



Абалакин И.В., Горобец А.В.,
Жданова Н.С., Козубская Т.К.

Применение метода
Бринкмана штрафных
функций для численного
моделирования обтекания
препятствий вязким
сжимаемым газом

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Применение метода Бринкмана штрафных функций для численного моделирования обтекания препятствий вязким сжимаемым газом / И.В.Абалакин [и др.] // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2014. № 11. 14 с. URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2014-11>

**Ордена Ленина
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М.В.Келдыша
Российской академии наук**

**И.В. Абалакин, А.В. Горобец,
Н.С. Жданова, Т.К. Козубская**

**Применение метода Бринкмана
штрафных функций для численного
моделирования обтекания препятствий
вязким сжимаемым газом**

Москва — 2014

Абалакин И.В., Горобец А.В., Жданова Н.С., Козубская Т.К.

Применение метода Бринкмана штрафных функций для численного моделирования обтекания препятствий вязким сжимаемым газом

Представлены результаты численных расчетов серии задач обтекания препятствий вязким сжимаемым газом. Для моделирования влияния твердого тела на течение использован один из вариантов метода погруженных граничных условий – метод Бринкмана штрафных функций.

Ключевые слова: аэродинамика, погруженные граничные условия, метод Бринкмана штрафных функций, вязкое сжимаемое течение

Ilya Vladimirovich Abalakin, Andrey Vladimirovich Gorobets, Natalya Sergeevna Zhdanova, Tatiana Konstantinovna Kozubskaya

Using Brinkman penalization method for numerical simulation viscous compressible flows over obstacles

The results of numerical simulation of viscous compressible flows over obstacles are considered. To imitate the influence of solid body on flow properties we use the Brinkman Penalization method.

Key words: aerodynamics, immersed boundary conditions, Brinkman-penalization method, viscous compressible flow

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект 12-01-00486.

Оглавление

| | |
|------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| Введение | 3 |
| Математическая модель | 4 |
| Метод Бринкмана штрафных функций | 5 |
| Методика численного расчета | 6 |
| Верификация метода и его реализации | 6 |
| Численное моделирование течения вокруг препятствий сложной геометрической формы | 11 |
| Заключение | 13 |
| Библиографический список | 14 |

Введение

Практически все задачи, характерные для авиационных приложений, связаны с исследованием течений вокруг твердых тел различной конфигурации. Большинство методов численного моделирования аэродинамического обтекания препятствий предполагает наличие расчетной сетки, в которой поверхность твердого тела отслеживается граничными сеточными узлами. Построение расчетной сетки может занимать время, сопоставимое со временем счета самой задачи, особенно в тех случаях, когда обтекаемое твердое тело имеет сложную геометрическую форму. Существенно критичными затраты на построение сеток могут быть в задачах, связанных с оптимизацией конфигурации обтекаемого твердого тела, т.е. когда необходимо в рамках одной задачи многократно изменять его геометрию. Проблема становится еще более острой при проведении расчетов обтекания подвижных препятствий. В этом случае обычно используются методы скользящих или деформирующихся сеток, где необходимо перестраивать сетку на каждом временном шаге.

Очевидно, что разработка методов моделирования, не требующих описания поверхности твердого тела с помощью расчетной сетки, является актуальным направлением исследований, нацеленных, в первую очередь, на расширение областей применения вычислительной газодинамики. Данному требованию удовлетворяют активно развиваемые и применяемые в последнее время методы погруженных граничных условий (Immersed Boundary Condition method, ИВС метод) [1]. В их основе лежит идея имитации влияния препятствия посредством добавления источников членов в систему уравнений, описывающую течение.

Термин “погруженные граничные условия” впервые определен Ч. Пескиным (C.Peskin). В его работе [2] предложен и реализован подход к моделированию потока крови вокруг сердечного клапана на декартовых сетках, не повторяющих геометрическую форму сердца. Влияние погруженных границ определялось специальной функцией в уравнениях, описывающих течение среды.

В процессе дальнейшего развития этой идеи сформировалось два базовых класса методов погруженных граничных условий. В первом классе моделирующие твердое тело источниковые члены добавляются в дифференциальные уравнения (методы штрафных функций), во втором – в их разностные аналоги (методы 'cut-cell', 'ghost-cell').

В работе рассмотрен метод, относящийся к первому классу, а именно, метод Бринкмана штрафных функций (Brinkman-penalization method) [3]. Представлены результаты его применения для численного моделирования задач аэродинамического обтекания препятствий вязкой сжимаемой жидкостью.

Достоверность представленных результатов оценивалась посредством сравнения с теоретически известными характеристиками течений и с результатами численного моделирования, проведенного “традиционным”

подходом, когда граница обтекаемого тела определяется узлами расчетной сетки (далее такой подход будем называть моделированием "реального" препятствия). Кроме того, проводилось сопоставление с работой [3], где для решения аналогичных задач также использовался метод Бринкмана штрафных функций и проводилось моделирование "реальных" препятствий (с помощью коммерческого пакета Fluent). Все сравниваемые между собой результаты получены с использованием расчетных сеток сопоставимого размера.

Математическая модель

Рассмотрим задачу аэродинамического обтекания препятствия произвольной геометрической формы (рис. 1). Течение вокруг твердого тела Ω_{obst} будем описывать системой уравнений Навье-Стокса для вязкой сжимаемой среды с начальными условиями и соотношениями на границе $\partial\Omega_{obst}$:

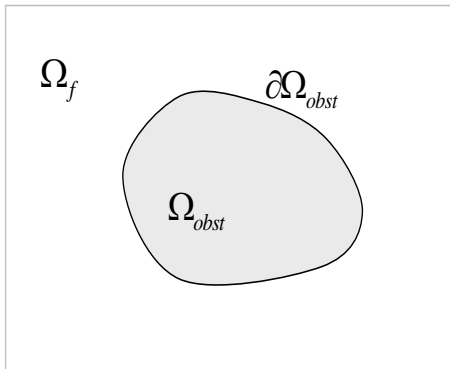


Рис. 1. Геометрия задачи обтекания препятствия

$$\begin{cases} \partial_t \mathbf{Q} + \nabla \mathbf{F}(\mathbf{Q}) = \frac{1}{\text{Re}} \nabla \mathbf{F}_v(\mathbf{Q}), & (\mathbf{x}, t) \in \Omega_f, \\ \mathbf{Q}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{Q}_0(\mathbf{x}) \end{cases}, \quad (1)$$

где $\mathbf{Q} = (\rho, \rho u, \rho v, \rho w, E)$ – вектор безразмерных консервативных переменных, ρ – плотность газа, u, v, w – компоненты скорости, E – полная энергия. Система замыкается уравнением состояния идеального газа:

$$p = (\gamma - 1) \rho \varepsilon,$$

где ε – внутренняя энергия, $\gamma = 1.4$ – показатель адиабаты, а полная энергия определяется соотношением:

$$E = \rho \varepsilon + \frac{\rho(u^2 + v^2 + w^2)}{2}.$$

На поверхности твердого тела поле скоростей удовлетворяет условиям прилипания:

$$u = v = w = 0, \quad \mathbf{x} \in \partial\Omega_{obst}.$$

Для температуры задается граничное условие Дирихле, т.е. температура на поверхности препятствия постоянна и равна T_{obst} :

$$T = T_{obst}, \quad \mathbf{x} \in \partial\Omega_{obst}.$$

Метод Бринкмана штрафных функций

Для того чтобы смоделировать препятствие методом Бринкмана штрафных функций, в уравнения импульса и энергии системы уравнений Навье-Стокса добавляются источники члены S_η (штрафные функции), которые должны обеспечить выполнение граничных условий на его поверхности. В результате система уравнений Навье-Стокса заменяется на модифицированную систему уравнений вида:

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t \mathbf{Q}_\eta + \Delta \mathbf{F}(\mathbf{Q}_\eta) + S_\eta = \frac{1}{\text{Re}} \nabla \mathbf{F}_v(\mathbf{Q}_\eta), \quad (\mathbf{x}, t) \in \Omega_f \cup \bar{\Omega}_{obst} \\ S_\eta = \frac{1}{\eta} \chi \begin{pmatrix} 0 \\ \rho_\eta u_\eta \\ \rho_\eta v_\eta \\ \rho_\eta w_\eta \\ E_\eta - E_{\Omega_0} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Q}_\eta(t=0) = \mathbf{Q}_0(\mathbf{x}) \end{array} \right., \quad (2)$$

здесь \mathbf{Q}_η – вектор неизвестных переменных, χ – заданная характеристическая функция, определяющая геометрическое место обтекаемого тела:

$$\chi = \begin{cases} 1, & \mathbf{x} \in \bar{\Omega}_{obst} \\ 0, & \mathbf{x} \in \Omega_f \end{cases}.$$

Отметим, что в точках сетки, где характеристическая функция $\chi \neq 0$ (т.е. внутри препятствия), система (2) описывает модель Бринкмана пористой среды с параметром η , определяющим ее проницаемость (штрафной параметр, penalization parameter):

$$0 < \eta \ll 1.$$

Таким образом, твердое тело в рамках данного подхода ($\chi \neq 0$) рассматривается в приближении пористой среды с низкой проницаемостью. Очевидно, что чем меньше η , тем точнее воспроизводятся граничные условия при $\mathbf{x} \in \partial\Omega_{obst}$.

В работе [4] доказано, что при стремлении параметра η к нулю решение модифицированной системы (2) сходится к решению системы уравнений Навье-Стокса (1).

Описанный метод естественным образом обобщается на случай, когда препятствие состоит из нескольких частей, т.е. $\Omega_{obst} = \bigcup_{i=1}^N (\Omega_{obst})_i$.

Методика численного расчета

Представленный в предыдущем разделе метод реализован в рамках исследовательского комплекса программ NOISEtte¹ [5], при помощи которого проведены все представленные в работе расчеты.

Система уравнений (2) в безразмерном виде ($Re = 5 \times 10^4$) решалась численно во всей области, включая препятствие: $\Omega = \Omega_f \cup \bar{\Omega}_{obst}$. Для пространственной дискретизации применялась EBR (Edge-Based Reconstruction) схема повышенной точности для неструктурированных тетраэдральных сеток с определением переменных в узлах [6]. Повышенная точность схемы достигается за счет высокоточной квазиодномерной реконструкции переменных вдоль направления ребер сетки. В случае сверхзвуковых режимов течений использована WENO-версия EBR схемы [7].

Интегрирование по времени проводилось по неявной схеме 2-го порядка точности на основе линеаризации по Ньютону, для решения СЛАУ использован метод BiCGStab с предобуславливанием.

Верификация метода и его реализации

Точность воспроизведения граничных условий на поверхности твердого тела, моделируемого методом Бринкмана штрафных функций, подробно исследовалась для задачи взаимодействия ударной волны и цилиндра в двумерной постановке [3]. Схема расчетной области представлена на рис. 2. Ударная волна ($M = 3$) движется слева вдоль оси X и набегаёт на цилиндр радиуса $r = 0.2$.

За фронтом ударной волны в начальный момент времени заданы величины:

$$(\rho, u, v, p)_f^1 \Big|_{t=0} = (1, 0, 0, 1/\gamma),$$

перед фронтом соответствующие значения $(\rho, u, v, p)_f^2 \Big|_{t=0}$ определяются соотношениями Гюгонио, внутри цилиндра –

$$(\rho, u, v, T)_{obst} \Big|_{t=0} = (1, 0, 0, 0.5714).$$

¹ Код NOISEtte разрабатывается в Секторе вычислительной аэроакустики Института прикладной математики им. М.В.Келдыша РАН.

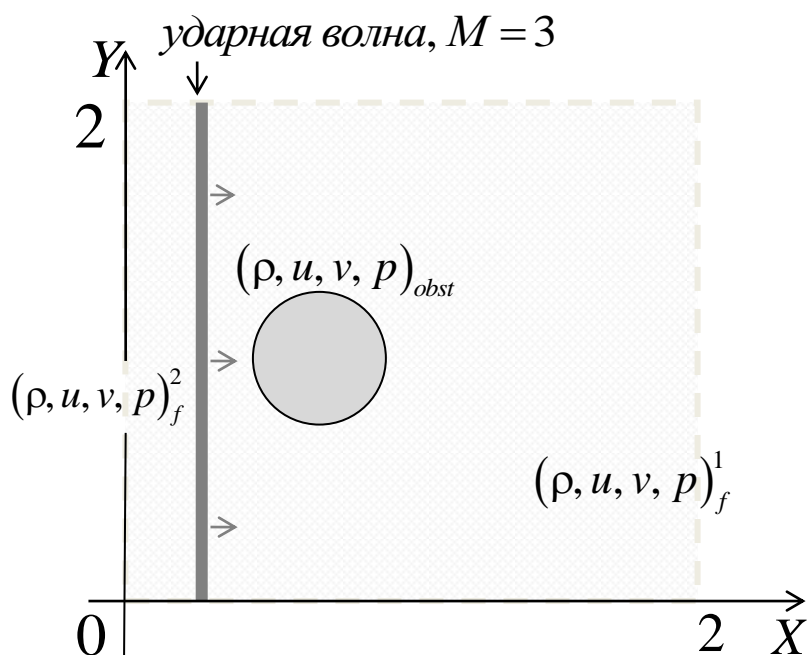


Рис. 2. Расчетная область в задаче о взаимодействии ударной волны и цилиндра

Граничные условия на поверхности цилиндра – условие прилипания для скорости и условие Дирихле для температуры: $(\rho, u, v, T)_{obst}|_{\vec{x} \in \partial\Omega_{obst}} = (1, 0, 0, 0.5714)$. Аналогичные граничные условия задавались на поверхности препятствия во всех представленных в работе задачах.

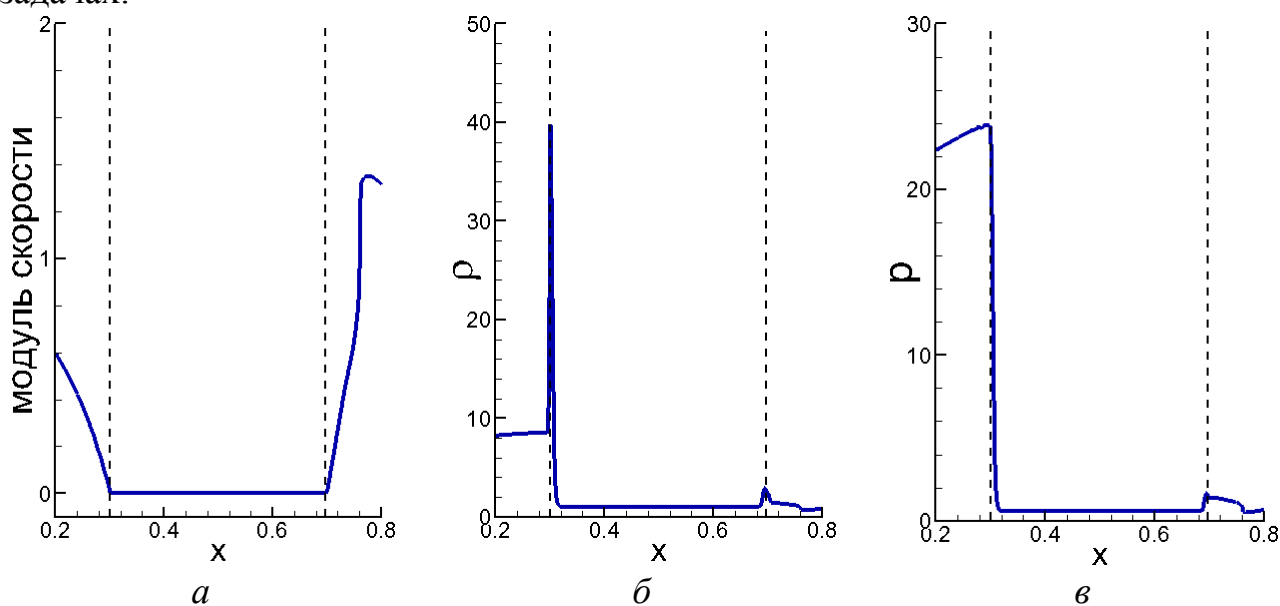


Рис. 3. Задача о взаимодействии ударной волны и цилиндра. Распределения вдоль прямой $y=1$: *а* – компоненты продольной скорости; *б* – плотности; *в* – давления

В расчете использована неструктурированная треугольная сетка с числом узлов $N \approx 10^6$, значение штрафного параметра задавалось как $\eta = 10^{-12}$.

Исследовались поля течения, полученные в процессе численного расчета на момент времени $t=0.4$. На рисунках 3а, 3б и 3в приведены распределения компоненты скорости, плотности и давления вдоль прямой $y=1$. Видно, что на поверхности цилиндра (ограниченной пунктирными линиями на графиках) выполнены заданные граничные условия – удерживается нулевая скорость, плотность и температура сохраняются равными начальному значению. Эти величины сохраняют свое значение и внутри препятствия.

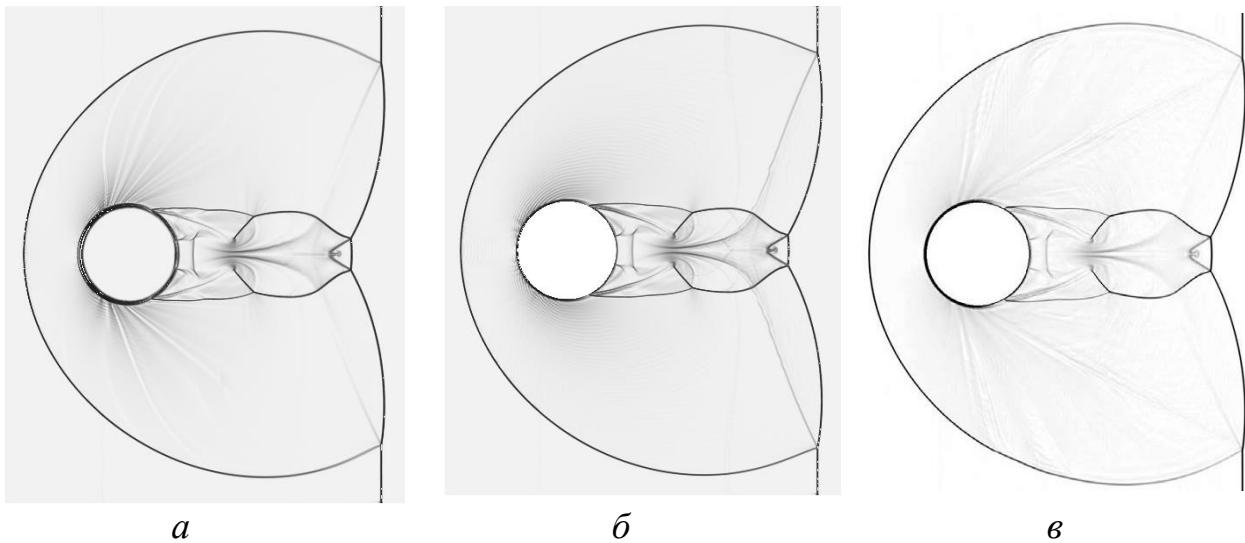


Рис. 4. Задача о взаимодействии ударной волны и цилиндра. Изображения Шлирена для плотности: а – метод Бринкмана штрафных функций; б – моделирование реального препятствия; в – работа [3]

На рисунке 4-а полученные результаты представлены в виде изображения Шлирена для плотности и сопоставлены с результатами численного моделирования “реального” препятствия (4-б) и работы [3] (4-в), где также использован метод Бринкмана штрафных функций. Структура ударных волн, полученная в расчете, воспроизводится с достаточной точностью.

Сравнение локальных и интегральных числовых характеристик течения вокруг твердого тела, моделируемого методом Бринкмана штрафных функций, с известными теоретическими и расчетными значениями проведено на примере задачи о сверхзвуковом обтекании цилиндра (рис. 5) [3].

Цилиндр с радиусом $r=0.2$ расположен в центре расчетной области, параметры набегающего слева потока:

$$(\rho, u, v, p)_f^1 \Big|_{t=0} = (1, 0, 0, 1/\gamma), \quad M = 2.$$

В начальный момент заданы значения плотности и температуры внутри цилиндра:

$$(\rho_{obst}, u_{obst}, v_{obst}, T_{obst})|_{t=0} = (1, 0, 0, 0.5714).$$

Размер сетки и значение штрафного параметра такие же, как и в предыдущей задаче.

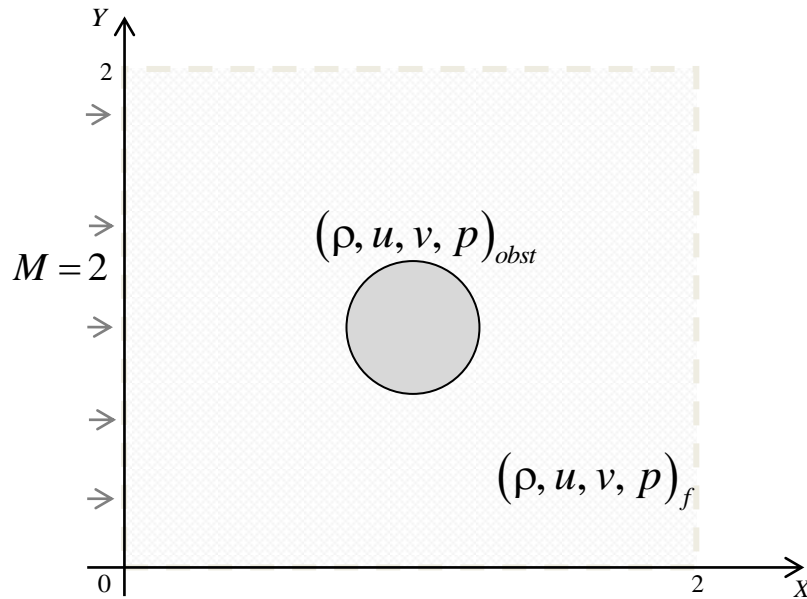


Рис. 5. Расчетная область для задачи сверхзвукового обтекания цилиндра

Линии уровня плотности установившегося течения (рис. 6-а), построенные по данным численного расчета методом Бринкмана штрафных функций, соответствуют результатам, полученным тем же методом в работе [3] (рис. 6-в), и результатам численного моделирования “реального” препятствия (рис. 6-б).

Следуя теории вязких течений, зная давление p_l и локальное число Маха M_l на линии растекания $y=1$, можно точно рассчитать давление торможения p_s в точке $(0.8, 1)$, используя следующее соотношение:

$$p_s = p_l \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M_l^2 \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}.$$

Вычисленное по данным, полученным с помощью метода Бринкмана штрафных функций, значение p_s соответствует результатам моделирования “реального препятствия” с использованием кода NOISEtte и пакета Fluent, а также в работе [3] (см. таблицу 1).

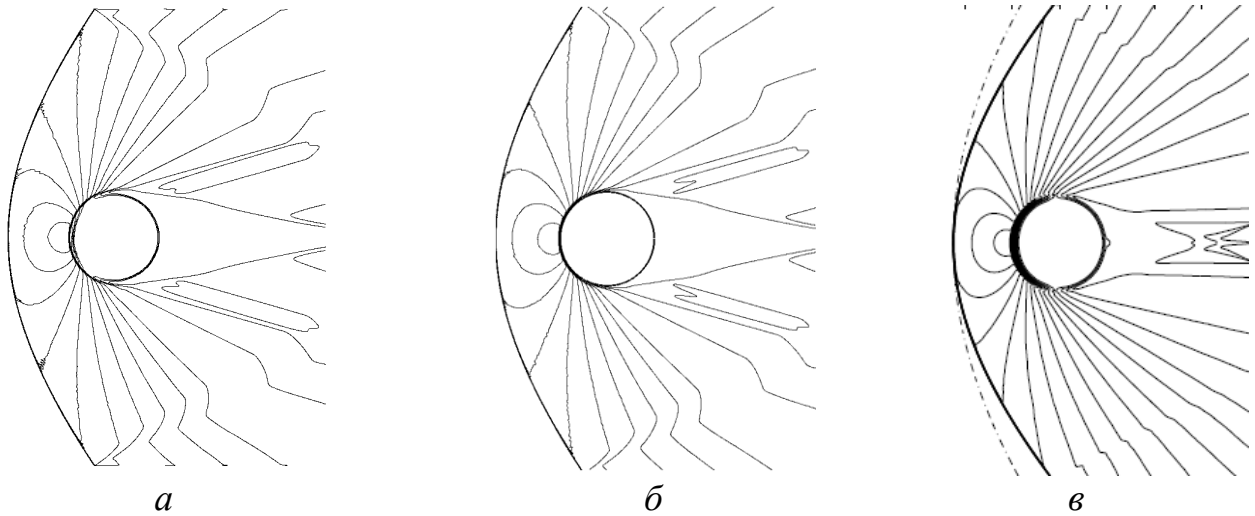


Рис. 6. Задача сверхзвукового обтекания цилиндра. Линии уровня плотности:
a – метод Бринкмана штрафных функций;
б – моделирование реального препятствия; *в* – работа [3]

Коэффициент аэродинамического сопротивления цилиндра C_d определяется как отношение силы, действующей на него в направлении оси x , к скоростному потоку. При использовании метода погруженных граничных условий эта сила может быть вычислена посредством интегрирования уравнения импульса по объему цилиндра [3]:

$$F_x = \frac{1}{\eta} \sum_{\mathbf{x}_i \in \Omega_{\text{obst}}} \rho(\mathbf{x}_i) u(\mathbf{x}_i) S_i,$$

где S_i – площадь соответствующей ячейки расчетной сетки.

Данные, приведенные в таблице 1, демонстрируют, что значение C_d , вычисленное по результатам проведенного численного расчета, хорошо согласуется с соответствующими референсными значениями.

Таблица 1

**Коэффициент сопротивления и давление торможения
 для задачи взаимодействия ударной волны и цилиндра**

| | Погруженные границы | Реальное препятствие | О.Boiron и др. [4] | Fluent | Теория |
|-------|---------------------|----------------------|--------------------|--------|--------|
| p_s | 1.006 | 1.005 | 1.009 | 1.001 | 1.007 |
| C_d | 1.325 | 1.375 | 1.44 | 1.358 | - |

Численное моделирование течения вокруг препятствий сложной геометрической формы

Методы погруженных граничных условий, в частности, метод Бринкмана штрафных функций, особенно привлекательны для применения в задачах обтекания препятствий, имеющих сложную геометрическую форму. В этом случае можно избежать трудоемкой и не всегда реализуемой процедуры построения расчетной сетки, описывающей границы твердого тела.

Для того чтобы оценить возможность моделирования препятствия данным методом в трехмерном случае, рассмотрена задача дозвукового ($M=0.2$) обтекания квадратной пластины с отверстием (рис. 7). Основным критерием оценки для такой постановки стало сравнение с результатами, полученными при численном моделировании "реального" препятствия. Поля течения оказываются достаточно близкими друг к другу, на рис. 8 сопоставлены распределения плотности и скорости вдоль центральной оси, полученные в расчетах по обоим методикам.

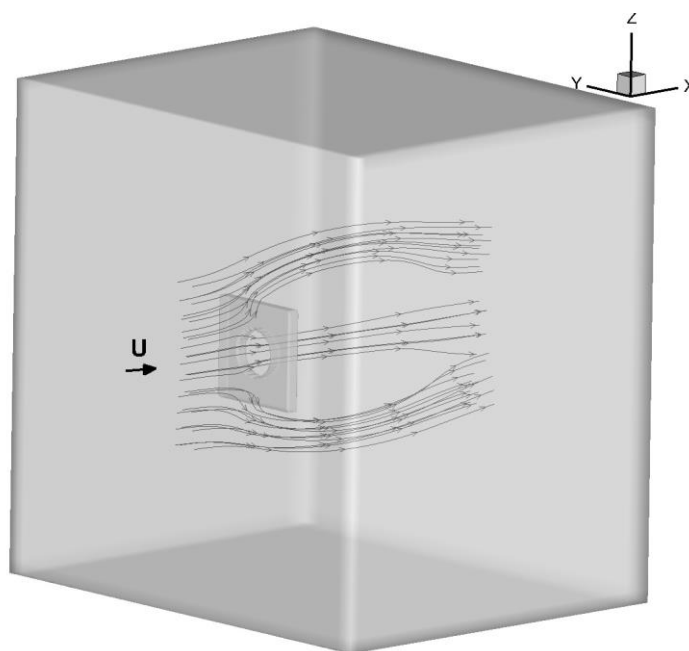


Рис. 7. Задача обтекания трехмерного препятствия.
Геометрия расчетной области

Для проведения численного моделирования использована "декартова" расчетная сетка с числом узлов $N \approx 1.1 \cdot 10^6$ и сгущением в области препятствия. Под "декартовыми" сетками здесь понимаются тетраэдральные сетки, полученные разбиением кубических ячеек декартовой сетки на тетраэдры.

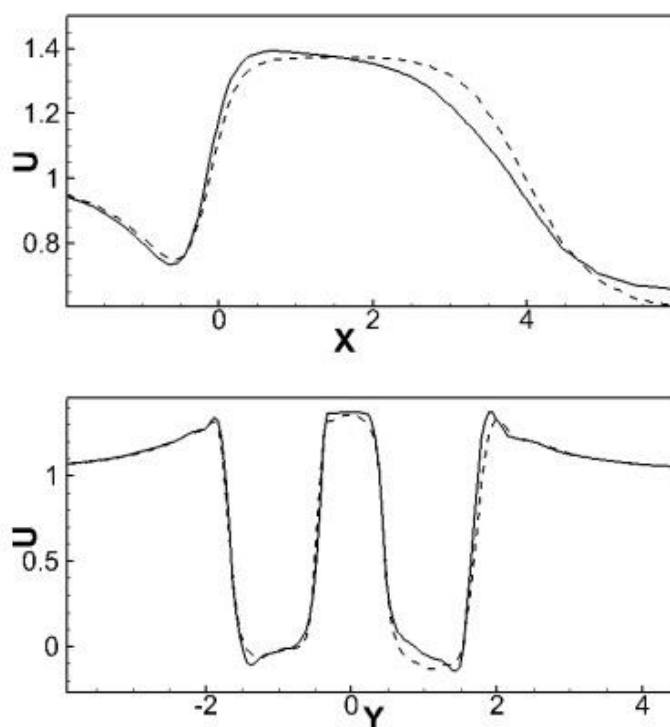


Рис. 8. Задача обтекания трехмерного препятствия. Величина продольной скорости в центральном и поперечном сечении (пунктир – погруженные границы)

В качестве препятствия сложной геометрической формы рассмотрена пластина, представляющая собой модельную конфигурацию дефлектора самолета².

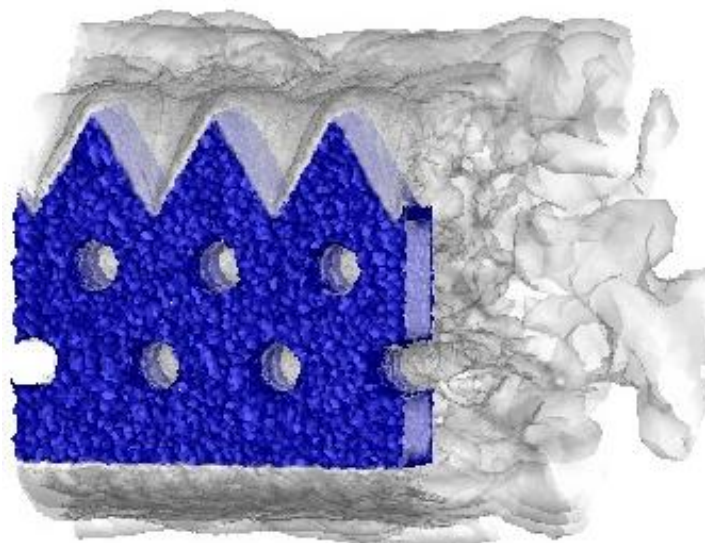


Рис. 9. Задача обтекания препятствия сложной геометрической формы. Изоповерхности модуля скорости

² Устанавливается перед отсеками в ряде моделей боевых самолетов.

Проведено численное моделирование обтекания такой пластины дозвуковым потоком ($M=0.5$). Использована неструктурированная тетраэдральная расчетная сетка с числом узлов $N \approx 10^6$. Визуализация изоповерхности модуля скорости приведена на рис. 9.

Данный расчет носит демонстрационный характер, тем не менее, его результаты подтвердили отсутствие протекания потока внутрь препятствия, выполнение граничных условий и позволили качественно оценить характер течения за препятствием.

Заключение

В работе представлены результаты применения одного из методов погруженных граничных условий в задачах численного моделирования аэродинамического обтекания. Основная особенность лежащего в их основе подхода – возможность численного моделирования обтекания твердого тела с использованием расчетной сетки, не связанной с его поверхностью и заполняющей всю область течения, включая препятствие.

Реализован один из вариантов метода, предложенный в [3], метод Бринкмана штрафных функций, согласно которому препятствие моделируется посредством добавления источников членов в систему уравнений, описывающую течение. В отличие от [3], для численного моделирования использованы не декартовы, а неструктурированные расчетные сетки. Это дает возможность в рамках одной задачи комбинировать несколько методов: например, использовать "традиционный" метод с описанием геометрии посредством узлов сетки в тех областях, где важна точность моделирования пограничного слоя на поверхности, и метод погруженных границ для имитации движущихся и (или) имеющих сложную геометрическую форму элементов препятствия.

Полученные в ходе численного моделирования поля течений сопоставлены с известными референсными данными, в том числе с результатами моделирования "реальных" препятствий с помощью пакета Fluent и кода NOISEtte. Сравнение показало, что метод в целом с достаточной точностью воспроизводит свойства течений для данного класса задач.

Тем не менее, имеет место ряд вопросов, требующих дополнительного исследования, в том числе проведение более подробного анализа точности численного моделирования вблизи границы препятствия, исследование влияния штрафного параметра на устойчивость разностной схемы. Они будут рассмотрены на следующих этапах работы.

Библиографический список

1. Mittal R. and Iaccarino G. Immersed Boundary Methods // Annual Review of Fluid Mechanics. 2005. Vol. 37. P. 239– 261.
2. Peskin C.S. Flow patterns around heart valves: a digital computer method for solving the equation of motions. PhD thesis. Physiol., Albert Einstein Coll. Med., Univ. Microfilms. 378. 1972. P. 72-30.
3. Boiron O., Chiavassa G., Donat R. A high-resolution penalization method for large Mach number flows in the presence of obstacles // Computers and Fluids. 2009. Vol. 38, no. 3. P. 703-714.
4. Feireisl E., Neustupa J., Stebel J. Convergence of a Brinkman-type penalization for compressible fluid flows // Journal of Differential Equations. 2011. 250(1). P. 596-606.
5. Абалакин И.В., Бахвалов П.А., Горобец А.В., Дубень А.П., Козубская Т.К. Параллельный программный комплекс NOISETTE для крупномасштабных расчетов задач аэродинамики и аэроакустики // Вычислительные методы и программирование. 2012. Т.13. С. 110-125.
6. Абалакин И.В., Козубская Т.К. Схема повышенной точности на основе реберно-ориентированной квазиодномерной реконструкции переменных для решения задач аэродинамики и аэроакустики на тетраэдральных сетках // Математическое моделирование. 2013. Т. 25, № 8. С. 109-136.
7. Abalakin I., Bakhvalov P., Kozubskaya T. Edge-Based Methods in CAA // In “Accurate and Efficient Aeroacoustic Prediction Approaches for Airframe Noise”, Lecture Series 2013-03. Ed. by C.Schram, R.Denos, E.Lecomte, von Karman Institute for Fluid Dynamics.