



Маштаков Я.В., [Ткачев С.С.](#)

Построение углового движения спутника ДЗЗ при отслеживании маршрутов на поверхности Земли

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Маштаков Я.В., Ткачев С.С. Построение углового движения спутника ДЗЗ при отслеживании маршрутов на поверхности Земли // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2014. № 20. 31 с. URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2014-20>

**Ордена Ленина
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М.В. Келдыша
Российской академии наук**

Я.В. Маштаков, С.С. Ткачев

**Построение углового движения спутника
ДЗЗ при отслеживании маршрутов
на поверхности Земли**

Москва — 2014

Маштаков Я.В., Ткачев С.С.

Построение углового движения спутника ДЗЗ при отслеживании маршрутов на поверхности Земли

Предложен алгоритм синтеза углового движения спутника дистанционного зондирования Земли (ДЗЗ) при отслеживании маршрутов на поверхности Земли при использовании двух типов оптических чувствительных элементов: ПЗС-матрица и ПЗС-линейка. Рассмотрены различные варианты параметризации маршрутов съемки на поверхности Земли, в том числе с помощью сплайна Эрмита. Построено управление, реализующее синтезированное движение.

Ключевые слова: дистанционное зондирование Земли, синтез углового движения, параметризация маршрутов, сплайн Эрмита

Yaroslav Mashtakov , Stepan Tkachev

Synthesis and constructing the angular motion of the remote sensing satellite for tracking the trajectory on the Earth surface

The angular motion synthesis algorithm for the trajectory on the Earth's surface tracking for remote sensing satellite is developed. Two types of sensors are considered, i.e. CCD-line and CCD-matrix. Various types of scanning trajectory parameterization including the Hermit spline are discussed. The control method which stabilizes the motion synthesized is developed.

Key words: Earth remote sensing, angular motion synthesis, trajectory parameterization, Hermit spline

Работа поддержана РФФИ (№ 12-01-33045, № 13-01-00665).

Введение

В настоящее время с помощью дистанционного зондирования Земли (ДЗЗ) средствами космических аппаратов (КА) решается широкий спектр задач. Среди них: мониторинг состояния окружающей среды [1], прогнозирование лесных пожаров [2], прогнозирование погоды. При этом для дистанционного зондирования могут использоваться различные типы датчиков, устанавливаемых на КА: микроволновые [3], радарные [4], оптические и другие.

В частности, большой практический интерес представляет отслеживание различных маршрутов на поверхности Земли с помощью специальных камер, которые устанавливаются на КА. Сама камера представляет собой устройство, состоящее, помимо прочего, из линзы и чувствительного элемента. В качестве такого элемента могут использоваться:

- 1) ПЗС-матрицы, в которых изображение, проходя через линзу и падая на матрицу, должно оставаться неподвижным в течение определенного промежутка времени;
- 2) ПЗС-линейки, представляющие собой набор параллельных линий, при использовании которых накладывается ограничение на так называемую скорость бега изображения: проходя через линзу и падая на чувствительный элемент, изображение снимаемой области должно проходить через эти линии с постоянной скоростью и перпендикулярно к ним.

Для обеспечения требуемого движения изображения относительно чувствительного элемента необходимо построить угловое движение КА, то есть определить его ориентацию, угловую скорость и ускорение как функции времени.

Построение углового движения КА для ПЗС-линеек, основанное на численном дифференцировании, приведено в работах С.А. Бутырина [5; 6]. В настоящей работе приводится численно-аналитическое решение задачи для обоих типов чувствительных элементов, а также строится управление, обеспечивающее асимптотическую устойчивость построенного движения.

1. Системы координат, управление

1.1 Системы координат

В работе используются следующие системы координат (рис. 1):

$OY_1Y_2Y_3$ — инерциальная система координат (ИСК): начало O расположено в центре масс Земли, OY_1 направлена в точку весеннего равноденствия, OY_3 направлена перпендикулярно плоскости экватора, OY_2 дополняет систему до правой ортогональной системы координат;

$Sx_1x_2x_3$ — связанная с КА система координат (ССК): начало S расположено в центре масс спутника, оси являются главными центральными осями инерции аппарата; для простоты выкладок предполагается, что оптическая ось камеры направлена вдоль оси Sx_1 ;

$Sy_1y_2y_3$ — визирная система координат (ВСК): начало S расположено в центре чувствительного элемента, ось Sy_1 параллельна оптической оси прибора, направление двух других осей определяется типом чувствительного элемента.

$SX_1X_2X_3$ — опорная система координат (ОСК): начало S расположено в центре чувствительного элемента, ось SX_1 направлена по линии, соединяющей точку S и точку наблюдения, а две другие выбираются в зависимости от типа чувствительного элемента (ПЗС-матрица или ПЗС-линейка), что будет указано в соответствующих разделах.

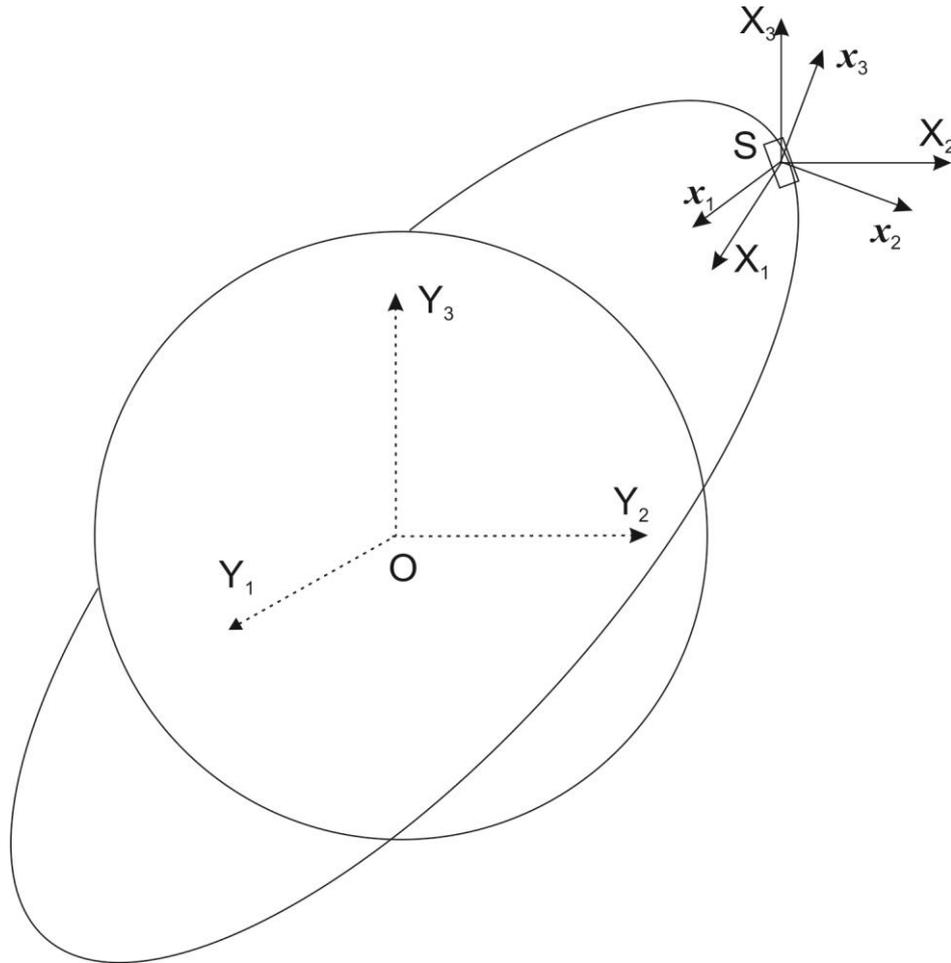


Рис. 1.1. Системы координат

Переходы между этими системами координат осуществляются с помощью матриц направляющих косинусов: матрица \mathbf{F} отвечает за переход из ОСК в ВСК, \mathbf{B} — из ИСК в ОСК, \mathbf{D} — из ИСК в ССК, \mathbf{G} из ВСК в ССК (при этом \mathbf{G} является постоянной).

1.2 Построение управления

Управление строится на основе PD-регулятора [7–9], который обеспечивает глобальную асимптотическую устойчивость требуемого движения. Для построения управления используется закон изменения кинетического момента системы:

$$\frac{d\mathbf{K}}{dt} + \boldsymbol{\omega}_{абс} \times \mathbf{K} = \mathbf{M}_{внеш} + \mathbf{M}_{упр}. \quad (1.1)$$

Здесь $\mathbf{K} = \mathbf{J}\boldsymbol{\omega}_{абс}$ — суммарный кинетический момент КА, $\boldsymbol{\omega}_{абс}$ — абсолютная угловая скорость КА, спроецированная на оси ССК, $\mathbf{M}_{внеш}$ и $\mathbf{M}_{упр}$ — момент внешних сил и управляющий момент соответственно. Управление строится таким образом, чтобы совместить ВСК и ОСК и обеспечить такому движению

асимптотическую устойчивость. Для его построения используется теорема Барбашина-Красовского ([10]). Функция V , фигурирующая в теореме, выбирается в виде

$$V = \frac{1}{2}(\boldsymbol{\omega}_{отн}, \mathbf{J}\boldsymbol{\omega}_{отн}) + k_a(3 - \text{tr}\mathbf{A}), \quad (1.2)$$

где $\boldsymbol{\omega}_{отн}$ — угловая скорость ССК относительно ОСК, $\mathbf{A} = \mathbf{G}\mathbf{F}\mathbf{G}^T$, k_a — положительный коэффициент. В случае совпадения ВСК и ССК \mathbf{A} представляет собой просто матрицу \mathbf{F} . Легко видеть, что $V > 0$ для любого положения спутника, кроме положения равновесия (это напрямую следует из того факта, что тензор инерции \mathbf{J} есть положительно определенная матрица, а след матрицы направляющих косинусов равняется трем только в случае тождественного преобразования). Рассматривая производную этой функции с учетом (1.1) и $\boldsymbol{\omega}_{abc} = \boldsymbol{\omega}_{отн} + \mathbf{A}\boldsymbol{\omega}_{он}$, где $\boldsymbol{\omega}_{он} = \mathbf{G}\boldsymbol{\Omega}_{он}$, $\boldsymbol{\Omega}_{он}$ — угловая скорость ОСК, спроецированной на оси этой системы, можно получить

$$\dot{V} = (\boldsymbol{\omega}_{отн}, \mathbf{M}_{внеш} + \mathbf{M}_{унр} - \boldsymbol{\omega}_{abc} \times \mathbf{J}\boldsymbol{\omega}_{abc} - \mathbf{J}\dot{\mathbf{A}}\boldsymbol{\omega}_{он} - \mathbf{J}\mathbf{A}\dot{\boldsymbol{\omega}}_{он}) - k_a \text{tr}\dot{\mathbf{A}}.$$

Точкой обозначена производная по времени.

Из уравнений Пуассона [11] для матрицы перехода между ОСК и ССК следует:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{A}} &= \mathbf{W}_{отн}\mathbf{A}, \\ \text{tr}\dot{\mathbf{A}} &= \omega_1(a_{32} - a_{23}) + \omega_2(a_{13} - a_{31}) + \omega_3(a_{21} - a_{12}). \end{aligned}$$

Итоговое выражение для \dot{V} имеет вид

$$\dot{V} = (\boldsymbol{\omega}_{отн}, \mathbf{M}_{внеш} + \mathbf{M}_{унр} - \boldsymbol{\omega}_{abc} \times \mathbf{J}\boldsymbol{\omega}_{abc} - \mathbf{J}\mathbf{W}_{отн}\mathbf{A}\boldsymbol{\omega}_{он} - \mathbf{J}\mathbf{A}\dot{\boldsymbol{\omega}}_{он} - k_a\mathbf{S}), \quad (1.3)$$

где $\mathbf{S} = (a_{32} - a_{23}, a_{13} - a_{31}, a_{21} - a_{12})^T$.

Согласно теореме Барбашина-Красовского функция \dot{V} должна быть отрицательной для любого положения спутника кроме положения равновесия (в нем значение функции должно быть равно нулю). Это выполняется, если

$$\mathbf{M}_{внеш} + \mathbf{M}_{унр} - \boldsymbol{\omega}_{abc} \times \mathbf{J}\boldsymbol{\omega}_{abc} - \mathbf{J}\mathbf{W}_{отн}\mathbf{A}\boldsymbol{\omega}_{он} - \mathbf{J}\mathbf{A}\dot{\boldsymbol{\omega}}_{он} - k_a\mathbf{S} = -k_\omega \boldsymbol{\omega}_{отн}. \quad (1.4)$$

Таким образом,

$$\dot{V} = -k_\omega (\boldsymbol{\omega}_{отн}, \boldsymbol{\omega}_{отн}), \quad k_\omega > 0. \quad (1.5)$$

Из (1.3), (1.5), а также выражения для абсолютной угловой скорости КА, следует выражение для управляющего момента

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_{упр} = & -\mathbf{M}_{внеш} + \boldsymbol{\omega}_{абс} \times \mathbf{J}\boldsymbol{\omega}_{абс} + \mathbf{J}\mathbf{W}_{отн}\mathbf{A}\boldsymbol{\omega}_{он} + \\ & + \mathbf{J}\mathbf{A}\dot{\boldsymbol{\omega}}_{он} + k_a\mathbf{S} - k_\omega(\boldsymbol{\omega}_{абс} - \mathbf{A}\boldsymbol{\omega}_{он}). \end{aligned} \quad (1.6)$$

Зная опорное угловое движение КА, построим требуемое управление. Способ построения опорного движения зависит от типа чувствительного элемента, установленного в камере. В работе рассматривается два варианта: ПЗС-линейка и ПЗС-матрица.

2. Построение опорного движения в случае ПЗС-матрицы

2.1 Постановка задачи и уравнения движения

Пусть съемка заданной области на поверхности Земли производится с использованием ПЗС-матрицы. Как уже говорилось во введении, в этом случае требуется построить такое угловое движение КА, чтобы изображение снимаемой области оставалось неподвижным в течении некоторого отрезка времени. Для того, чтобы снять целую траекторию, ее сперва нужно разбить на участки малой протяженности. При этом на каждом участке выбирается точка, на которую должна быть направлена камера, и фиксируется некоторое направление, что исключает смещение изображения в фокальной плоскости камеры. После этого, последовательно снимая каждый из отрезков, можно получить изображение всей траектории. Задача, таким образом, решается в несколько этапов:

- 1) разбиение траектории на малые участки;
- 2) выбор на каждом участке точки \mathbf{P} и направления $\boldsymbol{\tau}$ (в работе такой точкой является середина малого участка, а направлением — касательная к траектории в данной точке);
- 3) для каждой такой пары (точки и направления) строится необходимое угловое движение спутника, а также управление, реализующее его.

В работе рассматривается только последний пункт, т.е. построение углового движения КА в случае отслеживания заданной точки и направления. Задача разбиения траектории на участки в работе не рассматривается.

Для определения угловой скорости используются кинематические уравнения Пуассона

$$\dot{\mathbf{B}} = \mathbf{W}\mathbf{B}, \quad (2.1)$$

где \mathbf{B} есть матрица, связывающая ИСК и ОСК, а \mathbf{W} имеет вид

$$\mathbf{W} = \begin{pmatrix} 0 & \omega_3 & -\omega_2 \\ -\omega_3 & 0 & \omega_1 \\ \omega_2 & -\omega_1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.2)$$

Матрицы \mathbf{V} и $\dot{\mathbf{V}}$ строятся в виде

$$\mathbf{V} = \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1^T \\ \mathbf{e}_2^T \\ \mathbf{e}_3^T \end{pmatrix}, \quad \dot{\mathbf{V}} = \begin{pmatrix} \dot{\mathbf{e}}_1^T \\ \dot{\mathbf{e}}_2^T \\ \dot{\mathbf{e}}_3^T \end{pmatrix}. \quad (2.3)$$

Здесь \mathbf{e}_i есть базисные векторы опорной системы координат, разложенные по осям ИСК.

2.2 Построение углового движения

Как следует из требований, приведенных в предыдущем разделе, базисные векторы \mathbf{e}_i выбираются следующим образом (рис. 2.1):

- 1) в качестве \mathbf{e}_1 рассматривается вектор единичной длины, параллельный вектору $\boldsymbol{\rho}$, соединяющему центр масс спутника и точку наблюдения;
- 2) в качестве \mathbf{e}_2 используется нормированная составляющая вектора $\boldsymbol{\tau}$, перпендикулярная \mathbf{e}_1 ;
- 3) \mathbf{e}_3 дополняет систему до правой ортогональной системы координат.

Таким образом, выражения для базисных векторов принимают следующий вид:

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_1 &= \frac{\boldsymbol{\rho}}{\|\boldsymbol{\rho}\|}, \\ \mathbf{e}_2 &= \frac{\boldsymbol{\tau} - \mathbf{e}_1(\mathbf{e}_1, \boldsymbol{\tau})}{\|\boldsymbol{\tau} - \mathbf{e}_1(\mathbf{e}_1, \boldsymbol{\tau})\|} \\ \mathbf{e}_3 &= \mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2. \end{aligned} \quad (2.4)$$

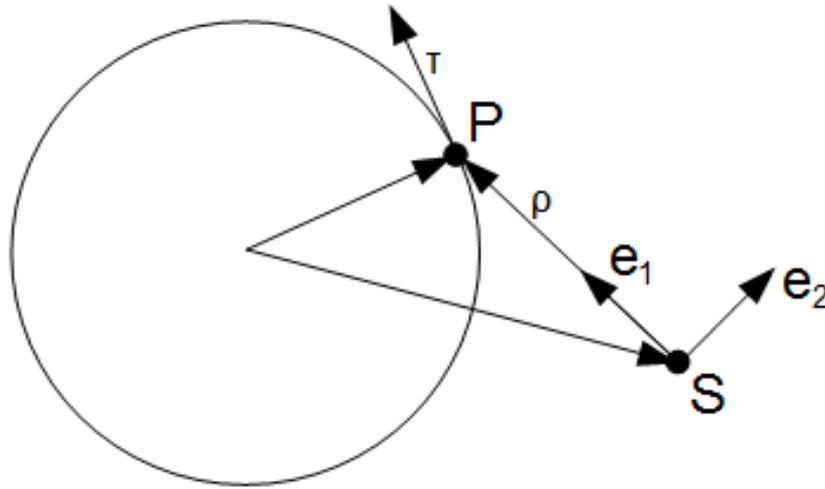


Рис.2.1. Оси опорной системы координат

Далее, дифференцируя выражения (2.4) по времени, используя

$$\boldsymbol{\rho} = \mathbf{OP} - \mathbf{OS}$$

и предположения, что известны местоположение и скорость центра масс спутника в любой момент времени, из (2.1) можно найти угловую скорость спутника для произвольного момента времени. Как следствие, будет получено движение опорной системы координат. Окончательные выражения для производных базисных векторов имеют вид

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{e}}_1 &= \frac{\dot{\boldsymbol{\rho}} - \mathbf{e}_1(\dot{\boldsymbol{\rho}}, \mathbf{e}_1)}{\|\boldsymbol{\rho}\|}, \\ \dot{\mathbf{e}}_2 &= \frac{\dot{\mathbf{h}} - \mathbf{e}_2(\dot{\mathbf{h}}, \mathbf{e}_2)}{\|\mathbf{h}\|}, \\ \dot{\mathbf{e}}_3 &= \dot{\mathbf{e}}_1 \times \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_1 \times \dot{\mathbf{e}}_2. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Здесь для сокращения записи введены обозначения

$$\begin{aligned} \mathbf{h} &= \boldsymbol{\tau} - \mathbf{e}_1(\mathbf{e}_1, \boldsymbol{\tau}), \\ \dot{\mathbf{h}} &= \boldsymbol{\Omega}_E \times \boldsymbol{\tau} - \dot{\mathbf{e}}_1(\mathbf{e}_1, \boldsymbol{\tau}) - \mathbf{e}_1\{(\mathbf{e}_1, \boldsymbol{\Omega}_E \times \boldsymbol{\tau}) + (\dot{\mathbf{e}}_1, \boldsymbol{\tau})\}, \end{aligned} \quad (2.6)$$

где $\boldsymbol{\Omega}_E$ — угловая скорость вращения Земли. Используя (2.1) и учитывая тот факт, что \mathbf{B} является ортогональной матрицей [12], выражение для угловой скорости принимает вид

$$\mathbf{W} = \dot{\mathbf{B}}\mathbf{B}^T. \quad (2.7)$$

Далее, используя (2.3)–(2.5), можно получить явный вид матрицы \mathbf{W} . Как следует из (1.6), для расчета управляющих моментов требуется знание углового ускорения ОСК. Для его вычисления дифференцируется выражение (2.7)

$$\dot{\mathbf{W}} = \dot{\mathbf{B}}\dot{\mathbf{B}}^T + \ddot{\mathbf{B}}\mathbf{B}^T. \quad (2.8)$$

Учитывая, что вектор углового ускорения $\boldsymbol{\varepsilon} = \dot{\boldsymbol{\omega}}$, $\dot{\mathbf{W}}$ можно записать следующим образом:

$$\dot{\mathbf{W}} = \begin{pmatrix} 0 & \varepsilon_3 & -\varepsilon_2 \\ -\varepsilon_3 & 0 & \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 & -\varepsilon_1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.9)$$

Таким образом, в выражении (2.8) остается неизвестной только матрица $\ddot{\mathbf{B}}$. Для ее получения выражения (2.5) дифференцируются по времени

$$\ddot{\mathbf{e}}_1 = \frac{\ddot{\boldsymbol{\rho}} - \dot{\mathbf{e}}_1(\dot{\boldsymbol{\rho}}, \mathbf{e}_1) - \mathbf{e}_1\{(\ddot{\boldsymbol{\rho}}, \mathbf{e}_1) + (\dot{\boldsymbol{\rho}}, \dot{\mathbf{e}}_1)\}}{\|\boldsymbol{\rho}\|} - \frac{\dot{\boldsymbol{\rho}} - \mathbf{e}_1(\dot{\boldsymbol{\rho}}, \mathbf{e}_1)}{\|\boldsymbol{\rho}\|^2}(\dot{\boldsymbol{\rho}}, \mathbf{e}_1). \quad (2.10)$$

Далее потребуется вспомогательное соотношение (оно получается из (2.6) дифференцированием по времени):

$$\ddot{\mathbf{h}} = \ddot{\boldsymbol{\tau}} - \dot{\mathbf{e}}_1(\ddot{\boldsymbol{\tau}}, \mathbf{e}_1) - 2\dot{\mathbf{e}}_1\{(\dot{\boldsymbol{\tau}}, \mathbf{e}_1) + (\boldsymbol{\tau}, \dot{\mathbf{e}}_1)\} - \mathbf{e}_1\{(\ddot{\boldsymbol{\tau}}, \mathbf{e}_1) + 2(\dot{\boldsymbol{\tau}}, \dot{\mathbf{e}}_1) + (\boldsymbol{\tau}, \ddot{\mathbf{e}}_1)\}, \quad (2.11)$$

где $\dot{\boldsymbol{\tau}} = \boldsymbol{\Omega}_E \times \boldsymbol{\tau}$, $\ddot{\boldsymbol{\tau}} = \boldsymbol{\Omega}_E \times [\boldsymbol{\Omega}_E \times \boldsymbol{\tau}]$. Здесь, как и прежде, $\boldsymbol{\tau}$ есть направление, проекция которого на фокальную плоскость камеры должна оставаться неподвижной. Далее, с использованием (2.11), выражение для второй производной по времени второго базисного вектора принимает вид

$$\ddot{\mathbf{e}}_2 = \frac{\ddot{\mathbf{h}} - \dot{\mathbf{e}}_2(\ddot{\mathbf{h}}, \mathbf{e}_2) - \mathbf{e}_2\{(\ddot{\mathbf{h}}, \mathbf{e}_2) + (\dot{\mathbf{h}}, \dot{\mathbf{e}}_2)\}}{\|\mathbf{h}\|} - \frac{\dot{\mathbf{h}} - \mathbf{e}_2(\dot{\mathbf{h}}, \mathbf{e}_2)}{\|\mathbf{h}\|^2}(\dot{\mathbf{h}}, \mathbf{e}_2), \quad (2.12)$$

Выражение для второй производной \mathbf{e}_3 можно записать в виде

$$\ddot{\mathbf{e}}_3 = \ddot{\mathbf{e}}_1 \times \mathbf{e}_2 + 2\dot{\mathbf{e}}_1 \times \dot{\mathbf{e}}_2 + \mathbf{e}_1 \times \ddot{\mathbf{e}}_2. \quad (2.13)$$

Таким образом, получено выражение для $\ddot{\mathbf{B}}$, а, следовательно, и для $\dot{\mathbf{W}}$.

2.3 Модельная задача

Выражения (2.4), (2.7) и (2.9) позволяют определить ориентацию, угловую скорость и ускорение опорной системы координат. Для иллюстрации проводится численное моделирование следующей задачи (рис. 2.2):

- 1) спутник движется по круговой экваториальной орбите, радиус орбиты составляет 6800 км, в начальный момент он находится на пересечении орбиты с осью OY_1 ИСК;
- 2) точка наблюдения \mathbf{P} также находится в экваториальной плоскости, а ее радиус-вектор повернут на угол $\alpha = 0.3$ радиана относительно оси OY_1 ;
- 3) вектор $\boldsymbol{\tau}$ расположен в экваториальной плоскости и направлен по касательной к Земле в точке \mathbf{P} ;
- 4) тензор инерции спутника $\mathbf{J} = \text{diag}(2, 3, 4)$;
- 5) управление рассчитывается два раза в секунду.

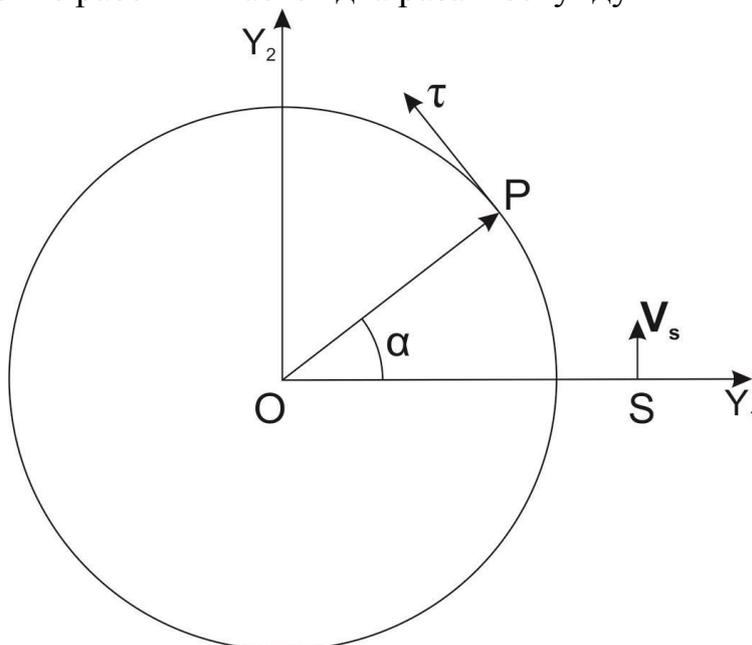


Рис. 2.2. Экваториальная плоскость, \mathbf{S} — спутник, \mathbf{V}_s — его скорость

При моделировании работы алгоритма численно решается следующая система уравнений:

$$\frac{d\mathbf{K}}{dt} + \boldsymbol{\omega}_{abc} \times \mathbf{K} = \mathbf{M}_{внеш} + \mathbf{M}_{упр},$$

$$\dot{\mathbf{D}} = \mathbf{W}_{abc} \mathbf{D}.$$

с начальными значениями ориентации и угловой скорости, которые соответствуют совпадению ССК и ОСК в начальный момент времени. Это связано с тем, что наибольший интерес представляет собой уже установившееся движение спутника. При этом для расчета управляющих моментов используется (1.6), а опорное движение строится с помощью выражений (2.4)–(2.13). В результате, для каждого момента времени определяется значение ориентации и абсолютной угловой скорости спутника.

В качестве критерия работоспособности алгоритма рассматривается так называемый «сдвиг» камеры r , то есть отклонение той точки, куда направлена оптическая ось камеры (точки визирования), от заданной точки P .

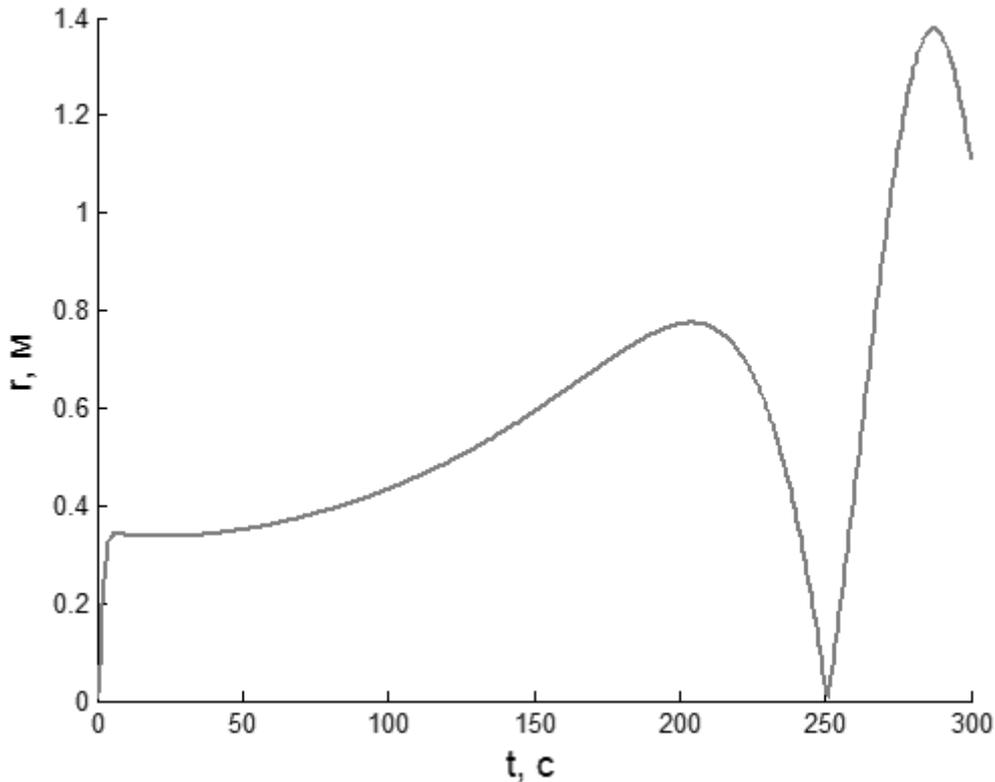


Рис. 2.3. Сдвиг камеры

Как видно из рис. 2.3, алгоритм работает удовлетворительно: сдвиг камеры составляет всего несколько метров (при этом увеличение частоты управления уменьшает ошибку), что соответствует требованиям к спутникам высокого разрешения, например миссии КАНОПУС-В [13] (Россия, пространственное разрешение 2.1-10.5 м) и SPOT-5 [14] (Франция, пространственное разрешение 2.5-5 м).

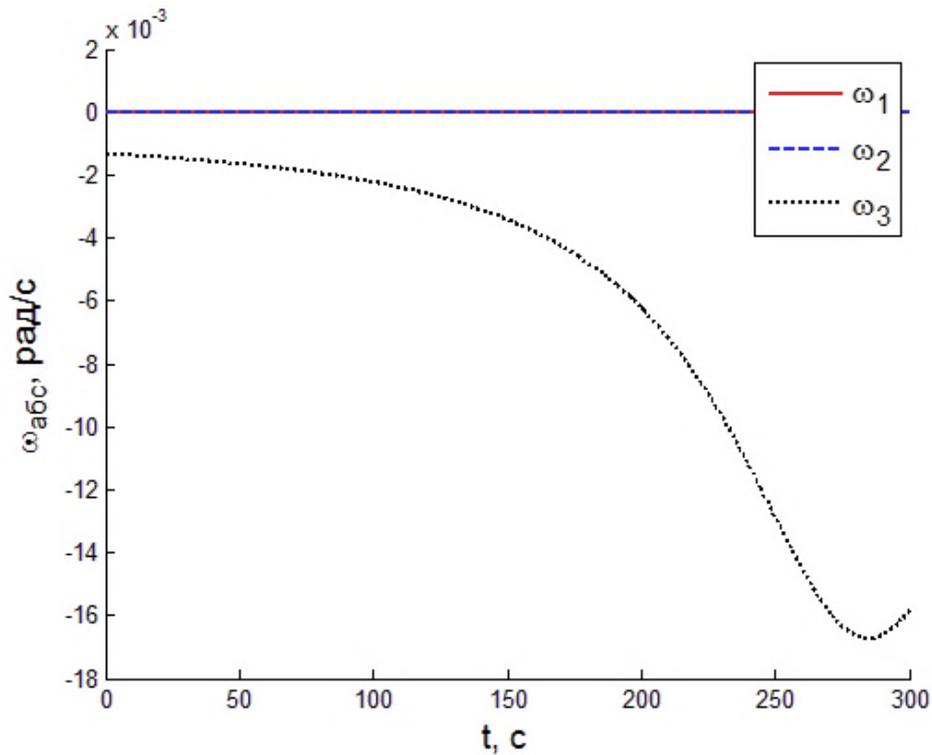


Рис. 2.4. Проекция вектора угловой скорости на оси ССК

Значение угловой скорости также соответствуют здравому смыслу: спутник вращается только вокруг третьей оси, вращение по двум другим осям отсутствует, при этом максимальная угловая скорость достигается при пролете над точкой наблюдения.

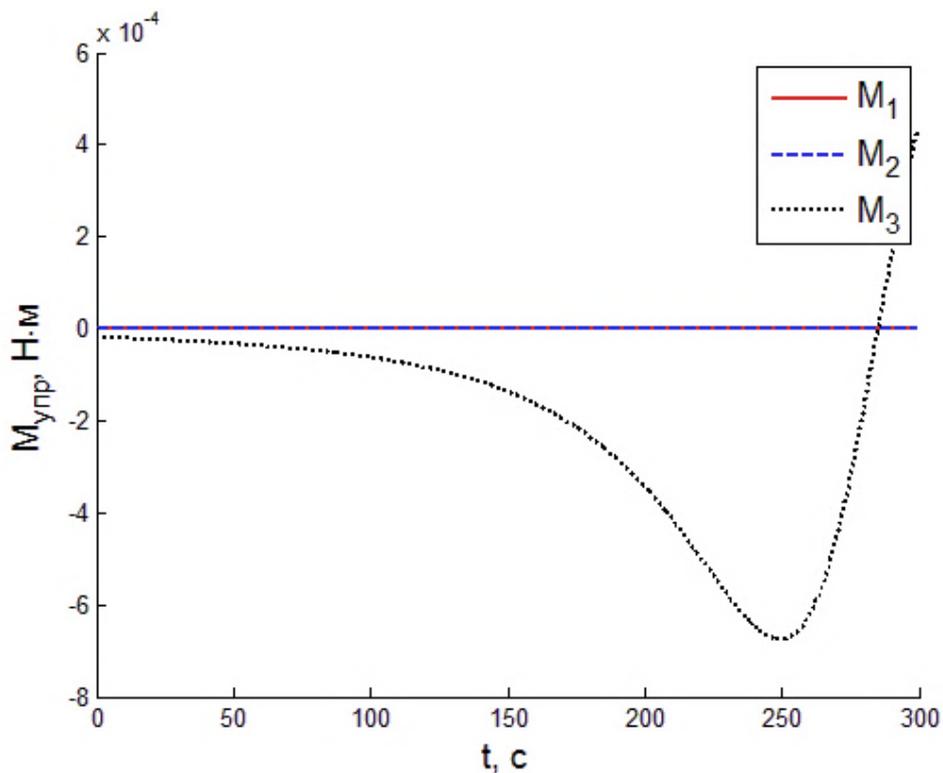


Рис. 2.5. Управляющий момент в проекциях на оси ССК

Из рис. 2.5 хорошо видно, что проекции управляющего момента при поддержании опорного движения имеют порядок 10^{-4} Н·м, что вполне реализуемо доступными для малых космических аппаратов актюаторами (например, маховиками).

3. Построение опорного движения в случае ПЗС-линейки

3.1 Постановка задачи и уравнения движения

В случае использования ПЗС-линейки в качестве чувствительного элемента на угловое движение КА накладываются следующие условия:

1) оптическая ось прибора направлена в точку, расположенную на траектории съемки;

2) скорость изображения в фокальной плоскости камеры, установленной на КА, должна быть равна заданной величине, оставаться постоянной и быть направленной перпендикулярно ПЗС-линейке.

Сделать так, чтобы все точки снимаемой траектории двигались с одинаковой относительно ПЗС-линейки скоростью невозможно, однако, если используются камеры с достаточно малым углом зрения, ошибка будет мала:

$$\Delta V \leq \|\Omega_E \times \mathbf{r} - \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}\| \frac{f}{\rho}.$$

Здесь \mathbf{r} – вектор, соединяющий две различные точки, находящиеся в области видимости камеры, Ω_E , $\boldsymbol{\omega}$ угловые скорости Земли и спутника соответственно, f – фокальное расстояние камеры, ρ – расстояние до точки наблюдения (в том случае, если \mathbf{r} мало, то расстояние от спутника до каждой из двух точек наблюдения примерно одинаково). В зависимости от допустимой ошибки, можно получить различные ограничения на \mathbf{r} : принимая $\rho = 400$ км, $f = 0.1$ м, $\omega \approx \Omega_E \approx 10^{-3}$ рад/с, можно получить $\|\mathbf{r}\| \leq 4 \cdot 10^9 \Delta$, где Δ есть допустимая ошибка. Если скорость бега изображения принять равной 10^{-3} м/с, а допустимую ошибку 10^{-5} м/с, то расстояние между двумя наблюдаемыми точками не должно превышать 40 км, а угол зрения камеры соответственно $\approx 6^\circ$.

Таким образом, условие на постоянную скорость всего изображения заменяется условием постоянства скорости той точки, которая в данный момент отображается в центр фокальной плоскости камеры. Для построения углового движения также предполагается, что маршрут представляет собой функцию одного параметра, обладающую достаточной гладкостью.

С учетом всех условий опорная система координат в этом случае вводится аналогично п. 2.2:

- 1) в качестве \mathbf{e}_1 рассматривается вектор единичной длины, параллельный вектору $\boldsymbol{\rho}$, соединяющему центр масс КА и точку наблюдения;
- 2) в качестве \mathbf{e}_2 используется нормированная составляющая вектора касательной к траектории в точке визирования $\boldsymbol{\tau}$, перпендикулярная \mathbf{e}_1 ;
- 3) \mathbf{e}_3 дополняет систему до правой ортогональной системы координат.

Таким образом, для первого базисного вектора будет верным следующее выражение:

$$\mathbf{e}_1 = \frac{\mathbf{r}_p - \mathbf{r}_s}{\|\mathbf{r}_p - \mathbf{r}_s\|} = \frac{\boldsymbol{\rho}}{\rho}, \quad \mathbf{r}_p = \mathbf{r}_p(t, s(t)), \quad (3.1)$$

где \mathbf{r}_p есть радиус-вектор некоторой точки маршрута. Отличие от случая ПЗС-матрицы состоит в том, что положение точки визирования зависит не только от времени (т.к. Земля вращается), но и от параметра $s(t)$, который определяет положение точки на траектории. При этом полная производная \mathbf{r}_p по времени определяется выражением

$$\frac{d\mathbf{r}_p}{dt} = \boldsymbol{\Omega}_E \times \mathbf{r}_p + \frac{\partial \mathbf{r}_p}{\partial s} \dot{s}.$$

Второй базисный вектор определяется следующим образом:

$$\mathbf{e}_2 = \frac{\boldsymbol{\tau} - \mathbf{e}_1(\boldsymbol{\tau}, \mathbf{e}_1)}{\|\boldsymbol{\tau} - \mathbf{e}_1(\boldsymbol{\tau}, \mathbf{e}_1)\|}, \quad \boldsymbol{\tau} = \frac{\partial \mathbf{r}_p}{\partial s}. \quad (3.2)$$

Третий базисный вектор достраивается таким образом, чтобы получилась правая ортогональная тройка векторов.

В случае, когда ВСК и ОСК совмещены, ограничения, накладываемые на величину и направление скорости бега изображения, дают следующие условия:

$$\begin{aligned} (\mathbf{V}_{отн}, \mathbf{e}_3) &= 0, \\ (\mathbf{V}_{отн}, \mathbf{e}_2) &= -\frac{V\rho}{f}, \end{aligned} \quad (3.3)$$

где V — скорость бега изображения, а $\mathbf{V}_{отн}$ определяется так:

$$\mathbf{V}_{отн} = \mathbf{V}_p - \mathbf{V}_c - \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{r}_p - \mathbf{r}_c) = \boldsymbol{\Omega}_E \times \mathbf{r}_p - \mathbf{V}_s - \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{r}_p - \mathbf{r}_s).$$

Здесь \mathbf{r}_p — радиус-вектор точки наблюдения, $\boldsymbol{\Omega}_E, \boldsymbol{\omega}$ — угловые скорости Земли и КА соответственно, а \mathbf{r}_s и \mathbf{V}_s есть местоположение и скорость КА.

Компоненты вектора угловой скорости ОСК в проекциях на оси этой системы с учетом (3.3) будут:

$$\begin{aligned}\omega_2 &= -\frac{(\boldsymbol{\Omega}_E \times \mathbf{r}_p - \mathbf{V}_s, \mathbf{e}_3)}{\rho}, \\ \omega_3 &= \frac{(\boldsymbol{\Omega}_E \times \mathbf{r}_p - \mathbf{V}_s, \mathbf{e}_2)}{\rho} + \frac{V}{f}.\end{aligned}\quad (3.4)$$

Таким образом, получены значения двух из трех компонент угловой скорости КА. Значение первой компоненты может быть получено с помощью уравнения Пуассона (2.1). Для этого потребуется задать все три базисных вектора как функции времени.

Для нахождения угловых скоростей требуется также знание производных базисных векторов:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{e}}_1 &= \frac{\dot{\mathbf{r}}_p - \mathbf{V}_s - (\dot{\mathbf{r}}_p - \mathbf{V}_s, \mathbf{e}_1)\mathbf{e}_1}{\rho}, \\ \mathbf{b} &= \boldsymbol{\tau} - (\mathbf{e}_1, \boldsymbol{\tau})\mathbf{e}_1, \quad \dot{\mathbf{b}} = \dot{\boldsymbol{\tau}} - \dot{\mathbf{e}}_1(\mathbf{e}_1, \boldsymbol{\tau}) - \mathbf{e}_1\{(\mathbf{e}_1, \dot{\boldsymbol{\tau}}) + (\dot{\mathbf{e}}_1, \boldsymbol{\tau})\}, \\ \dot{\boldsymbol{\tau}} &= \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathbf{r}_p}{\partial s}\right) = \boldsymbol{\Omega}_E \times \frac{\partial \mathbf{r}_p}{\partial s} + \frac{\partial^2 \mathbf{r}_p}{\partial s^2} \dot{s}, \\ \dot{\mathbf{e}}_2 &= \frac{\dot{\mathbf{b}} - (\dot{\mathbf{b}}, \mathbf{e}_2)\mathbf{e}_2}{\|\mathbf{b}\|}, \\ \dot{\mathbf{e}}_3 &= \dot{\mathbf{e}}_1 \times \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_1 \times \dot{\mathbf{e}}_2.\end{aligned}\quad (3.5)$$

Теперь с помощью уравнения (2.1) можно найти все три компоненты угловой скорости. При этом сравнение с (3.4) дает

$$\begin{aligned}\omega_2 &= -(\dot{\mathbf{e}}_1, \mathbf{e}_3) = -\frac{(\dot{\mathbf{r}}_p - \mathbf{V}_s, \mathbf{e}_3)}{\rho}, \\ \omega_3 &= (\dot{\mathbf{e}}_1, \mathbf{e}_2) = \frac{(\dot{\mathbf{r}}_p - \mathbf{V}_s, \mathbf{e}_2)}{\rho}.\end{aligned}$$

После преобразований

$$\begin{aligned} \frac{(\dot{\mathbf{r}}_p - \boldsymbol{\Omega}_e \times \mathbf{r}_p, \mathbf{e}_3)}{\rho} &= 0, \\ \frac{(\dot{\mathbf{r}}_p - \boldsymbol{\Omega}_e \times \mathbf{r}_p, \mathbf{e}_2)}{\rho} &= \frac{V}{f}. \end{aligned} \quad (3.6)$$

По построению первое уравнение (3.6) обращается в тождество, а из второго определяется условие, накладываемое на \dot{s} :

$$\dot{s} = \frac{\rho V}{f} \frac{1}{(\boldsymbol{\tau}, \mathbf{e}_2)}. \quad (3.7)$$

Это дифференциальное уравнение позволяет построить угловое движение с помощью (3.1)–(3.5) и (2.1).

Стоит отметить, что для построения управления, кроме угловых скоростей, также требуется знание углового ускорения опорной СК. Для его вычисления можно еще раз продифференцировать уравнения Пуассона. Однако получившиеся выражения получаются громоздкими и требуют больших вычислительных затрат, поэтому их вычисление производится с помощью численного дифференцирования уже полученной угловой скорости КА.

Как было показано выше, для применения указанного подхода траектория должна быть дважды непрерывно дифференцируемой функцией параметра s . В работе рассматривается два возможных подхода к ее построению:

- 1) траектория является границей большого круга сферы Земли, т.е. является кривой, получающейся при пересечении сферы и некоторой плоскости, проходящей через ее центр;
- 2) траектория строится с помощью сплайнов по заранее выбранным точкам.

3.2 Синтез маршрута с использованием большого круга сферы Земли

Для задания маршрута в таком виде необходимо задать два параметра: наклонение плоскости, т.е. угол между нормалью к плоскости и третьей осью ИСК, направленной на северный полюс, а также угол между линией узлов и первой осью ИСК. После этого, любая точка траектории задается следующим выражением:

$$\mathbf{r}_p = R_E \begin{pmatrix} \cos \psi \cos s - \sin \psi \cos \theta \sin s \\ \sin \psi \cos s + \cos \psi \cos \theta \sin s \\ \sin \theta \sin s \end{pmatrix}$$

Здесь $\psi = \psi_0 + \Omega_E t$ есть угол между первой осью ИСК и линией узлов, R_E — радиус Земли, θ — наклонение плоскости, s — параметр траектории, который здесь является углом между линией узлов и радиус-вектором текущей точки наблюдения.

Первая и вторая производные задаются следующими выражениями:

$$\frac{\partial \mathbf{r}_p}{\partial s} = R_E \begin{pmatrix} -\cos \psi \sin s - \sin \psi \cos \theta \cos s \\ -\sin \psi \sin s + \cos \psi \cos \theta \cos s \\ \sin \theta \cos s \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial^2 \mathbf{r}_p}{\partial s^2} = -\mathbf{r}_p.$$

Подставляя полученные выражения в (3.1)—(3.5) и (3.7), можно найти необходимое угловое движение КА, обеспечивающее съемку всей траектории с заданными параметрами скорости бега изображения.

В качестве модельной рассматривается следующая задача (используются параметры спутника TabletSat разработки компании Спутникс):

- 1) наклонение плоскости траектории составляет 90° ;
- 2) ψ_0 — угол между первой осью ИСК и линией узлов — в начальный момент времени равен нулю;
- 3) начальная точка маршрута расположена в экваториальной плоскости;
- 4) КА движется по орбите с эксцентриситетом 0.002, параметром 6980 км, наклонением 98° и долготой восходящего узла 0° ;
- 5) в начальный момент времени КА находится на первой оси ИСК;
- 6) тензор инерции спутника есть $diag(2, 3, 4)$;
- 7) управление вычисляется два раза в секунду;
- 8) размеры пикселя ПЗС-линейки составляют 5.5×5.5 мкм;
- 9) пространственное разрешение составляет 14×14 м;
- 10) время экспозиции равно 3 мс.

Скорость бега изображения вычисляется по формуле

$$V = \frac{l}{T},$$

где l есть размер пикселя, а T — время экспозиции. После подстановки и округления $V = 1.8 \cdot 10^{-3}$ м.

Результаты моделирования представлены ниже на рисунках.

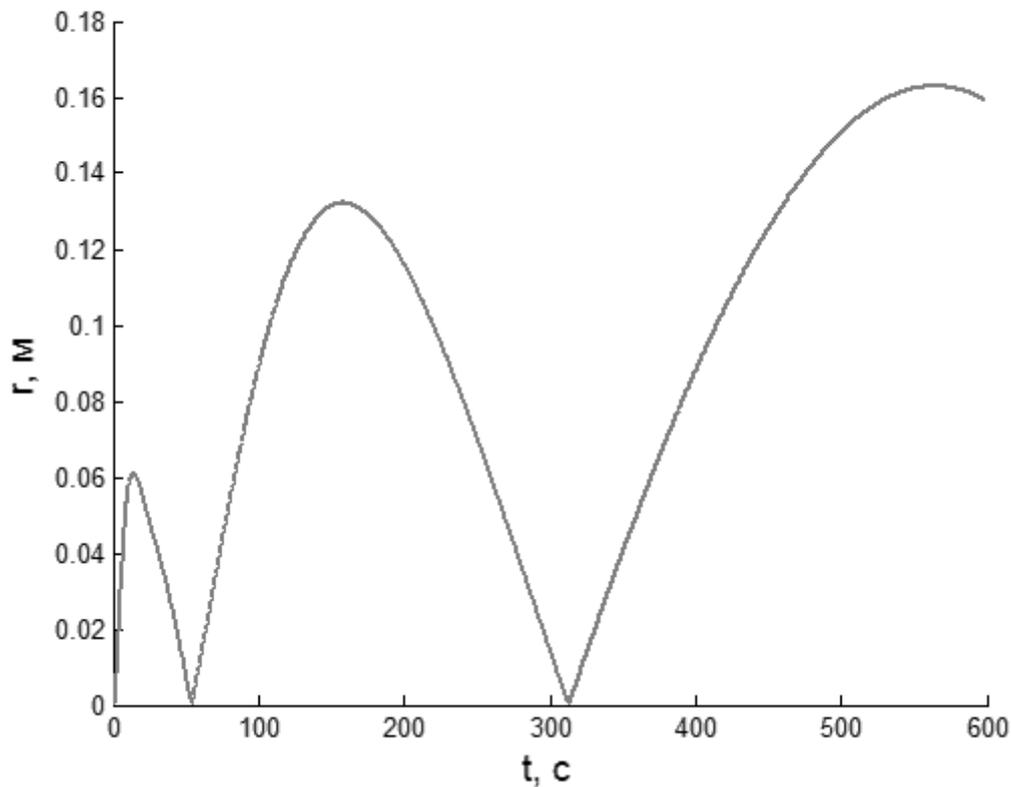


Рис. 3.1. Отклонение камеры от траектории

Отклонение камеры от снимаемого маршрута за время съемки составило меньше метра, что, учитывая пространственное разрешение, является удовлетворительным результатом. Стоит заметить, что это — ошибка в отклонении от снимаемой траектории. Отклонение же от рассчитанной точки визирования несколько больше и составляет несколько десятков метров (рис. 3.2).

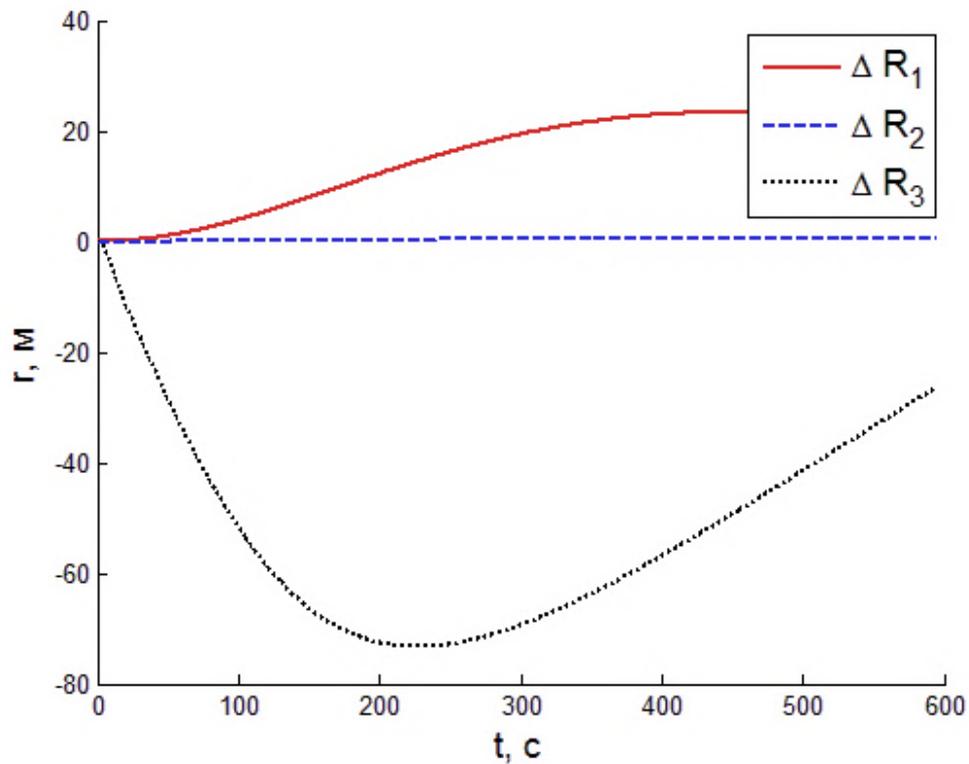


Рис. 3.2. Отставание камеры от расчетного значения

Таким образом, съемка искомой траектории происходит с некоторым отставанием. Связано это с тем, что требование на скорость бега изображения выполняется не абсолютно точно (рис. 3.3).

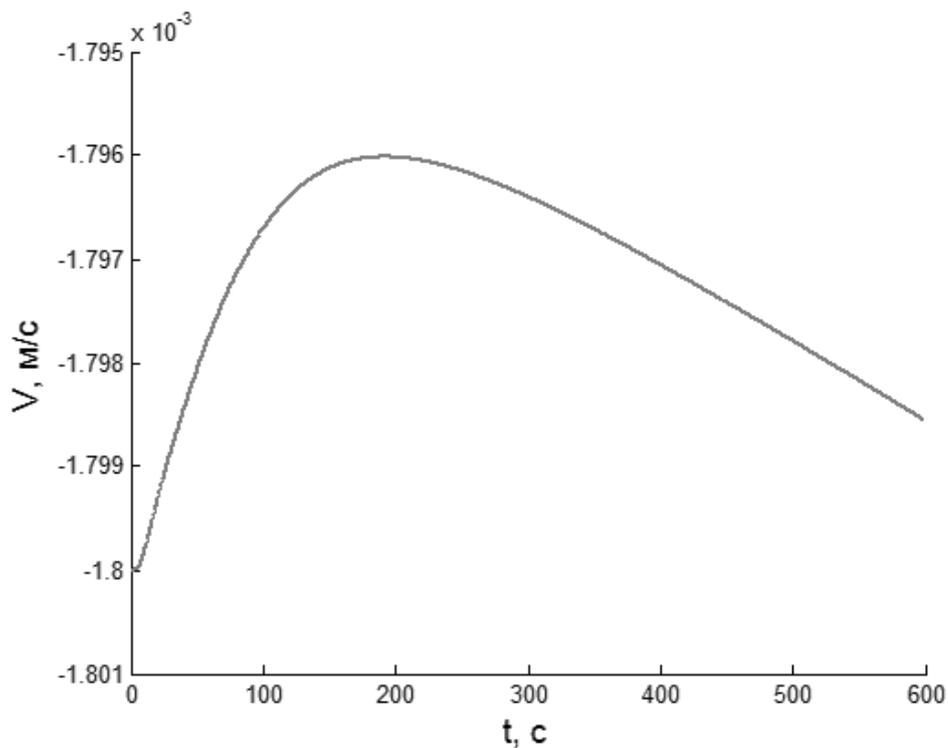


Рис. 3.3. Горизонтальная скорость бега изображения

В то же время, условие равенства нулю значения вертикальной скорости бега изображения выполняется с высокой точностью.

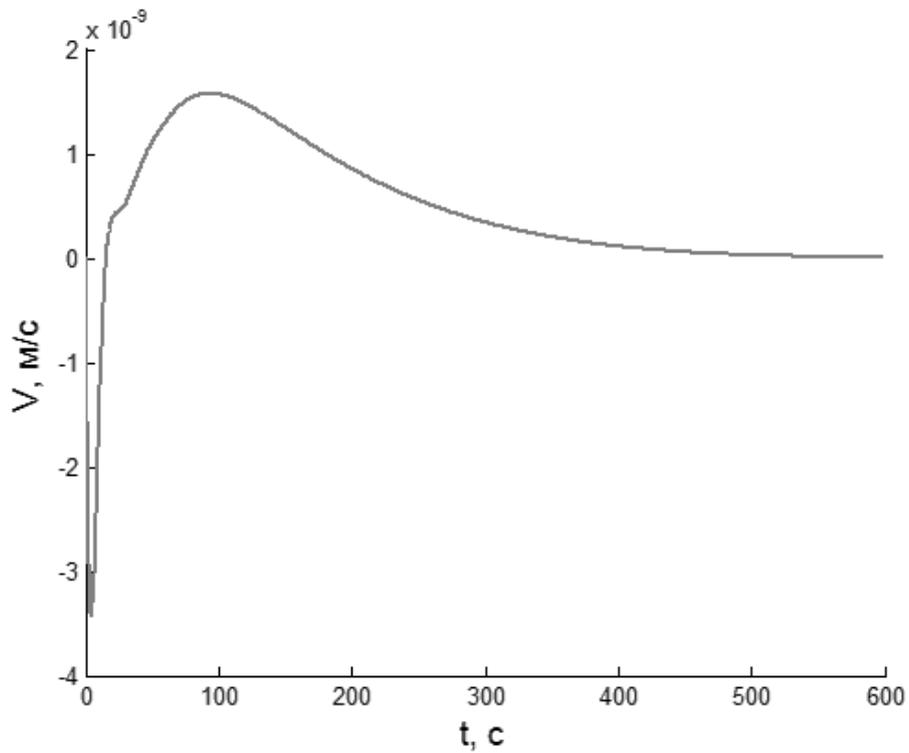


Рис. 3.4. Вертикальная скорость бега изображения

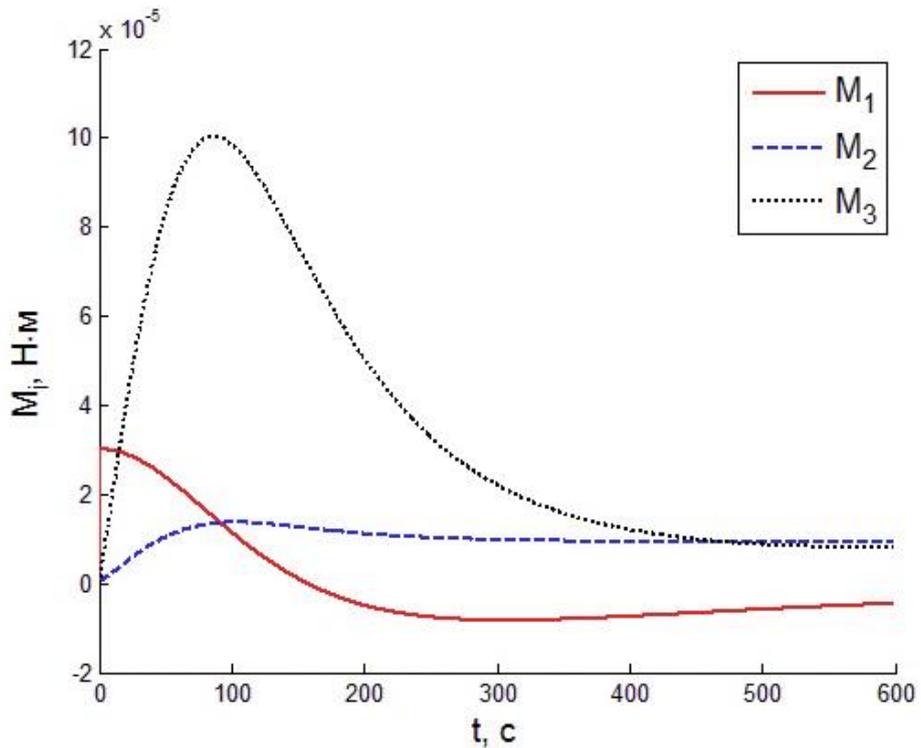


Рис. 3.5. Управляющие моменты

Как и в задаче отслеживания точки на поверхности Земли, управляющие моменты довольно малы и достижимы с помощью актюаторов, устанавливаемых на малые КА. Стоит отметить, что возникающие ошибки, указанные на рис. 3.1–3.4 уменьшаются пропорционально при уменьшении шага управления.

3.3 Синтез маршрута с использованием сплайнов

К сожалению, лишь малая часть маршрутов на поверхности Земли может быть задана описанным выше способом. Наиболее часто встречается описание маршрута, заданное в виде набора узловых точек, через которые он проходит. В такой постановке задачи является целесообразным использование сплайнов [15]. При этом требуется, чтобы построенная с их помощью траектория была дважды непрерывно дифференцируема (это является одним из требований, накладываемых на траекторию при построении алгоритма синтеза углового движения КА в п. 3.1).

Будем строить траекторию на поверхности эллипсоида Красовского. При этом узловые точки заданы своими координатами (широтой и долготой). С помощью сплайна строится дважды непрерывно дифференцируемая функция для широты и долготы соответственно, после чего по формулам

$$\mathbf{r}_p(s) = h(\lambda, \varphi) \begin{pmatrix} \cos \lambda \cos \varphi \\ \sin \lambda \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{pmatrix}, \quad \varphi = \varphi(s), \quad \lambda = \lambda(s) \quad (3.8)$$

строится траектория в пространстве, где s есть некоторый параметр (в качестве такого параметра может быть выбрана длина кривой). Здесь $h(\lambda, \varphi)$ есть высота точки эллипсоида с заданными координатами. В случае использования модели эллипсоида вращения, эта функция зависит только от широты точки:

$$h(\varphi) = \frac{1}{\sqrt{\frac{\cos^2 \varphi}{a^2} + \frac{\sin^2 \varphi}{b^2}}},$$

где a и b есть большая и малая полуоси эллипсоида соответственно.

Для построения функций широты и долготы используется сплайн Эрмита [15], а в качестве параметра траектории — расстояние между соседними узловыми точками. Выражение для функции принимает следующий вид:

$$\mathbf{f}(t) = (2t^3 - 3t^2 + 1)\mathbf{r}_k + (t^3 - 2t^2 + t)\mathbf{m}_k + (-2t^3 + 3t^2)\mathbf{r}_{k+1} + (t^3 - t^2)\mathbf{m}_{k+1},$$

$$t = \frac{s - s_k}{s_{k+1} - s_k}, \quad t \in [0, 1]. \quad (3.9)$$

Здесь s есть параметр траектории, s_k — его значение в узловых точках, \mathbf{r}_k — узловые точки, \mathbf{m}_k — значение производной функции в узловых точках с точностью до множителя. В общем случае значение производной в узловых точках неизвестно, поэтому могут быть использованы различные приближения. Однако, так как на функцию накладываются ограничения по гладкости, то, как будет показано в дальнейшем, произвольным образом могут выбираться лишь производные на первом участке.

Для того, чтобы получившаяся функция была дважды непрерывно дифференцируемой, необходимо обеспечить непрерывность двух первых производных в узловых точках (между ними функция является полиномом, то есть бесконечно дифференцируема). Рассматривая функции на двух последовательных интервалах

$$\mathbf{f}_1(t) = (2t^3 - 3t^2 + 1)\mathbf{r}_1^{(1)} + (t^3 - 2t^2 + t)\mathbf{m}_1^{(1)} + (-2t^3 + 3t^2)\mathbf{r}_2^{(1)} + (t^3 - t^2)\mathbf{m}_2^{(1)},$$

$$\mathbf{f}_2(t) = (2t^3 - 3t^2 + 1)\mathbf{r}_1^{(2)} + (t^3 - 2t^2 + t)\mathbf{m}_1^{(2)} + (-2t^3 + 3t^2)\mathbf{r}_2^{(2)} + (t^3 - t^2)\mathbf{m}_2^{(2)},$$

$$\mathbf{r}_2^{(1)} = \mathbf{r}_1^{(2)},$$

можно получить условия склейки:

$$\mathbf{f}_1'(1) = \mathbf{f}_2'(0), \quad \mathbf{f}_1''(1) = \mathbf{f}_2''(0).$$

Таким образом, накладываются следующие ограничения на $\mathbf{m}_j^{(i)}$:

$$\mathbf{m}_1^{(2)} = \mathbf{m}_2^{(1)} \frac{s_2^{(2)} - s_1^{(2)}}{s_2^{(1)} - s_1^{(1)}},$$

$$\mathbf{m}_2^{(2)} = 3\mathbf{r}_2^{(2)} - 2\mathbf{m}_1^{(2)} - 3\mathbf{r}_1^{(2)} - \left(\frac{s_2^{(2)} - s_1^{(2)}}{s_2^{(1)} - s_1^{(1)}} \right)^2 (3\mathbf{r}_1^{(1)} + \mathbf{m}_1^{(1)} - 3\mathbf{r}_2^{(1)} + 2\mathbf{m}_2^{(1)}).$$

При этом важно не забывать, что производная берется по параметру траектории s , а не по t — они отличаются на множитель $1/(s_{\text{кон}} - s_{\text{нач}})$. Единственными свободными параметрами при построении сплайна являются значения производной на концах первого интервала.

Как уже говорилось выше, сплайн строится для широты φ и долготы λ узловых точек. Далее, по формулам (3.8) строится функция, задающая отслеживаемый маршрут, а после определяется угловое движение спутника.

Стоит отметить, что при построении дважды непрерывно дифференцируемого сплайна возникают сложности: функция начинает сильно осциллировать (рис. 3.6, $\varphi_n = 0.05n/3$, $\lambda_n = 0.05n$, $n = \overline{0..11}$). При таких осцилляциях значения управляющих моментов могут быть очень большими, поэтому дважды гладкий сплайн был заменен на один раз непрерывно дифференцируемый (рис. 3.7). В этом случае условия склейки имеют вид

$$\mathbf{m}_1^{(2)} = \mathbf{m}_2^{(1)} \frac{s_2^{(2)} - s_1^{(2)}}{s_2^{(1)} - s_1^{(1)}}.$$

При этом исчезает условие на производную в конце следующего отрезка. Она может выбираться различными способами, в настоящей работе используется численное дифференцирование.

Применение такого сплайна в общем случае приводит к резким скачкам в правой части закона управления (1.6), что может стать причиной возникновения ошибок в управлении. Однако возникающие возмущения малы по сравнению с остальными слагаемыми в (1.6).

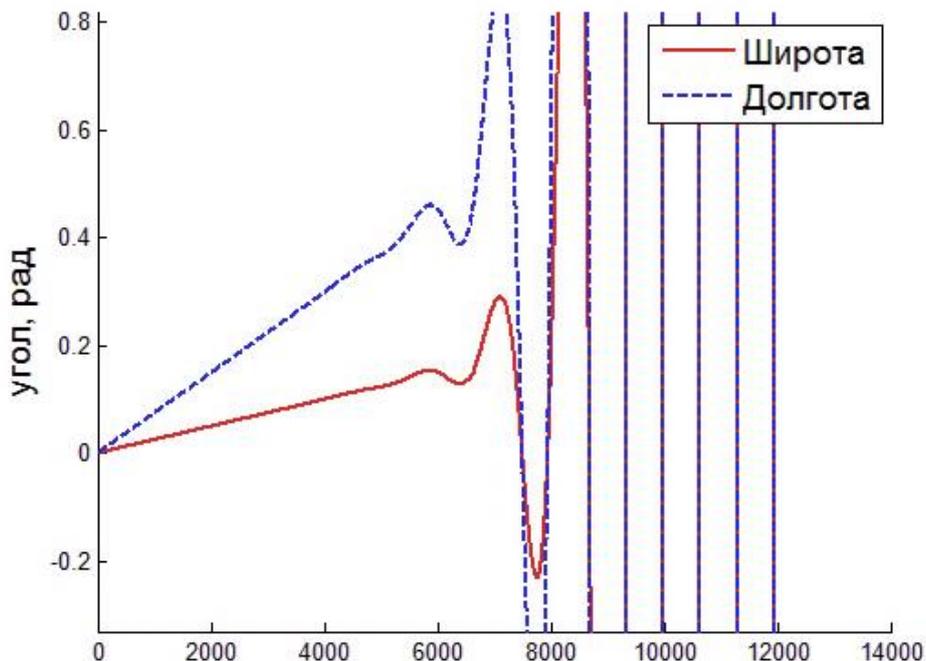


Рис. 3.6. Широта и долгота точек траектории в случае использования дважды непрерывно дифференцируемого сплайна

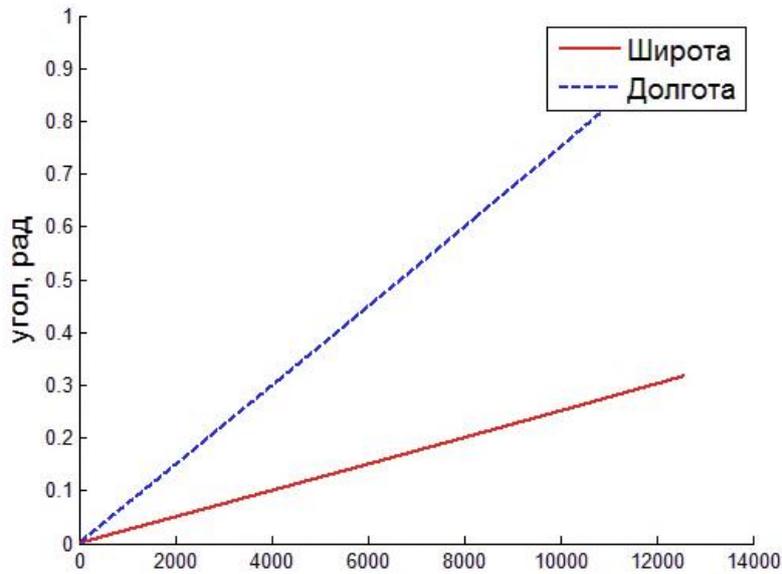


Рис. 3.7. Широта и долгота точек траектории при использовании один раз непрерывно дифференцируемого сплайна

Для проверки работы алгоритма моделировалась та же задача, что и в п. 3.2.1. Единственное отличие заключается в способе задания снимаемой траектории: широта и долгота узловых точек задаются как

$$\varphi_n = 0.05n, \lambda_n = 0, n = \overline{0..11}$$

После построения траектории рассчитывается угловое движение спутника. Результаты моделирования представлены ниже на рисунках.

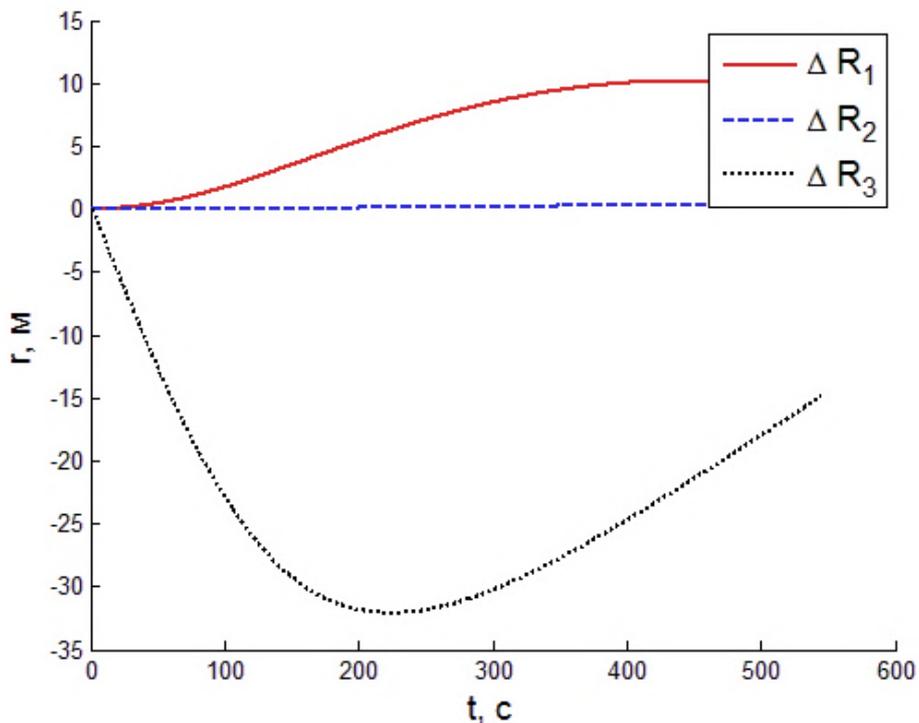


Рис. 3.8. Отставание камеры от расчетного значения

Как видно из рис. 3.8, отклонение от расчетной точки наблюдения не превышает десяти метров.

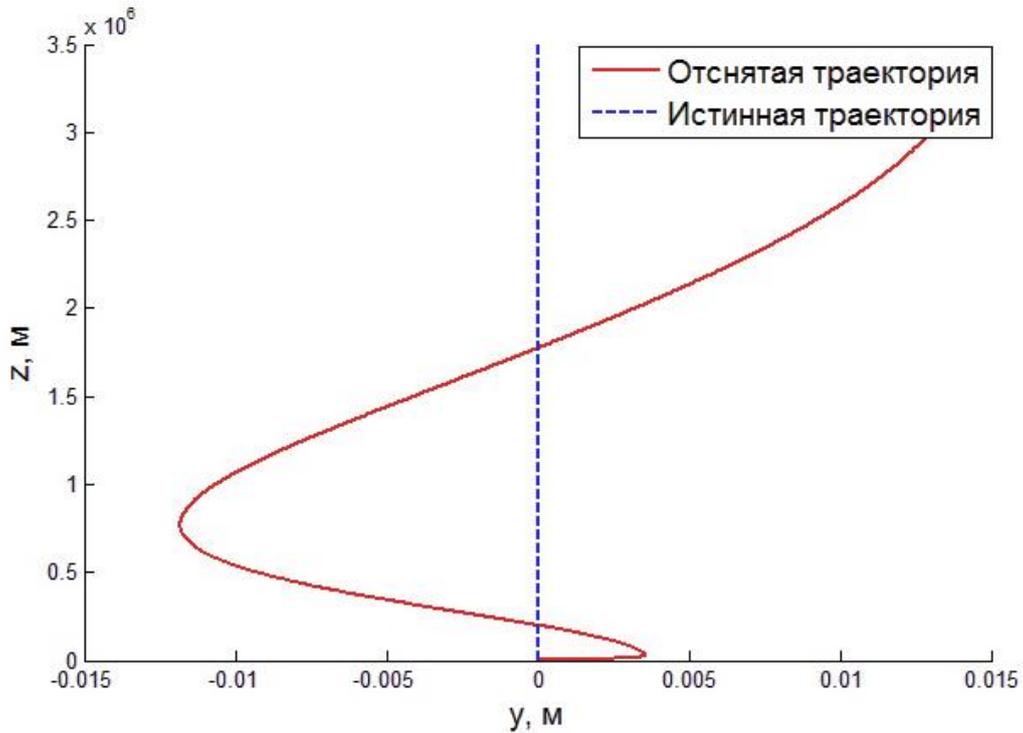


Рис. 3.9. Сравнение снятой и реальной траекторий

На рис. 3.9 представлены проекции снятой и реальной траекторий на плоскость Ouz вращающейся системы координат, связанной с Землей. При этом хорошо видно, что отклонение от траектории мало и соответствует спутникам сверхвысокого разрешения.

Как видно из рис. 3.10 и 3.11, требования, накладываемые на скорость бега изображения, выполняются с высокой точностью. Требуемое управление, как и в предыдущих случаях, оказывается достижимым стандартными исполнительными элементами (рис. 3.12).

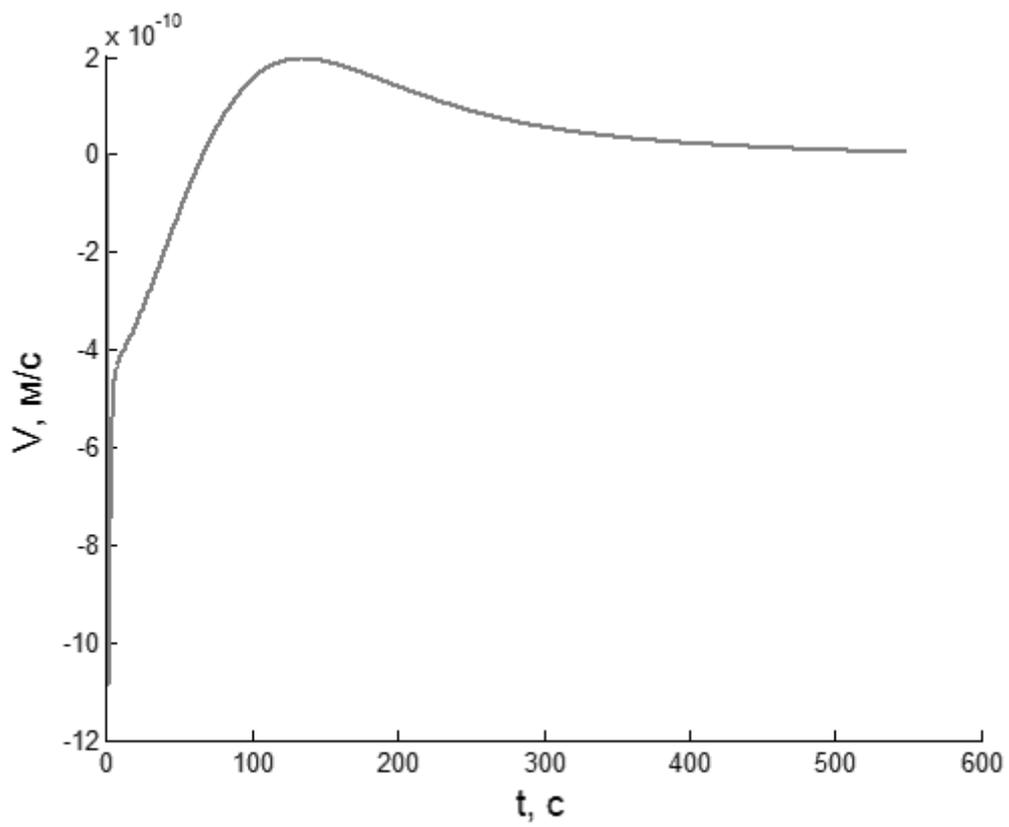


Рис. 3.10. Вертикальная скорость бега изображения

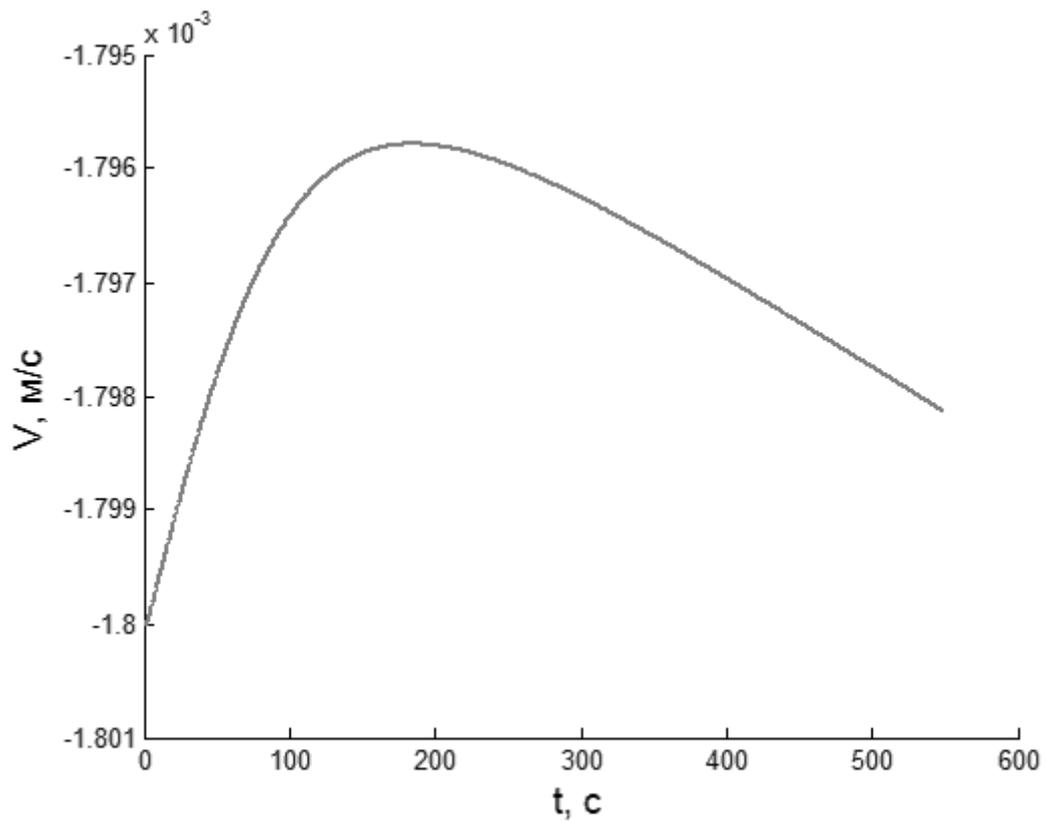


Рис. 3.11. Горизонтальная скорость бега изображения

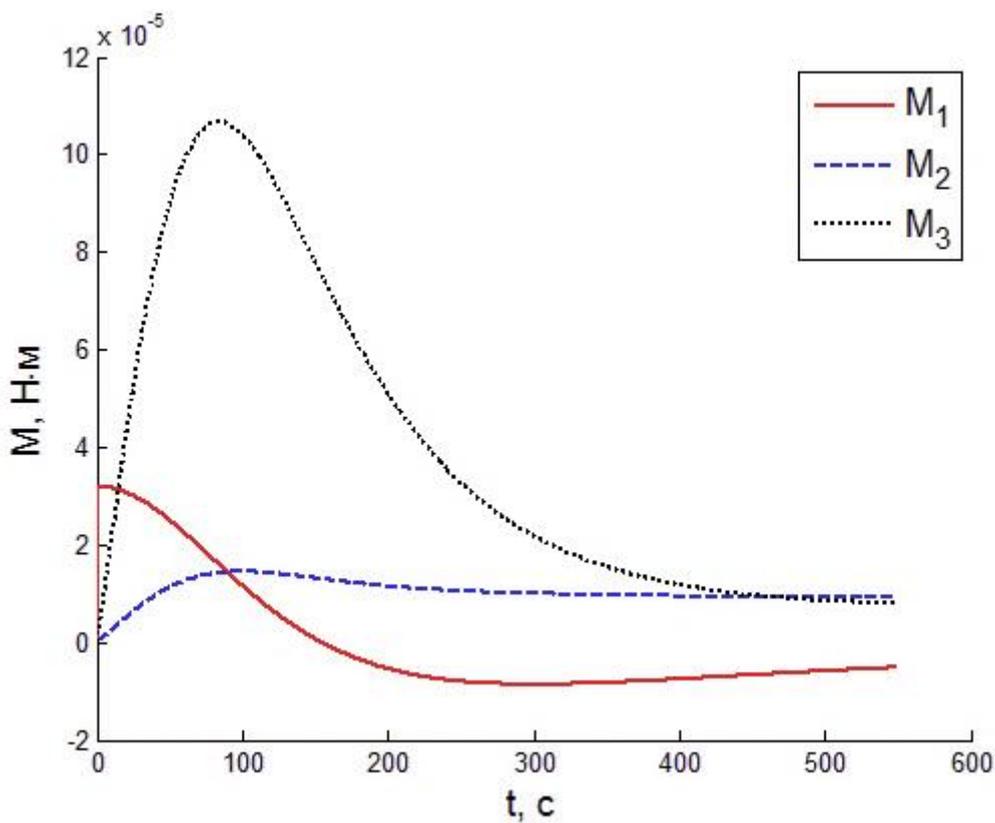


Рис. 3.12. Управляющие моменты

Здесь, как и в предыдущих разделах, возникающая ошибка уменьшается при уменьшении шага управления.

Заключение

В работе рассмотрена задача синтеза углового движения космического аппарата при дистанционном зондировании Земли. Рассмотрены два типа чувствительных элементов, устанавливаемых на КА, и предложены алгоритмы построения опорного движения для каждого из них. Проведено численное моделирование с использованием указанных алгоритмов.

Авторы выражают благодарность Овчинникову М.Ю. за ценные замечания и помощь в подготовке препринта к печати.

Литература

1. Kwok R. Satellite remote sensing of sea-ice thickness and kinematics: a review // *J. Glaciol.* 2010. Т. 56. № 200. С. 1129–1140.
2. Knorr W. et al. Combined use of weather forecasting and satellite remote sensing information for fire risk , fire and fire impact monitoring // *Comput. Ecol. Softw.* 2011. Т. 1. № August 2007. С. 112–120.
3. Jones M.O. et al. Satellite passive microwave remote sensing for monitoring global land surface phenology // *Remote Sens. Environ.* 2011. Т. 115. № 4. С. 1102–1114.
4. Kimball J.S. et al. Satellite radar remote sensing of seasonal growing seasons for boreal and subalpine evergreen forests // *Remote Sens. Environ.* 2004. Т. 90. № 2. С. 243–258.
5. Бутырин С.А. Кинематический синтез программного углового движения космического аппарата при оптико-электронной съемке земли // *Известия Самарского научного центра Российской академии наук.* 2007. Т. 9. № 3. С. 664–670.
6. Бутырин С.А. Программный комплекс для расчета и визуализации маршрутов оптико-электронной съемки Земли // *Вестник Самарского государственного технического университета.* 2007. Т. 2. С. 11–17.
7. B. Wie, J.Lu. Feedback control logic for spacecraft eigenaxis rotations under slew rate and control constraints // *J. Guid. Control. Dyn.* 1995. Т. 18. № 6. С. 1372–1379.
8. B.Wie, P.M.Barba. Quaternion feedback for spacecraft large angle maneuvers. // *J. Guid. Control. Dyn.* 1985. Т. 8. № 3. С. 360–365.
9. P.Tsitorias. New Control Laws for the Attitude Stabilization of Rigid Bodies // *Proceedings of 14th IFAC Symposium on Automatic Control in Aerospace, Palo Alto, CA, , 1994.* С. 316–321.
10. Яковенко Г.Н. Краткий курс аналитической динамики. М.: БИНОМ, 2004.
11. Бранец В.Н., Шмыглевский И.П. Применение кватернионов в задачах ориентации твердого тела. М.: Издательство “Наука,” 1973.
12. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004.
13. Космический комплекс «Канопус-В» [Электронный ресурс]. URL: http://www.vniiem.ru/ru/index.php?option=com_content&view=article&id=468:-1-r&catid=37:spaceprograms&Itemid=62 (дата обращения: 17.03.2014).

14. SPOT-5 [Электронный ресурс]. URL:
http://en.wikipedia.org/wiki/SPOT_satellite (дата обращения: 17.03.2014).
15. Роджерс Д., Адамс Д. Математические основы машинной графики. М.: Мир, 2001.

Оглавление

Введение.....	3
1. Системы координат, управление.....	4
1.1 Системы координат.....	4
1.2 Построение управления.....	5
2. Построение опорного движения в случае ПЗС-матрицы.....	7
2.1 Постановка задачи и уравнения движения.....	7
2.2 Построение углового движения.....	8
2.3 Модельная задача.....	10
3. Построение опорного движения в случае ПЗС-линейки.....	14
3.1 Постановка задачи и уравнения движения.....	14
3.2 Синтез маршрута с использованием большого круга сферы Земли.....	17
3.3 Синтез маршрута с использованием сплайнов.....	22
Заключение.....	28
Литература.....	29