



Аванесов Г.А., Бессонов Р.В.,
Куркина А.Н., Никитин А.В.,
Сазонов В.В.

Оценка точности
определения ориентации
космического аппарата по
измерениям нескольких
звездных датчиков БОКЗ-
М60

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Оценка точности определения ориентации космического аппарата по измерениям нескольких звездных датчиков БОКЗ-М60 / Г.А.Аванесов [и др.] // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2014. № 10. 40 с. URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2014-10>

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
Ордена Ленина
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
им. М.В. Келдыша

**Г.А. Аванесов, Р.В. Бессонов, А.Н. Куркина,
А.В. Никитин, В.В. Сазонов**

**ОЦЕНКА ТОЧНОСТИ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ОРИЕНТАЦИИ
КОСМИЧЕСКОГО АППАРАТА ПО ИЗМЕРЕНИЯМ НЕСКОЛЬКИХ
ЗВЕЗДНЫХ ДАТЧИКОВ БОКЗ-М60**

Москва – 2014

Аннотация

Звездный датчик БОКЗ-М60 (блок измерения координат звезд) предназначен для определения параметров ориентации осей собственной системы координат относительно осей инерциальной системы по наблюдениям участков звездного неба. На точность такого определения влияет большое число факторов, и оценка вклада каждого из них в общую ошибку не всегда возможна. В общем случае приходится ограничиваться оценкой суммарной ошибки по результатам исследования продолжительных рядов определений параметров ориентации, полученных в наземных испытаниях и в условиях космического полета. В данной работе приводятся оценки точности четырех датчиков БОКЗ-М60, сделанные по измерениям, которые были выполнены в процессе штатной эксплуатации этих приборов на спутнике «Ресурс-П». Совместная обработка измерений двух и более датчиков позволила существенно повысить точность определения ориентации спутника и исследовать случайные и систематические ошибки в этих измерениях.

G.A.Avanesov, R.V.Bessonov, A.N.Kurkina, A.V.Nikitin, V.V.Sazonov.
Accuracy estimation of determining a spacecraft attitude by measurements of a few star sensors BOKZ-M60. Star sensors BOKZ-M60 allow to find parameters that define the attitude of their own coordinate systems with respect to an inertial coordinate system by observing regions in the star sky. The accuracy of definition of attitude parameters is influenced by a great number of factors and we don't estimate their individual contributions to the total error. On that reason, we analyze fluctuations of rather long series of definitions of attitude parameters received by BOKZ-M60 sensors in ground-based tests and in the conditions of a real space flight. This paper contains the accuracy estimations of the four star sensors BOKZ-M60 that were obtained by processing the measurement data from the spacecraft Resurs-P. The joint processing of measurements by two or more sensors increased the accuracy of determination of the spacecraft attitude and allowed to investigate random and systematic errors in the measurements.

Введение. Звездный датчик БОКЗ-М60 предназначен для определения параметров ориентации собственной системы координат относительно инерциальной системы по наблюдениям участков звездного неба. Собственная система координат звездного датчика – правая декартова система $x_1x_2x_3$ – строится следующим образом. Плоскость x_1x_2 параллельна плоскости ПЗС-матрицы, ось x_1 параллельна строкам матрицы и направлена против направления считывания из регистра, ось x_2 направлена вдоль столбцов матрицы против направления переноса строк в регистр. Ось x_3 направлена от матрицы к объективу датчика. Ошибку одномоментного определения ориентации системы координат $x_1x_2x_3$ в абсолютном пространстве удобно характеризовать вектором бесконечно малого поворота этой системы относительно ее найденного положения. Многочисленные натурные и стендовые испытания показали, что у покоящегося датчика среднеквадратичные значения компонент этого вектора вдоль осей x_1 и x_2 составляют менее 2", компонента вдоль оси x_3 составляет около 15".

Если на борту космического аппарата (КА) имеется только один датчик БОКЗ-М60, то без использования дополнительных данных ошибка одномоментного определения ориентации приборной системы координат КА относительно абсолютного пространства не может быть меньше выше указанной. Система из нескольких датчиков позволяет заметно улучшить приведенные точностные характеристики. Ниже описана методика определения параметров ориентации систем из двух и четырех одинаковых звездных датчиков. Получены оценки точности методики при определении параметров ориентации системы датчиков БОКЗ-М60, установленных на КА «Ресурс-П».

1. Обработка измерений двух звездных датчиков для определения кватерниона их взаимной ориентации. Пусть КА снабжен двумя звездными датчиками. Будем называть их датчик 1 и датчик 2. Собственную систему координат датчика с номером i обозначим $x_1^{(i)}x_2^{(i)}x_3^{(i)}$ ($i=1,2$). Датчики в некоторые дискретные моменты времени t_k ($k=1,2,\dots$), $t_k < t_{k+1}$ выдают измерения нормированных кватернионных функций $\mathbf{Q}^{(i)}(t)$, задающих ориентацию (угловое положение) систем $x_1^{(i)}x_2^{(i)}x_3^{(i)}$ относительно инерциальной системы координат $X_1X_2X_3$. Измерения обеих функций выполняются на единой временной сетке и представляют собой две последовательности кватернионов $\mathbf{Q}_k^{(i)} \approx \mathbf{Q}^{(i)}(t_k)$. Введенные кватернионные функции имеют следующий смысл. Пусть \mathbf{a} – некоторый вектор, (a_1, a_2, a_3) – его компоненты в одной из указанных систем координат. Если эти компоненты относятся к системе $x_1^{(i)}x_2^{(i)}x_3^{(i)}$, то пишем $(a_1, a_2, a_3) = [\mathbf{a}]_i$, если же они относятся к системе $X_1X_2X_3$, то будем писать $(a_1, a_2, a_3) = [\mathbf{a}]_0$. С помощью кватернионов $\mathbf{Q}^{(i)}$ связь между компонентами вектора \mathbf{a} в разных системах координат можно выразить формулами

$$[\mathbf{a}]_0 = \mathbf{Q}^{(i)} \circ [\mathbf{a}]_i \circ (\mathbf{Q}^{(i)})^{-1} \quad (i=1,2).$$

Здесь и в аналогичных формулах ниже вектор \mathbf{a} следует рассматривать как кватернион $(0, \mathbf{a})$.

Кватернион перехода от системы $x_1^{(1)} x_2^{(1)} x_3^{(1)}$ к системе $x_1^{(2)} x_2^{(2)} x_3^{(2)}$ обозначим Λ . С его помощью можно выразить связь между компонентами вектора \mathbf{a} в системах координат датчиков: $[\mathbf{a}]_2 = \Lambda \circ [\mathbf{a}]_1 \circ \Lambda^{-1}$. Последняя формула эквивалентна матричной формуле $[\mathbf{a}]_2 = B[\mathbf{a}]_1$, где

$$B = \begin{vmatrix} \lambda_0^2 + \lambda_1^2 - \lambda_2^2 - \lambda_3^2 & 2(\lambda_1\lambda_2 - \lambda_0\lambda_3) & 2(\lambda_1\lambda_3 + \lambda_0\lambda_2) \\ 2(\lambda_1\lambda_2 + \lambda_0\lambda_3) & \lambda_0^2 + \lambda_2^2 - \lambda_1^2 - \lambda_3^2 & 2(\lambda_2\lambda_3 - \lambda_0\lambda_1) \\ 2(\lambda_1\lambda_3 - \lambda_0\lambda_2) & 2(\lambda_2\lambda_3 + \lambda_0\lambda_1) & \lambda_0^2 + \lambda_3^2 - \lambda_1^2 - \lambda_2^2 \end{vmatrix},$$

$\Lambda = (\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ и тройки чисел $[\mathbf{a}]_i$ рассматриваются как векторы-столбцы. Кватернион Λ связывает между собой $\mathbf{Q}^{(1)}$ и $\mathbf{Q}^{(2)}$: $\mathbf{Q}^{(2)} \circ \Lambda = \mathbf{Q}^{(1)}$. Возникает задача – оценить Λ по измерениям звездных датчиков.

Поставленная задача может быть решена методом наименьших квадратов. Оценкой кватерниона Λ будем считать кватернион $\hat{\Lambda}$, доставляющий минимум выражению

$$\Phi(\Lambda) = \sum_k \left\| \mathbf{Q}_k^{(2)} \circ \Lambda - \mathbf{Q}_k^{(1)} \right\|^2$$

при условии $\|\Lambda\|=1$. Здесь и ниже суммирование по k распространяется на моменты времени t_k , включенные в обработку. В принципе, выбор этих моментов произволен и никак не связан с характером движения КА. Однако следует учитывать, что кватернион Λ может как-то меняться со временем (например, из-за вариаций температуры), поэтому разброс в моментах t_k не должен быть слишком велик.

Минимизируемое выражение преобразуем к виду

$$\Phi(\Lambda) = \sum_k \left\| \Lambda - (\mathbf{Q}_k^{(2)})^{-1} \circ \mathbf{Q}_k^{(1)} \right\|^2.$$

Применив метод множителей Лагранжа решения задачи на условный экстремум, получим искомую оценку

$$\hat{\Lambda} = \mu \sum_k (\mathbf{Q}_k^{(2)})^{-1} \circ \mathbf{Q}_k^{(1)}, \quad \mu = \left\| \sum_k (\mathbf{Q}_k^{(2)})^{-1} \circ \mathbf{Q}_k^{(1)} \right\|^{-1}.$$

Найденное решение имеет простой статистический смысл. Как уже говорилось, при любом t справедливо равенство $\mathbf{Q}^{(2)}(t) \circ \Lambda = \mathbf{Q}^{(1)}(t)$, поэтому оценить Λ

можно по измерениям, выполненным в любой единственный момент времени t_k . Такая одномоментная оценка имеет вид

$$\hat{\Lambda}_k = \left(\mathbf{Q}_k^{(2)} \right)^{-1} \circ \mathbf{Q}_k^{(1)}.$$

Если доступны несколько моментов времени с измерениями, то соответствующие одномоментные оценки следует усреднить.

Чтобы оценить точность полученного решения, надо конкретизировать модель ошибок измерений. Ошибки в измерении кватерниона $\mathbf{Q}_k^{(i)} \approx \mathbf{Q}^{(i)}(t_k)$ представим в виде

$$\mathbf{Q}_k^{(i)} = \mathbf{Q}^{(i)}(t_k) \circ \mathbf{F}(\boldsymbol{\xi}_k^{(i)}), \quad \boldsymbol{\xi}_k^{(i)} = [\xi_k^{(i)}]_i.$$

Здесь $\mathbf{F}(\mathbf{z})$ – параметризация нормированного кватерниона модифицированными параметрами Родрига $\mathbf{z} = (z_1, z_2, z_3)$:

$$\mathbf{F}(\mathbf{z}) = (F_0(\mathbf{z}), F_1(\mathbf{z}), F_2(\mathbf{z}), F_3(\mathbf{z})),$$

$$F_0(\mathbf{z}) = \frac{1 - z_1^2 - z_2^2 - z_3^2}{1 + z_1^2 + z_2^2 + z_3^2}, \quad F_i(\mathbf{z}) = \frac{2z_i}{1 + z_1^2 + z_2^2 + z_3^2} \quad (i=1, 2, 3);$$

трехмерные векторы $\boldsymbol{\xi}_k^{(i)}$ – ошибки в измерениях. Полагаем, что эти ошибки имеют нулевые средние значения и ковариационные матрицы $K_k^{(i)}$: $M\xi_k^{(i)} = 0$, $K_k^{(i)} = M\xi_k^{(i)} \left(\xi_k^{(i)} \right)^T$. Ошибки с разными индексами i или k считаем некоррелированными. Удобство принятой модели ошибок состоит в следующем. Во-первых, все кватернионы в этой модели автоматически получаются нормированными. Во-вторых, в малой окрестности точки $\mathbf{z} = 0$ функцию $\mathbf{F}(\mathbf{z})$ можно приближенно считать линейной: для любых \mathbf{z}_1 и \mathbf{z}_2 из этой окрестности выполнено соотношение

$$\mathbf{F}(\mathbf{z}_1) \circ \mathbf{F}(\mathbf{z}_2) \approx \mathbf{F}(\mathbf{z}_1 + \mathbf{z}_2).$$

Последнее свойство будет широко использовано ниже, поскольку ошибки измерений звездных датчиков весьма малы. Отметим еще точное равенство $[\mathbf{F}(\mathbf{z})]^{-1} = \mathbf{F}(-\mathbf{z})$. В-третьих, ошибки $\xi_k^{(i)}$ имеют простой геометрический смысл – бесконечно малый поворот системы координат датчика, задаваемый вектором $\boldsymbol{\theta}$, описывается кватернионом $\mathbf{F}(\boldsymbol{\theta}/4) \approx (1, \boldsymbol{\theta}/2)$. Последнее утверждение формализуется соотношением

$$\mathbf{a} + \boldsymbol{\theta} \times \mathbf{a} \approx \left(1, \frac{\boldsymbol{\theta}}{2} \right) \circ \mathbf{a} \circ \left(1, -\frac{\boldsymbol{\theta}}{2} \right).$$

Здесь \mathbf{a} и $\boldsymbol{\theta}$ – произвольные векторы, $|\boldsymbol{\theta}| \ll 1$.

Укажем еще одно свойство функции $\mathbf{F}(\mathbf{z})$. Пусть Λ – произвольный нормированный кватернион. Рассмотрим векторную функцию $\mathbf{y} = \chi(\mathbf{x})$, задаваемую уравнением $\mathbf{F}(\mathbf{y}) = \Lambda \circ \mathbf{F}(\mathbf{x}) \circ \Lambda^{-1}$. Можно доказать, что эта функция имеет вид $\mathbf{y} = B\mathbf{x}$, где матрица B выражается через компоненты кватерниона Λ по формулам приведенным выше. Обратная функция $\mathbf{x} = B^T \mathbf{y}$. Таким образом, $\Lambda \circ \mathbf{F}(\mathbf{x}) \circ \Lambda^{-1} = \mathbf{F}(B\mathbf{x})$, $\Lambda^{-1} \circ \mathbf{F}(\mathbf{y}) \circ \Lambda = \mathbf{F}(B^T \mathbf{y})$.

Вернемся к анализу точности оценивания Λ . Сначала рассмотрим одномоментные оценки $\hat{\Lambda}_k$. Представим их в виде (некоторые приводимые здесь и ниже равенства выполнены с ошибками $\sim |\xi_k^{(i)}|^2$)

$$\begin{aligned} \hat{\Lambda}_k &= (\mathbf{Q}_k^{(2)})^{-1} \circ \mathbf{Q}_k^{(1)} = (\mathbf{Q}^{(2)}(t_k) \circ \mathbf{F}(\xi_k^{(2)}))^{-1} \circ \mathbf{Q}^{(1)}(t_k) \circ \mathbf{F}(\xi_k^{(1)}) = \\ &= \mathbf{F}(-\xi_k^{(2)}) \circ (\mathbf{Q}^{(2)}(t_k))^{-1} \circ \mathbf{Q}^{(1)}(t_k) \circ \mathbf{F}(\xi_k^{(1)}) = \mathbf{F}(-\xi_k^{(2)}) \circ \Lambda \circ \mathbf{F}(\xi_k^{(1)}) = \\ &= \Lambda \circ \Lambda^{-1} \circ \mathbf{F}(-\xi_k^{(2)}) \circ \Lambda \circ \mathbf{F}(\xi_k^{(1)}) = \Lambda \circ \mathbf{F}(-B^T \xi_k^{(2)}) \circ \mathbf{F}(\xi_k^{(1)}) = \Lambda \circ \mathbf{F}(\xi_k^{(1)} - B^T \xi_k^{(2)}). \end{aligned}$$

Таким образом, $\hat{\Lambda}_k = \Lambda \circ \mathbf{F}(\boldsymbol{\eta}_k)$, $\boldsymbol{\eta}_k = [\boldsymbol{\eta}_k]_1 = \xi_k^{(1)} - B^T \xi_k^{(2)}$. Среднее значение и ковариационная матрица случайной величины $\boldsymbol{\eta}_k$ имеют вид

$$M\boldsymbol{\eta}_k = 0, \quad M\boldsymbol{\eta}_k \boldsymbol{\eta}_k^T = K_k^{(1)} + B^T K_k^{(2)} B.$$

Использованная в этих соотношениях матрица B определяется кватернионом Λ . Но эту матрицу достаточно знать приближенно, ее можно вычислить по оценкам $\hat{\Lambda}_k$ или $\hat{\Lambda}$.

Перейдем к оценке $\hat{\Lambda}$. В выражении, задающем $\Phi(\hat{\Lambda})$, сделаем подстановку $\hat{\Lambda} = \Lambda \circ \mathbf{F}(\hat{\boldsymbol{\eta}})$ и преобразуем это выражение следующим образом

$$\begin{aligned} \Phi(\hat{\Lambda}) &= \sum_k \|\hat{\Lambda} - \hat{\Lambda}_k\|^2 = \sum_k \|\Lambda \circ \mathbf{F}(\hat{\boldsymbol{\eta}}) - \Lambda \circ \mathbf{F}(\boldsymbol{\eta}_k)\|^2 = \sum_k \|\mathbf{F}(\hat{\boldsymbol{\eta}}) - \mathbf{F}(\boldsymbol{\eta}_k)\|^2 = \\ &= \sum_k \|\mathbf{F}(\hat{\boldsymbol{\eta}}) \circ \mathbf{F}(-\boldsymbol{\eta}_k) - 1\|^2 = \sum_k \|\mathbf{F}(\hat{\boldsymbol{\eta}} - \boldsymbol{\eta}_k) - 1\|^2 = 4 \sum_k |\hat{\boldsymbol{\eta}} - \boldsymbol{\eta}_k|^2 = \Phi(\boldsymbol{\eta}). \end{aligned}$$

Минимизация (безусловная) функции $\Phi(\hat{\boldsymbol{\eta}})$ дает оценку

$$\hat{\boldsymbol{\eta}} = \frac{1}{N} \sum_k \boldsymbol{\eta}_k.$$

Здесь N – число включенных в обработку моментов времени с измерениями. Оценка $\hat{\boldsymbol{\eta}}$ является по существу линейным представлением оценки $\hat{\Lambda}$ и имеет параметры

$$M\hat{\boldsymbol{\eta}}=0, \quad M\hat{\boldsymbol{\eta}}\hat{\boldsymbol{\eta}}^T = \frac{1}{N^2} \sum_k \left(K_k^{(1)} + B^T K_k^{(2)} B \right).$$

Далее полагаем, что распределения ошибок $\xi_k^{(i)}$ не зависят от k : $K_k^{(i)} = K^{(i)}$ при $k=1, 2, 3 \dots$. Тогда $M\hat{\boldsymbol{\eta}}\hat{\boldsymbol{\eta}}^T = N^{-1} \left(K^{(1)} + B^T K^{(2)} B \right)$. В этом случае матрицу $M\hat{\boldsymbol{\eta}}\hat{\boldsymbol{\eta}}^T$ можно оценить непосредственно по измерениям датчиков, не зная $K^{(i)}$. Сначала вычисляем параметры Родрига $\boldsymbol{\eta}_k$ в соответствии с формулой

$$\hat{\Lambda}^{-1} \circ \left(\mathbf{Q}_k^{(2)} \right)^{-1} \circ \mathbf{Q}_k^{(1)} = \mathbf{F}(\boldsymbol{\eta}_k).$$

Затем вычисляем оценки ковариационных матриц

$$K^{(1)} + B^T K^{(2)} B = \frac{1}{N} \sum_k \boldsymbol{\eta}_k \boldsymbol{\eta}_k^T, \quad M\hat{\boldsymbol{\eta}}\hat{\boldsymbol{\eta}}^T = \frac{1}{N^2} \sum_k \boldsymbol{\eta}_k \boldsymbol{\eta}_k^T.$$

Кватернион Λ задается в виде $\Lambda = \hat{\Lambda} \circ \mathbf{F}(\hat{\boldsymbol{\eta}})$, где $M\hat{\boldsymbol{\eta}}=0$, а матрица $M\hat{\boldsymbol{\eta}}\hat{\boldsymbol{\eta}}^T$ находится указанной выше формуле.

2. Определение ориентации КА по измерениям двух звездных датчиков. Если известен кватернион Λ , то пару одномоментных показаний $\mathbf{Q}_k^{(i)}$ ($i=1, 2$) звездных датчиков можно уточнить. Исправленные показания будем искать в виде

$$\hat{\mathbf{Q}}_k^{(i)} = \mathbf{Q}_k^{(i)} \circ \mathbf{F}(\boldsymbol{\xi}_k^{(i)}), \quad \boldsymbol{\xi}_k^{(i)} = [\xi_k^{(i)}]_i.$$

Если измерения датчиков рассматривать порознь, то естественно принять, что $\xi_k^{(i)}$ – случайные величины с нулевыми средними значениями и ковариационными матрицами $K^{(i)}$. Учтем теперь связь $\hat{\mathbf{Q}}_k^{(2)} \circ \Lambda = \hat{\mathbf{Q}}_k^{(1)}$. Последнее равенство можно преобразовать следующим образом

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_k^{(2)} \circ \mathbf{F}(\boldsymbol{\xi}_k^{(2)}) \circ \Lambda &= \mathbf{Q}_k^{(1)} \circ \mathbf{F}(\boldsymbol{\xi}_k^{(1)}), \\ \mathbf{F}(\boldsymbol{\xi}_k^{(2)}) &= \left(\mathbf{Q}_k^{(2)} \right)^{-1} \circ \mathbf{Q}_k^{(1)} \circ \mathbf{F}(\boldsymbol{\xi}_k^{(1)}) \circ \Lambda^{-1} = \\ &= \left(\mathbf{Q}_k^{(2)} \right)^{-1} \circ \mathbf{Q}_k^{(1)} \circ \Lambda^{-1} \circ \Lambda \circ \mathbf{F}(\boldsymbol{\xi}_k^{(1)}) \circ \Lambda^{-1} = \mathbf{F}(\boldsymbol{\alpha}_k) \circ \mathbf{F}(B\xi_k^{(1)}) = \mathbf{F}(B\xi_k^{(1)} + \boldsymbol{\alpha}_k). \end{aligned}$$

Здесь матрица B задана кватернионом Λ , вектор $\boldsymbol{\alpha}_k = [\boldsymbol{\alpha}_k]_2$ определен соотношением

$$\left(\mathbf{Q}_k^{(2)} \right)^{-1} \circ \mathbf{Q}_k^{(1)} \circ \Lambda^{-1} = \mathbf{F}(\boldsymbol{\alpha}_k),$$

и принято во внимание, что по смыслу задачи $|\boldsymbol{\alpha}_k| \ll 1$. Следовательно, между векторами $\xi_k^{(1)}$ и $\xi_k^{(2)}$ существует линейная связь $\xi_k^{(2)} = B\xi_k^{(1)} + \boldsymbol{\alpha}_k$. В соответ-

ствии с методом наименьших квадратов значение $\xi_k^{(1)}$ будем искать из условия минимума квадратичной формы

$$\left(\xi_k^{(1)}\right)^T \left[K^{(1)}\right]^{-1} \xi_k^{(1)} + \left(B\xi_k^{(1)} + \mathbf{a}_k\right)^T \left[K^{(2)}\right]^{-1} \left(B\xi_k^{(1)} + \mathbf{a}_k\right).$$

Имеем

$$\xi_k^{(1)} = -\left\{ \left[K^{(1)}\right]^{-1} + B^T \left[K^{(2)}\right]^{-1} B \right\}^{-1} B^T \left[K^{(2)}\right]^{-1} \mathbf{a}_k.$$

Ковариационная матрица полученной оценки $\xi_k^{(1)}$ имеет вид

$$K_*^{(1)} = \left\{ \left[K^{(1)}\right]^{-1} + B^T \left[K^{(2)}\right]^{-1} B \right\}^{-1} = K^{(1)} - K^{(1)} B^T \left[K^{(2)} + BK^{(1)} B^T\right]^{-1} BK^{(1)}.$$

После того, как $\hat{Q}_k^{(1)}$ найден, второй кватернион можно вычислить по формуле $\hat{Q}_k^{(2)} = \hat{Q}_k^{(1)} \circ \Lambda^{-1}$. Последняя формула согласована (приближенно) с оценкой $\xi_k^{(2)}$, определенной соотношением $\xi_k^{(2)} = B\xi_k^{(1)} + \mathbf{a}_k$. Ковариационная матрица такой оценки $\xi_k^{(2)}$ имеет вид

$$\begin{aligned} K_*^{(2)} &= B \left\{ \left[K^{(1)}\right]^{-1} + B^T \left[K^{(2)}\right]^{-1} B \right\}^{-1} B^T = \left\{ B \left[K^{(1)}\right]^{-1} B^T + \left[K^{(2)}\right]^{-1} \right\}^{-1} = \\ &= K^{(2)} - K^{(2)} B \left[K^{(1)} + B^T K^{(2)} B\right]^{-1} B^T K^{(2)}. \end{aligned}$$

Пусть кватернион Λ известен не точно, а задан своей оценкой $\hat{\Lambda}$, причем его истинное значение и оценка связаны соотношением $\Lambda = \hat{\Lambda} \circ \mathbf{F}(\boldsymbol{\eta})$, где $\boldsymbol{\eta}$ – случайный вектор с нулевым средним значением и ковариационной матрицей L . Исправленные значения показаний датчиков ищем в прежнем виде. Связь $\hat{Q}_k^{(2)} \circ \Lambda = \hat{Q}_k^{(1)}$ в данном случае принимает вид

$$\mathbf{Q}_k^{(2)} \circ \mathbf{F}\left(\xi_k^{(2)}\right) \circ \hat{\Lambda} \circ \mathbf{F}(\boldsymbol{\eta}) = \mathbf{Q}_k^{(1)} \circ \mathbf{F}\left(\xi_k^{(1)}\right).$$

Отсюда

$$\mathbf{F}\left(\xi_k^{(2)}\right) = \left(\mathbf{Q}_k^{(2)}\right)^{-1} \circ \mathbf{Q}_k^{(1)} \circ \hat{\Lambda}^{-1} \circ \hat{\Lambda} \circ \mathbf{F}\left(\xi_k^{(1)} - \boldsymbol{\eta}\right) \circ \hat{\Lambda}^{-1}$$

Последнюю формулу преобразуем так. Вектор \mathbf{a}_k определим соотношением $\left(\mathbf{Q}_k^{(2)}\right)^{-1} \circ \mathbf{Q}_k^{(1)} \circ \hat{\Lambda}^{-1} = \mathbf{F}(\mathbf{a}_k)$, матрицу B зададим кватернионом $\hat{\Lambda}$. В результате получим $\xi_k^{(2)} = B[\xi_k^{(1)} - \boldsymbol{\eta}] + \mathbf{a}_k$. Оценки $\xi_k^{(1)}$ и $\boldsymbol{\eta}$ ищем из условия минимума квадратичной формы

$$\left(\xi_k^{(1)}\right)^T \left[K^{(1)}\right]^{-1} \xi_k^{(1)} + \left[B\left(\xi_k^{(1)} - \boldsymbol{\eta}\right) + \mathbf{a}_k\right]^T \left[K^{(2)}\right]^{-1} \left[B\left(\xi_k^{(1)} - \boldsymbol{\eta}\right) + \mathbf{a}_k\right] + \boldsymbol{\eta}^T L^{-1} \boldsymbol{\eta}.$$

Точка минимума определяется уравнениями

$$\begin{aligned} & \left\{ \left[K^{(1)} \right]^{-1} + B^T \left[K^{(2)} \right]^{-1} B \right\} \xi_k^{(1)} - B^T \left[K^{(2)} \right]^{-1} B \eta = -B^T \left[K^{(2)} \right]^{-1} \mathbf{a}_k, \\ & -B^T \left[K^{(2)} \right]^{-1} B \xi_k^{(1)} + \left\{ L^{-1} + B^T \left[K^{(2)} \right]^{-1} B \right\} \eta = B^T \left[K^{(2)} \right]^{-1} \mathbf{a}_k. \end{aligned}$$

Сложив эти два уравнения, получим $\left[K^{(1)} \right]^{-1} \xi_k^{(1)} + L^{-1} \eta = 0$. С помощью последнего соотношения найдем

$$\begin{aligned} \xi_k^{(1)} &= - \left\{ \left[K^{(1)} \right]^{-1} + B^T \left[K^{(2)} \right]^{-1} B + B^T \left[K^{(2)} \right]^{-1} B L \left[K^{(1)} \right]^{-1} \right\}^{-1} B^T \left[K^{(2)} \right]^{-1} \mathbf{a}_k, \\ \eta &= \left\{ L^{-1} + B^T \left[K^{(2)} \right]^{-1} B + B^T \left[K^{(2)} \right]^{-1} B \left[K^{(1)} \right] L^{-1} \right\}^{-1} B^T \left[K^{(2)} \right]^{-1} \mathbf{a}_k. \end{aligned}$$

С помощью найденных векторов $\xi_k^{(1)}$ и η строим уточненные значения $\hat{\mathbf{Q}}_k^{(1)}$ и $\Lambda = \hat{\Lambda} \circ \mathbf{F}(\eta)$. Затем находим уточненное значение $\hat{\mathbf{Q}}_k^{(2)} = \hat{\mathbf{Q}}_k^{(1)} \circ \Lambda^{-1}$. Ковариационная матрица вектора $(\xi_k^{(1)}, \eta)$ – это матрица, обратная матрице системы, которая определяет этот вектор и которая выписана выше. В принципе, нетрудно получить явные формулы для маргинальных ковариационных матриц векторов $\xi_k^{(1)}$ и η . Если матрица L мала – ее элементы намного меньше по модулю элементов матриц $K^{(i)}$, то в выписанных формулах можно положить $L=0$. Тогда эти формулы перейдут в формулы, отвечающие рассмотренному выше случаю точного знания кватерниона Λ .

3. Обработка измерений четырех звездных датчиков. Усложним задачу, рассмотренную в предыдущих пунктах. Пусть на КА установлены четыре звездных датчика. Во введенных выше обозначениях индекс, выражающий номер датчика (он обозначался буквой i), теперь принимает значения 1, 2, 3 и 4. Из имеющихся датчиков можно сформировать 6 пар: (1,2), (1,3), (1,4), (2,3), (2,4), (3,4). Кватернион перехода от системы координат $x_1^{(i)} x_2^{(i)} x_3^{(i)}$ к системе $x_1^{(j)} x_2^{(j)} x_3^{(j)}$ обозначим Λ_{ji} ($i \neq j$). В новых обозначениях введенный выше кватернион $\Lambda = \Lambda_{21}$. Рассматривая шесть пар датчиков можно найти шесть кватернионов перехода. Они не являются независимыми параметрами, поскольку $\Lambda_{ij} = \Lambda_{i1} \circ \Lambda_{1j}^{-1}$. В качестве кватернионов-параметров примем Λ_{21} , Λ_{31} , Λ_{41} . Остальные представим в виде

$$\Lambda_{32} = \Lambda_{31} \circ \Lambda_{21}^{-1}, \quad \Lambda_{42} = \Lambda_{41} \circ \Lambda_{21}^{-1}, \quad \Lambda_{43} = \Lambda_{41} \circ \Lambda_{31}^{-1}.$$

Введем обозначения (см. п. 1)

$$\hat{\Lambda}_{ij} = \mu_{ij} \sum_k \left(\mathbf{Q}_k^{(i)} \right)^{-1} \circ \mathbf{Q}_k^{(j)}, \quad \mu_{ij} = \left\| \sum_k \left(\mathbf{Q}_k^{(i)} \right)^{-1} \circ \mathbf{Q}_k^{(j)} \right\|^{-1},$$

$$\mathbf{F}[\boldsymbol{\eta}_k^{(ij)}] = \hat{\Lambda}_{ij}^{-1} \circ (\mathbf{Q}_k^{(i)})^{-1} \circ \mathbf{Q}_k^{(j)}.$$

Здесь последняя формула служит определением величин $\boldsymbol{\eta}_k^{(ij)} = [\boldsymbol{\eta}_k^{(ij)}]_j$. Произвольные значения кватернионов перехода представим в виде $\Lambda_{ij} = \hat{\Lambda}_{ij} \circ \mathbf{F}(\boldsymbol{\beta}_{ij})$.

В терминах векторов $\boldsymbol{\eta}_k^{(ij)}$ и $\boldsymbol{\beta}_{ij} = [\boldsymbol{\beta}_{ij}]_j$ выражение

$$\Phi(\Lambda) = \sum_k \left\| \mathbf{Q}_k^{(i)} \circ \Lambda - \mathbf{Q}_k^{(j)} \right\|^2,$$

в котором $\|\Lambda\|=1$, можно представить следующим образом (ср. п. 1)

$$\begin{aligned} \Phi(\boldsymbol{\beta}_{ij}) &= \sum_k \left\| \mathbf{Q}_k^{(i)} \circ \hat{\Lambda}_{ij} \circ \mathbf{F}(\boldsymbol{\beta}_{ij}) - \mathbf{Q}_k^{(j)} \right\|^2 = \sum_k \left\| \mathbf{F}(\boldsymbol{\beta}_{ij}) - \hat{\Lambda}_{ij}^{-1} \circ (\mathbf{Q}_k^{(i)})^{-1} \circ \mathbf{Q}_k^{(j)} \right\|^2 = \\ &= \sum_k \left\| \mathbf{F}(\boldsymbol{\beta}_{ij}) - \mathbf{F}[\boldsymbol{\eta}_k^{(ij)}] \right\|^2 = 4 \sum_k \left| \boldsymbol{\beta}_{ij} - \boldsymbol{\eta}_k^{(ij)} \right|^2. \end{aligned}$$

Последнее равенство в этой цепочке является приближенным Его использование означает линеаризацию по параметрам Родрига. Минимизируя по $\boldsymbol{\beta}_{ij}$ последнюю сумму, получим

$$\hat{\boldsymbol{\beta}}_{ij} = \frac{1}{N} \sum_k \boldsymbol{\eta}_k^{(ij)}.$$

Здесь N – число включенных в обработку моментов времени с измерениями. Отсюда с учетом определения $\hat{\Lambda}_{ij}$ и в рамках линейной теории $\hat{\boldsymbol{\beta}}_{ij} = 0$.

Имеем далее

$$\begin{aligned} \sum_k (\mathbf{Q}_k^{(i)})^{-1} \circ \mathbf{Q}_k^{(j)} &= \sum_k (\mathbf{Q}_k^{(i)})^{-1} \circ \mathbf{Q}_k^{(1)} \circ \left[(\mathbf{Q}_k^{(i)})^{-1} \circ \mathbf{Q}_k^{(1)} \right]^{-1} = \\ &= \hat{\Lambda}_{i1} \circ \left(\sum_k \mathbf{F}[\boldsymbol{\eta}_k^{(i1)}] \circ \mathbf{F}[-\boldsymbol{\eta}_k^{(j1)}] \right) \circ \hat{\Lambda}_{j1}^{-1}. \end{aligned}$$

В рамках линейной теории

$$\begin{aligned} \sum_k \mathbf{F}[\boldsymbol{\eta}_k^{(i1)}] \circ \mathbf{F}[-\boldsymbol{\eta}_k^{(j1)}] &= \sum_k \mathbf{F}[\boldsymbol{\eta}_k^{(i1)} - \boldsymbol{\eta}_k^{(j1)}] = \\ &= \left(N, \sum_k \boldsymbol{\eta}_k^{(i1)} - \sum_k \boldsymbol{\eta}_k^{(j1)} \right) = N(1, \hat{\boldsymbol{\beta}}_{i1} - \hat{\boldsymbol{\beta}}_{j1}) = N. \end{aligned}$$

Отсюда находим

$$\sum_k (\mathbf{Q}_k^{(i)})^{-1} \circ \mathbf{Q}_k^{(j)} = N \hat{\Lambda}_{i1} \circ \hat{\Lambda}_{j1}^{-1}, \quad \hat{\Lambda}_{ij} = \hat{\Lambda}_{i1} \circ \hat{\Lambda}_{j1}^{-1}.$$

Ясно, что для пары датчиков (i, j) наилучшей (в смысле метода наименьших квадратов) оценкой кватерниона перехода от системы координат

$x_1^{(i)} x_2^{(i)} x_3^{(i)}$ к системе $x_1^{(j)} x_2^{(j)} x_3^{(j)}$ является $\hat{\Lambda}_{ji}$. Проведенный анализ показал, что в рамках линейной теории такие кватернионы перехода согласованы между собой и, следовательно, являются наилучшими оценками для заданного множества моментов времени с измерениями.

Если известны кватернионы перехода между собственными системами координат датчиков, то их одномоментные показания $\mathbf{Q}_k^{(i)}$ ($i=1, 2, 3, 4$) можно уточнить. Исправленные показания будем искать в виде

$$\hat{\mathbf{Q}}_k^{(i)} = \mathbf{Q}_k^{(i)} \circ \mathbf{F}(\xi^{(i)}), \quad \xi_k^{(i)} = [\xi_k^{(i)}]_i.$$

Примем, что $\xi_k^{(i)}$ – случайные величины с нулевыми средними значениями и ковариационными матрицами $K^{(i)}$. Учтем теперь связи $\hat{\mathbf{Q}}_k^{(i)} \circ \Lambda_{ij} = \hat{\mathbf{Q}}_k^{(j)}$. Их можно преобразовать к виду (ср. п. 2) $\xi_k^{(i)} = B_{ij} \xi_k^{(j)} + \alpha_k^{(ij)}$, где матрицы B_{ij} заданы кватернионами Λ_{ij} , векторы $\alpha_k^{(ij)} = [\alpha_k^{(ij)}]_i$ определены соотношениями $(\mathbf{Q}_k^{(i)})^{-1} \circ \mathbf{Q}_k^{(j)} \circ \Lambda_{ij}^{-1} = \mathbf{F}(\alpha_k^{(ij)})$ и считается, что $|\alpha_k^{(ij)}| \ll 1$. Имеют место соотношения: $B_{ij} = B_{il} B_{lj}$, $\alpha_k^{(ij)} = \alpha_k^{(il)} + B_{il} \alpha_k^{(lj)}$. Пусть для определенности известны кватернионы Λ_{21} , Λ_{31} и Λ_{41} . Уточненное значение $\xi_k^{(1)}$ будем искать из условия минимума квадратичной формы

$$\begin{aligned} & (\xi_k^{(1)})^T [K^{(1)}]^{-1} \xi_k^{(1)} + (B_{21} \xi_k^{(1)} + \alpha_k^{(21)})^T [K^{(2)}]^{-1} (B_{21} \xi_k^{(1)} + \alpha_k^{(21)}) + \\ & + (B_{31} \xi_k^{(1)} + \alpha_k^{(31)})^T [K^{(3)}]^{-1} (B_{31} \xi_k^{(1)} + \alpha_k^{(31)}) + \\ & + (B_{41} \xi_k^{(1)} + \alpha_k^{(41)})^T [K^{(4)}]^{-1} (B_{41} \xi_k^{(1)} + \alpha_k^{(41)}). \end{aligned}$$

Для определения $\xi_k^{(1)}$ имеем систему

$$\begin{aligned} & \left\{ [K^{(1)}]^{-1} + B_{21}^T [K^{(2)}]^{-1} B_{21} + B_{31}^T [K^{(3)}]^{-1} B_{31} + B_{41}^T [K^{(4)}]^{-1} B_{41} \right\} \xi_k^{(1)} = \\ & = -B_{21}^T [K^{(2)}]^{-1} \alpha_k^{(21)} - B_{31}^T [K^{(3)}]^{-1} \alpha_k^{(31)} - B_{41}^T [K^{(4)}]^{-1} \alpha_k^{(41)}. \end{aligned}$$

Ковариационная матрица полученной оценки $\xi_k^{(1)}$ имеет вид

$$K_*^{(1)} = \left\{ [K^{(1)}]^{-1} + B_{21}^T [K^{(2)}]^{-1} B_{21} + B_{31}^T [K^{(3)}]^{-1} B_{31} + B_{41}^T [K^{(4)}]^{-1} B_{41} \right\}^{-1}.$$

После того, как кватернион $\hat{\mathbf{Q}}_k^{(1)}$ найден, остальные кватернионы можно вычислить по формулам $\hat{\mathbf{Q}}_k^{(i)} = \hat{\mathbf{Q}}_k^{(1)} \circ \Lambda_{i1}^{-1}$. Последние формулы согласованы (прибли-

женно) с оценками $\xi_k^{(i)}$, определенными соотношениями $\xi_k^{(i)} = B_{i1}\xi_k^{(1)} + \alpha_k^{(i)}$. Ковариационная матрица такой оценки $\xi_k^{(i)}$ имеет вид

$$K_*^{(i)} = B_{i1} \left\{ \left[K^{(1)} \right]^{-1} + B_{21}^T \left[K^{(2)} \right]^{-1} B_{21} + B_{31}^T \left[K^{(3)} \right]^{-1} B_{31} + B_{41}^T \left[K^{(4)} \right]^{-1} B_{41} \right\}^{-1} B_{i1}^T.$$

4. Определение кватернионов взаимной ориентации звездных датчиков, установленных на КА «Ресурс-П». На КА «Ресурс-П» установлены четыре звездных датчика БОКЗ-М60. Их измерения выдаются в единые моменты времени с шагом 1с. Датчикам припишем номера 1, 2, 3 и 4, соответствующие цифрам в заголовках файлов с данными измерений каждого датчика. Примеры измерений приведены на рис. 1. Изображенные на этом рисунке графики – ломаные, ординаты вершин которых – значения компонент кватернионов $Q_k^{(i)}$, а абсциссы – моменты времени t_k . Звенья ломаных соединяют соседние по времени вершины. Используемое в данной работе полетное время отсчитывается от начала суток 25.06.2013 по шкале ДМВ (UTC+3ч). В данном примере число измерений каждого датчика $N=4460$. Найденные для рассматриваемого временного отрезка оценки $\hat{\Lambda}_{ji}$ кватернионов Λ_{ji} ($i \neq j$) приведены в табл. 1. Рис. 2 – 5 иллюстрируют некоторые детали получения этих оценок.

В левой части рис. 2 приведены одномоментные оценки кватерниона Λ_{41} . Представленные здесь графики – ломаные, построенные по моментам времени t_k и кватернионам $(Q_k^{(4)})^{-1} \circ Q_k^{(1)}$. В правой части этого рисунка приведены аналогичные ломаные, характеризующие компоненты векторов бесконечно малых поворотов $\zeta_k = [\zeta_k]_1 = (\zeta_{1,k}, \zeta_{2,k}, \zeta_{3,k})$ определенных соотношением

$$\hat{\Lambda}_{41}^{-1} \circ (Q_k^{(4)})^{-1} \circ Q_k^{(1)} = \mathbf{F}(\zeta_k / 4).$$

Среднеквадратичные значения этих компонент, обозначенные $\text{RMS}(\zeta_l)$, $l=1, 2, 3$, приведены в табл. 1 и в подписи к рисунку.

Как видно из рис. 2, кватернион Λ_{41} испытывает небольшое систематическое изменение с течением времени. Результаты сглаживания каждой последовательности $\{t_k, \zeta_{l,k}/4\}$ выражением

$$s_l(t) = a_{l,M+1} + a_{l,M+2}t + \sum_{m=1}^M a_{l,m} \sin \frac{\pi mt}{T} \quad (l=1, 2, 3)$$

приведены в левой части рис. 3. Сглаживающие выражения построены при $M=10$, их коэффициенты находились методом наименьших квадратов. Поскольку точки t_k образуют равномерную сетку, для расчета этих коэффициентов существуют удобные формулы [5]. Кватернион $\tilde{\Lambda}_{41} = \hat{\Lambda}_{41} \circ \mathbf{F}[\mathbf{s}(t)]$, где $\mathbf{s}(t) = (s_1(t), s_2(t), s_3(t))$ следует рассматривать как уточненную оценку Λ_{41} при апостериорной обработке измерений датчиков. В правой части рис. 3 приведе-

ны графики последовательностей $\Delta\zeta_{l,k} = \zeta_{l,k} - 4s_l(t_k)$, а в подрисуночной подписи приведены их среднеквадратичные значения $\text{RMS}(\Delta\zeta_l)$, $l=1, 2, 3$. Сравнение графиков в правых частях рис 2 и 3 показывает, что удаление систематической составляющей лишь незначительно уменьшает полные ошибки одномоментных оценок.

Рис. 4, 5 аналогичны рис. 2, 3 и характеризуют оценки кватерниона Λ_{43} . Рис. 6 – 10 характеризуют оценки кватернионов Λ_{31} и Λ_{43} на другом временном интервале. Здесь $N=4736$. Усредненные оценки кватернионов Λ_{ji} на этом интервале приведены в табл. 2. Непосредственная проверка показывает, что произведения

$$\hat{\Lambda}_{31}^{-1} \circ \hat{\Lambda}_{32} \circ \hat{\Lambda}_{21}, \quad \hat{\Lambda}_{41}^{-1} \circ \hat{\Lambda}_{42} \circ \hat{\Lambda}_{21}, \quad \hat{\Lambda}_{41}^{-1} \circ \hat{\Lambda}_{43} \circ \hat{\Lambda}_{31}$$

отличаются от 1 менее чем на 10^{-9} . Для кватернионов $\tilde{\Lambda}_{ij}(t)$ отличие от 1 аналогичных произведений составляет менее 10^{-8} при всех t . При этом компоненты кватернионов в файлах с показаниями датчиков БОКЗ-М60 задаются девятью значащими цифрами. Таким образом, указанные в начале п. 3 соотношения между кватернионами, связывающими собственные системы координат датчиков, выполнены с высокой точностью.

Поскольку число N в рассмотренных примерах – большое, а значения $\text{RMS}(\zeta_l)$ невелики, ковариационные матрицы L_{ij} , характеризующие точность оценок $\hat{\Lambda}_{ij}$ (их диагональные элементы оцениваются величинами $\text{RMS}^2(\zeta_l)/N$), малы. По этой причине при совместной обработке показаний нескольких датчиков будем считать $L_{ij} = 0$.

5. Оценка точности определения ориентации звездных датчиков, установленных на КА «Ресурс-П». На точность определения кватернионов $\mathbf{Q}_k^{(i)}$ в условиях реального космического полета влияет большое число факторов, и оценка вклада каждого из них в общую ошибку не всегда возможна. Кроме того, на борту КА нет приборов, более точных, чем звездные датчики, поэтому нет возможности поверить показания последних прямыми методами. Приходится использовать косвенные подходы. Один из возможных подходов основан на частотных соображениях. Датчик БОКЗ-М60 выдает измерения с шагом 1с. По этой причине ошибки, присущие собственно датчику (ошибки определения координат звезд на ПЗС матрице, алгоритмические ошибки и т.п.), должны проявляться в его показаниях с частотой несколько менее 0.5 Гц. Ошибки с частотами меньше нескольких сотых долей герца следует связать с внешними причинами. Разумеется, низкочастотные ошибки могут быть вызваны недостатками конструкции датчика и погрешностями его изготовления. Однако ниже будем считать, что ошибки такого рода лежат в допустимых пределах.

Подход, основанный на разделении частот, реализуется следующим образом. Из достаточно продолжительных рядов данных измерений выделяются и затем удаляются низкочастотные тренды. Ряды остатков содержат (сравнительно) высокочастотные колебания. По результатам статистической обработки этих рядов делают заключение о точности датчика. Выделение низкочастотных трендов можно выполнять по-разному. Даже применение формальных методов позволяет получить достаточно точные оценки. Однако формальный подход содержит значительный элемент субъективности, что вызывает сомнение в надежности оценок (ср. [1]). Более надежными выглядят методы, использующие физические соображения, в частности, методы, основанные на аппроксимации фактического вращательного движения КА [2, 3]. Один из таких методов использован ниже. Он применен к двум довольно продолжительным рядам данных, при получении которых КА «Ресурс-П» совершал эйлеровы развороты.

Пусть нормированная кватернионная функция времени $\mathbf{Q}(t)$ описывает ориентацию собственной системы координат одного из датчиков БОКЗ-М60 относительно инерциальной системы. В прежних обозначениях $\mathbf{Q}(t) = \mathbf{Q}^{(i)}(t)$ при надлежащем выборе i . Результат измерения этой функции в момент t_k обозначим \mathbf{Q}_k . В качестве \mathbf{Q}_k будем использовать либо кватернион, непосредственно измеренный выбранным датчиком (в этом случае $\mathbf{Q}_k = \mathbf{Q}_k^{(i)}$), либо кватернион, уточненный по показаниям нескольких датчиков способом п. 2 или 3. В случае эйлерова разворота КА функция $\mathbf{Q}(t)$ имеет вид (ср. [4])

$$\mathbf{Q}(t) = \mathbf{Q}_c \circ \mathbf{P}(t), \quad \mathbf{P}(t) = (\cos \alpha(t), \mathbf{e} \sin \alpha(t)),$$

где кватернион \mathbf{Q}_c и орт \mathbf{e} – постоянные величины, компоненты орта \mathbf{e} относятся к собственной системе координат датчика.

Измерения \mathbf{Q}_k представим в виде $\mathbf{Q}_k = \mathbf{Q}_c \circ \mathbf{P}(t_k) \circ \mathbf{F}(\xi_k)$. Последний множитель в этой формуле – ошибка измерения, выражаемая через трехмерный случайный вектор ξ_k . Кватернион \mathbf{Q} из рассматриваемой задачи можно исключить с помощью следующей конструкции. Введем «средний» кватернион

$$\mathbf{Q}_M = \|\mathbf{Q}_*\|^{-1} \mathbf{Q}_*, \quad \mathbf{Q}_* = \sum_k \mathbf{Q}_k.$$

С учетом принятой модели ошибок

$$\mathbf{Q}_* = \mathbf{Q}_c \circ \sum_k \mathbf{P}(t_k) \circ \mathbf{F}(\xi_k).$$

Поскольку ошибки ξ_k случайны и весьма малы, их суммарным вкладом в \mathbf{Q}_* можно пренебречь и принять

$$\mathbf{Q}_* = \mathbf{Q}_c \circ \sum_k \mathbf{P}(t_k).$$

Тогда $\mathbf{Q}_M = \mathbf{Q}_c \circ (\cos \alpha_c, \mathbf{e} \sin \alpha_c)$, где α_c – некоторое число. Введем кватернионы

$$\mathbf{P}_k = \mathbf{Q}_M^{-1} \circ \mathbf{Q}_k = \tilde{\mathbf{P}}(t_k) \circ \mathbf{F}(\xi_k) = \left(p_0^{(k)}, p_1^{(k)}, p_2^{(k)}, p_3^{(k)} \right),$$

$$\tilde{\mathbf{P}}(t) = (\cos \tilde{\alpha}(t), \mathbf{e} \sin \tilde{\alpha}(t)), \quad \tilde{\alpha}(t) = \alpha(t) - \alpha_c.$$

Опять же вследствие малости ошибок ξ_k и вида функции $\tilde{\mathbf{P}}(t)$ выполнено соотношение $\left(p_1^{(k)}, p_2^{(k)}, p_3^{(k)} \right) \sim \mathbf{e}$, поэтому между величинами $p_1^{(k)}$, $p_2^{(k)}$ и $p_3^{(k)}$ существуют две линейные связи. Чтобы записать их в удобной форме, параметризуем компоненты орта \mathbf{e} двумя параметрами a и b , положив

$$\mathbf{e} = \frac{(a, 1, b)}{\sqrt{1 + a^2 + b^2}}.$$

С использованием этих параметров указанные связи можно представить в виде $p_1^{(k)} = ap_2^{(k)}$, $p_3^{(k)} = bp_2^{(k)}$. Параметры a и b найдем, минимизируя по ним выражения

$$\sum_k \left(p_1^{(k)} - ap_2^{(k)} \right)^2 \quad \text{и} \quad \sum_k \left(p_3^{(k)} - bp_2^{(k)} \right)^2.$$

Если найденные значения этих параметров обеспечат достаточно точное выполнение указанных линейных связей, то сделанное выше предположение о том, что рассматриваемое движение КА представляет собой эйлеров разворот можно считать верным.

Приведем пример. Рассмотрим начальную часть отрезка данных, представленных на рис. 1. Эта часть показана на рис. 11. Она получена отбрасыванием фрагмента данных, отвечающего более сложному движению КА. Число точек t_k с измерениями здесь 4110. На рисунке приведены предварительные результаты обработки измерений датчиков 1 и 2. В левой части рис. 11 изображены графики отклонений одномоментных оценок кватерниона Λ_{21} от найденного среднего значения. Отклонения характеризуются векторами бесконечно малого поворота ζ_k (см. пп.1, 4). В средней части этого рисунка приведены уточненные по показаниям двух датчиков значения кватерниона ориентации системы координат $x_1^{(1)} x_2^{(1)} x_3^{(1)}$, т. е. представлены используемые в дальнейшем кватернионы \mathbf{Q}_k . В правой части рисунка приведены графики, иллюстрирующие кватернионы \mathbf{P}_k . Рис. 12 содержит результаты обработки этих кватернионов. В левой части рисунка даны графики остатков $e_1^{(k)} = p_1^{(k)} - ap_2^{(k)}$ и $e_2^{(k)} = p_3^{(k)} - bp_2^{(k)}$. Здесь $a = -0.93398(3.1 \cdot 10^{-6})$, $b = 1.73165(1.1 \cdot 10^{-5})$ (в скобках указаны соответствующие стандартные отклонения). По этим параметрам находим орт $\mathbf{e} = [\mathbf{e}]_1 = (-0.423 \ 0.453 \ 0.785)$. Как видим, движение КА с высокой точностью представляло собой эйлеров разворот.

Продолжим анализ этого примера. С использованием найденных оценок параметров a и b можно записать соотношения

$$\sin \tilde{\alpha}(t_k) \approx \frac{ap_1^{(k)} + p_2^{(k)} + bp_3^{(k)}}{\sqrt{1+a^2+b^2}} \equiv s_k, \quad \cos \tilde{\alpha}(t_k) \approx p_0^{(k)} \equiv c_k.$$

Графики последовательностей s_k , c_k и график ошибки $\varepsilon_k = s_k^2 + c_k^2 - 1$ приведены в средней части рис. 12. По последовательностям s_k и c_k можно вычислить значения функции $\tilde{\alpha}(t)$ в точках t_k . Напомним, эти точки образуют равномерную сетку на отрезке $0 \leq t \leq T = \max t_k$. График этой функции приведен вверху правой части рис. 12. График выглядит как прямая, но такая аппроксимация в рассматриваемой задаче недостаточна. Функцию $\tilde{\alpha}(t)$ аппроксимируем отрезком ряда Фурье

$$\chi(t) = a_{M+1} + a_{M+2}t + \sum_{m=1}^M a_m \sin \frac{\pi mt}{T},$$

коэффициенты a_0, a_1, \dots, a_{M+2} которого находятся методом наименьших квадратов [5]. Для данного примера аппроксимирующее выражение $\chi(t)$ было построено при $M = 20$. График разности $\Delta\alpha = \tilde{\alpha}(t) - \chi(t)$ приведен внизу правой части рис. 12.

Функция $\hat{\mathbf{P}}(t) = (\cos \chi(t), \mathbf{e} \sin \chi(t))$, где орт \mathbf{e} задан найденными a и b , служит аппроксимацией кватернионов \mathbf{P}_k . Ошибки аппроксимации удобно представить последовательностью параметров Родрига \mathbf{z}_k , определив ее соотношениями $\mathbf{F}(\mathbf{z}_k) = \hat{\mathbf{P}}^{-1}(t_k) \circ \mathbf{P}_k$. Графики компонент векторов бесконечно малого поворота $[\boldsymbol{\theta}_k]_1 = 4\mathbf{z}_k$ приведены в левой части рис. 13. Эти графики еще раз показывают, что эйлеров разворот был реализован достаточно точно. Максимальное отклонение от точного разворота такого рода составляет 1.5'. Однако поскольку графики содержат ярко выраженный низкочастотный тренд, эйлеров разворот не отражает всех деталей движения КА и не достаточен для оценки ошибок звездных датчиков.

Чтобы повысить точность аппроксимации, последовательность $\{t_k, \mathbf{z}_k\}$ покомпонентно сглаживалась выражениями вида $s_l(t)$ из раздела 4 при $M = 20$. Из полученных выражений был составлен вектор $\mathbf{s}(t)$, и кватернион $\mathbf{P}_*(t) = \hat{\mathbf{P}}(t) \circ \mathbf{F}[\mathbf{s}(t)]$ использовался для аппроксимации кватернионов \mathbf{P}_k . Ошибки аппроксимации выразим через параметры Родрига $\Delta\mathbf{z}_k$, положив $\mathbf{F}(\Delta\mathbf{z}_k) = \mathbf{P}_*^{-1}(t_k) \circ \mathbf{P}_k$. В линейном приближении (его ошибка здесь весьма мала) $\Delta\mathbf{z}_k = \mathbf{z}_k - \mathbf{s}(t_k)$. Графики компонент векторов $\Delta\boldsymbol{\theta}_k = (\Delta\theta_1, \Delta\theta_2, \Delta\theta_3) = 4\Delta\mathbf{z}_k$ приведены в средней части рис. 13. Эти графики выражают ошибки определения ориентации системы $x_1^{(1)} x_2^{(1)} x_3^{(1)}$ по показаниям датчиков 1 и 2. В данном случае $\text{RMS}(\Delta\theta_1) = 2.10''$, $\text{RMS}(\Delta\theta_2) = 2.68''$, $\text{RMS}(\Delta\theta_3) = 2.27''$.

Полученные оценки практически не зависят от числа гармоник, используемых при задании кватернионов $\tilde{\Lambda}_{ij}(t)$ (если они использовались; поэтому в

качестве Λ_{ij} можно использовать $\hat{\Lambda}_{ij}$), но зависят от выбора числа гармоник в отрезках рядов Фурье, задающих функции $\chi(t)$ и $\mathbf{s}(t)$. Ситуация с $\tilde{\Lambda}_{ij}(t)$ понятна. Эта функция содержит только низкочастотные гармоники, и их отсутствие при использовании $\hat{\Lambda}_{ij}$ компенсируются аналогичными гармониками в $\mathbf{s}(t)$. Для выбора же числа гармоник $\chi(t)$ и $\mathbf{s}(t)$ существуют простые правила. Прежде чем привести их, укажем способ оценки адекватности построенной аппроксимации движения КА. Он основан на анализе построенных по этой аппроксимации графиков компонент угловой скорости КА. Эта угловая скорость $\boldsymbol{\omega}$ вычисляется по формулам

$$\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_1 + \boldsymbol{\omega}_2, \quad \boldsymbol{\omega}_1 = 2\dot{\chi}\mathbf{F}(-\mathbf{s}) \circ \mathbf{e} \circ \mathbf{F}(\mathbf{s}),$$

$$\boldsymbol{\omega}_2 = \frac{4}{(1 + \mathbf{s} \cdot \mathbf{s})^2} [(1 - \mathbf{s} \cdot \mathbf{s})\dot{\mathbf{s}} - 2(\mathbf{s} \times \dot{\mathbf{s}}) + 2(\mathbf{s} \cdot \dot{\mathbf{s}})\mathbf{s}], \quad \mathbf{s} = \mathbf{s}(t), \quad \chi = \chi(t).$$

Компоненты вектора $\boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ относятся к системе координат выбранного датчика, в рассматриваемом примере – датчика 1. Графики этих компонент приведены в правой части рис. 13. Судя по этим графикам, движение КА выглядит плавным, как и было на самом деле.

Для сравнения на рис. 14 приведены те же графики, что и на рис. 13, но полученные при числе гармоник в выражениях $\chi(t)$ и $\mathbf{s}(t)$, равном 100. Графики компонент углов $\boldsymbol{\theta}_k$ практически не изменились. Графики компонент углов $\Delta\boldsymbol{\theta}_k$ стали более однородными, что привело к некоторому уменьшению их среднеквадратичных значений. Для графиков в средней части рис. 14 $\text{RMS}(\Delta\theta_1) = 1.95''$, $\text{RMS}(\Delta\theta_2) = 2.44''$, $\text{RMS}(\Delta\theta_3) = 2.10''$. Графики компонент угловой скорости также изменились. На них проявились мелкие сравнительно высокочастотные колебания. Для сравнения на фоне этих графиков изображены графики компонент угловой скорости, перенесенные с рис. 13.

Теперь приведем правило выбора числа гармоник в выражениях $\chi(t)$ и $\mathbf{s}(t)$. Число гармоник в выражении $\chi(t)$ должно быть минимальным из тех чисел, которые обеспечивают относительную стабилизацию графиков компонент углов $\boldsymbol{\theta}_k$. Число гармоник в выражениях для компонент $\mathbf{s}(t)$ должно быть минимальным из тех чисел, которые обеспечивают плавность графиков компонент угловой скорости КА. Практически эти числа можно брать одинаковыми, а выбор контролировать по графикам угловой скорости. Начиная с некоторого порога, увеличение числа гармоник (при условии $M \ll N$) слабо влияет на величины $\text{RMS}(\Delta\theta_i)$. В подходящем диапазоне изменения этого числа указанные среднеквадратичные оценки меняются в пределах нескольких процентов. Соответствующие значения этих оценок следует принять в качестве нижних пределов реальных оценок.

В завершение анализа этого примера укажем, что при использовании показаний только датчика 1, т.е. в случае $\mathbf{Q}_k = \mathbf{Q}_k^{(1)}$, расчеты по описанной схеме при 20 гармониках в выражениях $\chi(t)$ и $\mathbf{s}(t)$ дают среднеквадратичные отклонения $\text{RMS}(\Delta\theta_1) = 2.32''$, $\text{RMS}(\Delta\theta_2) = 2.80''$, $\text{RMS}(\Delta\theta_3) = 27.1''$. Оценки компоненты угловой скорости ω_3 получаются заметно менее плавные, чем на рис. 13. Причина – в большой ошибке определения поворота датчика вокруг оси $x_3^{(1)}$.

Описанный подход решает задачу оценки точности показаний звездных датчиков, полученных во время эйлеровых разворотов КА. Однако этап построения кватернионной функции $\hat{\mathbf{P}}(t)$ – наиболее содержательный этап построения аппроксимации движения КА – оказался достаточно громоздким. Он требует решения трех (правда, простейших) задач линейной регрессии. Этот подход гибок (см. [4], где он использован для оценки показаний звездного датчика на динамическом стенде), но в данной задаче эта гибкость представляется излишней. Здесь лучше использовать более «жесткую» модель, принятую в [2]. В рамках этой модели функция $\hat{\mathbf{P}}(t)$ ищется в виде

$$\hat{\mathbf{P}}(t) = (\cos\varphi(t), \mathbf{e}\sin\varphi(t)), \quad \varphi(t) = b_0 + b_1t + \dots + b_mt^m,$$

$$\mathbf{e} = \left(\frac{2u_1}{1+u_1^2+u_2^2}, \frac{2u_2}{1+u_1^2+u_2^2}, \frac{1-u_1^2-u_2^2}{1+u_1^2+u_2^2} \right),$$

значения параметров $u_1, u_2, b_0, \dots, b_m$ находятся методом наименьших квадратов из условия минимума выражения

$$\sum_k \|\mathbf{P}_k - \hat{\mathbf{P}}(t_k)\|^2.$$

Минимизация этого выражения выполняется методом Гаусса – Ньютона [6]. Дальнейшие построения выполняются по изложенной выше схеме. При новом способе построения функции по-прежнему стоит проблема выбора числа гармоник в выражении $\mathbf{s}(t)$, и появилась проблема выбора степени полинома $\varphi(t)$. Выбор осуществляется по рецептам, указанным выше. Степень полинома определяется видом последовательности $\boldsymbol{\theta}_k$, число гармоник – графиками компонент угловой скорости. В рассмотренном выше примере при $m=5$ и числе гармоник, равном 20, были получены среднеквадратические отклонения $\text{RMS}(\Delta\theta_1) = 2.09''$, $\text{RMS}(\Delta\theta_2) = 2.66''$, $\text{RMS}(\Delta\theta_3) = 2.26''$. Графики компонент векторов $\boldsymbol{\theta}_k$, $\Delta\boldsymbol{\theta}_k$ и $\boldsymbol{\omega}(t)$ практически совпадают с графиками на рис. 13. Ниже все результаты получены с использованием второго способа построения функции $\hat{\mathbf{P}}(t)$.

Рис. 15, 16 построены для того же интервала времени, который представлен на рис. 11 – 14. Новые рисунки организованы аналогично рис. 13, 14; расчеты для них проведены при $m=5$ и числе гармоник $M=20$ в выражениях для

компонент $\mathbf{s}(t)$. Рис. 15 содержит результаты оценивания точности показаний датчиков 3 и 4. Компоненты векторов на этом рисунке относятся к системе координат $x_1^{(3)} x_2^{(3)} x_3^{(3)}$. Для этой пары датчиков $\text{RMS}(\Delta\theta_1) = 2.82''$, $\text{RMS}(\Delta\theta_2) = 3.37''$, $\text{RMS}(\Delta\theta_3) = 2.91''$. Рис. 16 построен по результатам всех четырех датчиков. В этом примере $\text{RMS}(\Delta\theta_1) = 2.15''$, $\text{RMS}(\Delta\theta_2) = 2.73''$, $\text{RMS}(\Delta\theta_3) = 2.44''$, компоненты векторов относятся к системе $x_1^{(1)} x_2^{(1)} x_3^{(1)}$.

Рисунки 17 – 19 построены для временного интервала, являющегося заключительной частью интервала на рис. 6. Эта часть показана на рис. 17. Она получена отбрасыванием фрагмента данных, отвечающего более сложному движению КА. Число точек t_k с измерениями здесь 3205. На рисунке приведены предварительные результаты обработки измерений датчиков 1 и 2. В левой части рис. 17 изображены графики отклонений одномоментных оценок кватерниона Λ_{21} от найденного среднего значения. В средней части этого рисунка приведены уточненные по показаниям двух датчиков значения кватерниона ориентации системы координат $x_1^{(1)} x_2^{(1)} x_3^{(1)}$. В правой части рисунка приведены графики, иллюстрирующие кватернионы \mathbf{P}_k . Рис. 18, 19 организованы аналогично рис. 13, 16; расчеты проведены при $m = 5$ и числе гармоник в выражениях для компонент $\mathbf{s}(t)$ $M = 20$. Компоненты векторов на этих рисунках относятся к системе координат $x_1^{(1)} x_2^{(1)} x_3^{(1)}$. Рис. 18 содержит результаты оценивания точности показаний датчиков 1 и 2, рис. 19 построен по результатам обработки всех четырех датчиков. Точность на этом интервале несколько хуже, чем на предыдущем. Совместная обработка показаний датчиков 1, 2 привела к среднеквадратичным отклонениям $\text{RMS}(\Delta\theta_1) = 2.38''$, $\text{RMS}(\Delta\theta_2) = 3.13''$, $\text{RMS}(\Delta\theta_3) = 3.57''$; совместная обработка всех датчиков дала $\text{RMS}(\Delta\theta_1) = 2.23''$, $\text{RMS}(\Delta\theta_2) = 2.98''$, $\text{RMS}(\Delta\theta_3) = 2.93''$.

Заключение. Проведенное исследование позволило оценить величины случайных ошибок при определении ориентации КА в результате совместной обработки одномоментных измерений двух или четырех звездных датчиков БОКЗ-М60. Исследование выполнено по измерениям датчиков, полученным в полете КА «Ресурс-П». Как оказалось, совместная обработка измерений двух датчиков позволяет определить ориентацию связанной с этими датчиками системы координат со среднеквадратичной погрешностью 3'' по углам поворота вокруг каждой ее оси. Совместная обработка показаний всех четырех датчиков оказывается несколько более точной – примерно на 15 – 20%. Подчеркнем, что приведенные оценки получены для случайных ошибок одномоментных измерений. Систематические ошибки совместной обработки, обусловленные температурными деформациями элементов конструкции КА, на которых установлены датчики, и другими физическими причинами, составляют согласно нашему исследованию до 20''.

Данная работа выполнена при частичной поддержке РФФИ (проект 14-01-00423).

Литература

1. Аванесов Г.А., Красиков В.А., Никитин А.В., Сазонов В.В. Оценка точности определения параметров ориентации осей систем координат астроизмерительных приборов семейства БОКЗ // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. 2009. № 70.
URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2009-70>
2. Аванесов Г.А., Красиков В.А., Никитин А.В., Сазонов В.В. Определение вращательного движения космического аппарата в режиме астрокоррекции по измерениям звездного датчика БОКЗ-М // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. 2010. № 30.
URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2010-30>
3. Аванесов Г.А., Красиков В.А., Никитин А.В., Сазонов В.В. Оценка точности определения параметров ориентации осей системы координат астроизмерительных прибора БОКЗ-М по экспериментальным данным // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. 2010. № 74.
URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2010-74>
4. Бессонов Р.В., Куркина А.Н., Сазонов В.В. Оценка точности определения параметров ориентации осей системы координат астроизмерительного прибора БОКЗ-М60 // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2012. № 22.
URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2012-22>
5. Ланцош К. Практические методы прикладного анализа. М.: Физматгиз, 1961.
6. Бард Й. Нелинейное оценивание параметров. М.: Статистика, 1979.

Таблица 1. Кватернионы перехода, $N=4460$

Кватернион	λ_0	λ_1	λ_2	λ_3	RMS(ζ_1)	RMS(ζ_2)	RMS(ζ_3)
Λ_{21}	0.422484	0.001389	-0.784666	0.453657	15.6"	19.8"	29.4"
Λ_{31}	-0.000285	0.000778	-0.865936	0.500153	8.87"	41.4"	36.9"
Λ_{41}	-0.906334	0.000043	-0.366260	0.210742	15.9"	6.60"	32.7"
Λ_{32}	0.906250	0.000714	-0.366101	0.210843	30.5"	7.57"	40.1"
Λ_{42}	0.000085	0.002072	-0.866182	0.499724	8.31"	22.5"	25.1"
Λ_{43}	0.422820	0.001402	-0.784866	0.452998	16.9	19.7"	45.6"

Таблица 2. Кватернионы перехода, $N=4736$

Кватернион	λ_0	λ_1	λ_2	λ_3	RMS(ζ_1)	RMS(ζ_2)	RMS(ζ_3)
Λ_{21}	0.422502	0.001339	-0.784661	0.453649	18.2"	17.8"	32.7"
Λ_{31}	-0.000253	0.000760	-0.865954	0.500124	11.7"	34.6"	37.9"
Λ_{41}	-0.906331	0.000059	-0.366277	0.210727	21.5"	6.50"	40.3"
Λ_{32}	0.906254	0.000733	-0.366391	0.210855	26.1"	6.36"	36.2"
Λ_{42}	0.000073	0.002051	-0.866170	0.499745	10.9"	28.8"	26.4"
Λ_{43}	0.422799	0.001393	-0.784878	0.452997	22.3	24.6"	39.6"

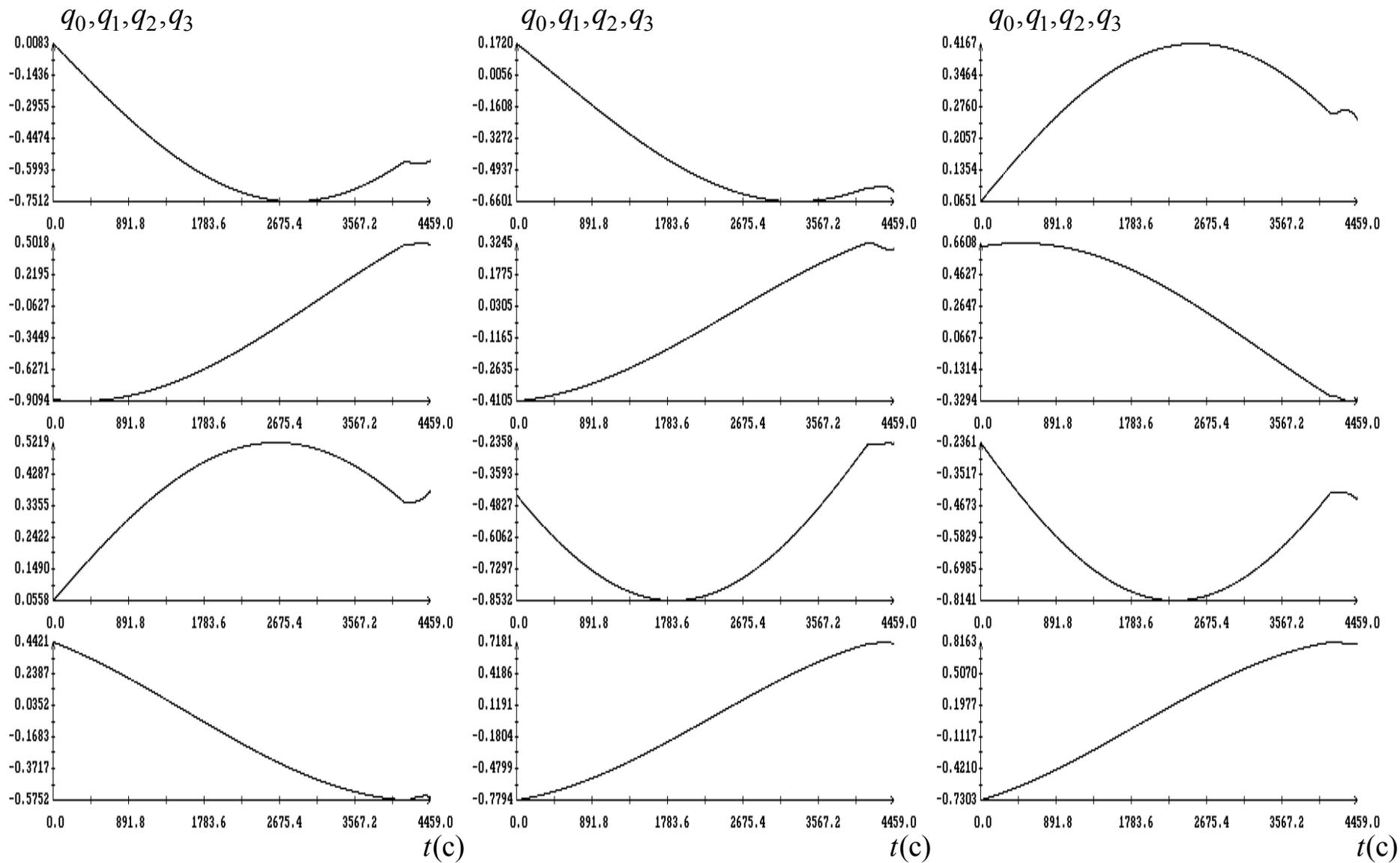


Рис. 1. Данные измерений датчиков 1, 3 и 4. Момент $t=0$ соответствует 3739215 с полетного времени.

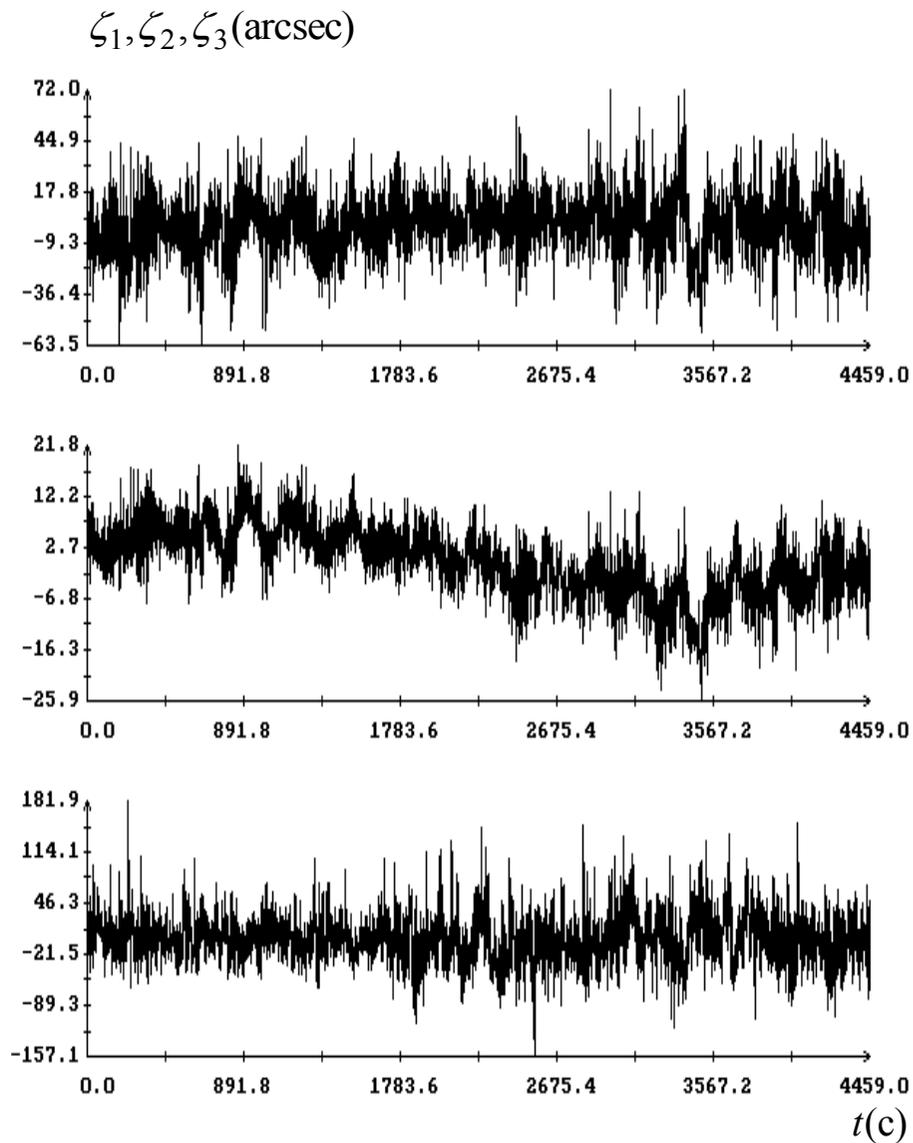
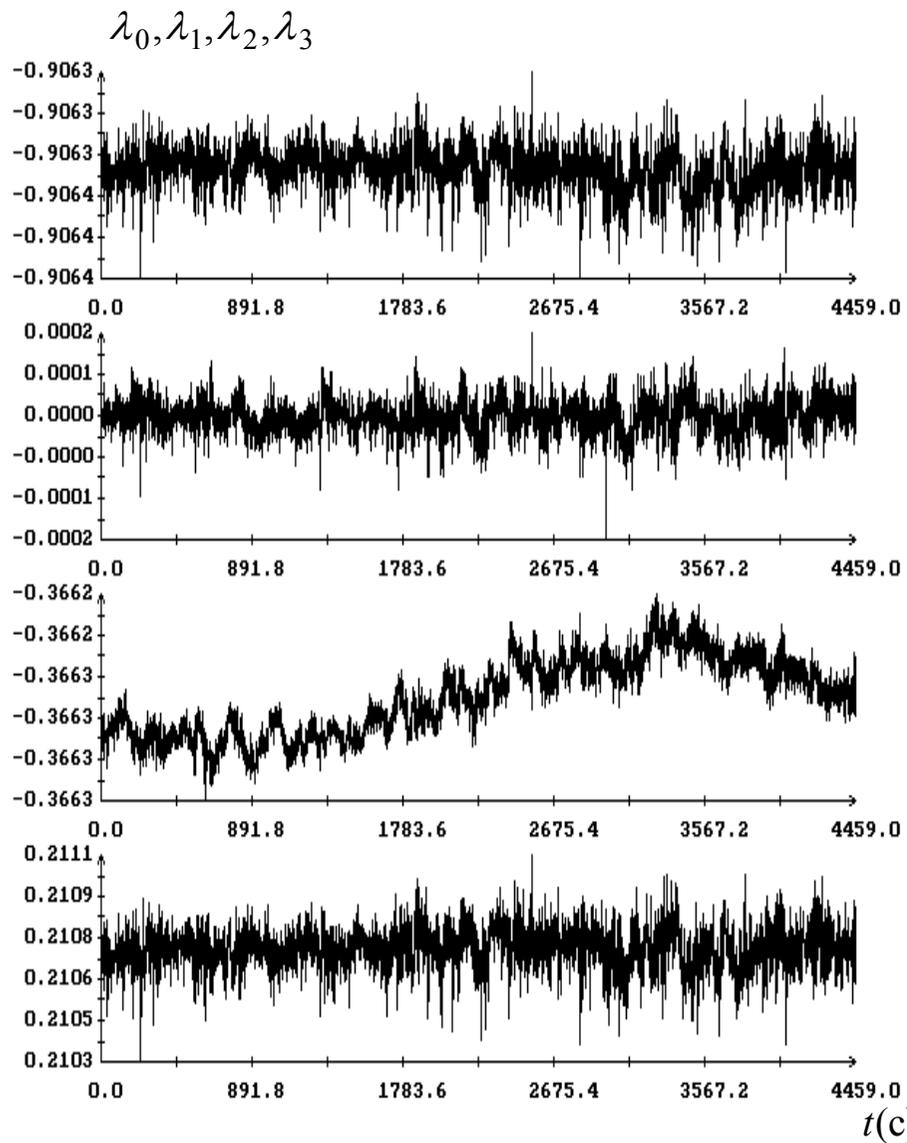


Рис. 2. Одновременные оценки кватерниона Λ_{41} ; $RMS(\zeta_1) = 15.9''$, $RMS(\zeta_2) = 6.60''$, $RMS(\zeta_3) = 32.7''$. Момент $t = 0$ соответствует 3739215 с полетного времени.

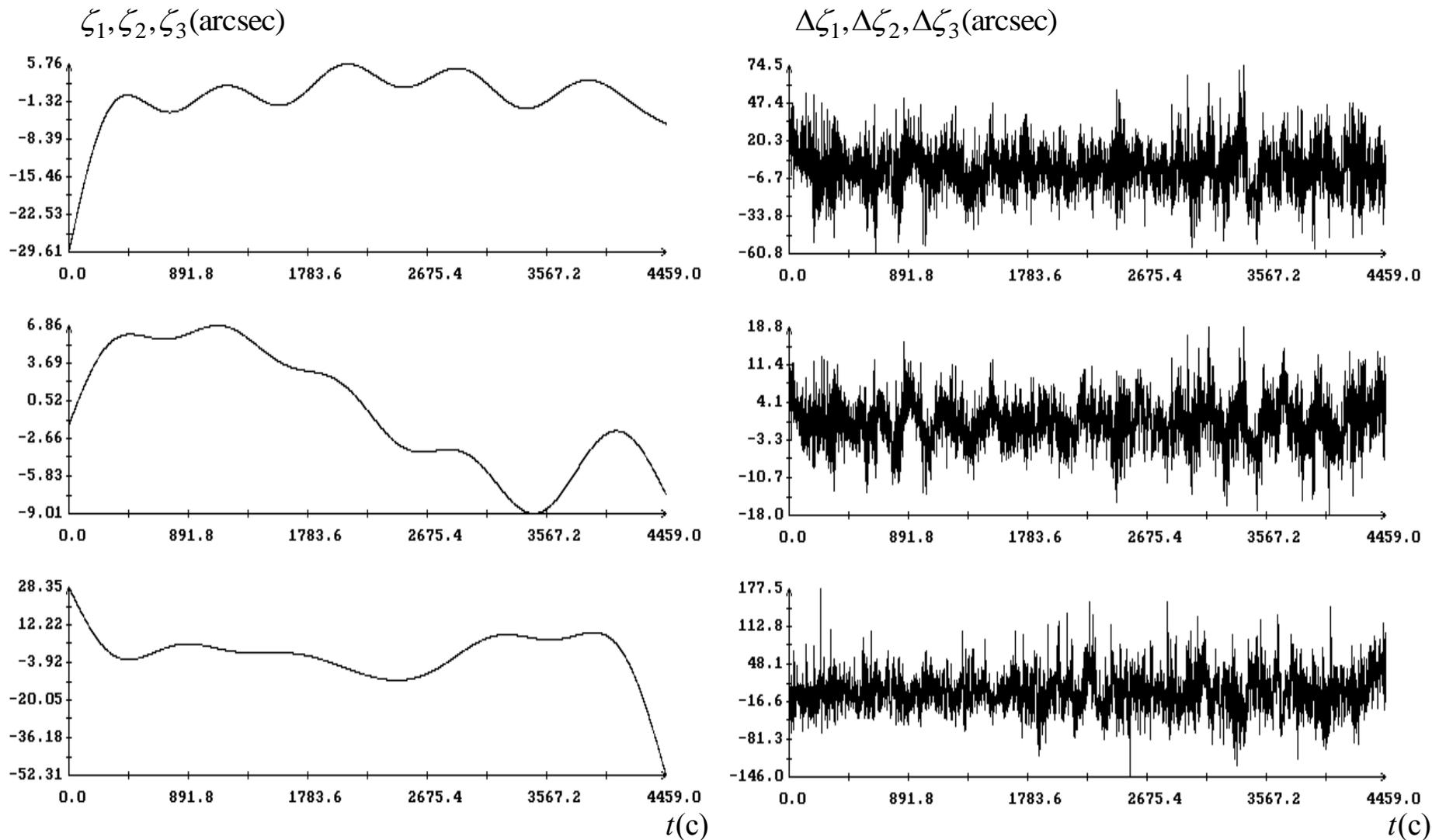


Рис. 3. Сглаживающие выражения $\zeta_l = 4s_l(t)$ для кватерниона Λ_{41} и последовательности $\Delta\zeta_{l,k} = \zeta_{l,k} - 4s_l(t_k)$ ($l = 1, 2, 3$); $\text{RMS}(\Delta\zeta_1) = 15.8''$, $\text{RMS}(\Delta\zeta_2) = 4.45''$, $\text{RMS}(\Delta\zeta_3) = 32.9''$. Момент $t=0$ соответствует 3739215 с полетного времени.

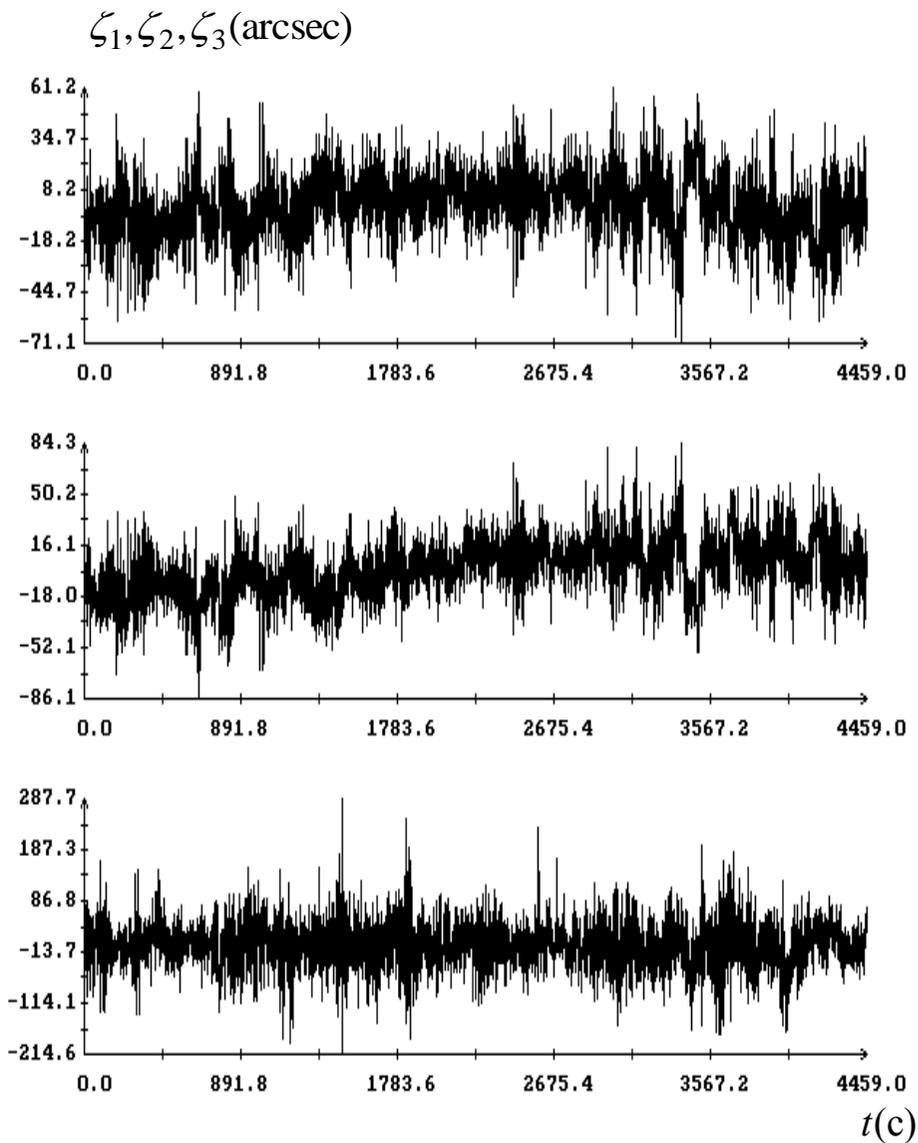
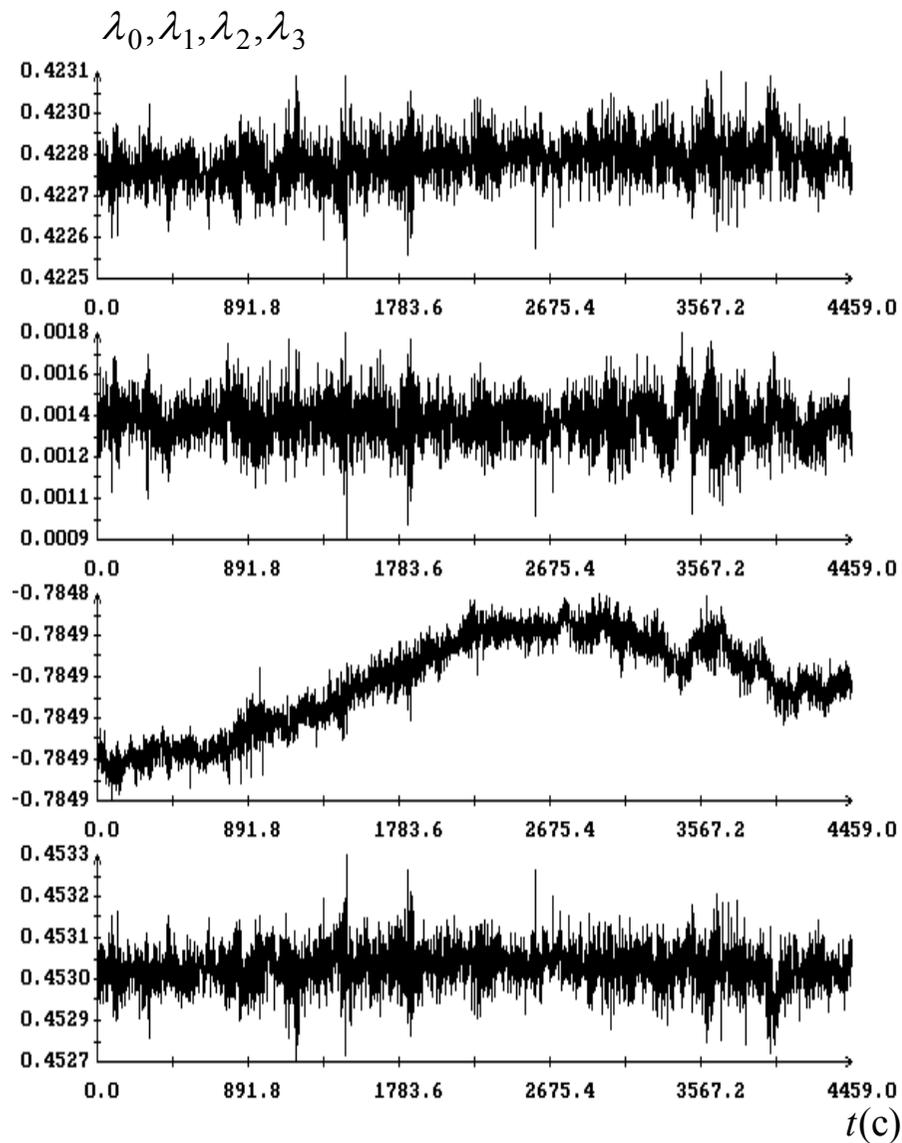


Рис. 4. Одновременные оценки кватерниона Λ_{43} ; $RMS(\zeta_1) = 16.9''$, $RMS(\zeta_2) = 19.7''$, $RMS(\zeta_3) = 46.6''$. Момент $t = 0$ соответствует 3739215 с полетного времени.

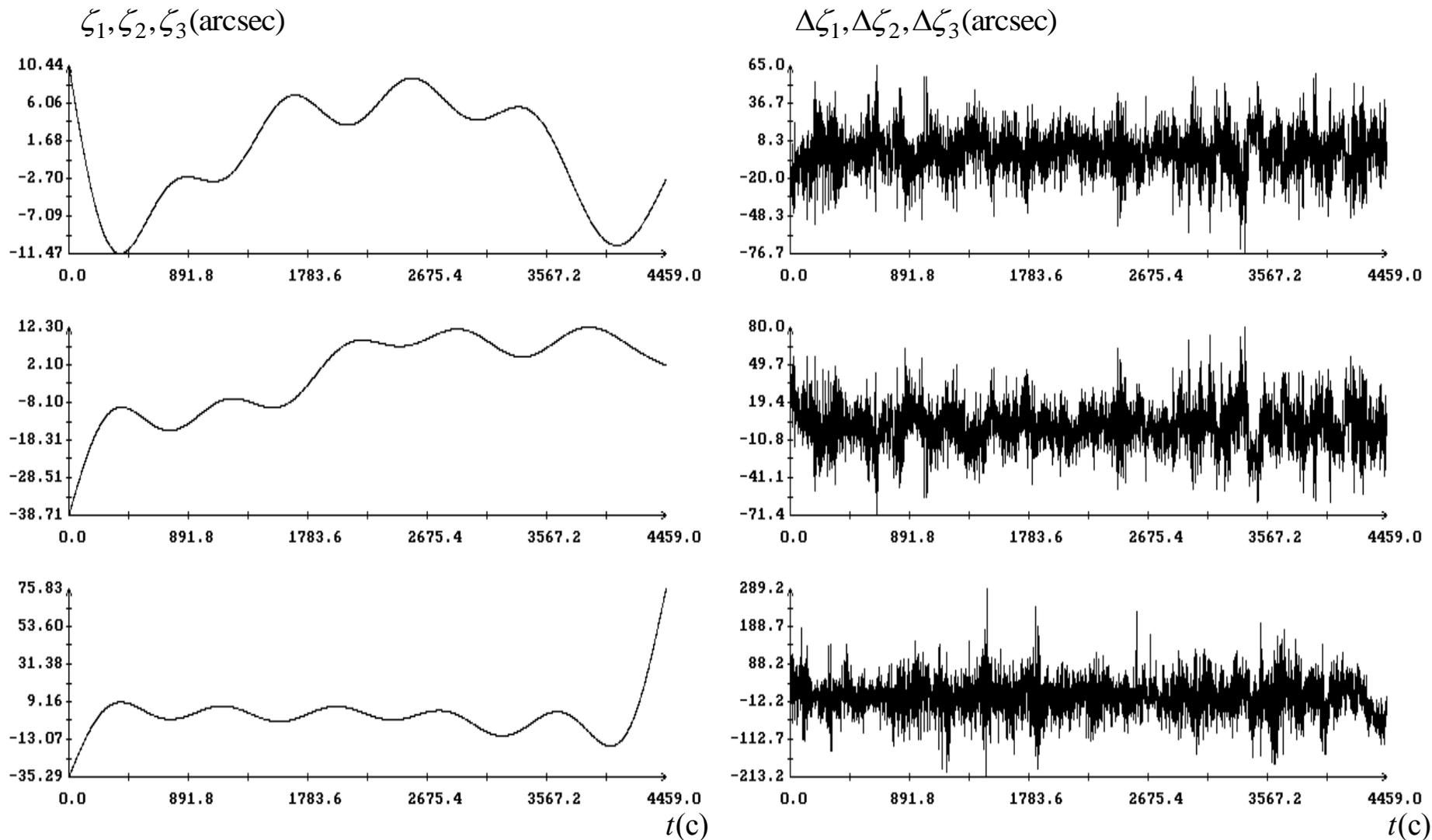


Рис. 5. Сглаживающие выражения $\zeta_l = 4s_l(t)$ для кватерниона Λ_{43} и последовательности $\Delta\zeta_{l,k} = \zeta_{l,k} - 4s_l(t_k)$ ($l = 1, 2, 3$); $\text{RMS}(\Delta\zeta_1) = 15.9''$, $\text{RMS}(\Delta\zeta_2) = 17.3''$, $\text{RMS}(\Delta\zeta_3) = 47.5''$. Момент $t = 0$ соответствует 3739215 с полетного времени.

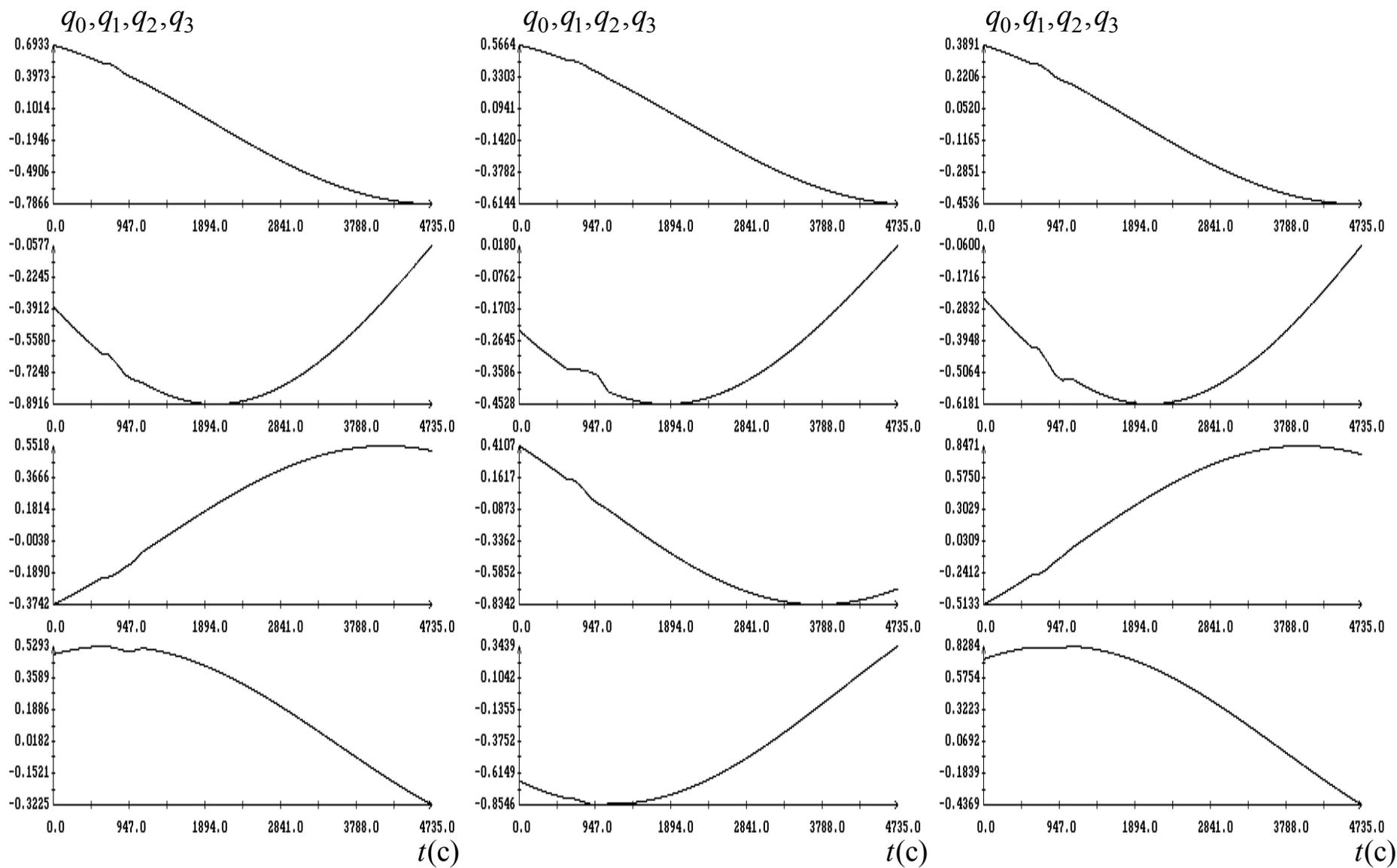


Рис. 6. Данные измерений датчиков 1, 3 и 4. Момент $t = 0$ соответствует 2728269с полетного времени.

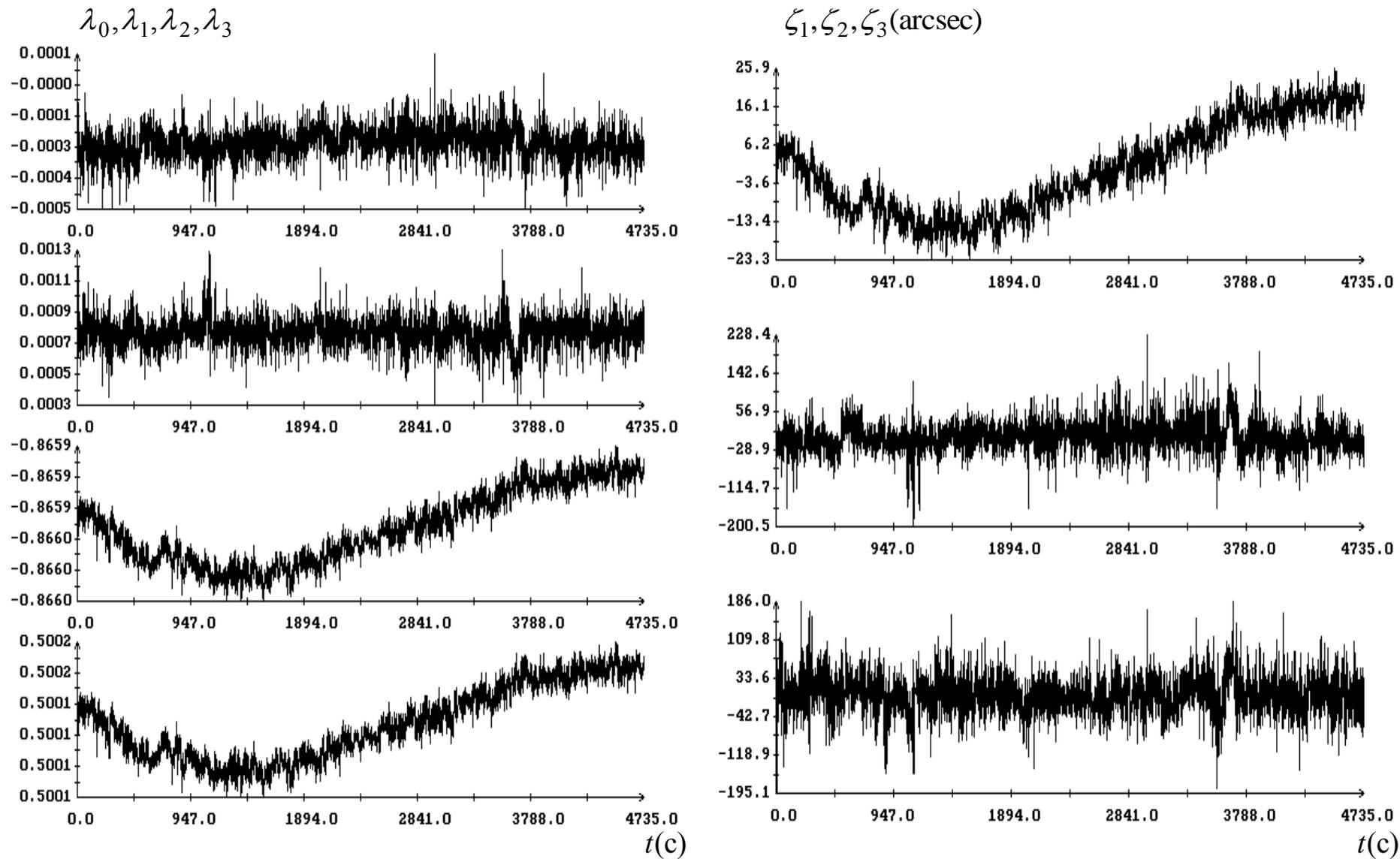


Рис. 7. Одновременные оценки кватерниона Λ_{31} ; $RMS(\zeta_1) = 11.7''$, $RMS(\zeta_2) = 34.6''$, $RMS(\zeta_3) = 37.9''$. Момент $t = 0$ соответствует 2728269 с полетного времени.

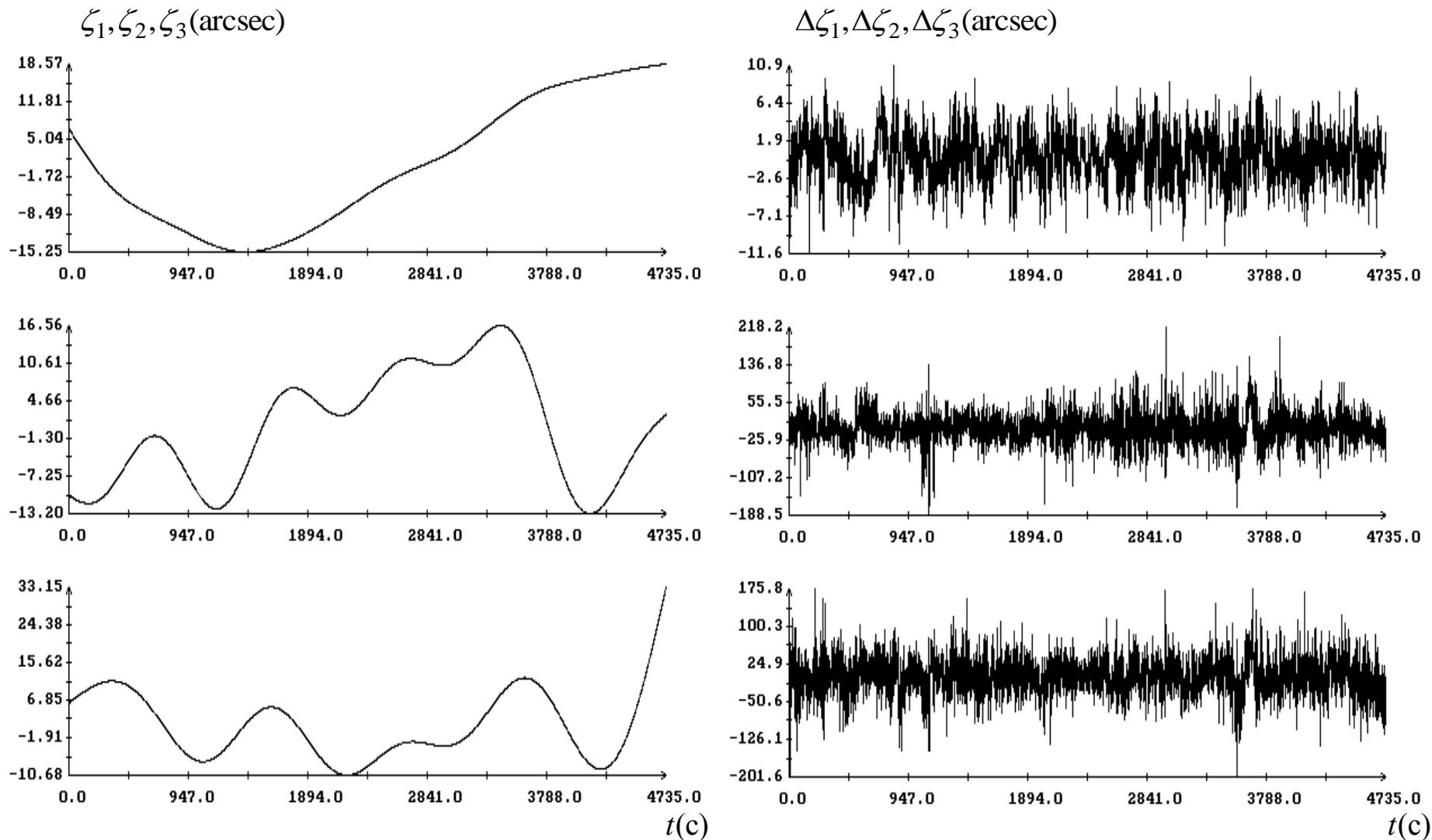


Рис. 8. Сглаживающие выражения $\zeta_l = 4s_l(t)$ для кватерниона Λ_{31} и последовательности $\Delta\zeta_{l,k} = \zeta_{l,k} - 4s_l(t_k)$ ($l = 1, 2, 3$); $\text{RMS}(\Delta\zeta_1) = 2.97''$, $\text{RMS}(\Delta\zeta_2) = 33.4''$, $\text{RMS}(\Delta\zeta_3) = 37.3''$. Момент $t = 0$ соответствует 2728269с полетного времени.

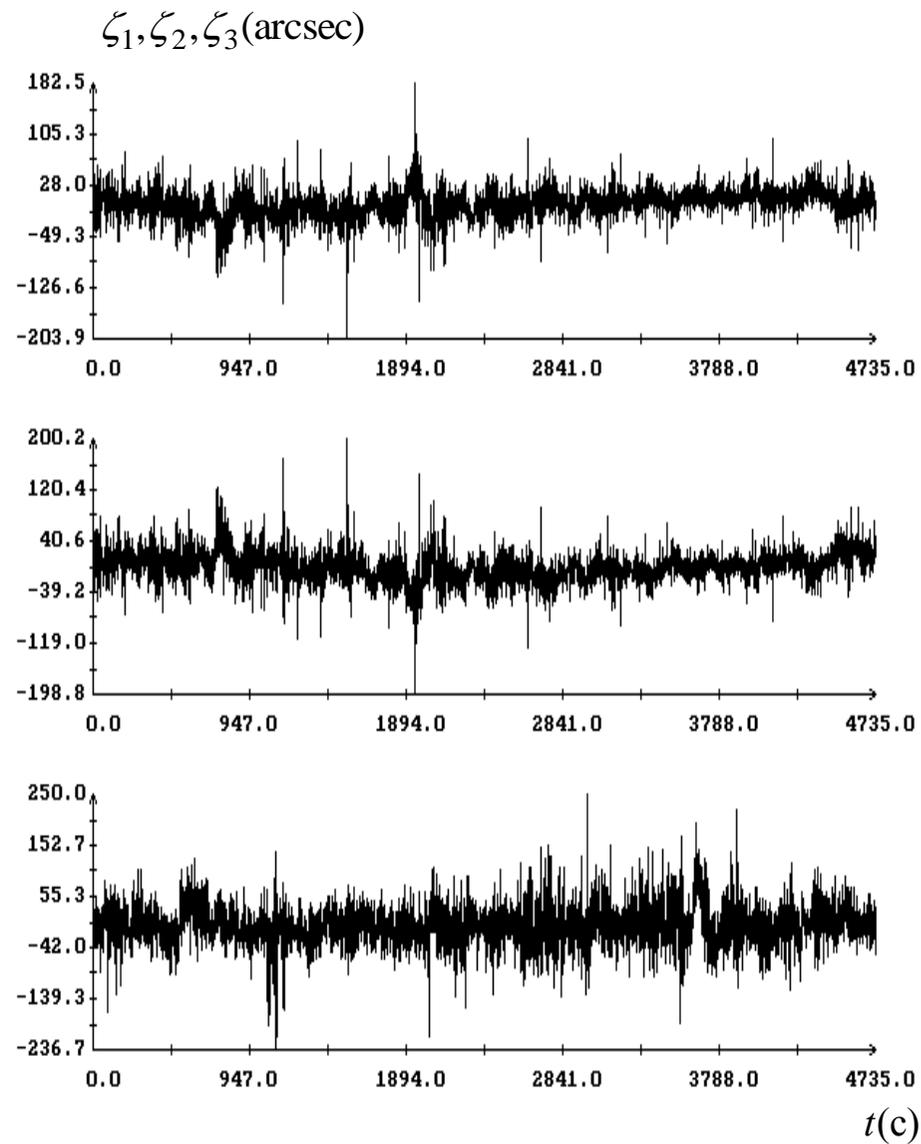
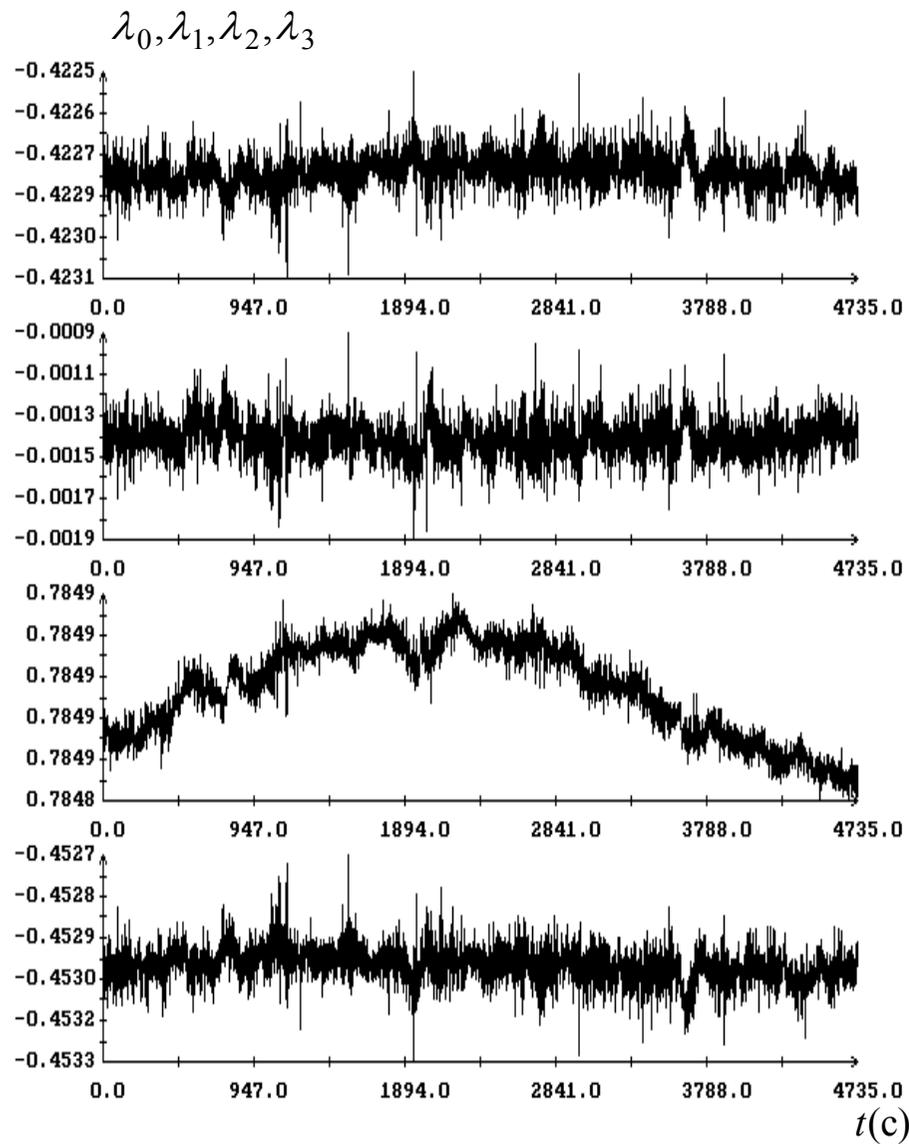


Рис. 9. Одновременные оценки кватерниона Λ_{43} ; $\text{RMS}(\zeta_1) = 22.3''$, $\text{RMS}(\zeta_2) = 24.5''$, $\text{RMS}(\zeta_3) = 39.6''$. Момент $t = 0$ соответствует 2728269 с полетного времени.

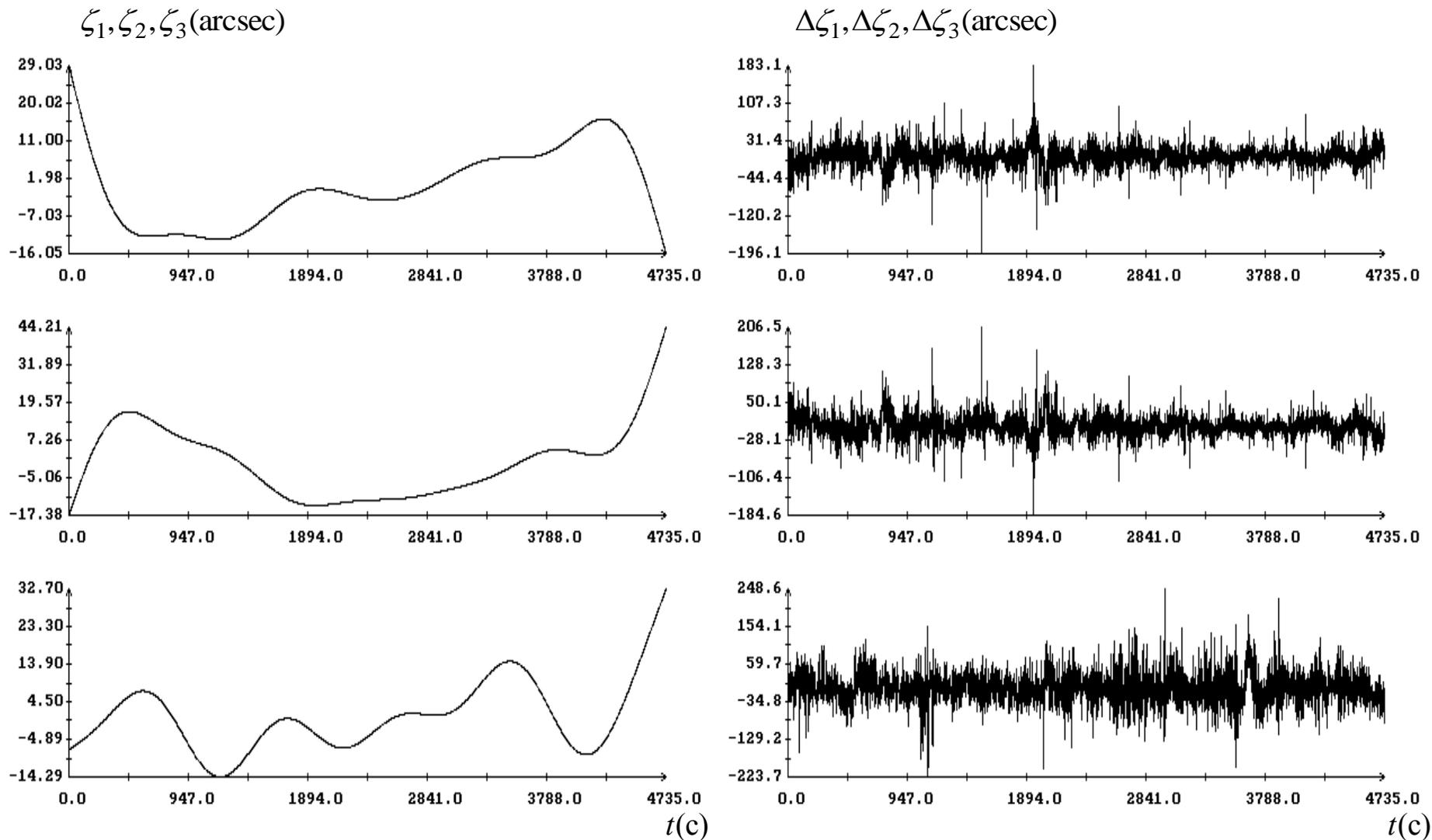


Рис. 10. Сглаживающие выражения $\zeta_l = 4s_l(t)$ для кватерниона Λ_{43} и последовательности $\Delta\zeta_{l,k} = \zeta_{l,k} - 4s_l(t_k)$ ($l=1, 2, 3$); $\text{RMS}(\Delta\zeta_1) = 21.2''$, $\text{RMS}(\Delta\zeta_2) = 22.8''$, $\text{RMS}(\Delta\zeta_3) = 39.2''$. Момент $t=0$ соответствует 2728269с полетного времени.

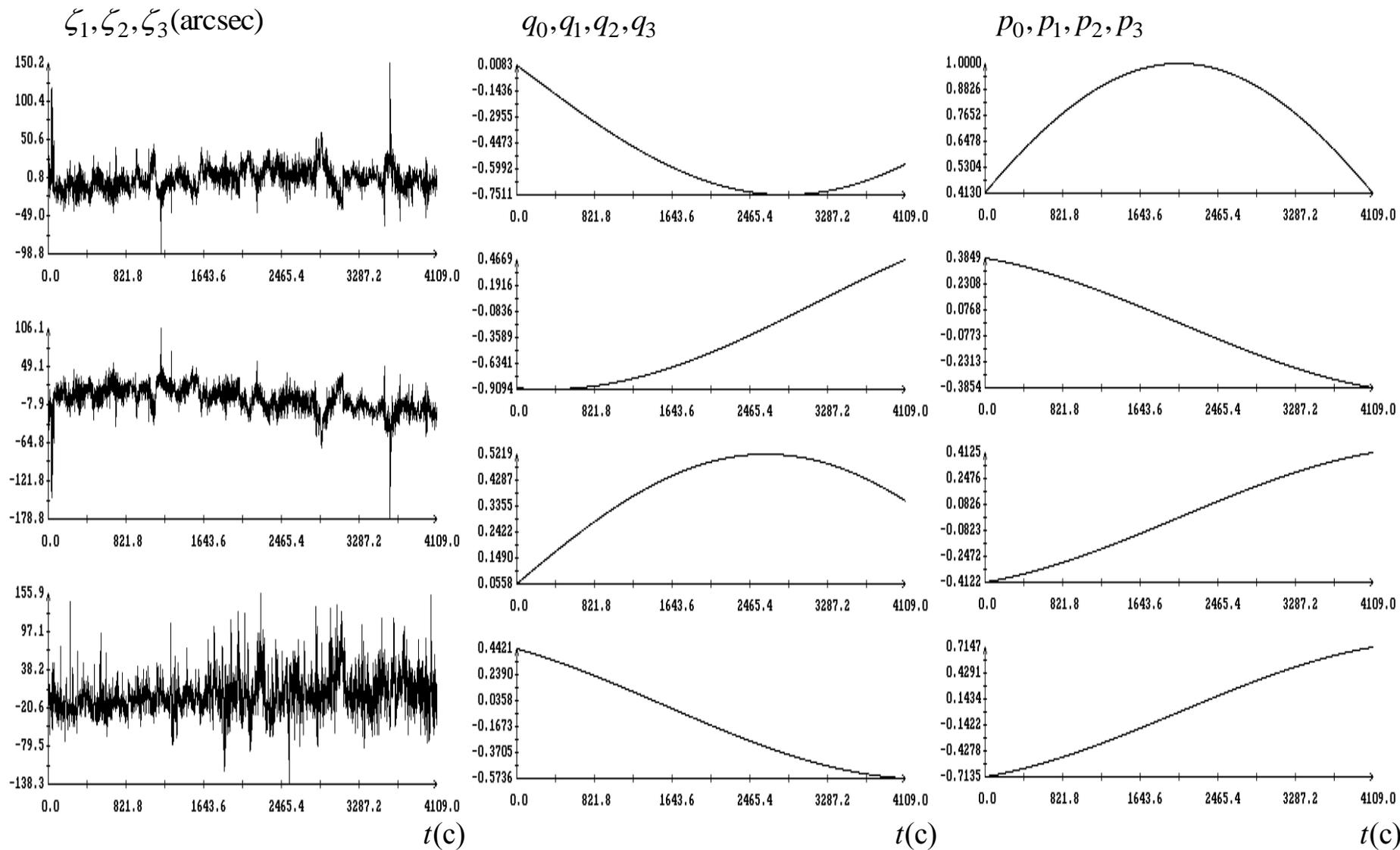


Рис. 11. Слева – отклонения одномоментных оценок кватерниона Λ_{21} от среднего значения; в центре – значения уточненного кватерниона $Q^{(1)}$; справа – значения кватерниона P .

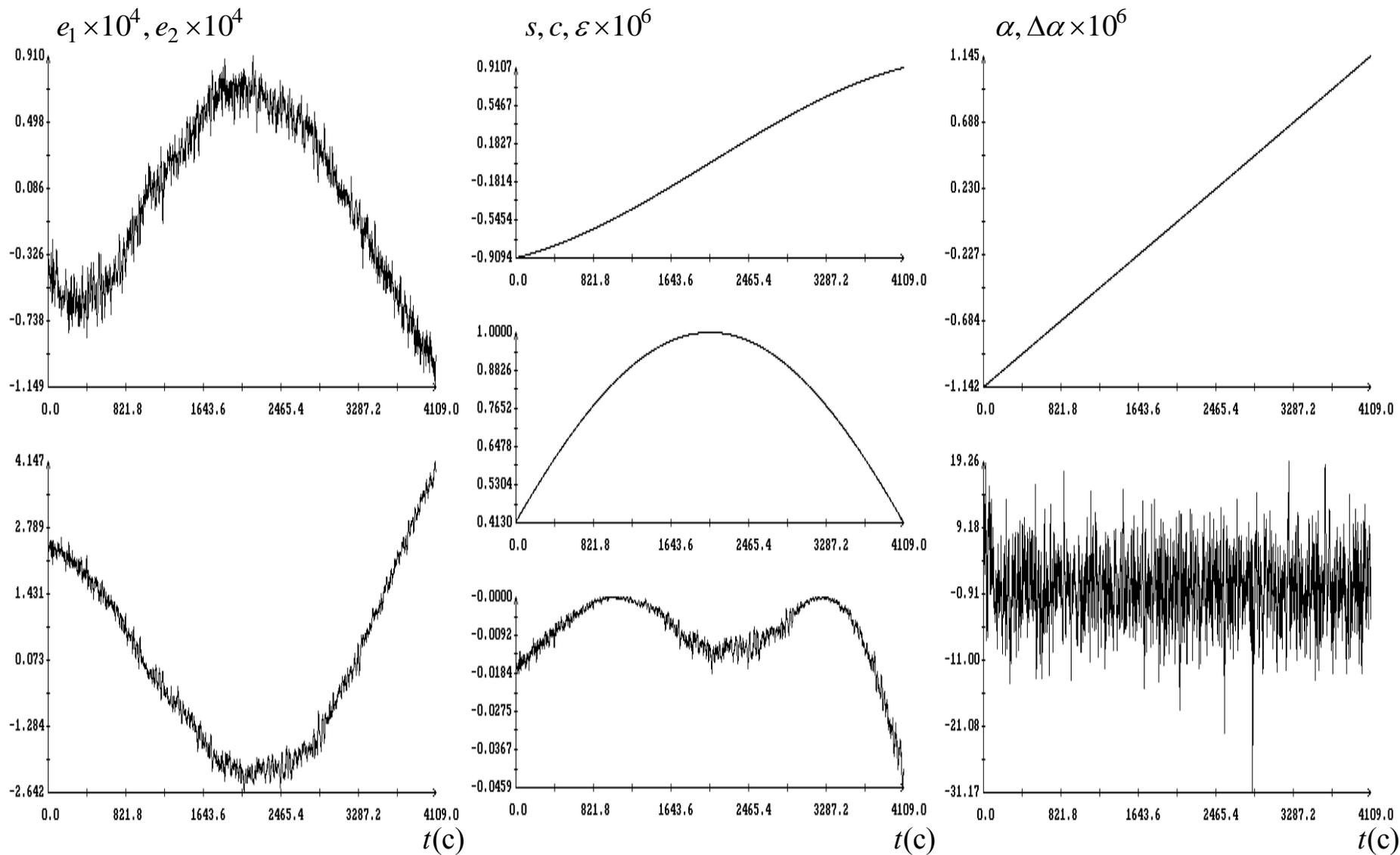


Рис. 12. Слева – графики остатков $e_1^{(k)}, e_2^{(k)}$; в центре – графики последовательностей s_k, c_k и ε_k ; справа – угол поворота КА и ошибка его аппроксимации.

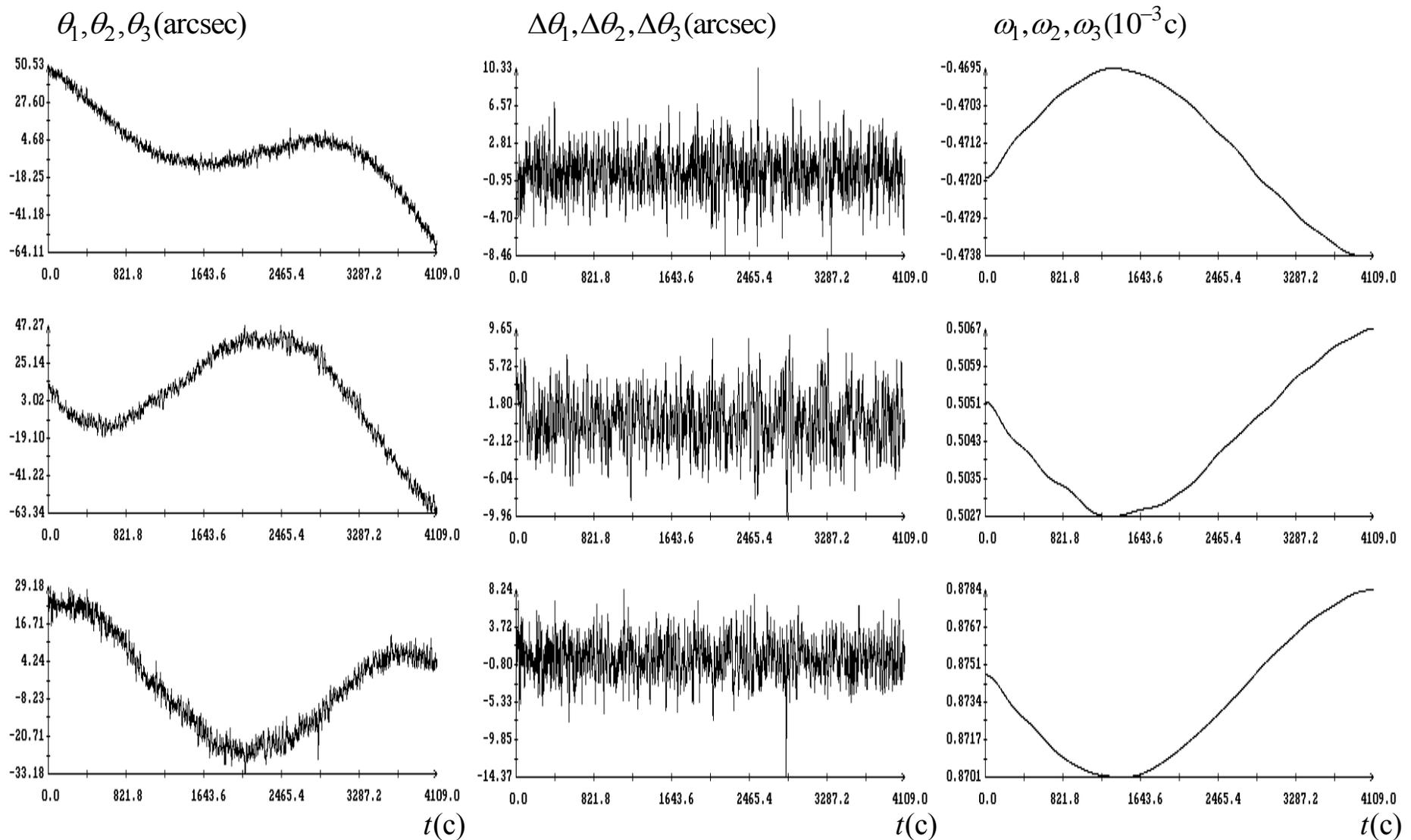


Рис. 13. Слева – отклонение движения КА от эйлера разворота; в центре – ошибка аппроксимации этого отклонения отрезком ряда Фурье $RMS(\Delta\theta_1) = 2.10''$, $RMS(\Delta\theta_2) = 2.68''$, $RMS(\Delta\theta_3) = 2.27''$; справа – оценка угловой скорости КА.

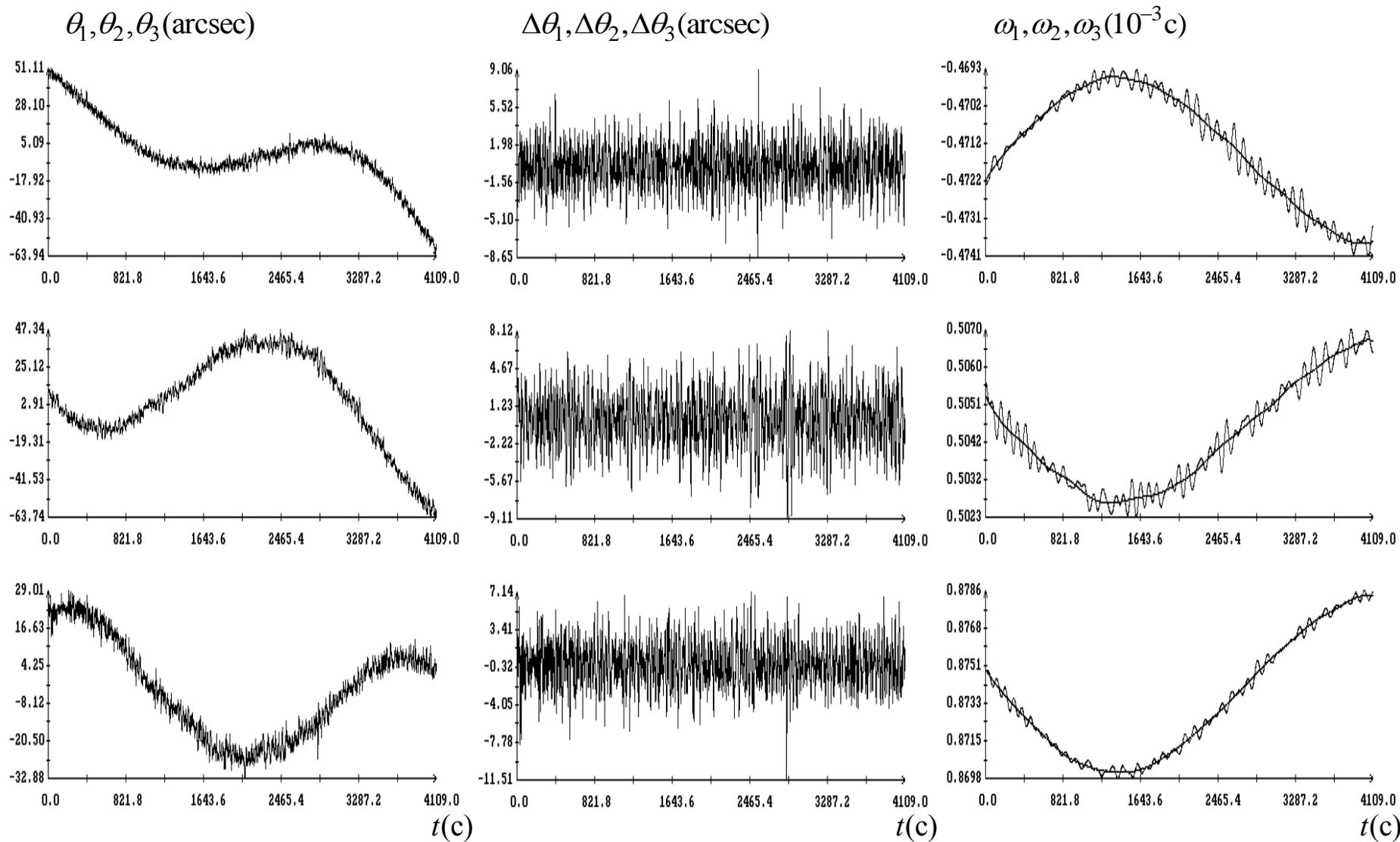


Рис. 14. Слева – отклонение движения КА от эйлера разворота; в центре – ошибка аппроксимации этого отклонения отрезком ряда Фурье $RMS(\Delta\theta_1) = 1.95''$, $RMS(\Delta\theta_2) = 2.44''$, $RMS(\Delta\theta_3) = 2.10''$; справа – оценка угловой скорости КА.

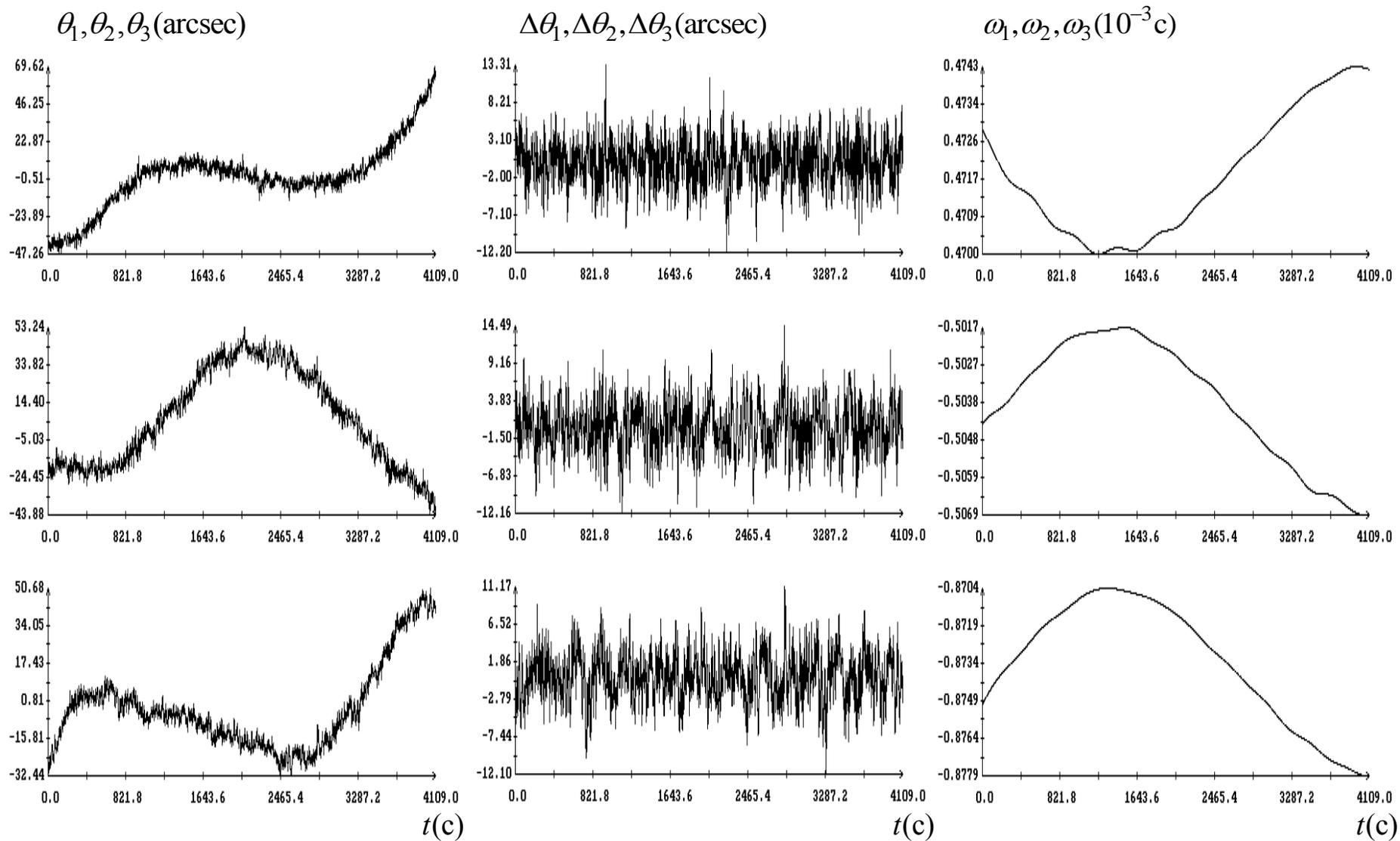


Рис. 15. Датчики 3, 4. Слева – отклонение движения КА от эйлера разворота; в центре – ошибка аппроксимации этого отклонения отрезком ряда Фурье $RMS(\Delta\theta_1) = 2.82''$, $RMS(\Delta\theta_2) = 3.37''$, $RMS(\Delta\theta_3) = 2.91''$; справа – оценка угловой скорости КА.

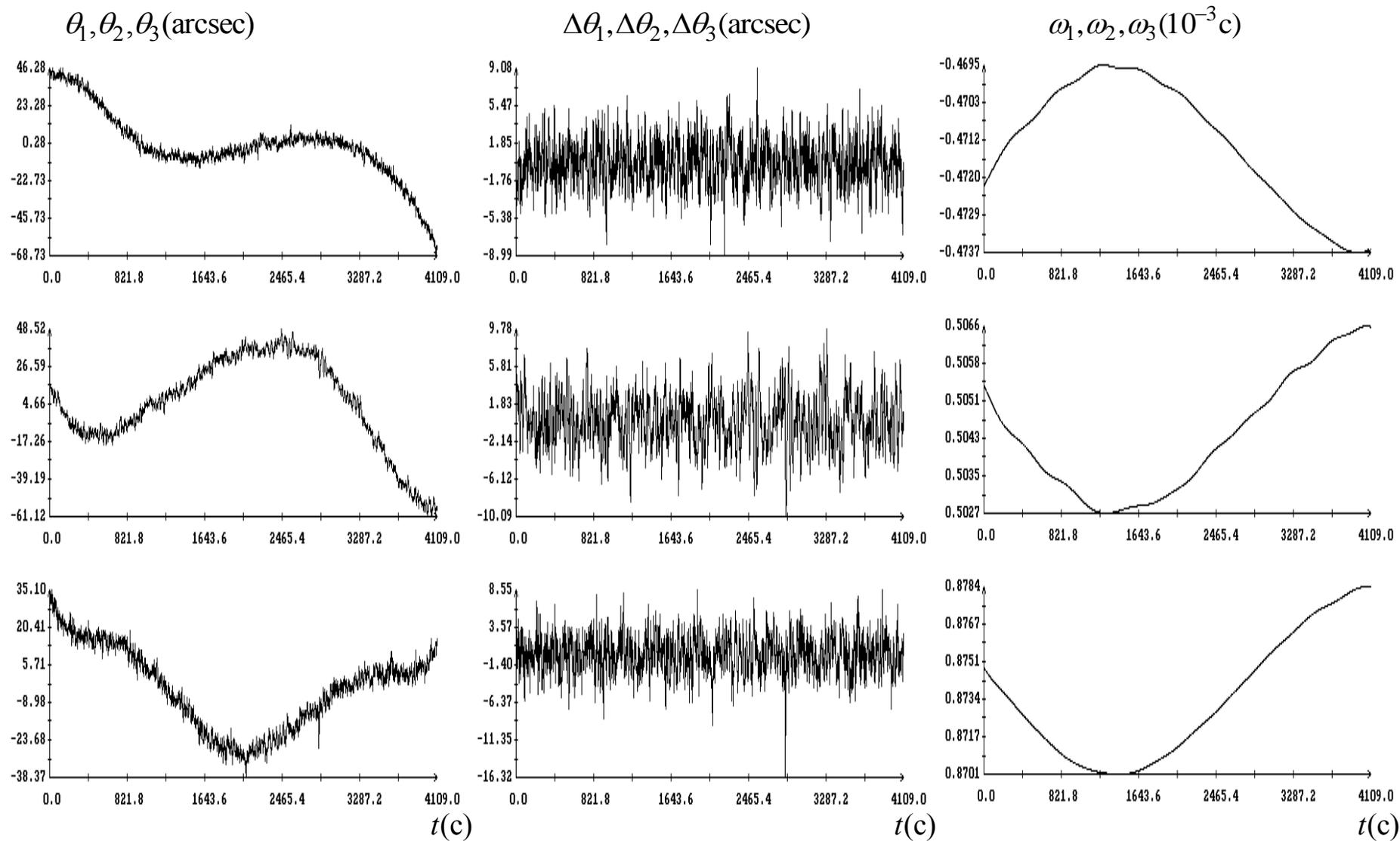


Рис. 16. Датчики 1,2, 3, 4. Слева – отклонение движения КА от эйлера разворота; в центре – ошибка аппроксимации этого отклонения отрезком ряда Фурье $RMS(\Delta\theta_1) = 2.15''$, $RMS(\Delta\theta_2) = 2.73''$, $RMS(\Delta\theta_3) = 2.44''$; справа – оценка угловой скорости КА.

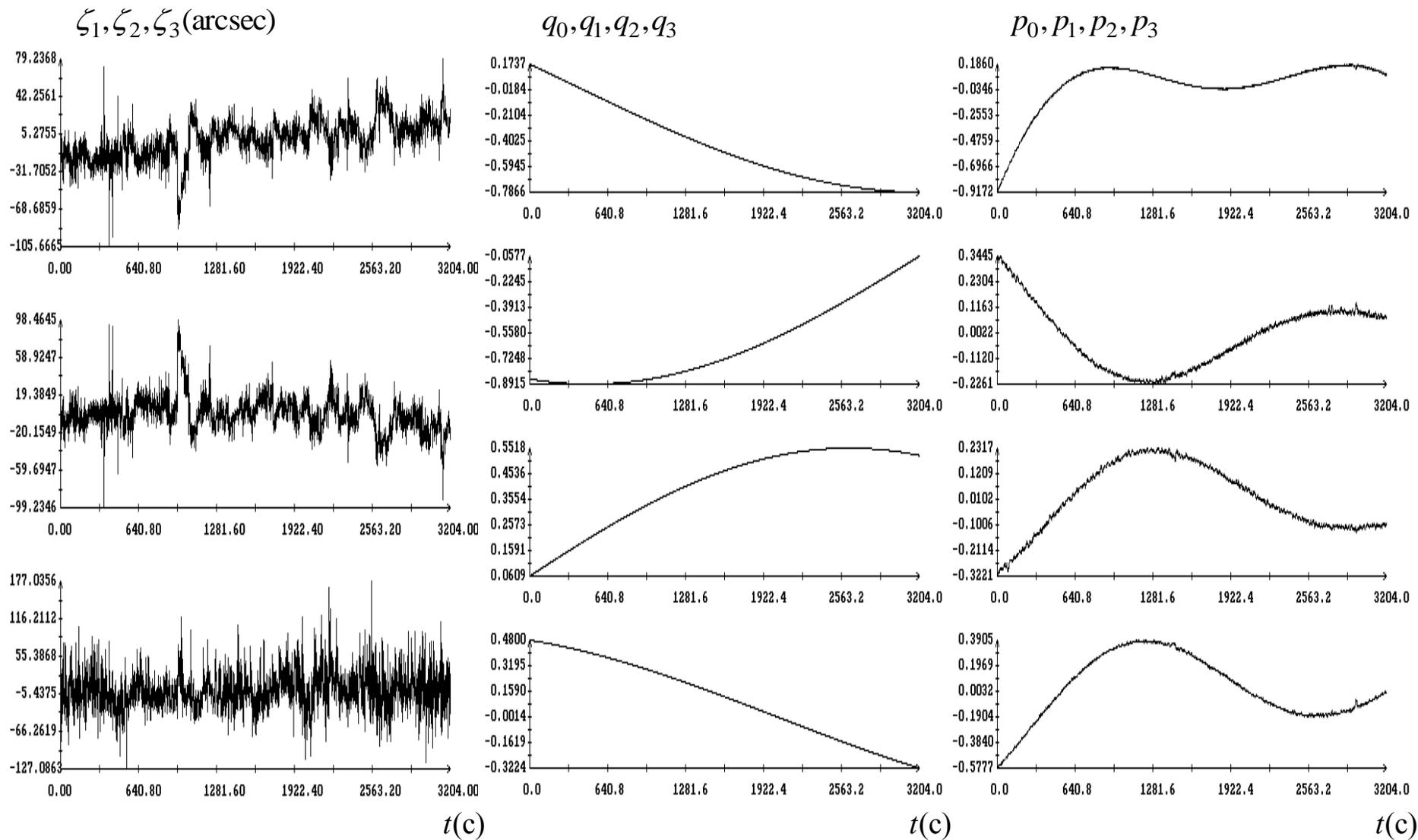


Рис. 17. Слева – отклонения одномоментных оценок кватерниона Λ_{21} от среднего значения; в центре – значения уточненного кватерниона $\mathbf{Q}^{(1)}$; справа – значения кватерниона \mathbf{P} . Момент $t=0$ соответствует 2729800 с полетного времени.

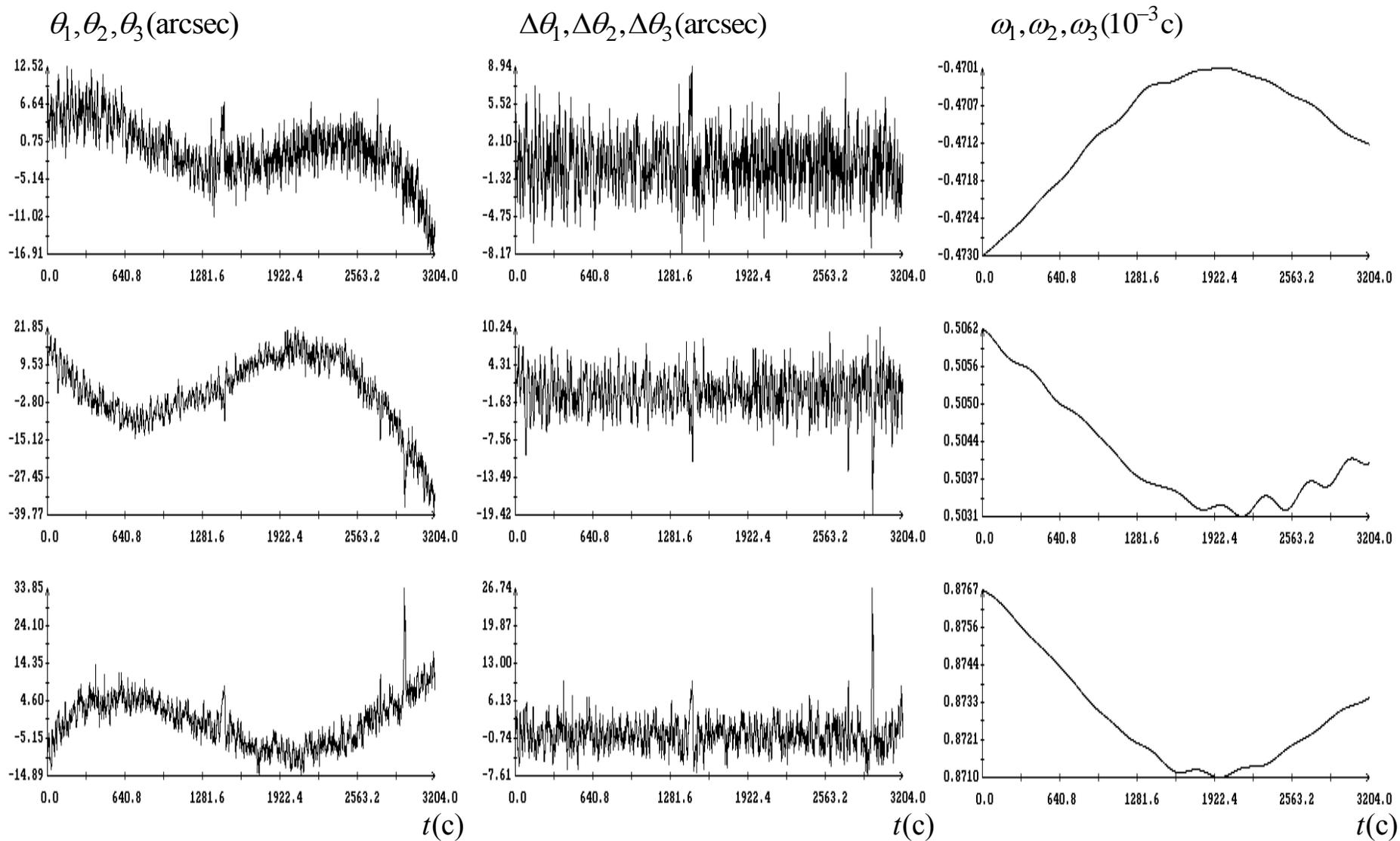


Рис. 18. Датчики 1, 2. Слева – отклонение движения КА от эйлера разворота; в центре – ошибка аппроксимации этого отклонения отрезком ряда Фурье $RMS(\Delta\theta_1) = 2.38''$, $RMS(\Delta\theta_2) = 3.13''$, $RMS(\Delta\theta_3) = 3.57''$; справа – оценка угловой скорости КА.

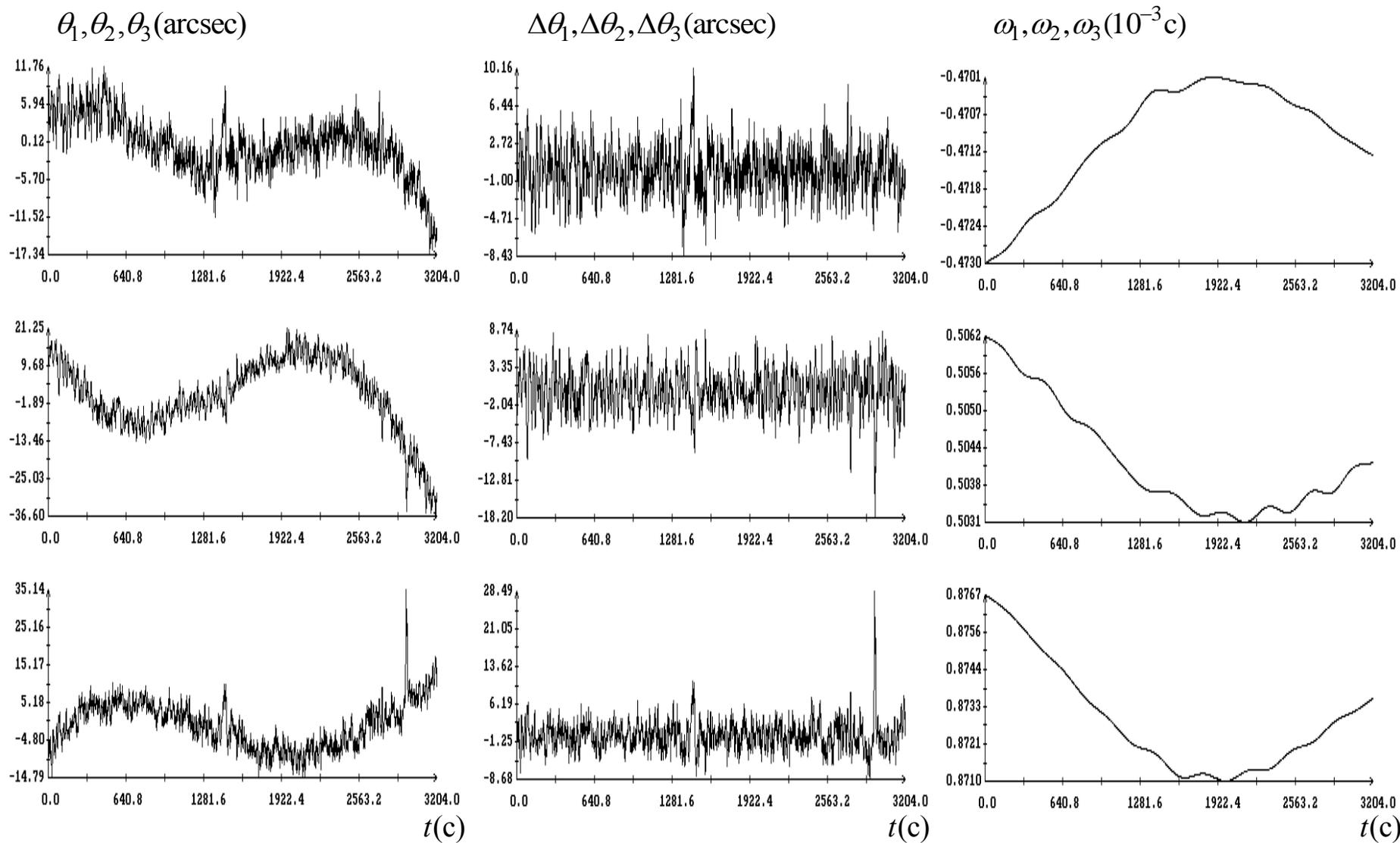


Рис. 19. Датчики 1, 2, 3, 4. Слева – отклонение движения КА от эйлера разворота; в центре – ошибка аппроксимации этого отклонения отрезком ряда Фурье $RMS(\Delta\theta_1) = 2.23''$, $RMS(\Delta\theta_2) = 2.98''$, $RMS(\Delta\theta_3) = 2.93''$; справа – оценка угловой скорости КА.