\mu = \frac{J_2 - J_3}{J_1}, \quad \mu' = \frac{J_2 - J_1}{J_3},$$

J_i – моменты инерции КК относительно осей Ox_i . Уравнения (2), (3) являются упрощенными: в (2) не учитываются действующие на КК внешние механические моменты, в (3) предполагается, что направление «Земля – Солнце» неизменно в инерциальном пространстве. Согласно результатам [2] точность этих уравнений достаточна для описания закруток КК на интервалах времени в несколько часов.

Проектные значения углов γ , α и β в соотношениях (1) и параметров μ , μ' в уравнениях (2) известны: $\gamma = \alpha = \beta = 0$, $\mu = 0.14$, $\mu' = 0.87$. Ниже эти величины определяются из обработки данных измерений наряду с неизвестными начальными условиями движения КК, т. е. служат параметрами согласования.

3. Методика обработки данных измерений. Во время закруток КК измерялись компоненты его абсолютной угловой скорости в системе $Oy_1y_2y_3$ и электрический ток, вырабатываемый СБ. Данные измерений по телеметрическому каналу передавались на Землю. Обработка этих данных, относящихся к одной и той же закрутке, состояла в поиске решения уравнений (1), наилучшим образом согласующего эти данные с их расчетными аналогами.

Данные измерений угловой скорости имеют вид

$$t_n, \Omega_1^{(n)}, \Omega_2^{(n)}, \Omega_3^{(n)} \quad (n = 1, 2, \dots, N),$$

где $\Omega_i^{(n)}$ ($i = 1, 2, 3$), – приближенные значения компонент Ω_i угловой скорости КК в строительной системе координат в момент времени t_n : $\Omega_i^{(n)} \approx \Omega_i(t_n)$, $t_1 < t_2 < \dots < t_N$. Расчетные аналоги измерений компонент угловой скорости определяются соотношениями (1) и уравнениями (2).

Данные измерений тока СБ представляют собой три ряда значений, получаемые от трех датчиков:

$$t'_m, I_1^{(m)}, I_2^{(m)}, I_3^{(m)} \quad (m = 1, 2, \dots, M),$$

Здесь $I_j^{(m)}$ – приближенное значение тока, фиксируемое в момент времени t'_m датчиком с номером j ($j = 1, 2, 3$), $t'_1 < t'_2 < \dots < t'_M$. Показания датчиков почти одинаковы, поэтому измерением тока в момент t'_m считается величина $I_m = [I_1^{(m)} + I_2^{(m)} + I_3^{(m)}] / 3$. Величины I_m не обрабатывались непосредственно. Предварительно они подвергались линейному преобразованию: из них исключалась низкочастотная составляющая, не связанная с вращательным движением КК (см. ниже). Расчетный аналог тока СБ: $I = I_0 s_2$. Здесь I_0 – максимально возможный ток СБ, s_2 – косинус угла между осью Oy_2 и направлением «Земля – Солнце». Этот косинус – одна из переменных в уравнениях (3). Проектное значение $I_0 = 29$ А уточнялось при обработке измерений тока.

Пусть ошибки в измерениях компонент угловой скорости независимы и имеют нормальное распределение с нулевым средним значением и стандартным отклонением σ_Ω . Ошибки скорректированных величин I_m также независимы, распределены нормально с нулевым средним значением и стандартным отклонением σ_I . Эти допущения позволили применить метод наименьших квадратов для реконструкции движения КК по указанным измерениям. Реконструкция выполнялась в два этапа. Это связано с тем, что, во-первых, уравнения (2) не зависят от уравнений (3), во-вторых, измерения угловой скорости интерпретируются надежнее измерений тока (см. ниже). Первый этап состоял в минимизации функционала

$$\Phi_\Omega = \sum_{n=1}^N \sum_{i=1}^3 [\Omega_i^{(n)} - \Omega_i(t_n)]^2$$

на решениях уравнений (2) с учетом соотношений (1). Минимизация Φ_Ω выполнялась по восьми величинам – начальным условиям $\omega_{i0} = \omega_i(t_0)$ ($i = 1, 2, 3$) и параметрам μ , μ' , γ , α и β . Момент времени t_0 выбирался из соображений удобства: на первом этапе $t_0 = t_1$, на втором этапе $t_0 = \min(t_1, t'_1)$.

Второй этап состоял в минимизации функционала

$$\Phi_I = \sum_{m=1}^M [I_m - I_0 s_2(t'_m)]^2$$

на решениях системы (3), в которой функции $\Omega_i(t)$ были определены на первом этапе. Минимизация выполнялась по начальным условиям $s_{i0} = s_i(t_0)$ ($i = 1, 2, 3$) и параметру I_0 .

4. Обработка измерений угловой скорости. Движение КК в режиме солнечной закрутки происходило с большой угловой скоростью в окрестности стационарного решения уравнений (2), принадлежащего семейству

$$\omega_1 = \omega_3 = 0, \quad \omega_2 = \Omega. \quad (4)$$

Здесь Ω – произвольная постоянная. Решения этого семейства описывают стационарные вращения КК вокруг его главной центральной оси максимального момента инерции. Для отыскания решений уравнений (2), близких к (4), можно воспользоваться линеаризованными уравнениями

$$\dot{\omega}_1 = \mu\Omega\omega_3, \quad \dot{\omega}_3 = -\mu'\Omega\omega_1, \quad \omega_2 = \Omega.$$

Решив эти уравнения, получим приближенные формулы общего решения уравнений (2)

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \lambda [A \sin \nu(t - t_0) + B \cos \nu(t - t_0)], \quad \omega_2 = \Omega, \\ \omega_3 &= A \cos \nu(t - t_0) - B \sin \nu(t - t_0), \quad \lambda = \sqrt{\frac{\mu}{\mu'}}, \quad \nu = \Omega \sqrt{\mu\mu'}. \end{aligned} \quad (5)$$

Здесь A , B и Ω – произвольные постоянные. Формулы (5) тем точнее, чем меньше абсолютные величины отношений A/Ω и B/Ω .

Формулы (1), (5) использовались для предварительной минимизации функционала Φ_{Ω} . В этом случае Φ_{Ω} рассматривался как функция восьми независимых параметров: $A, B, \Omega, \lambda, \nu, \gamma, \alpha$ и β . После того, как находились их значения, доставляющие минимум Φ_{Ω} , вычислялись $\omega_{10} = \lambda B$, $\omega_{20} = \Omega$, $\omega_{30} = A$, $\mu = \lambda \nu / \Omega$, $\mu' = \nu / \lambda \Omega$, и функционал минимизировался на решениях уравнений (2). В этом случае Φ_{Ω} рассматривается как функция другого набора из восьми параметров: $\omega_{i0} = \omega_i(t_0)$ ($i = 1, 2, 3$), $\mu, \mu', \gamma, \alpha, \beta$. Минимизация Φ_{Ω} в обоих случаях выполнялась методом Гаусса – Ньютона. Хотя решение уравнений (2) выражается через эллиптические функции, в описываемых расчетах эти уравнения, а также уравнения в вариациях для расчета частных производных решения по уточняемым параметрам, интегрировались численно.

Точность аппроксимации измерений угловой скорости и разброс в определении уточняемых величин характеризовались соответствующими стандартными отклонениями. Приведем расчетные формулы. Пусть $\Phi_{\Omega, \min}$ – значения функционала Φ_{Ω} в точке минимума, C_{Ω} – вычисленная в этой точке матрица системы нормальных уравнений, возникающих в методе Гаусса – Ньютона (матрица $2C_{\Omega}$ приближенно равна матрице квадратичной формы $d^2\Phi_{\Omega}$). Тогда формулы стандартных отклонений ошибок в измерениях и ковариационной матрицы K_{Ω} уточняемых параметров можно записать в виде

$$\sigma_{\Omega} = \sqrt{\frac{\Phi_{\Omega, \min}}{3N - 8}}, \quad K_{\Omega} = \sigma_{\Omega}^2 C_{\Omega}^{-1}.$$

Стандартные отклонения параметров $\mu, \mu', \gamma, \alpha, \beta$ – квадратные корни из соответствующих диагональных элементов матрицы K_{Ω} – обозначим $\sigma_{\mu}, \sigma_{\mu'}, \sigma_{\gamma}, \sigma_{\alpha}, \sigma_{\beta}$.

Найденные движения КК в режиме одноосной закрутки КК удобно характеризовать значениями первых интегралов уравнений (2). Будем рассматривать три первых интеграла этих уравнений

$$c_1 = \sqrt{\frac{\mu'}{\mu} \omega_1^2 + \omega_3^2}, \quad c_2 = \sqrt{\frac{\mu - \mu'}{\mu'(1 - \mu\mu')} \omega_1^2 + \omega_2^2}, \quad c_3 = \sqrt{\omega_2^2 + \frac{\mu' - \mu}{\mu'(1 - \mu\mu')} \omega_3^2}.$$

Между ними существует функциональная зависимость:

$$(\mu - \mu')c_1^2 + \mu'(1 - \mu\mu')(c_3^2 - c_2^2) = 0,$$

поэтому независимы из них только два. Если в эти интегралы подставить формулы (5), то получим

$$c_1 \approx \sqrt{A^2 + B^2}, \quad c_2 \approx c_3 \approx |\Omega|.$$

Для решений уравнений (2) имеем $c_2 \leq |\omega_2| \leq c_3$. В представляющих интерес движениях КК $\omega_2 > 0$, и знаки абсолютной величины в последних соотношении-

ях можно опустить – записать их в виде $c_2 \approx c_3 \approx \Omega$, $c_2 \leq \omega_2 \leq c_3$. При правильной реализации закрутки должно выполняться соотношение $c_1 \ll c_2$. Чем меньше c_1/c_2 , тем ближе движение КК к стационарному вращению вокруг главной центральной оси инерции Ox_2 . Для идеальной закрутки $c_1 = 0$.

Некоторые результаты обработки измерений угловой скорости приведены в табл. 1, 2 и на рис. 1 – 12. В табл. 1 использовано декретное московское время – ДМВ (UTC +3 ч). В ней для каждого интервала измерений указаны: его номер, начальная точка интервала t_1 и ее дата, длина интервала $t_N - t_1$, число N включенных в обработку моментов времени с измерениями, а также полученные при обработке стандартное отклонение σ_Ω и первые интегралы c_1, c_2, c_3 . В табл. 2 приведены оценки параметров тензора инерции КК и их стандартные отклонения. Интервалы 1 – 20 относятся к полету «Прогресса М-17М», измерения на интервалах 21 – 24 получены в полете «Прогресса М-15М». Границы интервалов обработки были выбраны таким образом, чтобы движение КК на каждом интервале можно было считать свободным – не подверженным влиянию механических моментов искусственного происхождения. Интервалы, на которых действовали такие моменты (они определялись по графикам измерений), не обрабатывались. Во всех случаях в качестве момента t_0 использовался момент t_1 . Единицами измерения углов и угловой скорости служат соответственно радиан и 10^{-3}с^{-1} (при такой единице времени орбитальная частота равна 1.14).

Графики реконструированных функций $\Omega_i(t)$ ($i = 1, 2, 3$) изображены сплошными линиями в левых частях рис. 1, 3, 5, 7, 9, 11 и на рис. 2, 4, 6, 8, 10, 12. Маркеры рядом с графиками указывают данные измерений – точки $(t_n, \Omega_i^{(n)})$. Согласно данным табл. 1 среднеквадратичные значения ошибок измерений угловой скорости не превосходят $\sigma_\Omega = 10^{-4} \text{с}^{-1} \approx 0.006^\circ/\text{с}$. Более детальную информацию об этих ошибках дают графики в правых частях рис. 1, 3, 5, 7, 9, 11. Эти графики представляют собой ломаные, звенья которых соединяют соседние по времени точки $(t_n, \Omega_i^{(n)} - \Omega_i(t_n))$, $n = 1, 2, \dots, N$.

Как видно из табл. 2 (см. также [2]), обработка измерений угловой скорости позволяет получить приемлемые оценки тензора инерции КК. Особенно интересна оценка угла γ . Для интервалов 1 – 20 $\gamma \approx 4.7^\circ$, для интервалов 21 – 24 $\gamma \approx 6.5^\circ$. Последняя оценка близка к оценкам [2]. Это можно объяснить тем, что интервалы 21 – 24 и интервалы в [2] получены в полете КК до стыковки со станцией, а интервалы 1 – 20 получены в полете КК после отстыковки от нее. Распределение масс КК после его разгрузки-загрузки на станции становится другим. Кроме того, эти группы интервалов относятся к разным, хотя и однотипным КК.

Как уже отмечалось, возмущенное движение КК в режиме одноосных закруток в рамках модели движения (2) характеризуется значениями первых интегралов c_1, c_2 и c_3 (табл. 1). В особенности, значением c_1 . Соотношения

$c_1 \ll c_2$, $c_2 \approx c_3 \approx 38$ имеют место для всех обработанных интервалов. На 14-ти интервалах $c_1 < 1$, на 5-ти $c_1 > 2$. На интервале 10 получено $c_1 = 0.19$.

На КК «Прогресс М-17М» проводились специальные эксперименты по уменьшению возмущенного движения. Они выполнялись так. Сначала КК закручивался вокруг оси Oy_2 с угловой скоростью $2.2^\circ/\text{с}$. Во время этой закрутки собиралась телеметрическая информация об угловой скорости КК и токосъеме с его СБ. Измерения угловой скорости оперативно обрабатывались, и в результате обработки уточнялись параметры тензора инерции КК. Затем КК закручивался с угловой скоростью $2.2^\circ/\text{с}$ вокруг найденной оси Ox_2 . Сравнение значений c_1 для закруток до и после обработки показывает, дает ли учет направления оси Ox_2 ощутимый результат.

На интервалах 1 – 4, 9 – 12 и 17 – 24 была реализована закрутка вокруг оси Oy_2 , на остальных интервалах – закрутка вокруг оси Ox_2 . Судя по данным табл. 1, реализации закруток можно в определенной степени считать случайными. При переходе от интервалов 1 – 4 к интервалам 5 – 8 уменьшение c_1 налицо. При переходе от интервалов 9 – 12 к интервалам 13 – 16 уровень значений c_1 практически не меняется. Правда, на интервалах 9 – 16 значения c_1 малы. Можно сделать и оптимистический вывод. В результате закруток вокруг оси Ox_2 значения c_1 не были большими. По-видимому, оси Ox_2 и Oy_2 оказались настолько близки, что система управления движением КК не позволила направить начальную угловую скорость по каждой из них с нужной для чистоты эксперимента точностью.

5. Обработка измерений тока. Решения уравнений (3), на которых определен функционал Φ_I , должны удовлетворять условию $s_1^2 + s_2^2 + s_3^2 = 1$. Это условие выполняется при всех t , если оно выполнено в точке t_0 . По этой причине начальные условия переменных s_i выражались через независимые параметры z_1 и z_2 по формулам

$$s_1 = \frac{2z_1}{1 + z_1^2 + z_2^2}, \quad s_2 = \frac{1 - z_1^2 - z_2^2}{1 + z_1^2 + z_2^2}, \quad s_3 = \frac{2z_2}{1 + z_1^2 + z_2^2}.$$

Минимизация Φ_I по переменным z_1, z_2, I_0 выполнялась методом Гаусса – Ньютона из начальной точки $z_1 = z_2 = 0, I_0 = 29\text{А}$, отвечающей идеальной солнечной ориентации КК и проектному значению максимального тока. Точность аппроксимации скорректированных измерений тока и разброс в определении величин z_1, z_2, I_0 характеризовались соответствующими стандартными отклонениями. Пусть $\Phi_{I, \min}$ – значения функционала Φ_I в точке минимума, C_I – вычисленная в этой точке матрица систем нормальных уравнений, используемых в методе Гаусса – Ньютона (матрица $2C_I$ приближенно равна матрице квадратичной формы $d^2\Phi_I$). Тогда формулы стандартных отклонений

ошибок в измерениях и ковариационной матрицы K_I уточняемых параметров можно записать в виде

$$\sigma_I = \sqrt{\frac{\Phi_{I,\min}}{M-3}}, \quad K_I = \sigma_I^2 C_I^{-1}.$$

Стандартное отклонение параметра I_0 обозначим σ_{I_0} .

Результаты обработки измерений тока приведены в табл. 3 и на рис. 13 – 24. Таблица содержит номера интервалов измерений (цифры со штрихом), их начальные точки t'_1 , даты этих точек, длины интервалов $t'_M - t'_1$, числа M включенных в обработку моментов времени с измерениями и некоторые результаты обработки. Номер интервала с измерениями угловой скорости (см. табл. 1, 2) указывает на решение уравнений (2), использованное в системе (3) при обработке данного отрезка измерений тока.

Рисунки иллюстрируют подготовку исходных данных и построенные аппроксимации. Подготовка данных состояла в их предварительной коррекции. Из измерений тока исключалась составляющая, которая обусловлена светом, отраженным от земной поверхности. Эту составляющую трудно выделить точно. Приближенное выделение основано на частотных соображениях. Составляющая, обусловленная отраженным от Земли светом, – низкочастотная. Она меняется с орбитальной частотой. Однако, поскольку эта составляющая довольно сложно зависит от времени, в ее представлении рядом Фурье необходимо учесть какое-то число гармоник с частотами, кратными орбитальной. Составляющая тока, обусловленная прямым солнечным светом, – высокочастотная. Ее основная частота – ν в формулах (5) – примерно в 15 раз больше орбитальной. Заметный вклад вносят в эту составляющую и гармоники с частотами, кратными $\Omega \approx c_2$ (см. табл. 1); а Ω более чем в 30 раз превосходит орбитальную частоту. В описанной ситуации составляющую, обусловленную отраженным от Земли светом, можно выделить с помощью низкочастотной фильтрации.

Использованный способ фильтрации состоял в следующем. Сначала строилась аппроксимация низкочастотной составляющей с помощью выражения (конечного ряда Фурье)

$$\chi(t) = a_{L+1} + a_{L+2}(t-t'_1) + \sum_{l=1}^L a_l \sin \frac{\pi l(t-t'_1)}{t'_M - t'_1},$$

коэффициенты которого a_1, a_2, \dots, a_{L+2} наилучшим образом в смысле метода наименьших квадратов сглаживают точки (t'_m, I_m) , $m=1, 2, \dots, M$. Графики низкочастотной составляющей для интервалов из табл. 3 изображены плавными линиями в верхних левых углах рис. 13 – 24. В тех же системах координат изображены графики исходных данных – ломаные, звенья которых соединяют соседние точки (t'_m, I_m) . Выражения $\chi(t)$ построены при $L=10$; значение L практически без изменения результата можно варьировать в довольно широких пределах. Затем вычислялось среднее значение $\langle \chi \rangle$ выражения $\chi(t)$ на сетке $\{t'_m\}$. Функция $\chi(t) - \langle \chi \rangle$ считалась той посторонней составляющей, которую

следовало удалить из данных измерений. Удаление состояло в замене величин I_m величинами $I_m - \chi(t'_m) + \langle \chi \rangle$ с сохранением прежних обозначений. Ломанные, проходящие через новые точки (t'_m, I_m) , приведены в левых нижних углах рис. 13 – 24.

В средней части этих рисунков сплошными гладкими линиями изображены решения системы (2). Они построены на отрезках $t_0 \leq t \leq t'_M$. Рядом с графиком функции $s_2(t)$ маркерами отмечены точки (t'_m, η_m) , $\eta_m = I_m / I_0 \approx s_2(t'_m)$ ($m = 1, 2, \dots, M$). В верхних правых углах рисунков сплошными гладкими линиями изображены графики функции $I = I_0 s_2(t)$ – расчетного аналога тока СБ. Маркеры рядом с этими графиками указывают точки (t'_m, I_m) . Нижние правые графики – ломанные с вершинами в точках $(t'_m, I_m - I(t'_m))$. Эти ломанные иллюстрирует ошибки аппроксимации измерений тока принятой моделью.

Табл. 3, кроме указанных выше данных, содержит стандартные отклонения σ_I и $\sigma_\eta = \sigma_I / I_0$ (среднеквадратичное значение величин $\eta_m - s_2(t'_m)$), оценку максимально возможного тока СБ I_0 и стандартное отклонение этой оценки σ_{I_0} . Судя по рис. 13 – 24 и значениям σ_I в табл. 3, аппроксимация измерений тока получилась достаточно точной.

Математическая модель вращательного движения КК, принятая в данной работе, была также использована в [2], где названа упрощенной. Наряду с этой моделью в [2] рассматривалась и более детальная модель, основанная на полной системе уравнений движения КК [3 – 6]. В детальной модели учитывались действующие на КК гравитационный и восстанавливающий аэродинамический моменты. Как показал опыт использования обеих моделей, они обеспечивают примерно одинаковую точность аппроксимации данных измерений, полученных в режиме одноосной солнечной ориентации КК на отрезках времени порядка орбитального периода. При этом аппроксимация по упрощенной модели получается единственной, а по детальной модели – нет: по измерениям тока и угловой скорости плохо, практически неоднозначно, определяется угол поворота КК вокруг нормали к плоскости СБ. В упрощенную модель этот угол или аналогичная переменная не входят. Остаточные микроускорения в режиме закруток, рассчитанные по упрощенной модели, лишь на несколько десятых долей процента отличаются от микроускорений, рассчитанных в полной модели.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 14-01-00423).

Литература

1. Путин Г.Ф., Глухов А.Ф., Бабушкин И.А., Завалишин Д.А., Беляев М.Ю., Иванов А.И., Сазонов В.В. Исследование микроускорений на борту Международной космической станции с помощью датчика конвекции // Космические исследования. 2012. Т. 50. № 5. С. 373-379.
2. Беляев М.Ю., Матвеева Т.В., Монахов М.И., Сазонов В.В., Цветков В.В. Определение вращательного движения кораблей Прогресс по данным из-

- мерений угловой скорости и токосъема с солнечных батарей // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. 2012. № 39. URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2012-39>
3. Беляев М.Ю., Бабкин Е.В., Сазонов В.В. Режимы неуправляемого вращательного движения КА Прогресс для экспериментов в области микрогравитации // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. 2004. № 44. URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2004-44>
 4. Брюханов Н.А., Цветков В.В., Беляев М.Ю., Бабкин Е.В., Матвеева Т.В., Сазонов В.В. Экспериментальное исследование режимов неуправляемого вращательного движения КА Прогресс // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. 2004. № 43. URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2004-43>
 5. Брюханов Н.А., Цветков В.В., Беляев М.Ю., Бабкин Е.В., Матвеева Т.В., Сазонов В.В. Эксперименты с неуправляемым вращательным движением КА Прогресс // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. 2005. № 83. URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2005-83>
 6. Брюханов Н.А., Цветков В.В., Беляев М.Ю., Бабкин М.Ю., Матвеева Т.В., Сазонов В.В. Экспериментальное исследование режимов неуправляемого вращательного движения КА Прогресс // Космические исследования. 2006. Т. 44. № 1. С. 52-61.

Таблица 1. Результаты обработки измерений угловой скорости

№ инт.	Дата	t_1 (ДМВ)	$t_N - t_1$ (мин)	N	σ_Ω	c_1	c_2	c_3
					(10^{-3}с^{-1})			
1	15.04.13	18:27:27	23.87	83	0.0958	2.86	37.70	37.80
2	15.04.13	18:51:19	44.38	66	0.0730	2.30	37.72	37.79
3	15.04.13	19:36:58	20.93	365	0.0719	2.21	37.73	37.79
4	15.04.13	20:00:46	70.32	104	0.0919	2.14	37.73	37.79
5	17.04.13	16:36:40	25.53	39	0.0692	1.53	38.28	38.31
6	17.04.13	17:02:53	47.87	236	0.0814	0.84	38.29	38.30
7	17.04.13	17:58:32	29.80	422	0.0802	1.12	38.29	38.30
8	17.04.13	18:33:03	50.06	199	0.0838	1.32	38.27	38.29
9	18.04.13	15:39:03	28.27	41	0.0687	0.75	38.41	38.41
10	18.04.13	16:08:00	40.42	53	0.0698	0.19	38.45	38.45
11	18.04.13	17:01:48	12.17	419	0.0969	0.51	38.43	38.43
12	18.04.13	17:14:55	68.00	100	0.0888	0.53	38.42	38.42
13	19.04.13	14:41:55	28.95	40	0.0586	0.95	38.78	38.79
14	19.04.13	15:12:47	37.95	57	0.0700	0.91	38.79	38.80
15	19.04.13	16:18:06	25.67	37	0.0679	0.66	38.80	38.81
16	19.04.13	16:47:03	37.13	53	0.0670	0.87	38.76	38.77
17	20.04.13	15:18:50	30.32	44	0.0719	0.38	38.60	38.60
18	20.04.13	15:49:09	33.58	40	0.0685	0.97	38.59	38.60
19	20.04.13	16:54:20	26.37	35	0.0673	1.26	38.56	38.58
20	20.04.13	17:21:23	41.08	58	0.0652	0.61	38.58	38.58
21	21.04.12	11:27:15	41.90	94	0.0726	0.75	38.73	38.73
22	21.04.12	12:09:50	40.35	54	0.0682	0.47	38.84	38.84
23	21.04.12	18:58:45	8.93	305	0.0727	4.09	37.56	37.77
24	21.04.12	19:08:14	76.63	106	0.0924	3.86	37.62	37.81

Таблица 2. Результаты оценивания параметров тензора инерции КК

№ инт.	μ	$\sigma_{\mu} \times 10^3$	μ'	$\sigma_{\mu'} \times 10^2$	γ	$\sigma_{\gamma} \times 10^4$	α	$\sigma_{\alpha} \times 10^3$	β	$\sigma_{\beta} \times 10^4$
1	0.155	2.5	0.862	1.4	-0.0830	4.2	0.0310	8.8	-0.0214	7.1
2	0.156	2.2	0.879	1.3	-0.0830	2.8	0.0194	7.3	-0.0199	6.5
3	0.160	10	0.881	0.55	-0.0797	1.2	0.0211	3.2	-0.0201	2.7
4	0.159	2.4	0.873	1.3	-0.0826	2.9	0.0163	7.9	-0.0197	6.9
5	0.153	4.1	0.892	2.4	-0.0823	3.8	0.0108	13	-0.0180	11
6	0.158	3.6	0.886	2.0	-0.0805	2.9	0.0202	12	-0.0204	10
7	0.152	2.0	0.872	1.1	-0.0810	1.5	0.0292	6.6	-0.0181	5.5
8	0.155	2.8	0.894	1.6	-0.0803	2.6	0.0473	9.2	-0.0226	6.7
9	0.156	8.2	0.875	4.6	-0.0799	7.2	0.0867	27	-0.0249	22
10	0.117	28	1.190	28	-0.0821	17	0.0151	82	-0.0203	68
11	0.160	5.5	0.819	2.8	-0.0819	2.8	-0.0368	17	-0.0150	14
12	0.155	9.3	0.843	5.1	-0.0813	6.6	0.0196	32	-0.0196	26
13	0.152	5.6	0.896	3.3	-0.0795	4.5	0.0630	18	-0.0223	14
14	0.155	5.8	0.879	3.3	-0.0811	4.5	0.0183	19	-0.0201	15
15	0.157	9.7	0.869	5.4	-0.0808	6.9	0.0310	32	-0.0200	26
16	0.159	6.1	0.868	3.3	-0.0808	5.0	0.0422	20	-0.0223	16
17	0.176	17	0.778	7.4	-0.0826	11	0.0169	56	-0.0182	47
18	0.165	6.3	0.827	3.1	-0.0835	4.9	-0.0071	23	-0.0178	19
19	0.149	5.1	0.904	3.1	-0.0829	4.4	0.0160	17	-0.0182	14
20	0.157	7.9	0.860	4.3	-0.0835	5.4	0.0010	27	-0.0183	23
21	0.152	5.6	0.896	3.1	-0.1147	3.7	0.0089	24	-0.0123	28
22	0.162	12	0.963	7.1	-0.1149	5.0	0.0041	36	-0.0120	42
23	0.168	0.62	0.858	0.32	-0.1143	1.2	0.0028	2.0	-0.0133	2.4
24	0.170	1.4	0.860	0.69	-0.1153	2.4	0.0063	4.5	-0.0128	5.7

Таблица 3. Результаты обработки измерений тока

№ инт.	Дата	t'_1	$t'_M - t'_1$ (мин)	M	№ инт. ω	$\sigma_I \times 10^2$ (А)	$\sigma_\eta \times 10^3$	I_0 (А)	σ_{I_0} (А)
1'	15.04.2013	18:51:02	53.93	6323	2	8.83	3.4	26.15	0.0012
2'	15.04.2013	20:23:26	57.62	6746	4	9.76	3.7	26.08	0.0019
3'	17.04.2013	17:02:32	48.22	5651	6	7.59	2.9	25.98	0.0010
4'	17.04.2013	18:34:52	52.84	16103	8	9.13	3.5	25.79	0.00082
5'	18.04.2013	16:07:43	46.25	5328	10	8.34	3.2	25.99	0.0020
6'	18.04.2013	17:40:02	51.27	5994	12	7.97	3.1	25.91	0.0020
7'	19.04.2013	15:12:23	45.08	5280	14	9.62	3.7	25.90	0.0013
8'	19.04.2013	16:44:41	44.95	5227	16	9.70	3.8	25.76	0.0014
9'	20.04.2013	15:48:41	44.45	5028	18	8.22	3.2	25.85	0.0020
10'	20.04.2013	17:20:54	45.73	5312	20	9.51	3.7	25.81	0.0023
11'	21.04.2012	12:09:24	44.57	5068	22	29.0	10.7	27.12	0.022
12'	21.04.2012	19:39:44	50.27	5767	24	17.2	6.3	27.10	0.0026

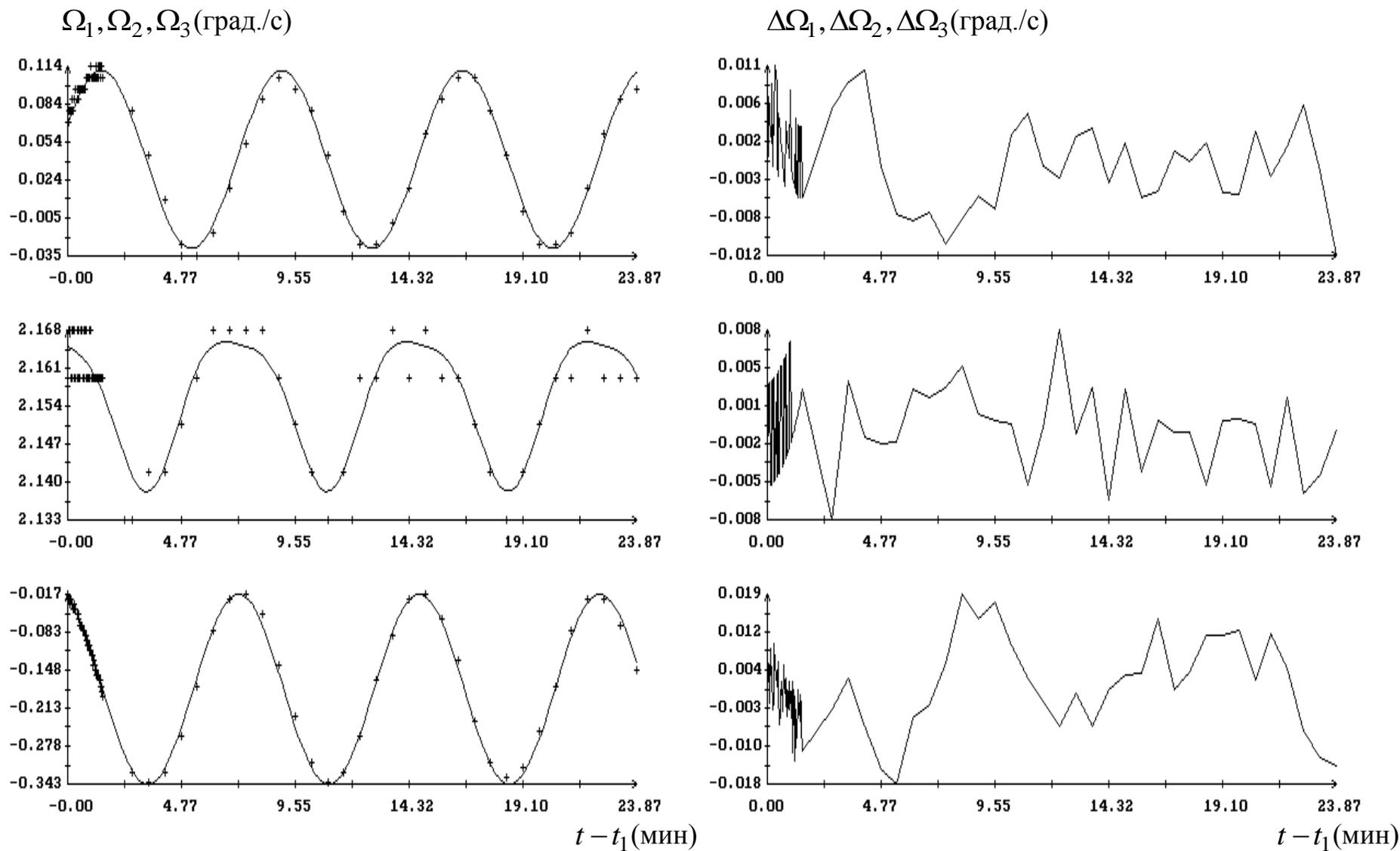


Рис. 1. Обработка измерений угловой скорости, выполненных 15.04.2013, $t_1 = 18:27:27$ (интервал 1). Слева сплошные кривые – графики аппроксимирующих выражений (2), маркеры – данные измерений. Справа – ломаные, иллюстрирующие ошибки аппроксимации.

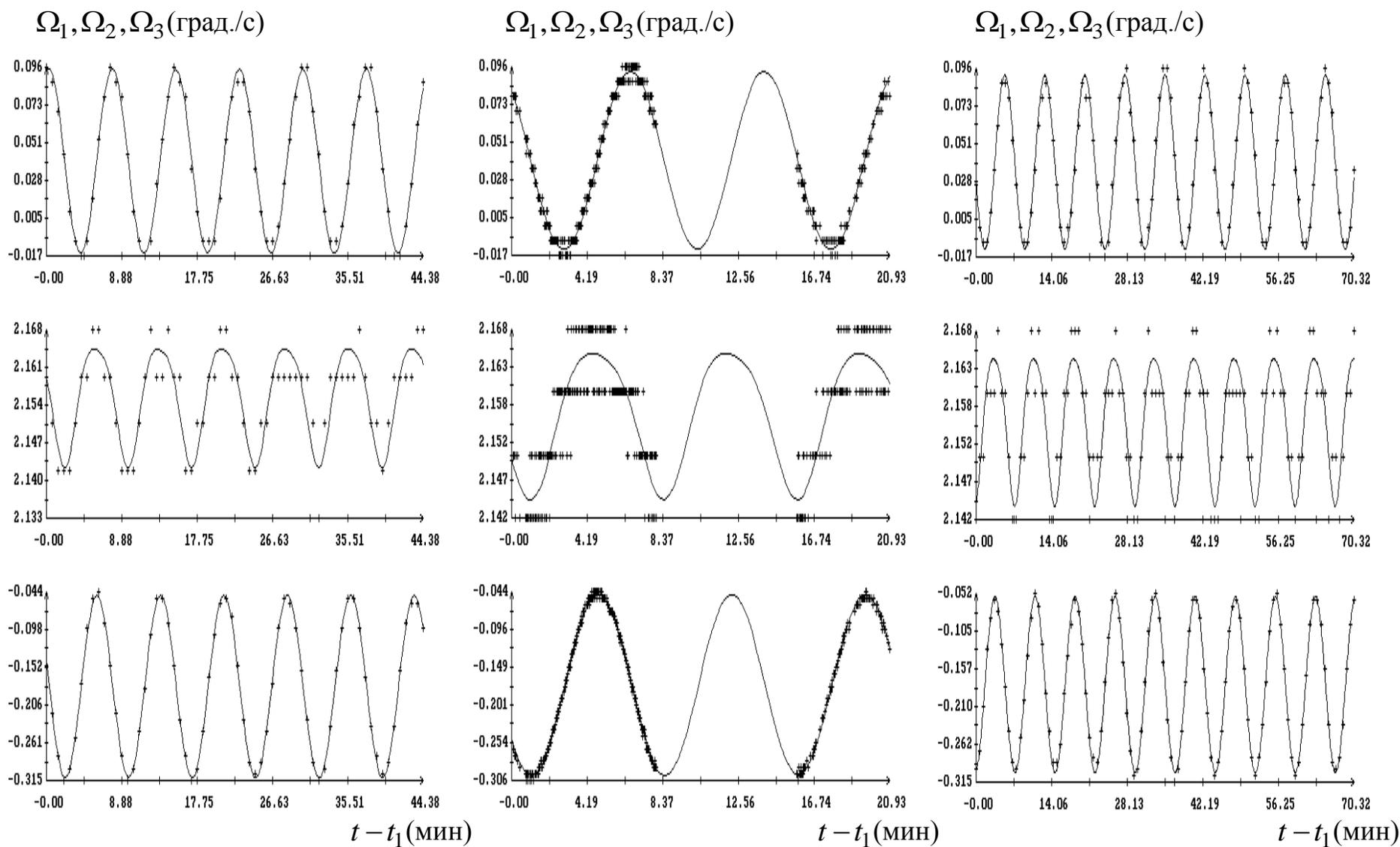


Рис. 2. Обработка измерений угловой скорости, выполненных 15.04.2013. На графиках слева $t_1 = 18:51:19$ (интервал 2), на графиках в центре $t_1 = 19:36:58$ (интервал 3), на графиках в центре $t_1 = 20:00:46$ (интервал 4).

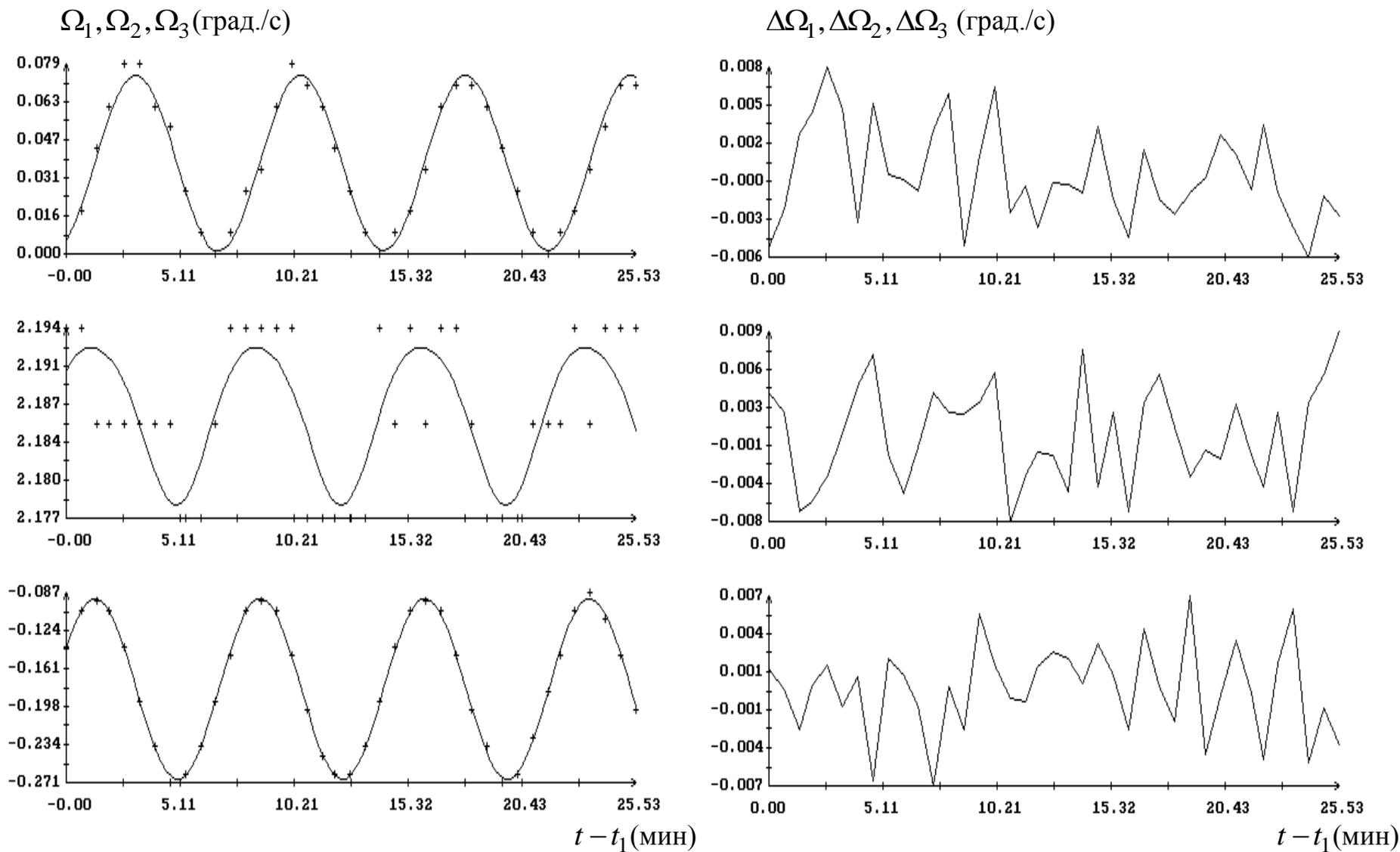


Рис. 3. Обработка измерений угловой скорости, выполненных 17.04.2013, $t_1 = 16:36:40$ (интервал 5). Слева сплошные кривые – графики аппроксимирующих выражений (2), маркеры – данные измерений. Справа – ломаные, иллюстрирующие ошибки аппроксимации.

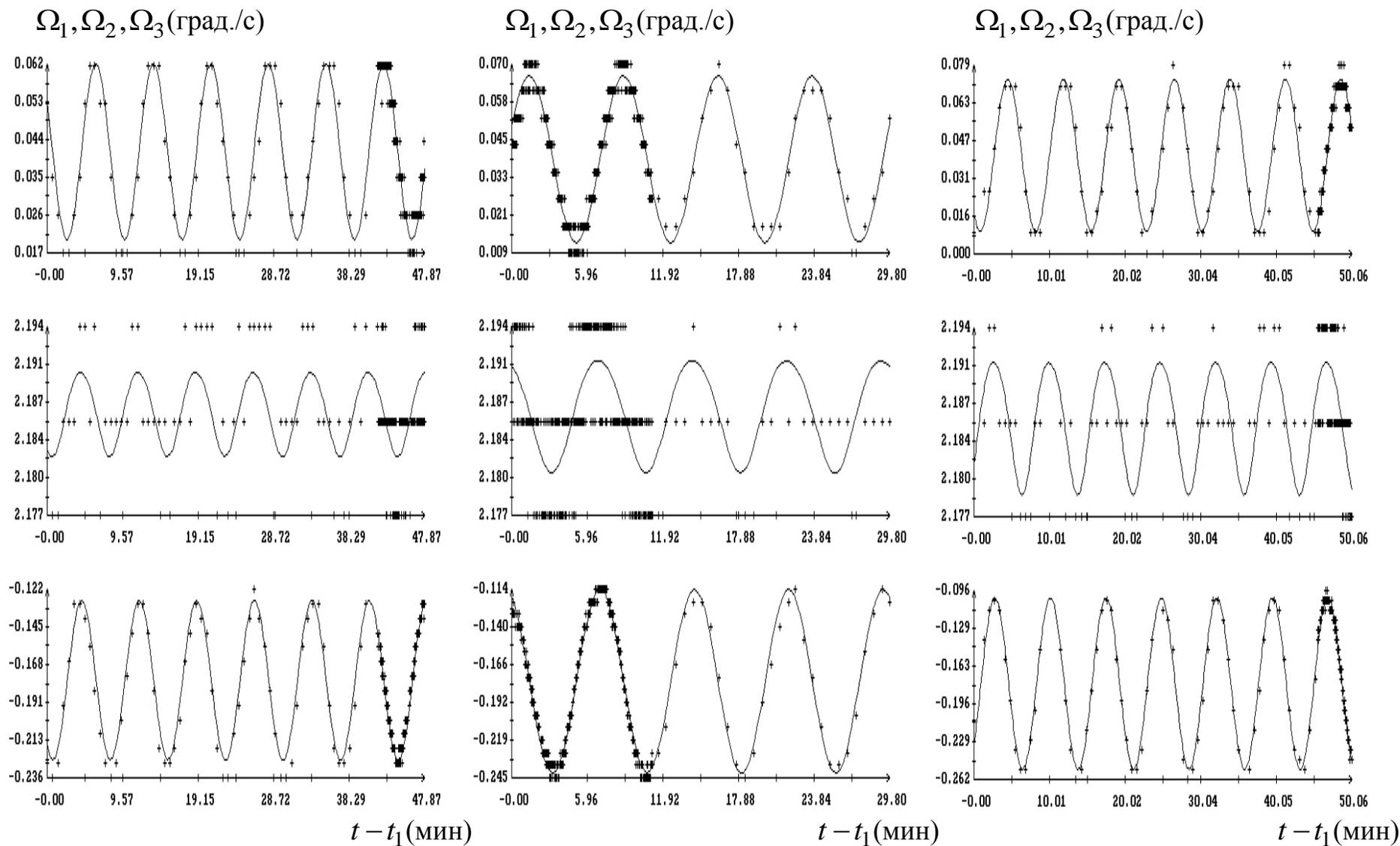


Рис. 4. Обработка измерений угловой скорости, выполненных 17.04.2013. На графиках слева $t_1 = 17:02:53$ (интервал 6), на графиках в центре $t_1 = 17:58:32$ (интервал 7), на графиках в центре $t_1 = 18:33:03$ (интервал 8).

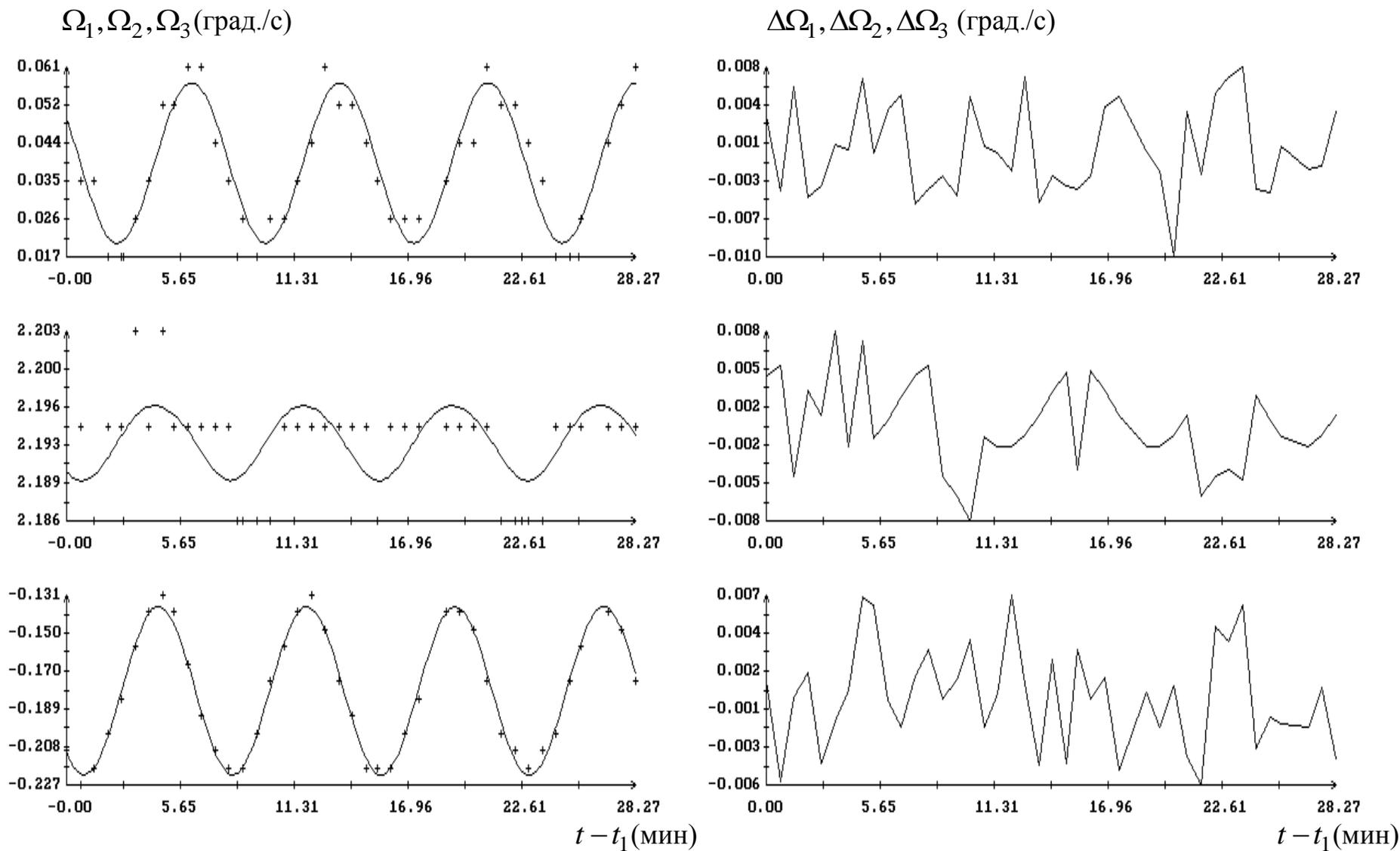


Рис. 5. Обработка измерений угловой скорости, выполненных 18.04.2013, $t_1 = 15:39:03$ (интервал 9). Слева сплошные кривые – графики аппроксимирующих выражений (2), маркеры – данные измерений. Справа – ломаные, иллюстрирующие ошибки аппроксимации.

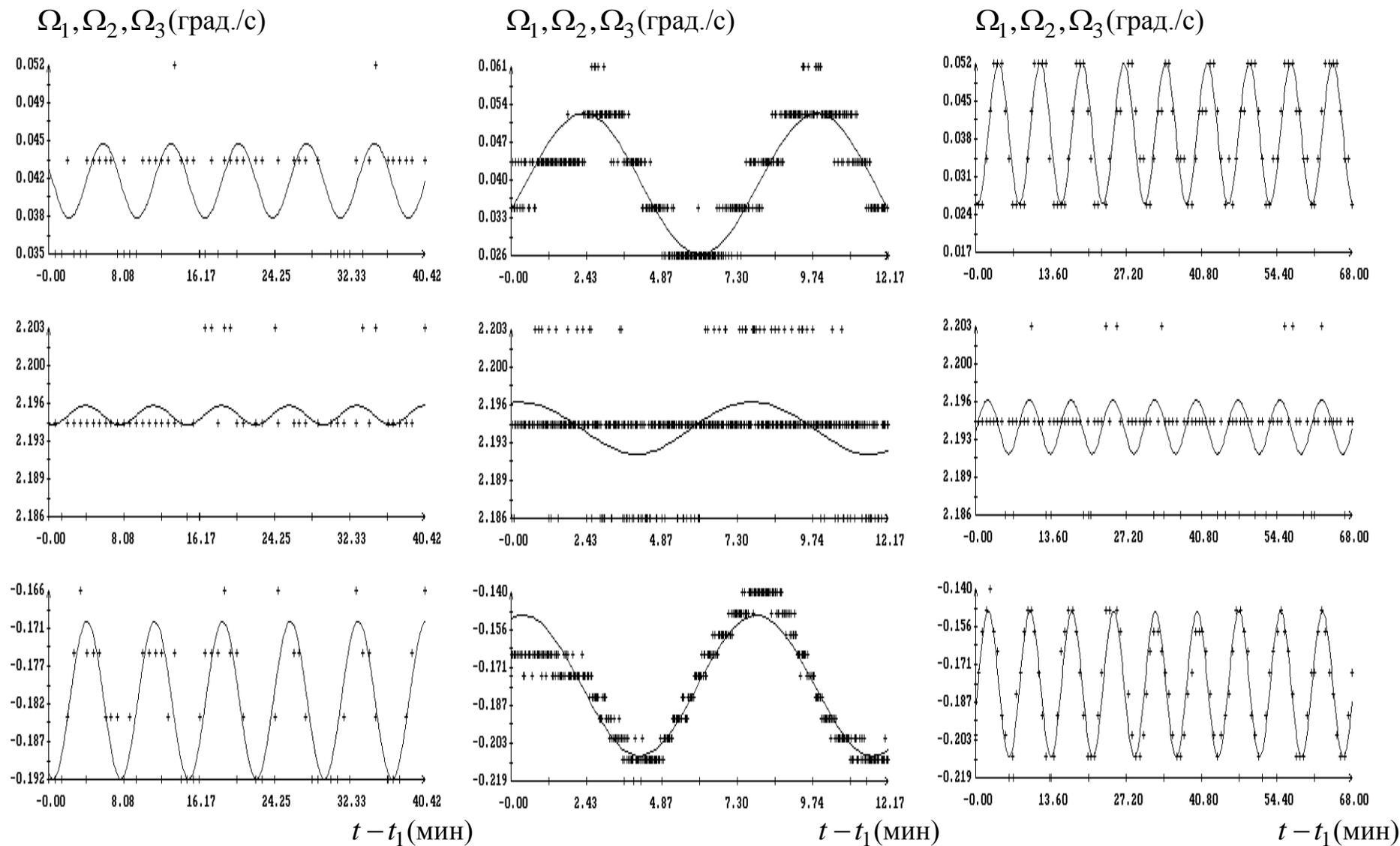


Рис.6. Обработка измерений угловой скорости, выполненных 18.04.2013. На графиках слева $t_1 = 16:08:00$ (интервал 10), на графиках в центре $t_1 = 17:01:48$ (интервал 11), на графиках в центре $t_1 = 17:14:55$ (интервал 12).

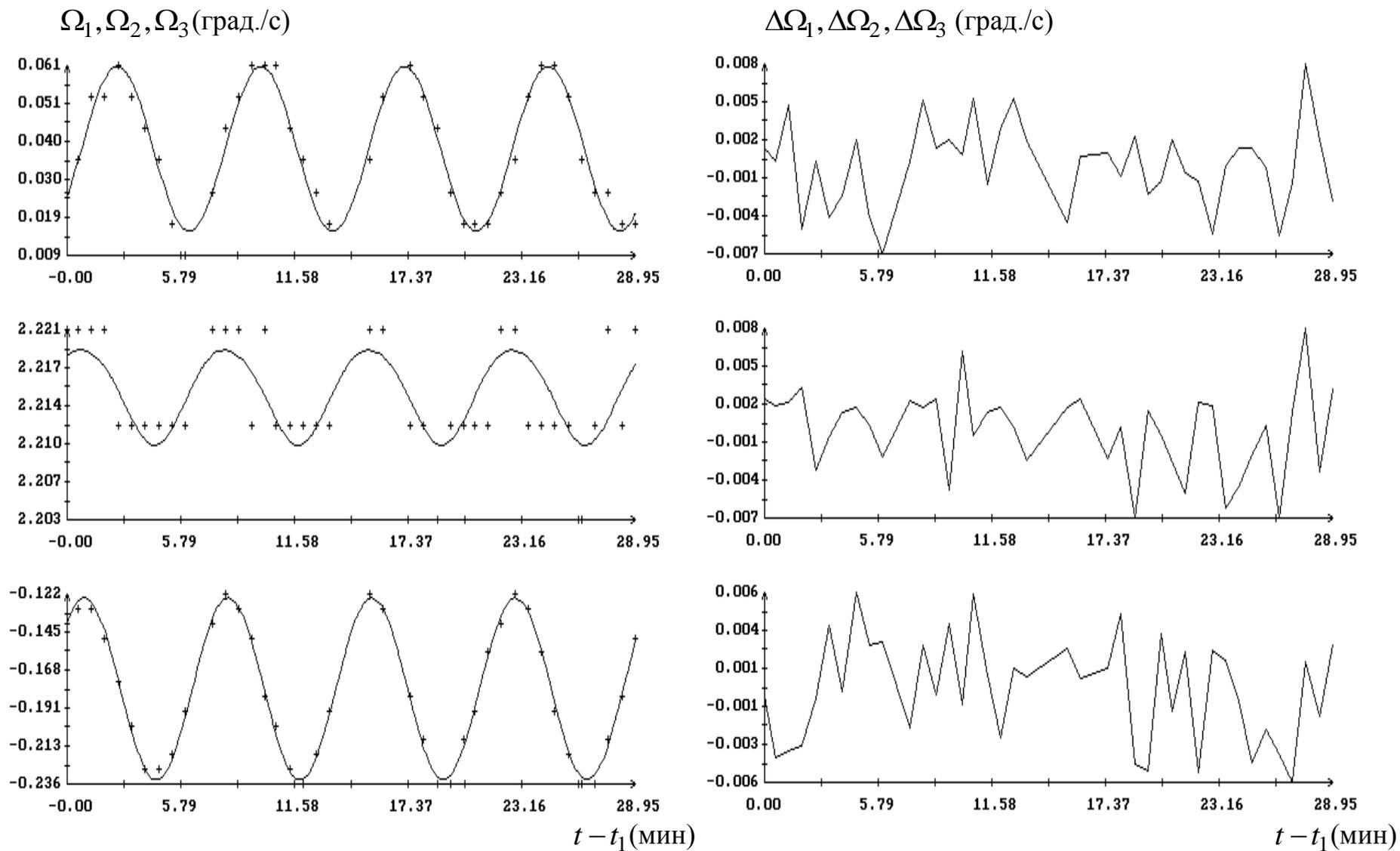


Рис. 7. Обработка измерений угловой скорости, выполненных 19.04.2013, $t_1 = 14:41:55$ (интервал 13). Слева сплошные кривые – графики аппроксимирующих выражений (2), маркеры – данные измерений. Справа – ломаные, иллюстрирующие ошибки аппроксимации.

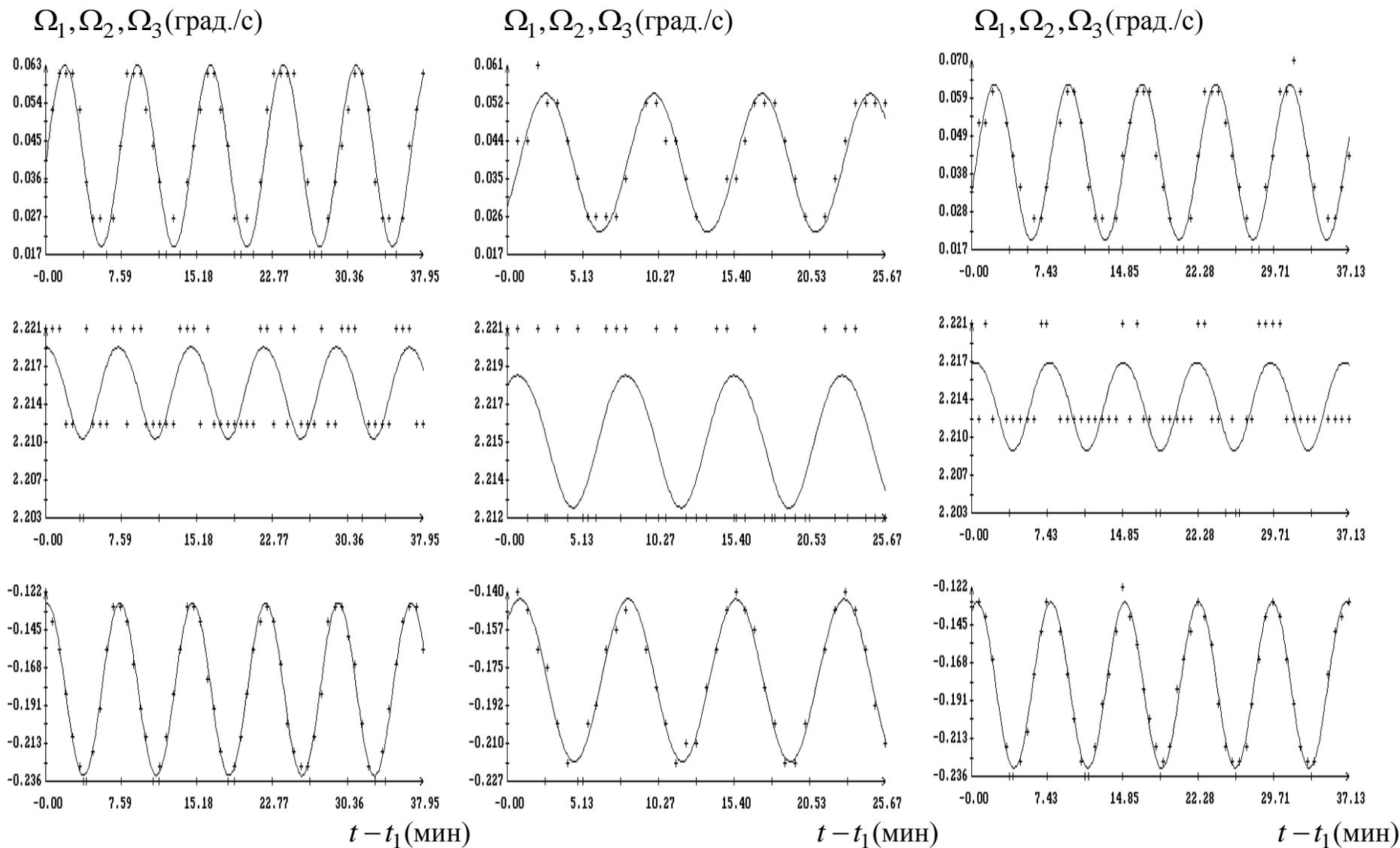


Рис.8. Обработка измерений угловой скорости, выполненных 19.04.2013. На графиках слева $t_1 = 15:12:47$ (интервал 14), на графиках в центре $t_1 = 16:18:06$ (интервал 15), на графиках в центре $t_1 = 16:47:03$ (интервал 16).

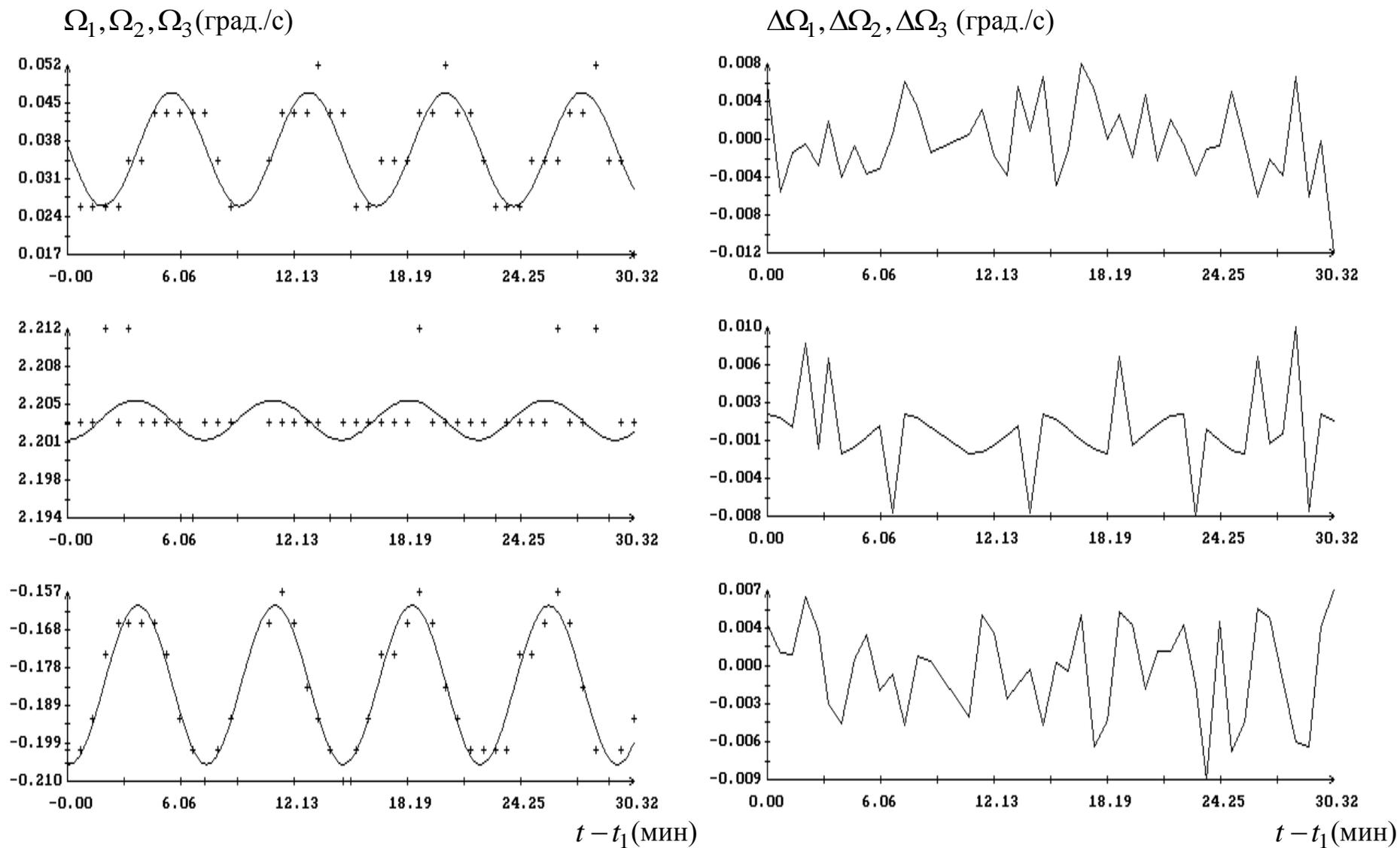


Рис. 9. Обработка измерений угловой скорости, выполненных 20.04.2013, $t_1 = 15:18:50$ (интервал 17). Слева сплошные кривые – графики аппроксимирующих выражений (2), маркеры – данные измерений. Справа – ломаные, иллюстрирующие ошибки аппроксимации.

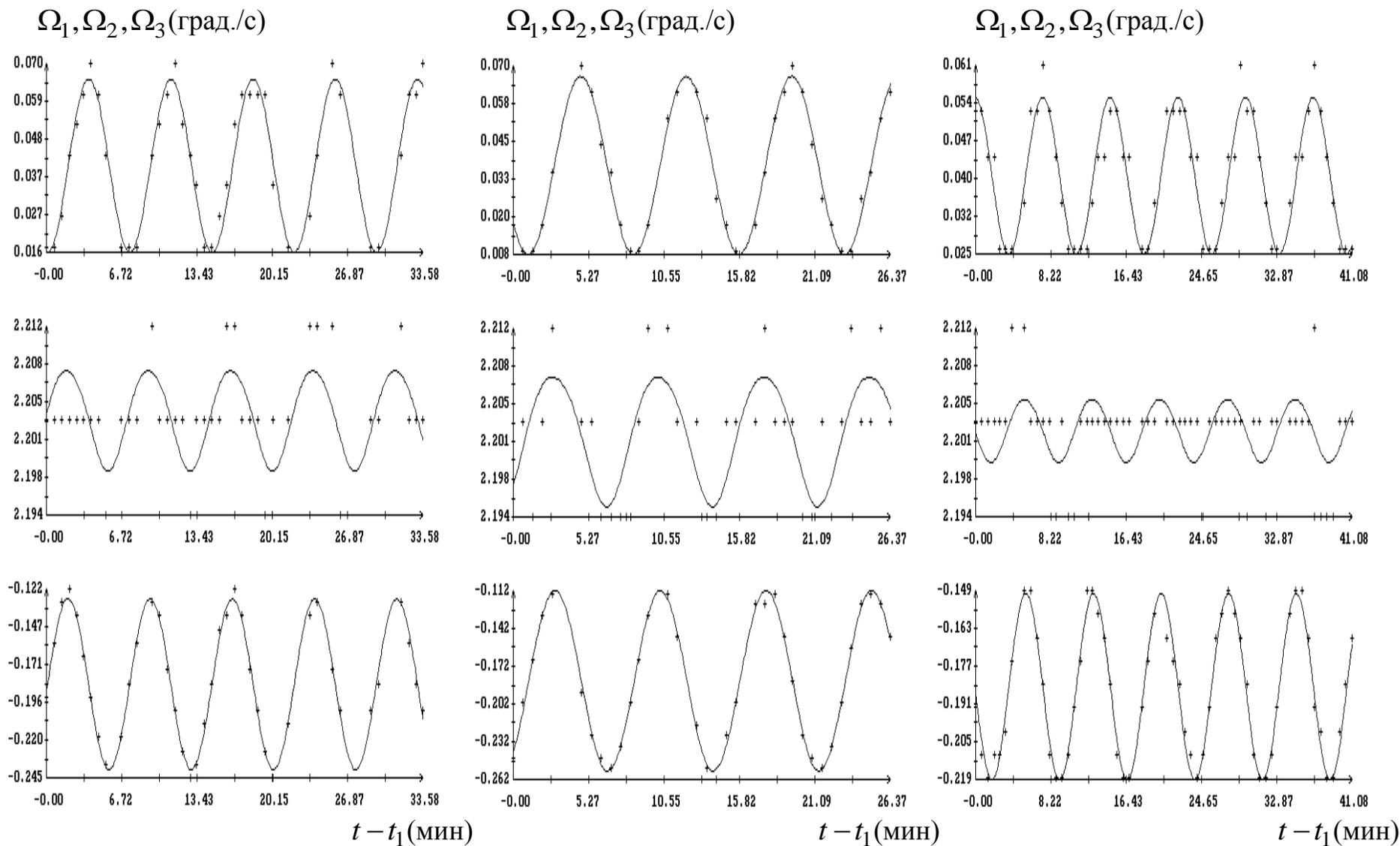


Рис.10. Обработка измерений угловой скорости, выполненных 20.04.2013. На графиках слева $t_1 = 15:49:09$ (интервал 18), на графиках в центре $t_1 = 16:54:20$ (интервал 19), на графиках в центре $t_1 = 17:21:23$ (интервал 20).

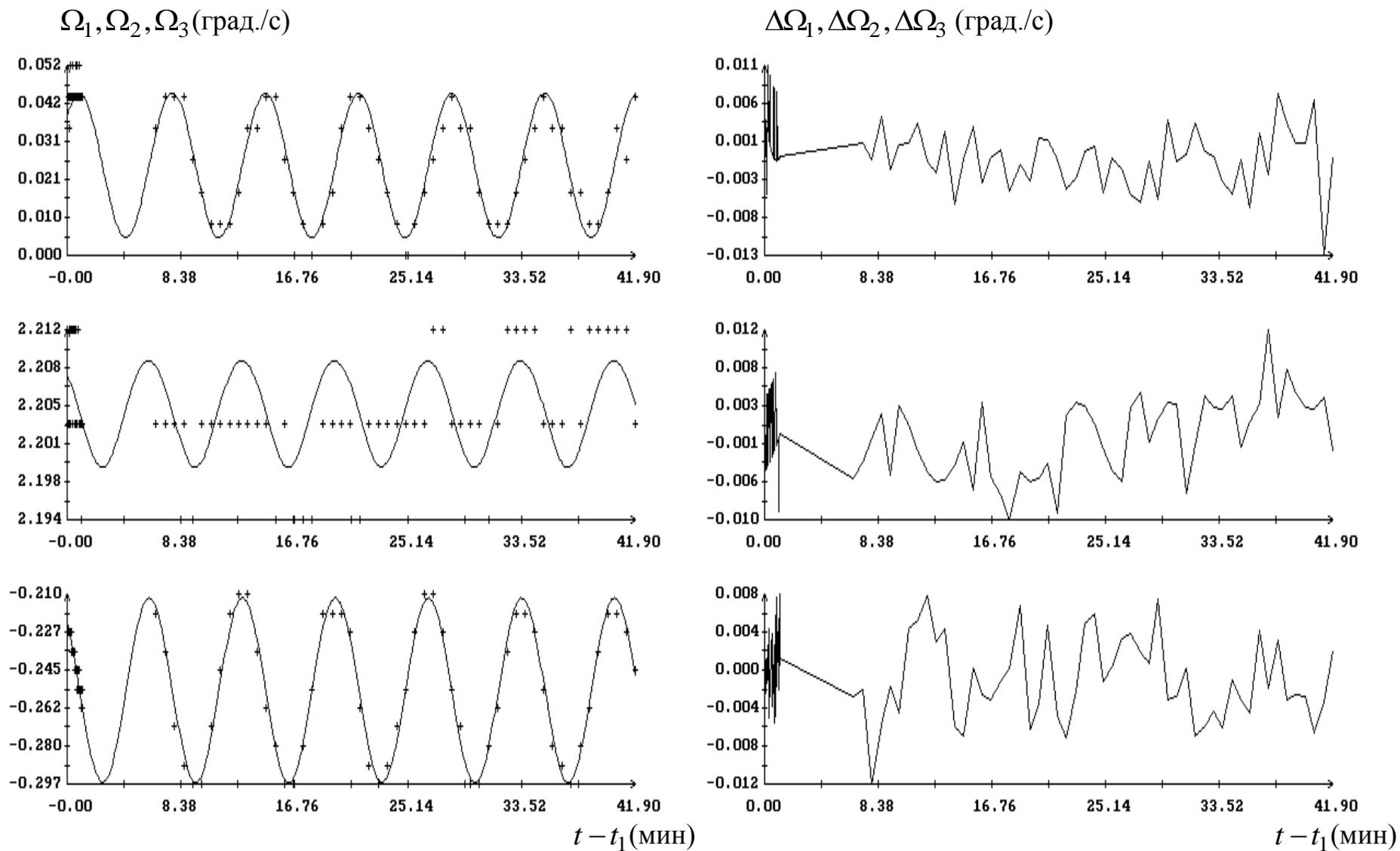


Рис. 11. Обработка измерений угловой скорости, выполненных 21.04.2012, $t_1 = 11:27:15$ (интервал 21). Слева сплошные кривые – графики аппроксимирующих выражений (2), маркеры – данные измерений. Справа – ломаные, иллюстрирующие ошибки аппроксимации.

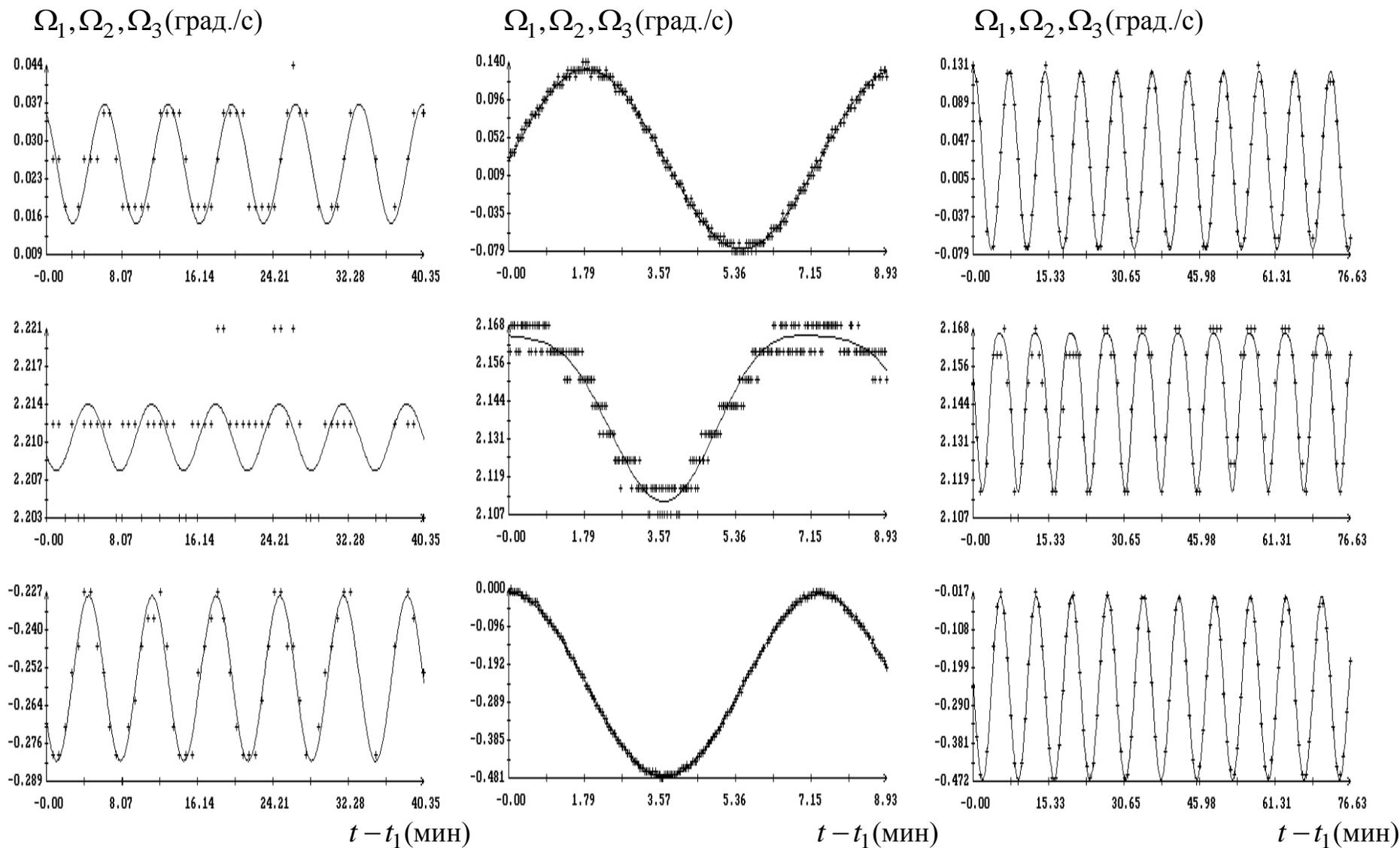


Рис.12. Обработка измерений угловой скорости, выполненных 21.04.2012. На графиках слева $t_1 = 12:09:50$ (интервал 22), на графиках в центре $t_1 = 18:58:45$ (интервал 23), на графиках в центре $t_1 = 19:08:14$ (интервал 24).

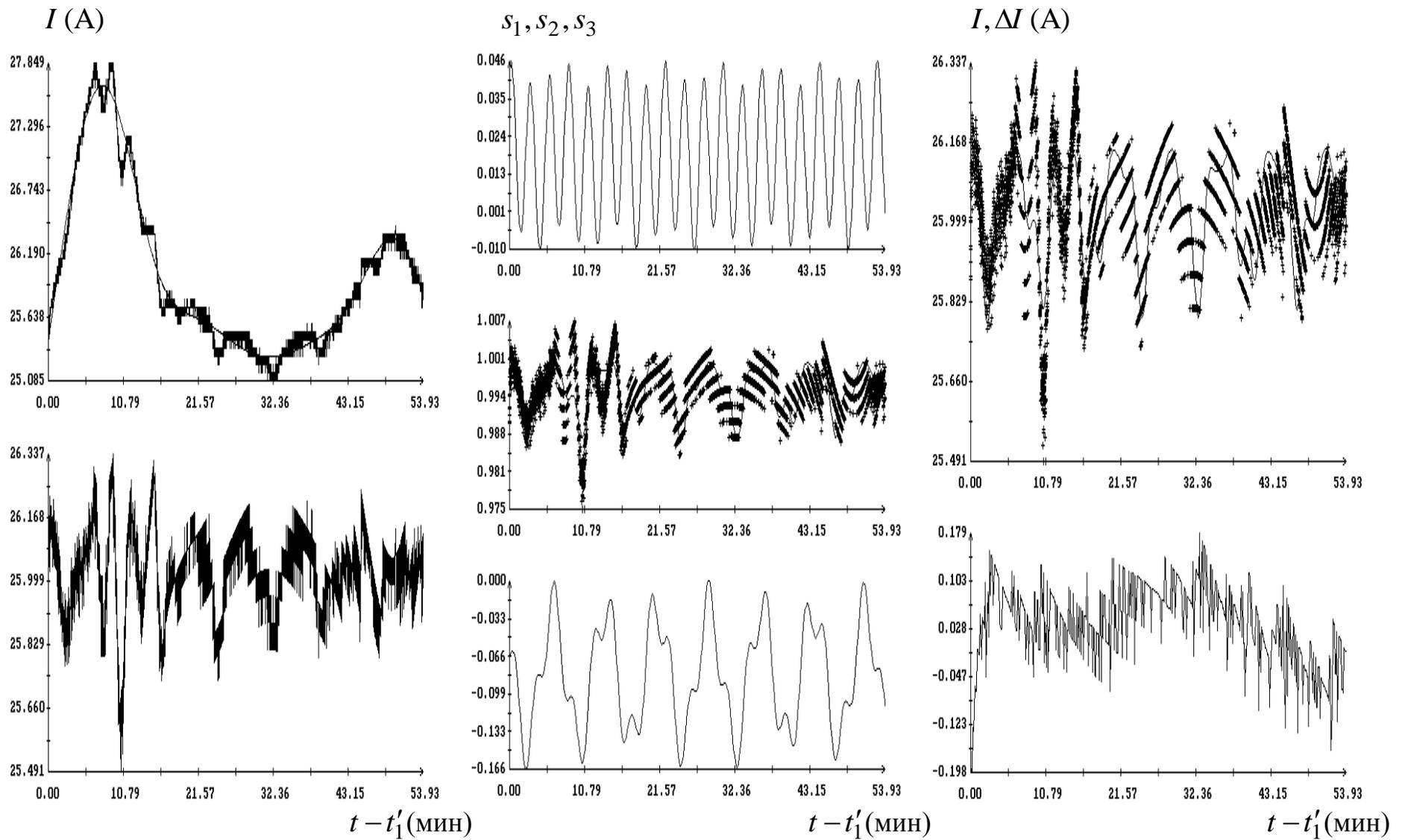


Рис. 13. Обработка измерений тока, выполненных 15.04.2013, $t'_1 = 18:51:02$ (интервал 1'). Слева – коррекция измерений тока; в центре – решение уравнений (8), справа – аппроксимация измерений тока и ее ошибка.

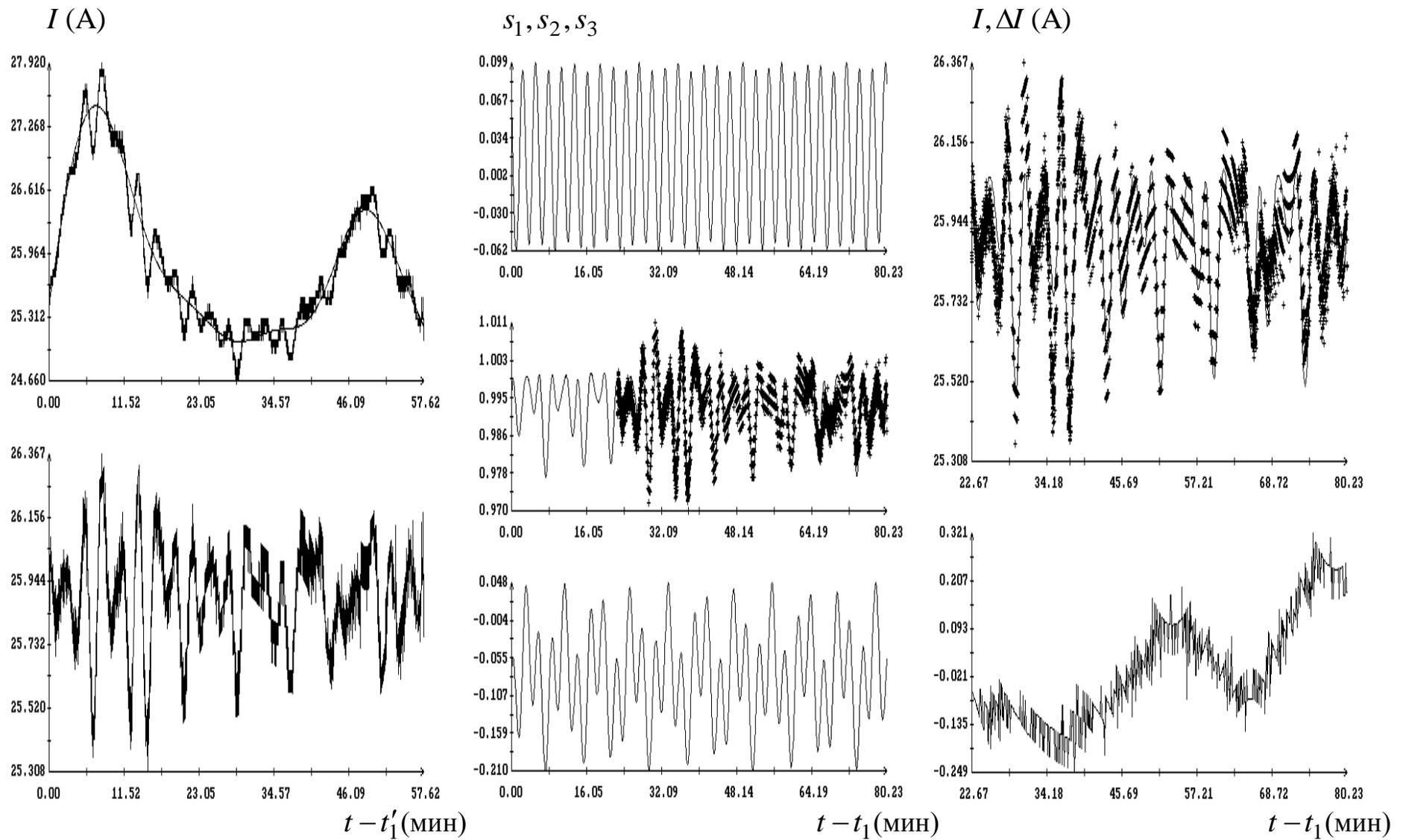


Рис. 14. Обработка измерений тока, выполненных 15.04.2013, $t_1 = 20:00:46$ (интервал $2'$). Слева – коррекция измерений тока; в центре – решение уравнений (8), справа – аппроксимация измерений тока и ее ошибка.

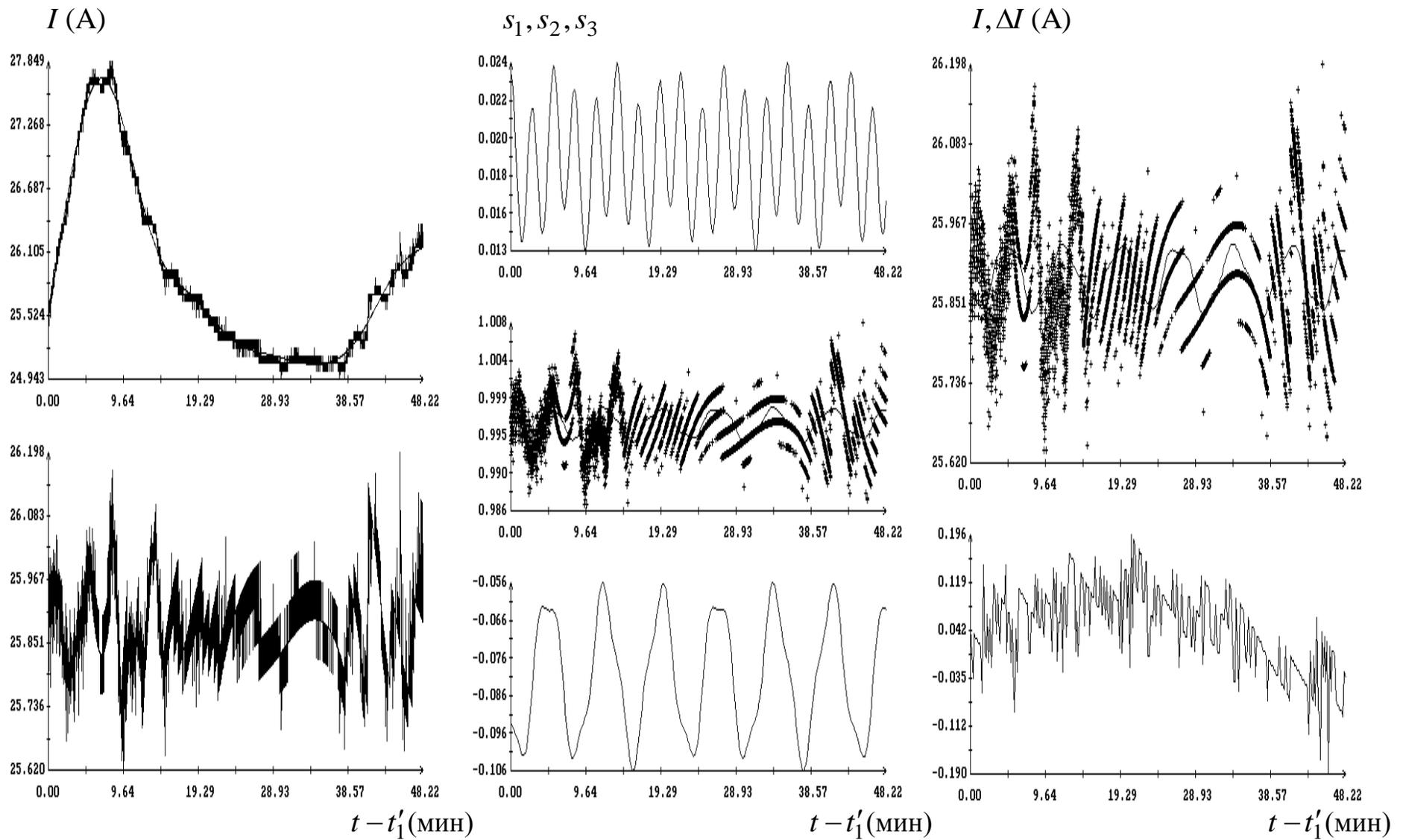


Рис. 15. Обработка измерений тока, выполненных 17.04.2013, $t'_1 = 17:02:32$ (интервал 3'). Слева – коррекция измерений тока; в центре – решение уравнений (8), справа – аппроксимация измерений тока и ее ошибка.

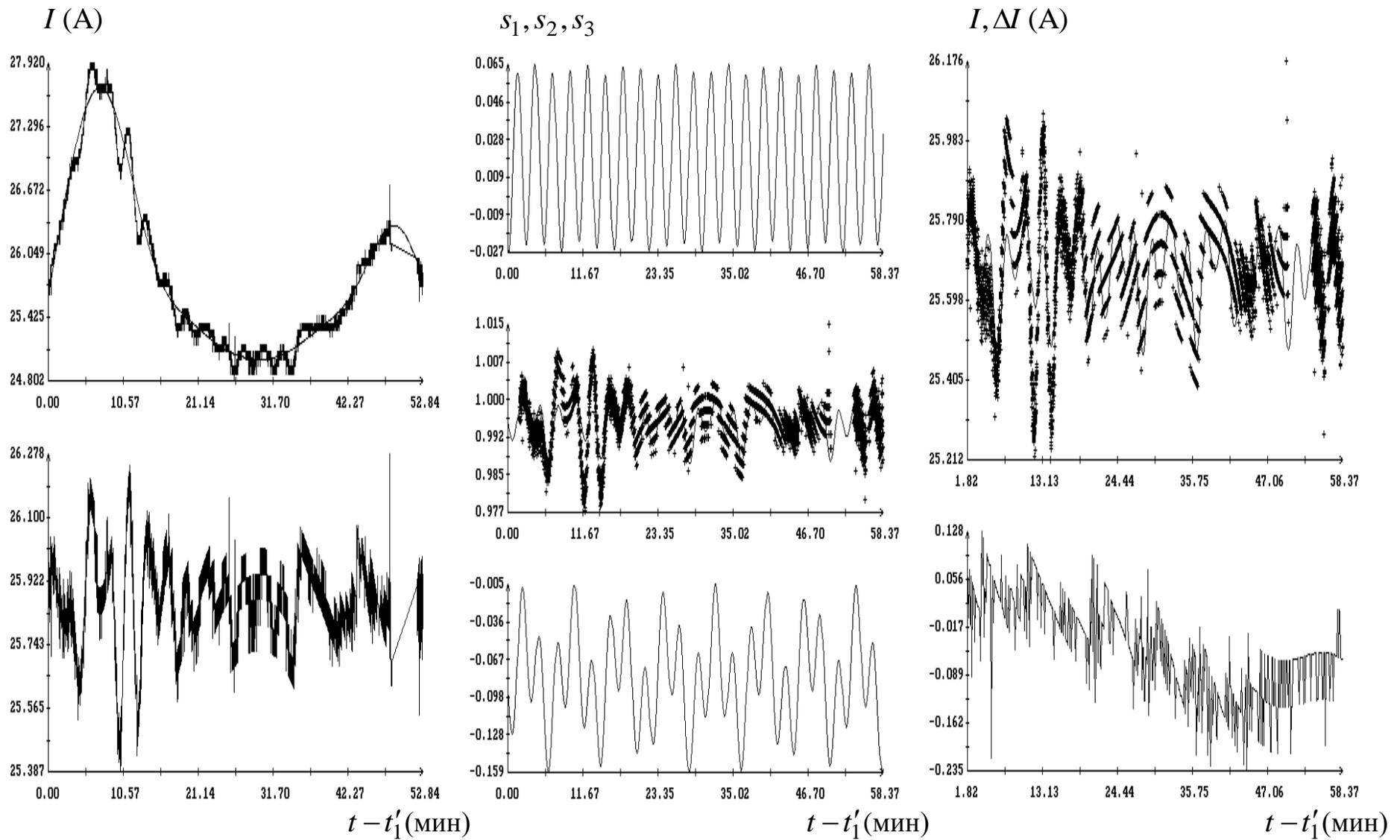


Рис. 16. Обработка измерений тока, выполненных 17.04.2013, $t_1' = 18:34:52$ (интервал 4'). Слева – коррекция измерений тока; в центре – решение уравнений (8), справа – аппроксимация измерений тока и ее ошибка.

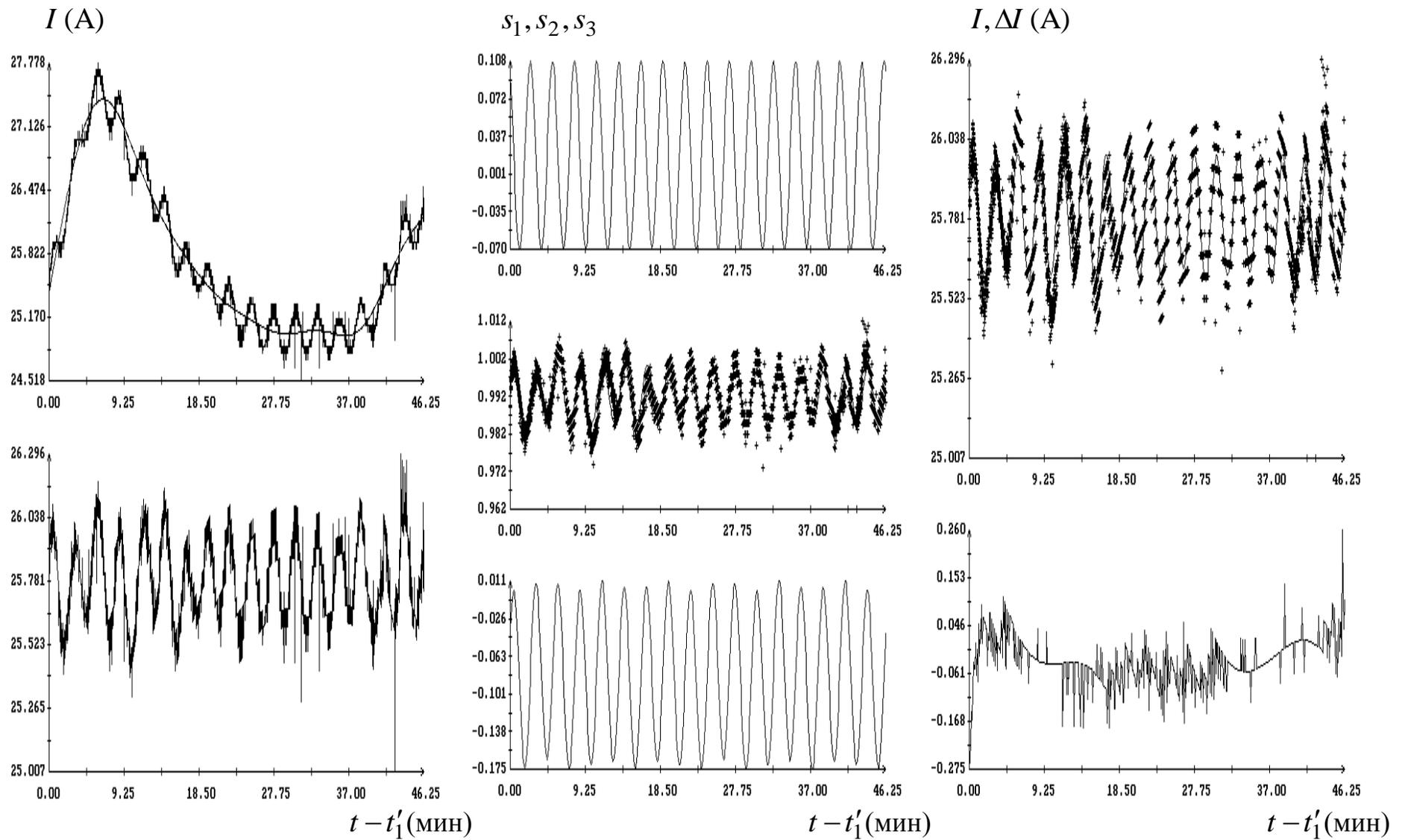


Рис. 17. Обработка измерений тока, выполненных 18.04.2013, $t'_1 = 16:07:43$ (интервал $5'$). Слева – коррекция измерений тока; в центре – решение уравнений (8), справа – аппроксимация измерений тока и ее ошибка.

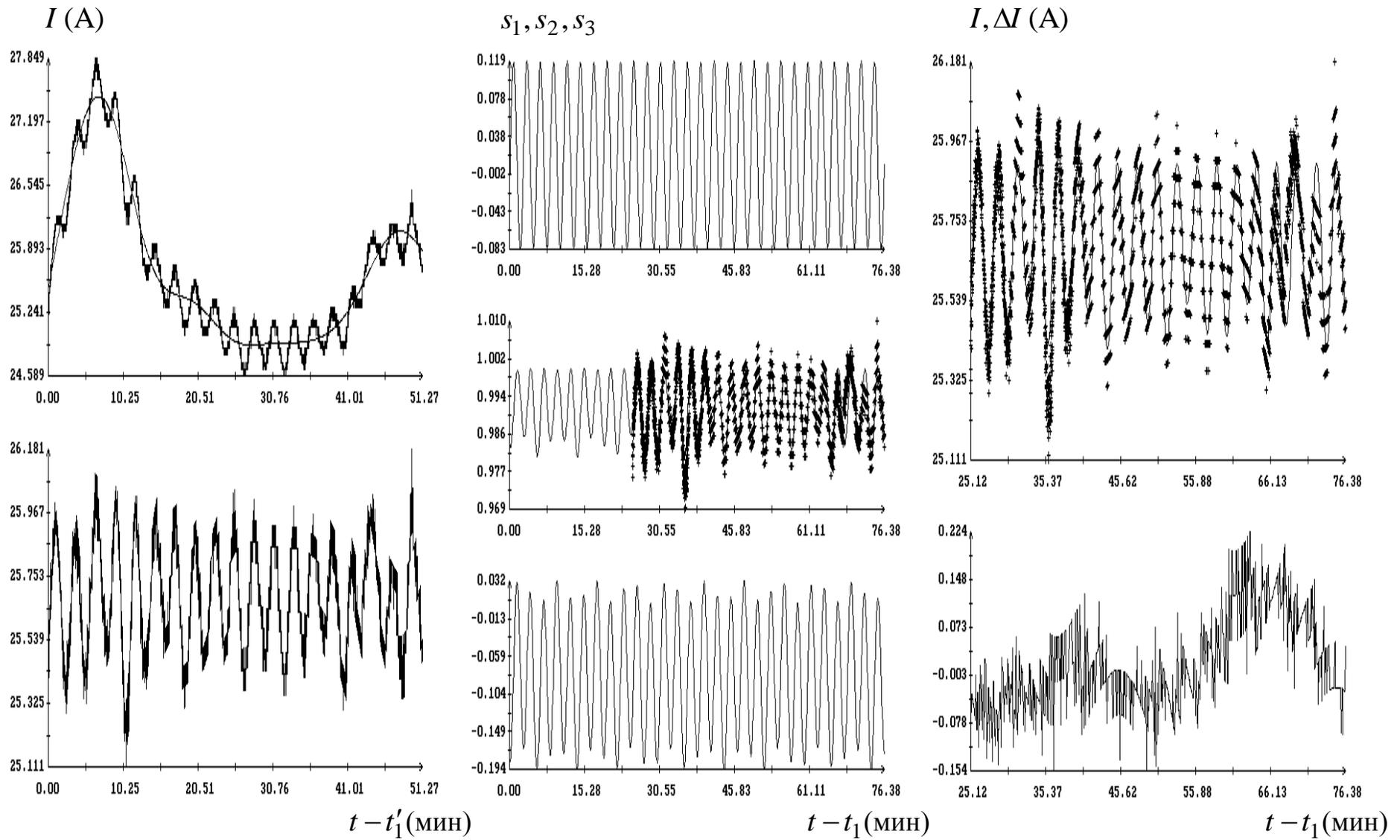


Рис. 18. Обработка измерений тока, выполненных 18.04.2013, $t_1 = 17:14:55$ (интервал 6'). Слева – коррекция измерений тока; в центре – решение уравнений (8), справа – аппроксимация измерений тока и ее ошибка.

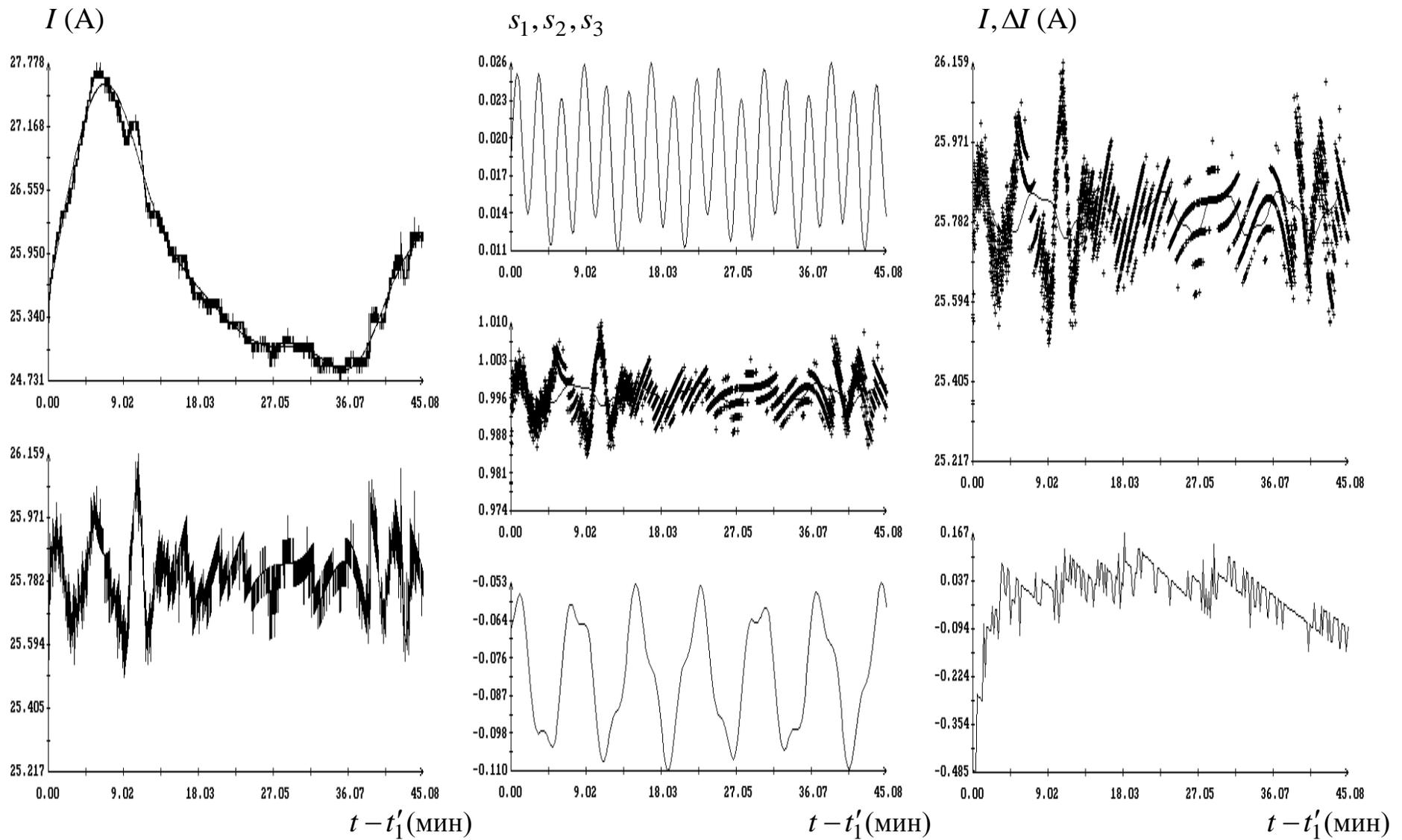


Рис. 19. Обработка измерений тока, выполненных 19.04.2013, $t_1' = 15:12:23$ (интервал 7'). Слева – коррекция измерений тока; в центре – решение уравнений (8), справа – аппроксимация измерений тока и ее ошибка.

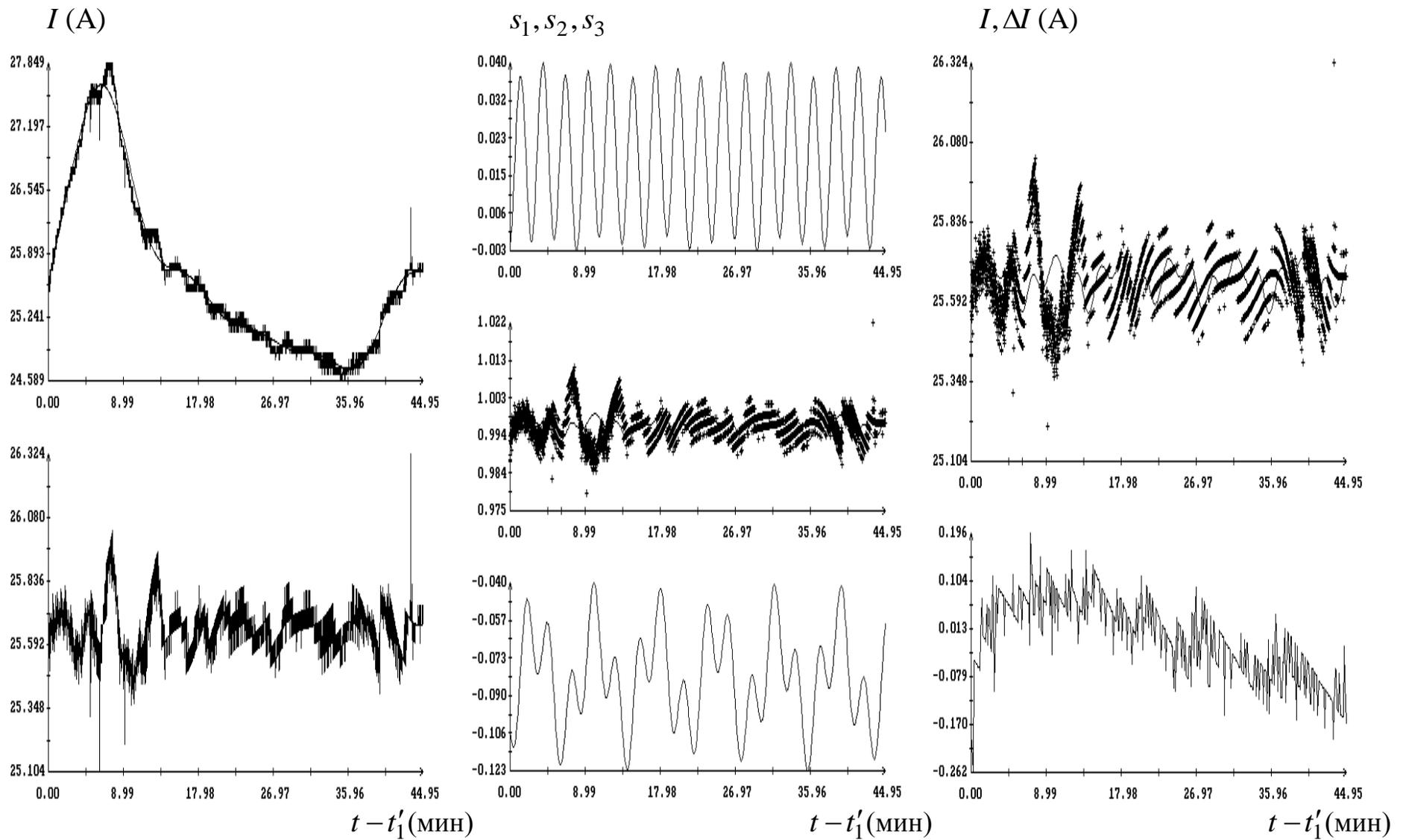


Рис. 20. Обработка измерений тока, выполненных 19.04.2013, $t'_1 = 16:44:41$ (интервал 8'). Слева – коррекция измерений тока; в центре – решение уравнений (8), справа – аппроксимация измерений тока и ее ошибка.

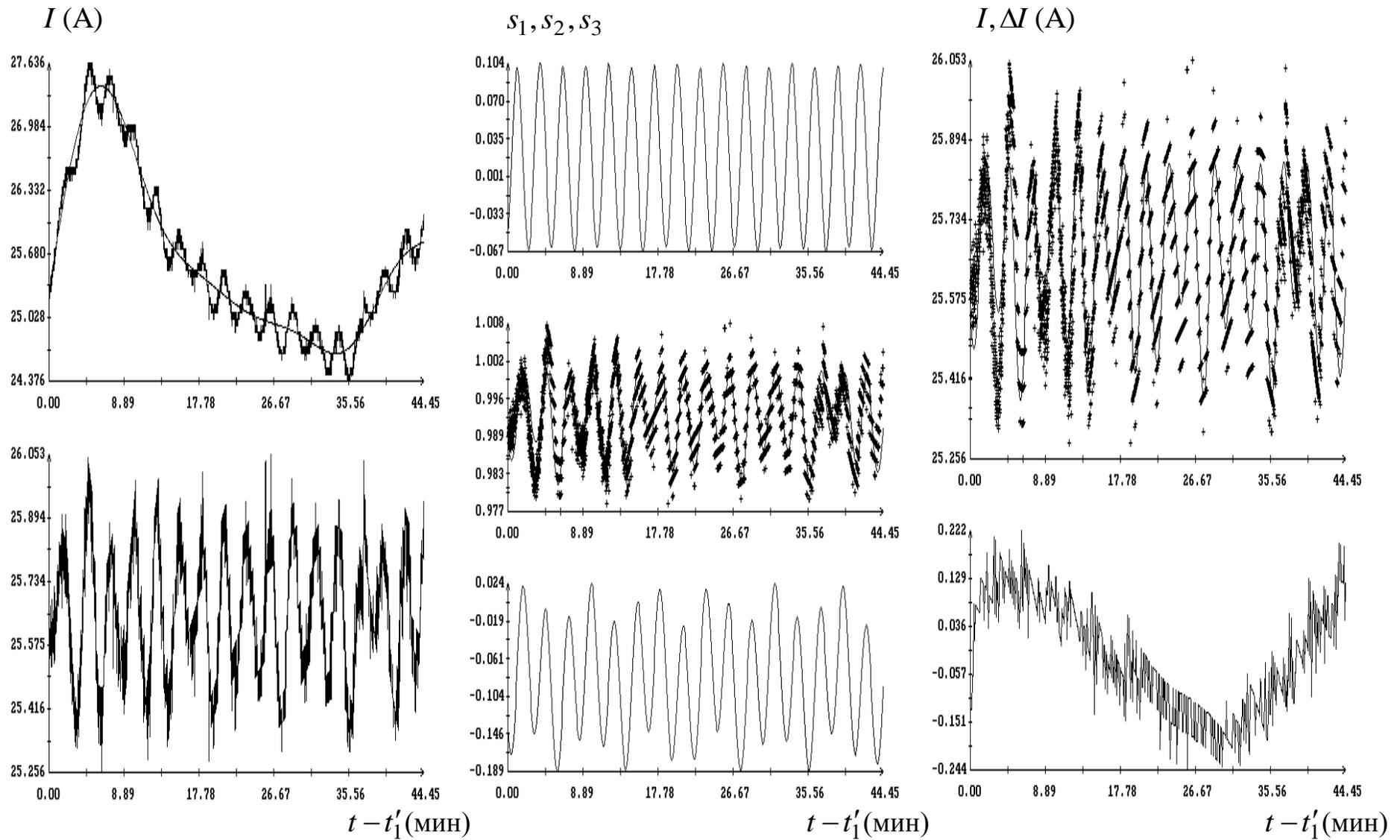


Рис. 21. Обработка измерений тока, выполненных 20.04.2013, $t_1' = 15:48:41$ (интервал 9'). Слева – коррекция измерений тока; в центре – решение уравнений (8), справа – аппроксимация измерений тока и ее ошибка.

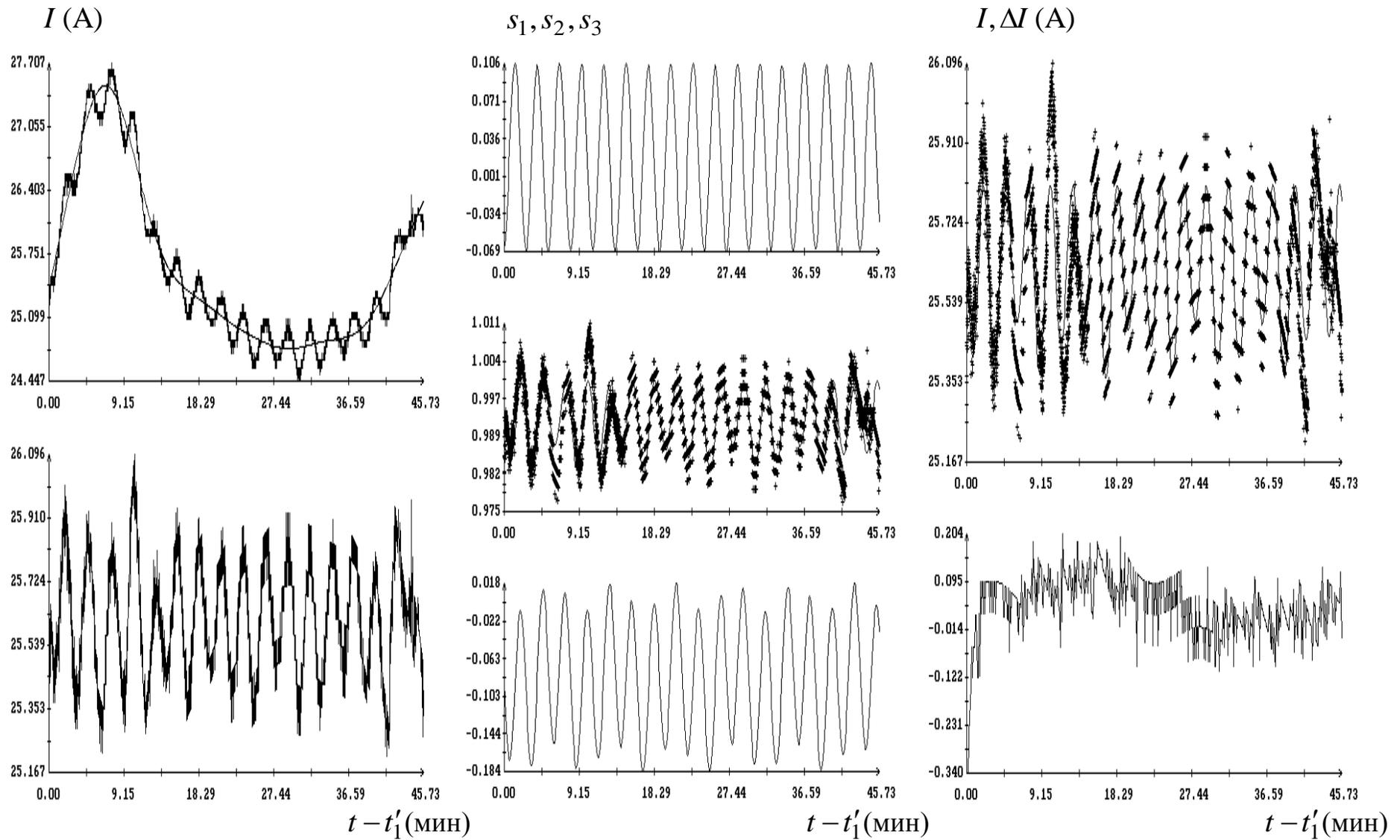


Рис. 22. Обработка измерений тока, выполненных 20.04.2013, $t'_1 = 17:20:54$ (интервал 10'). Слева – коррекция измерений тока; в центре – решение уравнений (8), справа – аппроксимация измерений тока и ее ошибка.

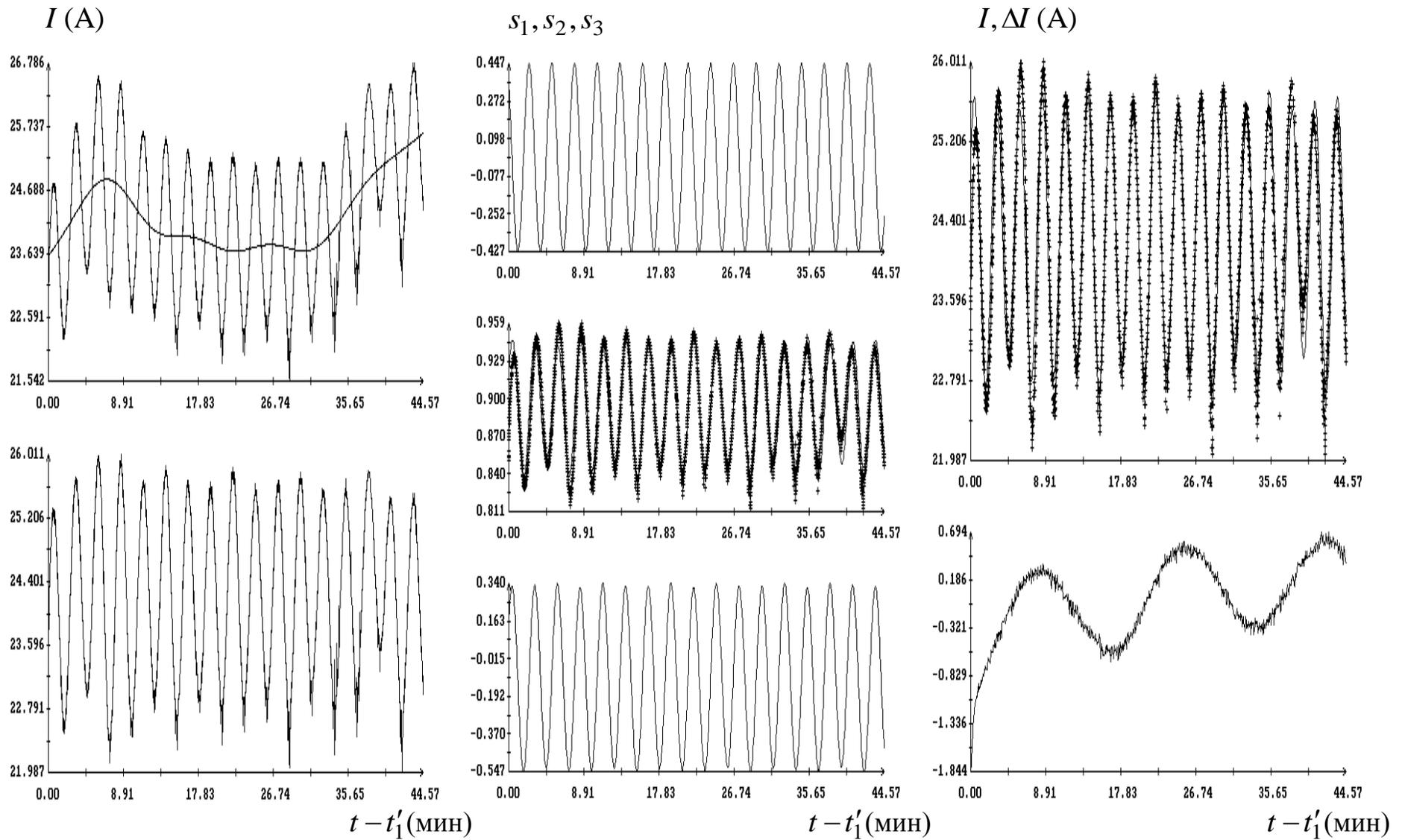


Рис. 23. Обработка измерений тока, выполненных 21.04.2012, $t_1' = 12:09:24$ (интервал 11'). Слева – коррекция измерений тока; в центре – решение уравнений (8), справа – аппроксимация измерений тока и ее ошибка.

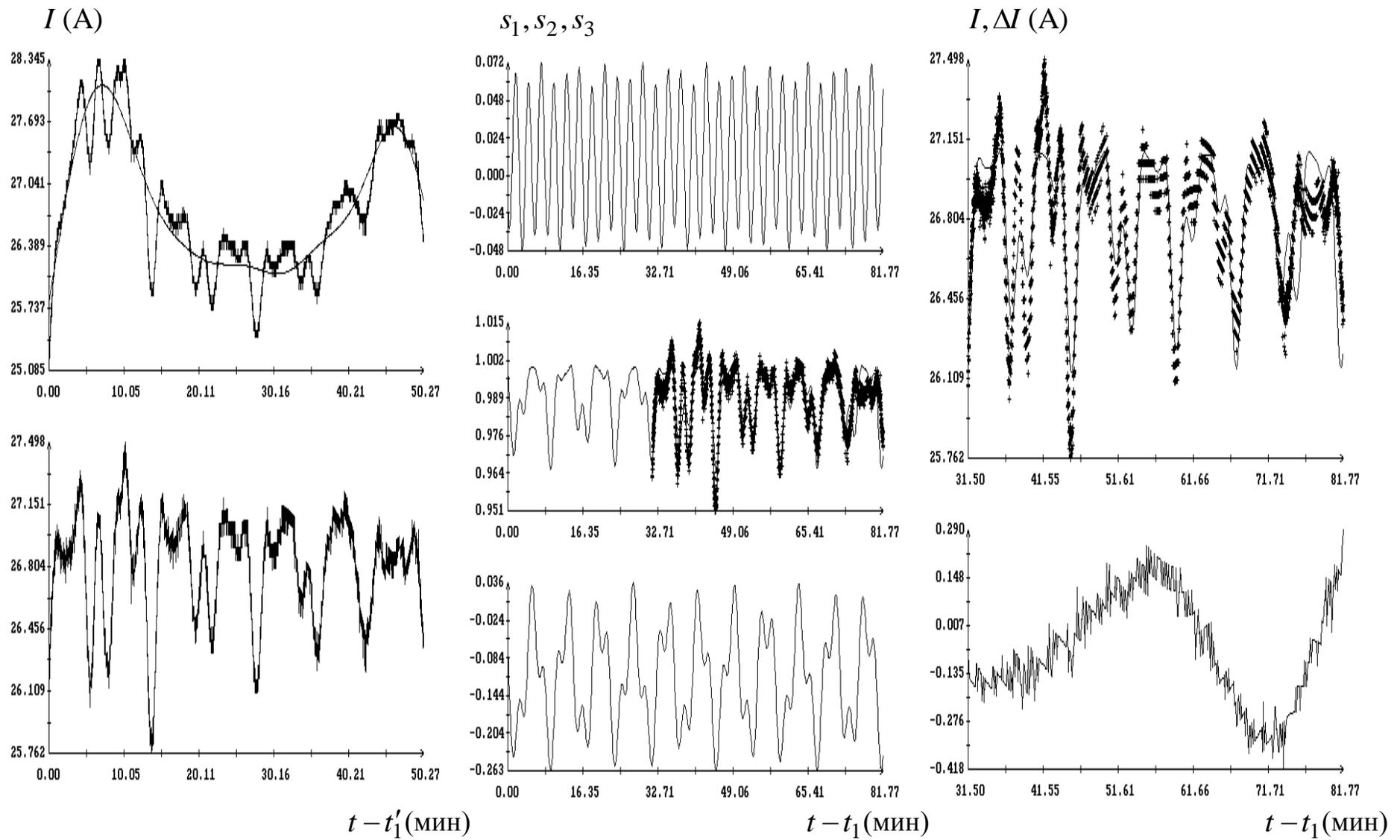


Рис. 24. Обработка измерений тока, выполненных 21.04.2012, $t_1 = 19:08:14$ (интервал 12'). Слева – коррекция измерений тока; в центре – решение уравнений (8), справа – аппроксимация измерений тока и ее ошибка.