ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 109 за 2014 г.

Страховская Л.Г.

Численная модель охлаждающегося гравитирующего газового диска

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Страховская Л.Г. Численная модель охлаждающегося гравитирующего газового диска // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2014. № 109. 16 с. URL: http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2014-109

О р д е н а Л е н и н а
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М.В. Келдыша
Р о с с и й с к о й а к а д е м и и н а у к

Л.Г. Страховская

Численная модель охлаждающегося гравитирующего газового диска

Москва — 2014

Страховская Л.Г.

Численная модель охлаждающегося гравитирующего газового диска

Исследуется эволюция газового облака, вращающегося вокруг гравитирующего центра. Изучается влияние самогравитации и охлаждения диска на формирование его конфигурации. Влияние гравитации центрального объекта и самогравитации приводит к интенсивному сжатию облака, росту плотности и температуры. Из-за роста температуры растет давление, которое противодействует сжатию, и плотность постепенно снижается. Включение простого закона охлаждения понижает температуру, плотность убывает медленнее. Возникает возможность фрагментации диска.

Ключевые слова: газовый диск, самогравитация, фрагментация, охлаждение

Liudmila Glebovna Strakhovskaya

Numerical model of the cooling gravitating gas disk

Evolution of the gas cloud, rotating around the gravitating center, is investigated. The influence of self-gravitation and cooling of disk on the formation of its configuration is studied. The influence of gravity of central object and self-gravitation leads to the intensive compression of cloud, an increase in the density and temperature. Because of an increase in the temperature the pressure, which counteracts compression, grows, and density gradually is reduced. The calculation of the simple law of cooling reduces temperature, density decreases less. The possibility of the disk fragmentation appears.

Key words: gas disk, self-gravitation, fragmentation, cooling

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект 12-01-00071

Оглавление

Введение

Проблема эволюции протопланетного облака является актуальной для задач современной теоретической астрофизики. В настоящее время существует две основные концепции образования планет из газопылевого облака: модель аккреции на ядро (модель Шмидта-Сафронова 1969) и гравитационная неустойчивость (Лаплас 1796, Джинс 1902, Кемерон 1978).

Основной недостаток первой модели состоит в том, что процесс образования зародышей планет идет слишком долго. За это время газовое облако должно рассеяться. У второй модели нет проблемы временного масштаба, но не удается объяснить, каким образом сжимающееся вещество, которое при сжатии разогревается, успевает остыть. И обе модели пока не объясняют главной проблемы — причины перераспределения углового момента между Солнцем и планетами. Но последние открытия планетных орбит на очень больших расстояниях от центральной звезды (Kalas 2008), где время охлаждения достаточно короткое, подтвердили возможность образования планет благодаря гравитационной неустойчивости.

Настоящая работа является продолжением работ [1,2]. Численно исследуется влияние гравитации и охлаждения на формирование конфигурации протопланетного диска и дальнейшей его эволюции.

Рассматривается система, состоящая из гравитирующего центра и вращающегося вокруг него газового облака без учета пылевых частиц, масса которых по последним данным не превышает нескольких процентов от массы облака. Гравитирующий центр представляет собой компактный объект, в качестве которого могут выступать нейтронные звезды, черные дыры, новые звезды, белые карлики и протозвезды.

В [1] рассматривались и тестировались, в основном, аналитические равновесные решения системы уравнений газовой динамики, известные для политропного газа в случае отсутствия самогравитации. Было показано, что в используемой постановке задачи эти решения являются квазистационарными.

В работе [2] использовались различные неравновесные начальные распределения плотности и вращательной скорости. В процессе эволюции газовое облако сжималось, наблюдалась фрагментация, но росли температура и давление, вследствие чего падала плотность, фрагменты сливались, и формировалась типичная цилиндрически симметричная квазистационарная конфигурация диска. Во всех случаях вращательная скорость становилась близкой к кеплеровской. Образовывалась более плотная область (субдиск) в центральном сечении диска.

Под влиянием самогравитации процесс сжатия шел интенсивнее, значения плотности были более высокими. Диск становился более устойчивым и плотным в малой окрестности центрального сечения ($z=0$).

Чтобы не падала плотность, надо понижать температуру диска. В данной работе исследуется влияние простого закона охлаждения на эволюцию газового облака.

1. Постановка задачи

Численная модель диска описывается 3D нестационарными уравнениями газовой динамики в переменных Эйлера в цилиндрической системе координат $r,\ \varphi,\ z$ с началом координат в гравитирующем центре, и уравнением Пуассона для гравитационного потенциала диска. Область расчета Ω: $r_1 \le r \le r_2,\quad 0 \le \varphi \le 2\pi,\quad -h \le z \le h$ находится между двумя коаксиальными цилиндрами, малой высоты по сравнению с внешним радиусом. В симметричном случае рассматривается половина высоты диска. Суммарная удельная сила, действующая на элементарный объем газа в диске, состоит из силы упругости, центробежной силы, силы гравитации центрального объекта, силы гравитации самого диска и объемного излучения.

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho ur)}{r\partial r} + \frac{\partial(\rho v)}{r\partial\varphi} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} = 0 \tag{1.1}$$

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u^2 r + pr)}{r\partial r} + \frac{\partial(\rho uv)}{r\partial\varphi} + \frac{\partial(\rho uw)}{\partial z} = \frac{\rho v^2}{r} + \frac{p}{r} + \rho(\frac{\partial\Phi}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial r}(\frac{G\cdot M_s}{R})) \tag{1.2}$$

$$\frac{\partial(\rho v)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho vur)}{r\partial r} + \frac{\partial(\rho v^2 + p)}{r\partial\varphi} + \frac{\partial(\rho vw)}{\partial z} = -\frac{\rho vu}{r} + \rho\frac{\partial\Phi}{r\partial\varphi} \tag{1.3}$$

$$\frac{\partial(\rho w)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho wur)}{r\partial r} + \frac{\partial(\rho wv)}{r\partial\varphi} + \frac{\partial(\rho w^2 + p)}{\partial z} = \rho(\frac{\partial\Phi}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial z}(\frac{G\cdot M_s}{R})) \tag{1.4}$$

$$\frac{\partial e}{\partial t} + \frac{\partial(e+p)ur}{r\partial r} + \frac{\partial(e+p)v}{r\partial\varphi} + \frac{\partial(e+p)w}{\partial z} = \rho\mathbf{v}\cdot(\nabla\Phi + \nabla(\frac{G\cdot M_s}{R})) - Q_{cool} \tag{1.5}$$

Здесь r - радиус, φ - полярный угол, z - ось вращения, ρ - плотность газа, p - давление, ε - внутренняя энергия единицы массы газа. $e = \rho(\varepsilon + \frac{\mathbf{v}^2}{2})$ — полная энергия (сумма внутренней и кинетической) единицы объема газа, $\mathbf{v} = (u, v, w)$ - вектор скорости, $\mathbf{v}^2 = u^2 + v^2 + w^2$. Φ - гравитационный потенциал диска, G - постоянная гравитации, M_s - масса центрального гравитирующего объекта, $\Phi_s = G\cdot M_s / R$ — соответствующий гравитационный потенциал, а $R = \sqrt{r^2 + z^2}$. Для замыкания системы используется уравнение состояния идеального газа

$$p = (\gamma\text{-}1)\rho\varepsilon\ . \tag{1.6}$$

Гравитационный потенциал диска удовлетворяет уравнению Пуассона, которое в цилиндрических координатах имеет вид:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial \Phi}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \phi^2}+\frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2}=-4\pi G\rho \tag{1.7}$$

Величина Q_{cool} описывает охлаждение диска. В расчетах были использованы два простых закона охлаждения;

$$Q_{cool}=\frac{p\omega}{\beta(\gamma-1)},$$

использующийся в [3] , подробное описание его будет дано в главе 4, и закон

$$Q_{cool}=Q_0\rho^q f(T),$$

аналогичный закону для излучающей плазмы, предложенный в [4].

Система (1.1-1.5) представляет точную дивергентную форму уравнений газовой динамики в цилиндрических координатах в поле собственного тяготения диска Φ и поле тяготения центрального объекта Φ_s.

Переход к безразмерным переменным осуществляется для удобства вычислений на ЭВМ. В качестве основных масштабных единиц выберем величины M_s, G, R_0, где R_0 — характерный пространственный размер задачи. Введем безразмерные переменные, помеченные штрихом, согласно формулам:

$$\begin{array}{lll} r=R_0 r', & t=t_0 t', & \mathbf{v}=v_0\mathbf{v}', \\ \rho=\rho_0\rho', & p=p_0 p', & e=e_0 e', \\ \Phi=\Phi_0\Phi', & \omega=\omega_0\omega', & \varepsilon=\varepsilon_0\varepsilon', \end{array}$$

здесь $\omega = v/r$ — угловая частота вращения. Выбираются масштабные единицы:

$$\begin{array}{llll} v_0^2=\dfrac{GM_s}{R_0}, & t_0^2=\dfrac{R_0^3}{GM_s}, & \rho_0=\dfrac{M_s}{4\pi R_0^3}, & p_0=\dfrac{GM_s^2}{4\pi R_0^4} \\ \varepsilon_0=\dfrac{GM_s}{R_0}, & \Phi_0=\dfrac{GM_s}{R_0}, & \omega_0^2=\dfrac{GM_s}{R_0^3}, & e_0=\dfrac{GM_s^2}{4\pi R_0^4}. \end{array}$$

Для солнечной системы, например, в системе CGS:

$$\begin{array}{llll} v_0=5.42\cdot 10^5, & t_0=8.34\cdot 10^8, & \rho_0=1.7\cdot 10^{-12}, & p_0=0.503 \\ \varepsilon_0=2.94\cdot 10^{11}, & \Phi_0=2.94\cdot 10^{11}, & \omega_0=1.2\cdot 10^{-9}, & e_0=0.503, \end{array}$$

где $M_s=1.989\cdot 10^{33}\,г,\quad G=6.67\cdot 10^{-8}\,см^3/г\cdot сек^2,\quad R_0=4.52\cdot 10^{14}\,см.$

В безразмерных переменных вид уравнений газовой динамики не меняется, изменяется только выражение для гравитационного потенциала звезды $\Phi_s=\dfrac{1}{R}$ и правая часть в уравнении Пуассона:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\varphi^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}=-\rho .$$

Здесь опущен штрих в обозначении безразмерных переменных, так как в дальнейшем будем использовать только их.

2. Методы решения

Уравнения газовой динамики решаются методом конечных объемов по схеме Годунова. Расчет потоков ведется с использованием программы расчета плоского распада разрыва методом касательных Ньютона, который по скорости сходимости является итерационным процессом второго порядка. Система уравнений (1.1-1.5) дополняется граничными условиями первого и второго рода: при $r=r_1$ — жесткое условие $u=0,\ \frac{\partial}{\partial r}(\rho,v,w,p)=0$,

при $z=0$ — условие симметрии $w=0,\ \frac{\partial}{\partial z}(\rho,u,v,p)=0$, если рассматривается половина диска; на внешней границе

при $r=r_2$, $z=h$, $z=-h$ ставятся свободные краевые условия

$$\frac{\partial}{\partial r}(\rho,u,v,w,p)=0, \qquad \frac{\partial}{\partial z}(\rho,u,v,w,p)=0.$$

Для гравитационного потенциала при $r=r_1$ значение Φ в каждой точке P вычисляется через интеграл Пуассона, который дает точное решение уравнения (1.7)

$$\Phi(P)=\frac{1}{4\pi}\iiint\frac{\rho(Q)}{\overline{PQ}}dV,\quad Q\in\Omega,\quad P\in\partial\Omega, \tag{1.8}$$

при $z=0$ ставится условие симметрии, на остальной внешней поверхности $\partial\Phi/\partial n=0$,

Гравитационный потенциал Φ внутри области находится численным решением уравнения (1.7), так как вычисление Φ во всей области по формуле (1.8) очень дорогая операция. Используется многосеточный метод Федоренко (Multigrid) с 2-4 вложенными сетками. Выбор начальных данных обсуждается ниже.

В области Ω: $r_1\le r\le r_2,\ 0\le\varphi\le 2\pi,\ 0\le z\le h$ вводится ортогональная, быть может, неравномерная сетка с шагами $h_r,\ h_\varphi,\ h_z$. Задается начальное распределение плотности $\rho(r,\varphi,z)$ и вращательной скорости $v(r,\varphi,z)$. Давление рассчитывается по формуле Менделеева-Клапейрона $p = \rho T R/\mu$ или по формуле политропного газа $p = k\rho^\gamma$, то есть надо задать либо температуру T, либо коэффициент k. Начальные значения $u=0,\ w=0$, коэффициент $\gamma=1.43$.

3. Гравитационная неустойчивость и охлаждение

В рассматриваемой модели на частицу действует четыре силы. Сила тяготения центрального объекта $\rho\nabla\Phi_s = \rho\nabla(1/R)$, которая всегда направлена к центру диска, и сила собственного тяготения диска $\rho\nabla\Phi$ сжимают газовое облако. Этим силам противодействуют сила упругости $-\nabla p$ и центробежная сила $\rho v^2 / r$, они стремятся рассеять газ. От взаимодействия этих сил, зависит конфигурация и эволюция диска. Одна из моделей образования планет в протопланетном диске основана на теории гравитационной неустойчивости.

Гравитационная неустойчивость — это развитие возмущений плотности и скорости среды под действием сил тяготения (гравитационных возмущений). Идея о гравитационной нестабильности однородной среды была высказана Ньютоном в 1692. Разработку теории гравитационной неустойчивости начал Джеймс Джинс в 1902. Он проанализировал линеаризованную систему уравнений газодинамики, описывающую рост малых возмущений плотности с учетом сил гравитации, и показал, что изначально однородная среда с плотностью ρ_0 неустойчива по отношению к малым линейным возмущениям плотности с характерным масштабом возмущений, превышающим критическое значение $\lambda_J \approx c_s\sqrt{\frac{\pi}{G\rho_0}}$, где c_s - скорость звука в среде. Величина λ_J называется длиной волны Джинса, она отделяет область устойчивости от области неустойчивости. В областях, размер которых ниже критического, где преобладают негравитационные силы (силы рассеивания), возмущения плотности релаксируют — это область устойчивости**.** В областях, размер которых выше критического, где преобладают силы гравитации, возмущения усиливаются, образуются области повышенной плотности. Джинсовская длина волны уменьшается и может начаться фрагментация газового облака, если масса облака превышает массу Джинса, массу, заключенную в объеме радиуса λ_J. Это еще один параметр, от которого зависит фрагментация облака: $M_J \sim \rho\lambda_J^3 \sim T^{3/2}\rho^{-1/2}$. Таким образом, сжатие и фрагментация газового облака зависят от размеров, плотности и температуры.

Две важные величины также используются для определения наступит ли фрагментация диска: параметр устойчивости (Toomre 1964) и скорость охлаждения (Gammie 2001).

Параметр устойчивости $Q_T = \frac{c_s\kappa_{ep}}{\pi G\Sigma}$ зависит от скорости звука c_s, эпициклической частоты κ_{ep}, которая для Кеплеровского диска равна угловой частоте ω, и поверхностной плотности Σ. Чтобы диск начал фрагментировать, нужно, чтобы $Q_T < 1$ [5].

Охлаждение диска должно при этом идти с достаточно высокой скоростью. Gammie (2001) параметризовал временную шкалу охлаждения как $\beta = t_{cool}\omega$, где $t_{cool} = \varepsilon(de_{cool}/dt)^{-1}$, здесь ε — внутренняя энергия, а de_{cool}/dt - скорость охлаждения. (Rice, Lodato & Armitage 2005) показали [6], что β зависит от уравнения состояния. Для диска с $\gamma = 7/5$ фрагментация возможна, если $\beta \le 13$.

В работе [3] используется простой закон охлаждения, опирающийся на вышеприведенные данные. В уравнение энергии (1.5) вводится охлаждение

$$Q_{cool} = \frac{p\omega}{\beta(\gamma-1)} \tag{3.1}$$

Этой формулой мы будем пользоваться в наших расчетах. Для сравнения будем использовать один из видов формулы, предложенной в [4]:

$$Q_{cool} = Q_0\rho^2\varepsilon^2 \tag{3.2}$$

Влияние охлаждения, описываемое формулой (3.1), назовем первой моделью охлаждения, а формулой (3.2) — второй моделью охлаждения.

4. Первая модель охлаждения

Будет рассматриваться цилиндрически симметричный случай. Например, модель протопланетных колец предполагает образование кольцевой структуры при фрагментации первоначального протопланетного диска. Начальное, довольно произвольное, распределение плотности в диске было предложено в [2] для изучения влияния самогравитации. Здесь рассматривается полный диск.

В области Ω: $0.1 \le r \le 1.4,\ 0 \le \varphi \le 2\pi,\ -0.2 \le z \le 0.2$ задается плотность $\rho(r,z) = (0.897r^2 - 0.179r - 1.99)(13.3z^2 - 1)$ в виде произведения двух парабол, скорость вращения $v = 0.8r / R^{3/2}$, где $R = \sqrt{r^2 + z^2}$, и давление $p = k\rho^{\gamma}$. $\gamma = 1.43$ и $k = 0.0106$, которое соответствует температуре $95^{\circ} K$. Внутренняя энергия находится из уравнения состояния $\varepsilon = p/(\gamma-1)\rho$, начальные скорости $u = w = 0$. Масса диска $M_d = 0.41$, сетка $100 \times 8 \times 32$.

С этими начальными данными и краевыми условиями из главы 2 рассчитывается динамика диска без влияния самогравитации и охлаждения.

На рис. 1 изображены значения плотности на моменты времени $t = 0,\ 0.6,\ 1.66$, масса диска равна соответственно $M_d = 0.41,\ 0.612,\ 0.074$. Под влиянием гравитации Φ_s растет плотность, масса диска, температура, и давление. На рис. 2 изображен рост температуры и давления в центральном узле. Под действием давления газ вытекает. Этот расчет назовем базовым.

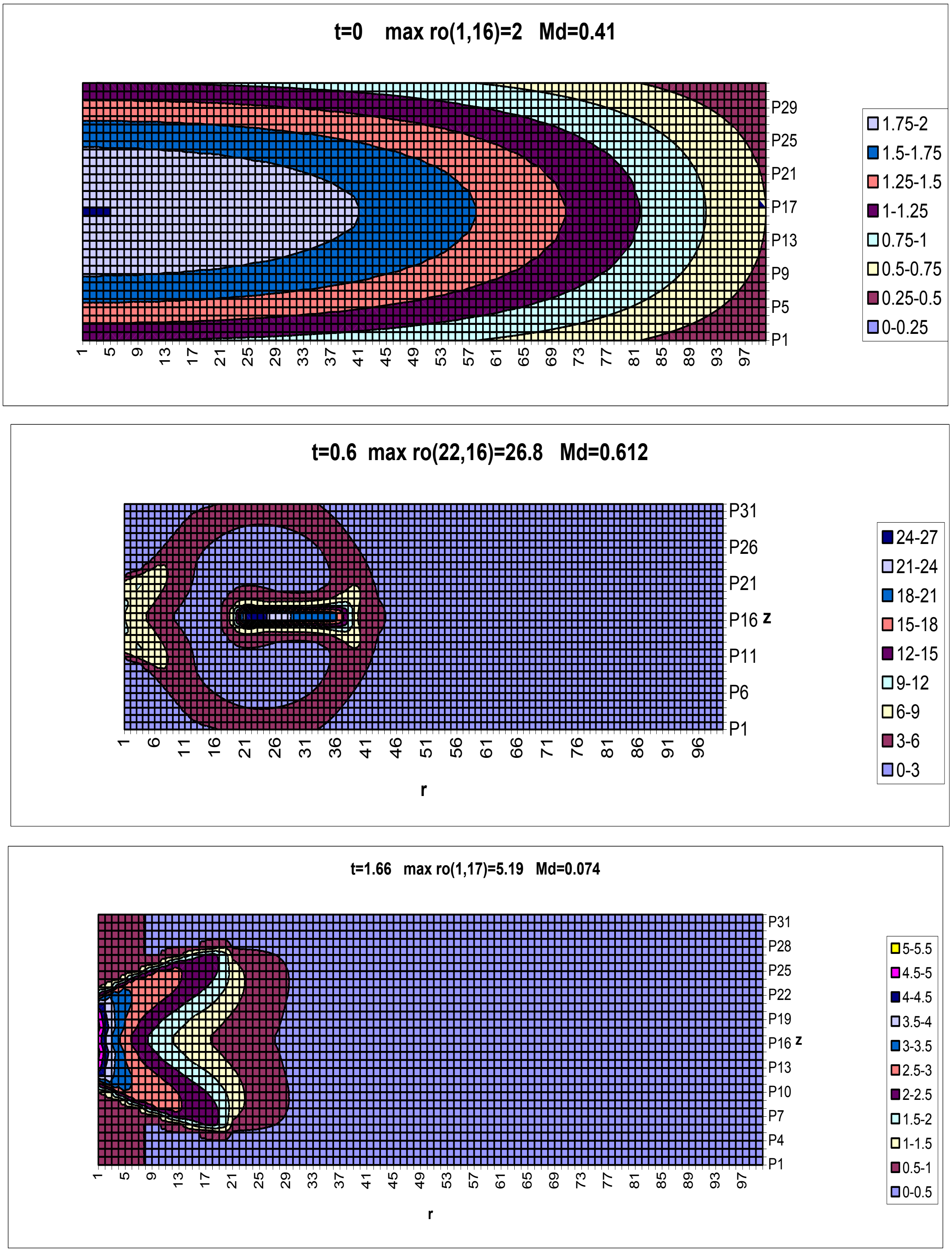


Рис. 1. Значения плотности $\rho(r,z)$ в сечении $\varphi = const$ на 3 момента времени $t = 0,\ 0.6,\ 1.66$.

Приведем примеры нескольких расчетов динамики этого диска с включением охлаждения и самогравитации.

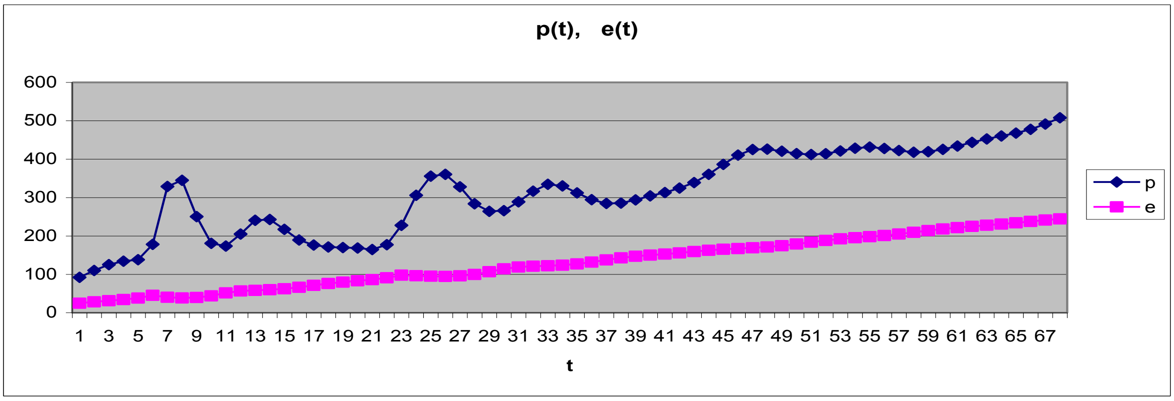


Рис. 2. Рост давления $p(t)$ и внутренней энергии $\varepsilon(t)$ (на рисунке обозначена $e(t)$) в центральном узле (1,16), $0.45 < t < 1.66$.

Пример 1. Включается охлаждение по формуле (3.1). Коэффициент $\beta = 2$, сетка $100 \times 8 \times 32$.

На рис. 3 изображены значения плотности $\rho(r,z)$ и внутренней энергии $\varepsilon(r,z)$ на 2 момента времени $t = 0.6,\ 1.1$, масса диска равна соответственно $M_d = 0.65,\ 0.53$. Плотность растет быстрее, чем в базовом расчете, но температура растет в 3 раза медленнее, тем не менее, газ вытекает.

Пример 2. Включена самогравитация и охлаждение по формуле (3.1), но $\beta = 10$. Сетка $100 \times 16 \times 32$.

На рис. 4 изображены значения плотности $\rho(r,z)$, внутренней энергии $\varepsilon(r,z)$ и давления $p(r,z)$ на момент времени $t = 0.6$. Образовалось два фрагмента с одинаковой максимальной плотностью, в базовом варианте – один фрагмент, и температура стала в 20 раз ниже.

5. Вторая модель охлаждения

Приведем три примера расчета динамики диска с включением охлаждения по второй формуле $Q_{cool} = Q_0 \rho^2 \varepsilon^2$ (3.2)

Пример 3. Начальное распределение берется таким же, как базовое распределение примера 1, включается самогравитация и охлаждение по формуле (3.2). Коэффициент $Q_0 = 1.4$, сетка $100 \times 16 \times 32$.

На рис. 5 изображены значения плотности $\rho(r,z)$ и внутренней энергии $\varepsilon(r,z)$ на момент времени $t = 0.595$, масса диска $M_d = 0.585$. Газ сжался по z к центральной плоскости до двух ячеек, образовалось 3 локальных максимума $\rho(1,16) = 1010$, $\rho(14,16) = 17.3$, $\rho(42,16) = 16.6$, то есть три тонких плотных кольца. На рис. 6 изображена динамика внутренней энергии $\varepsilon(t)$ и давления $p(t)$ в центральном узле $(1,\varphi,16)$. Температура упала, давление растет медленно.

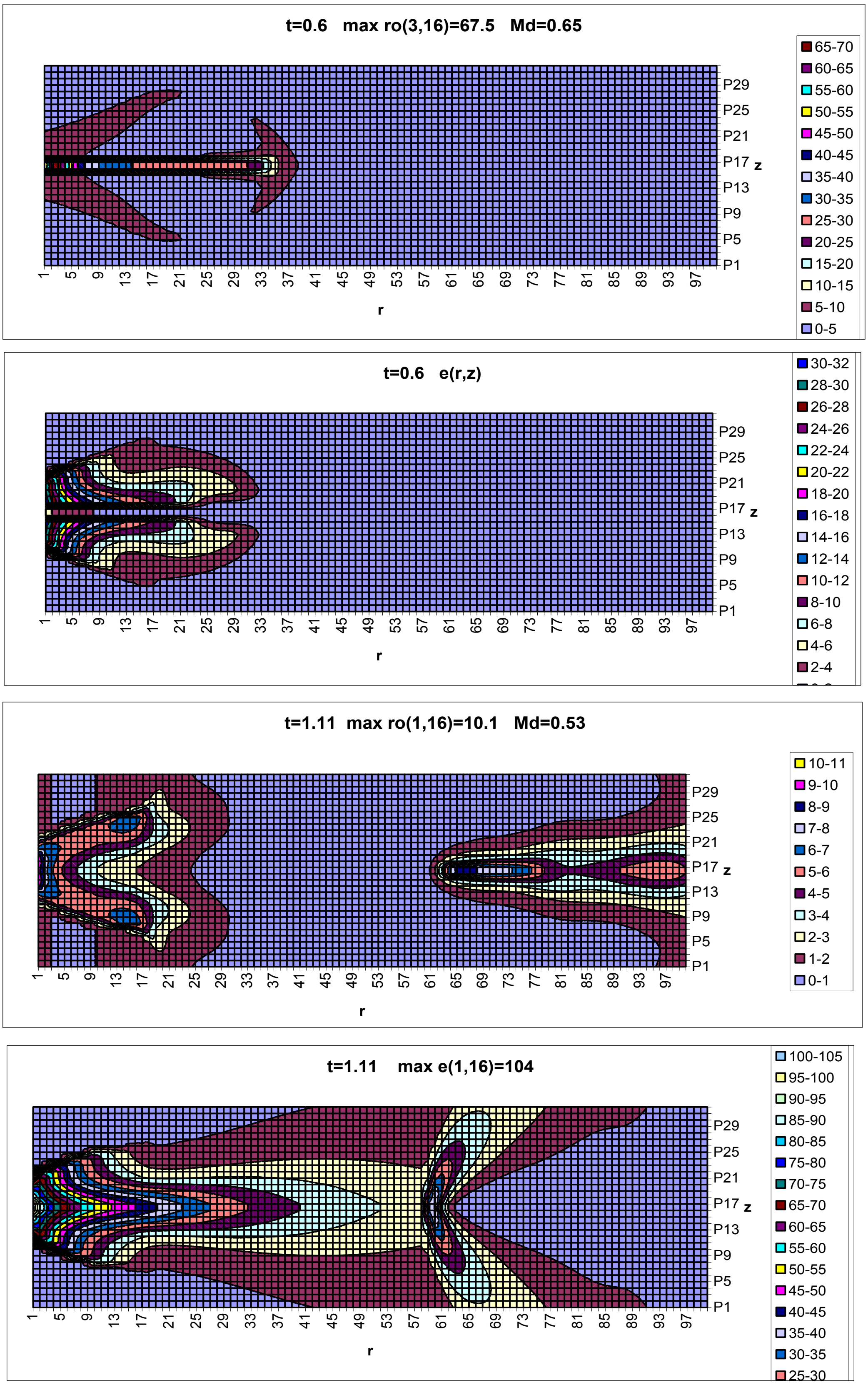


Рис. 3. Значения плотности $\rho(r,z)$ и внутренней энергии $\varepsilon(r,z)$ примера 1, включено охлаждение (3.1), $\beta = 2$.

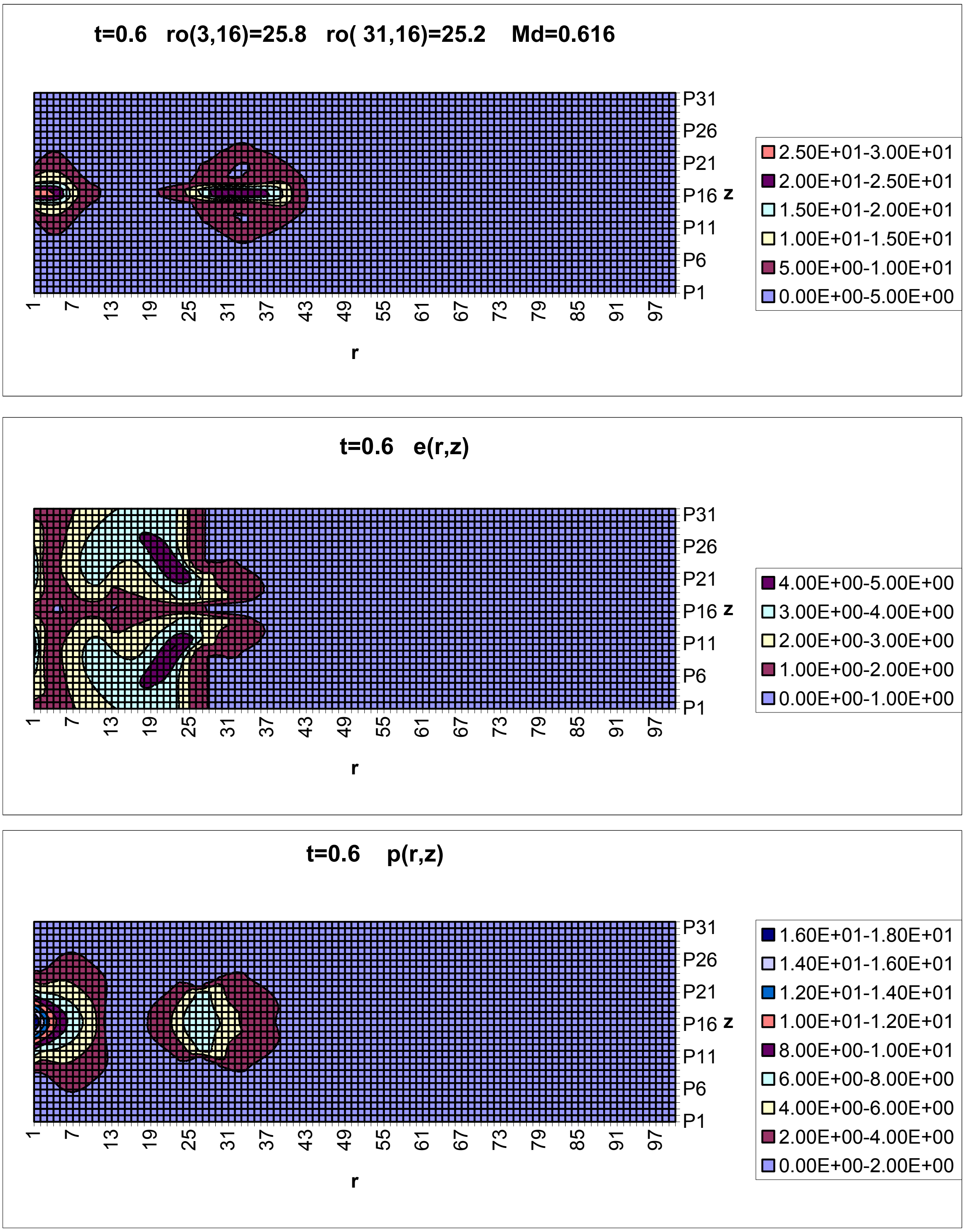


Рис. 4. Расчет примера 2 с самогравитацией и охлаждением, $\beta = 10$. Изображены $\rho(r,z)$, $\varepsilon(r,z)$ и $p(r,z)$, $t = 0.6$. Образовалось два фрагмента.

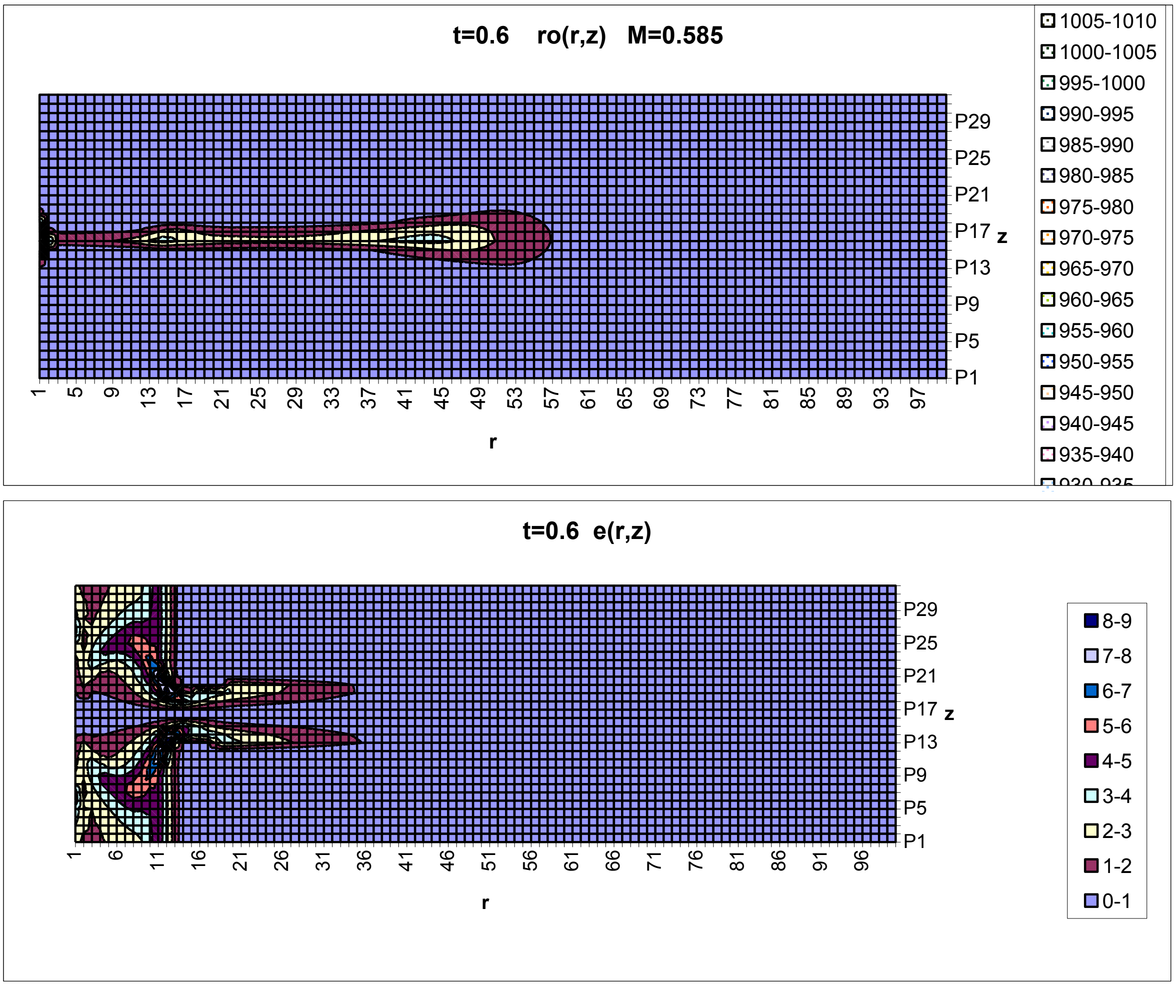


Рис. 5. Расчет примера 3 с самогравитацией и охлаждением, $Q_0 = 1.4$, изображены $\rho(r,z)$ и $\varepsilon(r,z)$ в момент $t = 0.6$. Образовалось три кольца.

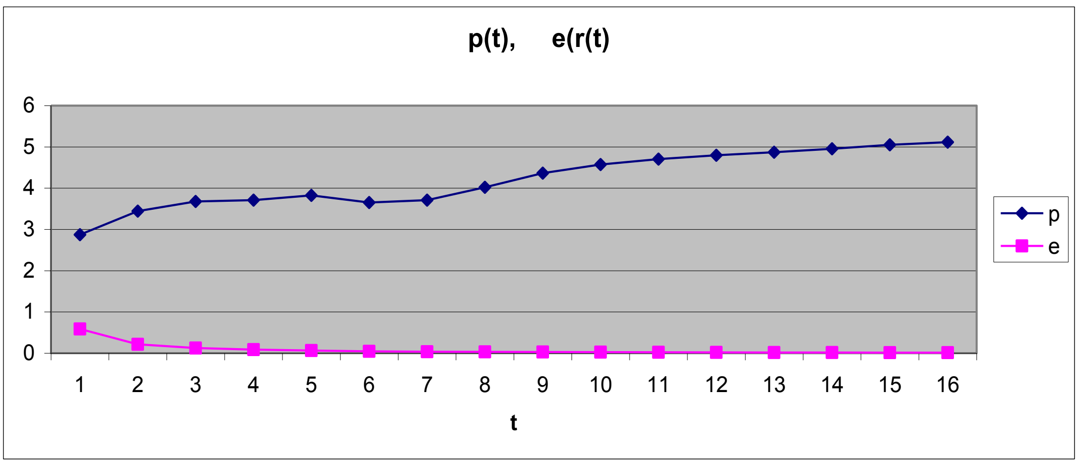


Рис. 6. Давление $p(t)$ и внутренняя энергия $\varepsilon(t)$ (на рисунке обозначена $e(t)$) в центральной точке (1,16), $0.08 \le t \le 0.595$, пример 3

Приведем два примера расчета динамики диска меньшей массы.

Пример 4. В области Ω: $0.1 \le r \le 1.4$, $0 \le \varphi \le 2\pi$, $-0.2 \le z \le 0.2$ начальное распределение плотности берется также в виде произведения двух парабол $\rho(r,z) = (1.17r^2 - 0.233r - 1.99)(25.3z^2 - 1)$, остальные начальные данные как в первой базовой модели, сетка $100 \times 16 \times 32$. Учитывается самогравитация и охлаждение по формуле (3.2), коэффициент $Q_0 = 0.0025$. $M_d = 0.2738$.

На рис. 7 изображены значения плотности $\rho(r,z)$, внутренней энергии $\varepsilon(r,z)$ и давления $p(r,z)$ на момент времени $t = 0.62$. Образовалось два фрагмента с максимальной плотностью $\rho(r,z) = 11.6$ и $\rho(r,z) = 13.6$, $M_d = 0.297$.

Пример 5. Начальные данные как в примере 4. Учитывается самогравитация и охлаждение по формуле (3.2), но коэффициент $Q_0 = 0.25$ в сто раз больше.

На рис. 8 изображены значения плотности $\rho(r,z)$, внутренней энергии $\varepsilon(r,z)$ и давления $p(r,z)$ на момент времени $t = 0.62$. Образовалось два фрагмента с максимальной плотностью $\rho(r,z) = 27.8$ и $\rho(r,z) = 14.3$, $M_d = 0.297$.

Заключение

Как первая, так и вторая модель охлаждения понижают температуру диска. Первая модель слабее, вторая более жестко. Плотность в области низкой температуры растет интенсивнее, охлаждение усиливает проявление гравитационной неустойчивости и ускоряет фрагментацию диска.

Библиографический список

1. Страховская Л.Г. Модель эволюции самогравитирующего газового диска // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2012. № 80. 24 с.
URL: http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2012-80

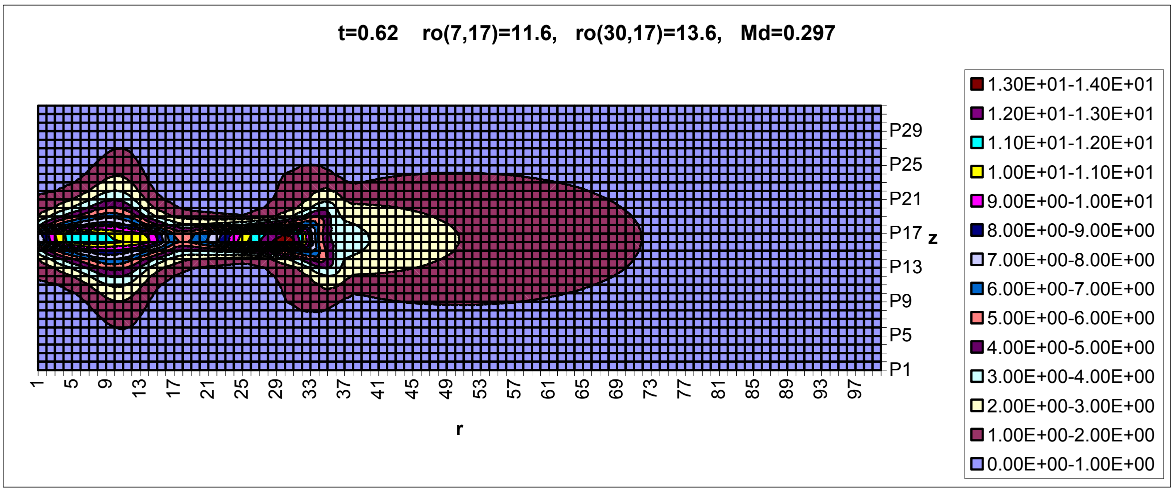
2. Страховская Л.Г. Роль гравитации в формировании околозвездного газового диска // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2013. № 82. 24 с.
URL: http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2013-82

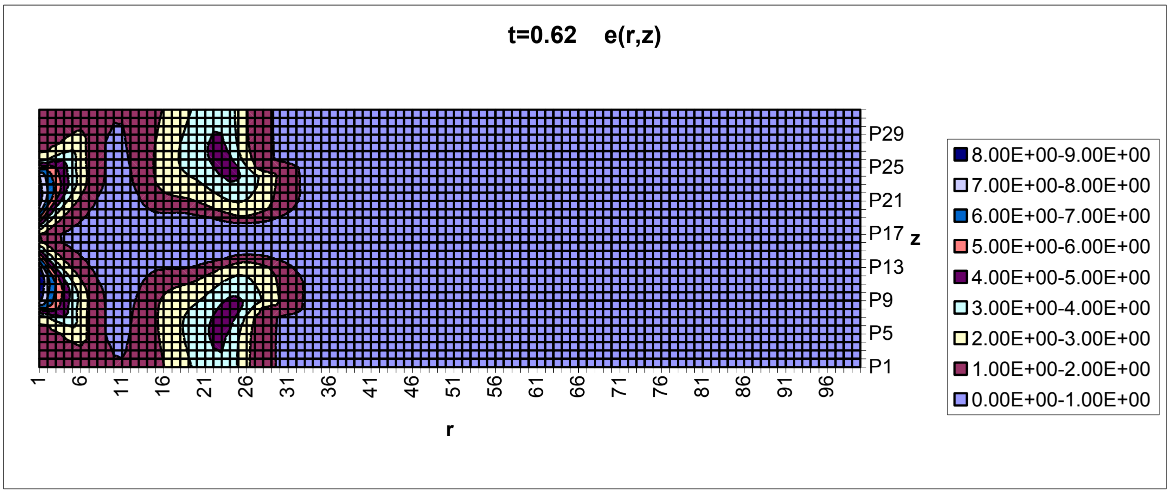
3. Paardekooper S.-J., Numerical convergence in self-gravitating shearing sheet simulation and the stochastic nature of disc fragmentation. 2012, arXiv:1201.3371vl [astro-ph.EP]

4. Имшенник В.С., Боброва Н.А. Динамика столкновительной плазмы. М.: Энергоатомиздат, 1997. С. 320

5. Поляченко В.Л., Поляченко Е.В., Стрельников А.В. Критерий устойчивости газовых самогравитирующих дисков. ПАЖ. 1997, т.23, с. 551-560.

6. Rise W. K. M., Lodato G., Armitage P. J., Investigating fragmentation conditions in self-gravitating accretion discs. 2005, MNRAS, 364, L56.





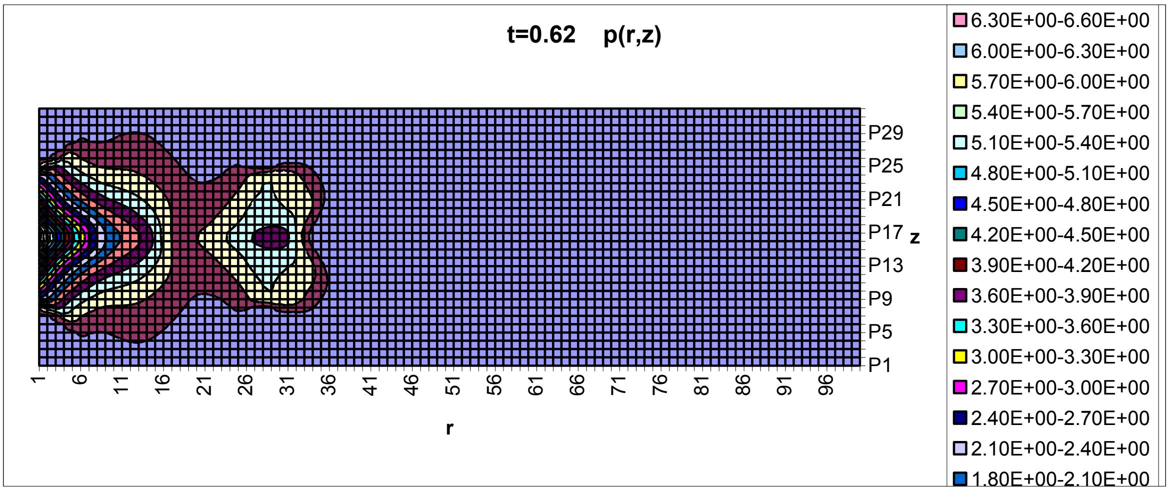


Рис. 7. Расчет примера 4 с самогравитацией и охлаждением, $Q_0 = 0.0025$. изображены $\rho(r,z)$, $\varepsilon(r,z)$ и $p(r,z)$, образовалось два фрагмента.

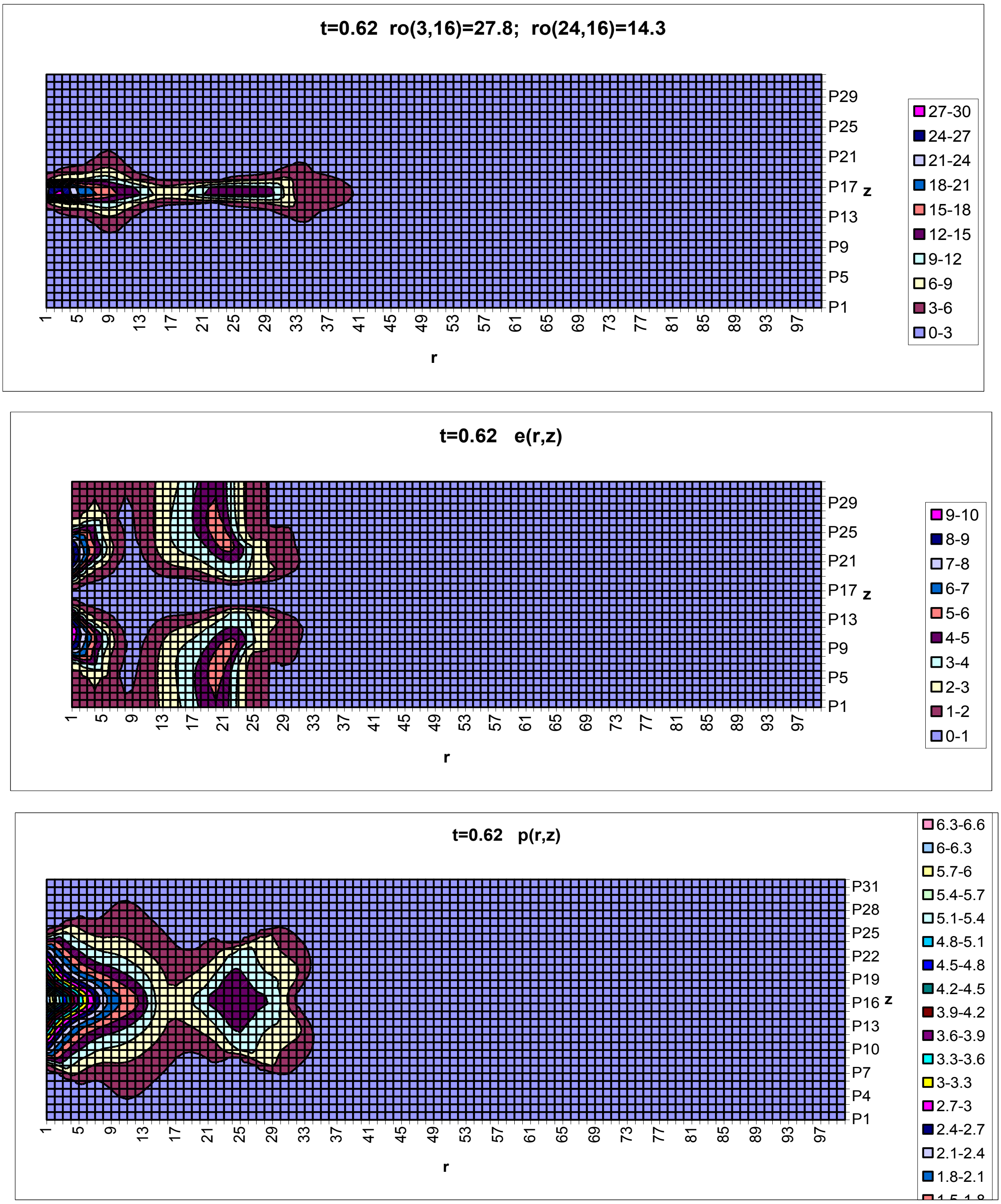


Рис. 8. Расчет примера 5 с самогравитацией и охлаждением, $Q_0 = 0.25$. изображены $\rho(r,z)$, $\varepsilon(r,z)$ и $p(r,z)$, образовалось два фрагмента, плотность в два раза выше, чем в примере 4.