Горючкина И. В.

О сходимости обобщенного степенного ряда, являющегося формальным решением алгебраического ОДУ

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
ИМЕНИ М.В. КЕЛДЫША

И. В. Горючкина

О СХОДИМОСТИ ОБОБЩЕННОГО СТЕПЕННОГО РЯДА, ЯВЛЯЮЩЕГОСЯ ФОРМАЛЬНЫМ РЕШЕНИЕМ АЛГЕБРАИЧЕСКОГО ОДУ

Москва, 2014 г.

УДК 517.91

И. В. Горючкина. О сходимости обобщенного степенного ряда, являющегося формальным решением алгебраического ОДУ. Препринт Института прикладной математики им. М. В. Келдыша РАН, Москва, 2014.

В препринте Института прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН (№ 65, 2013) Гоючкиной И.В. было предложена схема доказательства теоремы о достаточном условии сходимости вблизи нуля обобщенного степенного ряда, который формально удовлетворяет алгебраическому (полиномиальному) ОДУ. При этом рассматривался случай, когда множество показателей степени этого обобщенного степенного ряда имеет лишь одну нерациональную образующую. Здесь дано подробное аналитическое доказательство этой теоремы.

I. V. Goryuchkina. On convergence of generalized power series that is the formal solution of algebraic ODE. Preprint of the Keldysh Institute of Applied Mathematics of RAS. Moscow, 2014.

In preprint of Keldysh Institute of Applied Mathematic of RAS (No. 65, 2013) Goryuchkina I.V. proposed the sketch of the proof of the theorem on sufficient condition of convergence near zero of generalized power series, that formally satisfies to algebraic (polynomial) ordinary differential equation. At that there considers the case that the set of power exponents of this generalized power series has only one nonrational generatrix. Here we give analytic proof of this theorem in details.

Глубоко благодарю Гонцова Р.Р. за замечания к результатам препринта и их изложению.

ВВЕДЕНИЕ

В работе [1] рассматривалось обыкновенное дифференциальное уравнение

$$f(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0, \tag{1}$$

где $f(x, y, y', \dots, y^{(n)})$ – это многочлен своих переменных, и были предложены методы вычисления его формальных решений вида

$$y = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \, x^{s_k}, \quad c_k \in \mathbb{C}, \ s_k \in \mathbb{R}, \tag{2}$$

$s_k \to +\infty$ при $k \to +\infty$, $\ -\infty < s_k < s_{k+1} < \dots$.

Основные понятия, используемые в этой работе, – это дифференциальная сумма, носитель и многоугольник дифференциальной суммы.

Дифференциальной суммой $f(x, y, y', \dots, y^{(n)})$ называется конечная сумма членов вида

$$\alpha \, x^p \, y^{r_0} (y')^{r_1} \cdot \ldots \cdot (y^{(n)})^{r_n}, \ \alpha \in \mathbb{C}, \ p, \ r_0, \ \dots, \ r_n \in \mathbb{R}. \tag{3}$$

Каждому слагаемому дифференциальной суммы ставится в соответствие точка $(q_1, q_2) = (p - \sum\limits_{k=0}^{n} k \, r_k, \ \sum\limits_{k=0}^{n} r_k) \in \mathbb{R}^2$. Совокупность всех таких точек называется *носителем* дифференциальной суммы и обозначается $\mathbf{S}(f)$. Выпуклая оболочка носителя называется *многоугольником* дифференциальной суммы $f(x, y, y', \dots, y^{(n)})$ (или уравнения (1)) и обозначается $\Gamma(f)$. Множество целых неотрицательных чисел обозначим $\mathbb{Z}_+$.

Кроме того, в [1] для формального решения

$$u = \sum_{k=\mu+1}^{\infty} c_k \, x^{s_k - s_\mu} \tag{4}$$

($\mu \in \mathbb{Z}_+$, $c_k \in \mathbb{C}$, $s_k \in \mathbb{R}$, $s_k \to +\infty$ при $k \to +\infty$, $\ -\infty < s_k < s_{k+1}$) уравнения специального вида[1]

$$\mathcal{L}(x) u + g(x, u, u', \dots, u^{(n)}) = 0, \tag{5}$$

[1] Левая часть уравнения (5) – это дифференциальная сумма, $\mathcal{L}(x)$ – это линейный дифференциальный оператор, $\mathcal{L}(x) \not\equiv 0$, носитель $\mathbf{S}(\mathcal{L}(x)u) = \{(v, 1)\}$, точка $(v, 1)$ является вершиной многоугольника уравнения, на луче $\{q_1 < v, \ \ q_2 = 1\}$ нет точек носителя этого уравнения, носитель дифференциальной суммы $g(x, u, u', \dots, u^{(n)})$ не содержит точки $(v, 1)$.

была сформулирована теорема 3.4 (гипотеза) о достаточном условии сходимости этого решения: *формальное решение* (4) *обыкновенного дифференциального уравнения* (5) *равномерно сходится для достаточно малых* $|x|$ *и* $|\arg x| \leqslant \pi$, *если порядок старшей производной в* $\mathcal{L}(x)u$ *равен* n.

Также в работе [1] указано, что все утверждения, сформулированные для случая вещественных показателей степени в уравнении и формальном решении, переносятся на случай вещественных показателей степени в уравнении и комплексных показателей степени в формальном решении.

Используя оператор $\delta = x\dfrac{d}{dx}$, уравнение (1) можно записать в виде

$$F(x, y, \delta y, \ldots, \delta^n y) = 0, \tag{6}$$

где $F(x, y, \delta y, \ldots, \delta^n y)$ – это многочлен своих переменных. Отметим, что дифференциальный оператор $x^n \dfrac{d^n}{dx^n}$ выражается через оператор δ по формуле

$$x^n \frac{d^n}{dx^n} = \prod_{j=0}^{n-1} (\delta - j),\ \ n \in \mathbb{N}.$$

Например, $x^2 y'' = \delta(\delta - 1)y = \delta^2 y - \delta y$.

В первом параграфе этой работы рассматривается случай, когда уравнение (6) имеет формальное решение

$$y = \sum_{k=0}^{\infty} c_k\, x^{s_k}, \qquad c_k,\ s_k \in \mathbb{C}, \tag{7}$$

$\operatorname{Re} s_k \to +\infty$ при $k \to +\infty$, $-\infty < \operatorname{Re} s_k \leqslant \operatorname{Re} s_{k+1}$, и, если $\operatorname{Re} s_k = \operatorname{Re} s_{k+1}$, то $\operatorname{Im} s_k < \operatorname{Im} s_{k+1}$, число показателей степени s_k с одинаковой вещественной частью $\operatorname{Re} s_k$ конечно и доказывается

Лемма 1. *Если для уравнения* (6) *с формальным решением* (7) *выполняется условие*

$$\sum_{j=0}^{n} \left| \frac{\partial F(x, y_0, y_1, \ldots, y_n)}{\partial y_j} \right| \not\equiv 0 \quad \textit{на решении } (7),\ \ y_j = \delta^j y, \tag{8}$$

тогда существует такой номер $\mu' \in \mathbb{Z}_+$, *что для любого целого* $\mu \geqslant \mu'$, *преобразование*

$$y = \sum_{k=0}^{\mu} c_k\, x^{s_k} + x^{s_\mu} u \tag{9}$$

приводит уравнение (6) *к уравнению специального вида*

$$x^{\varepsilon}\ [\, L(\delta)u + N(x, u, \delta u, \ldots, \delta^n u)\,] = 0, \tag{10}$$

где $\varepsilon \in \mathbb{C}$, $L(\delta)$ *– это дифференциальный оператор порядка меньшего или равного* n*, функция* $N(x, u, \delta u, \dots, \delta^n u)$ *– это сумма членов вида*

$$\alpha\, x^{q_1}\, u^{q_{20}} (\delta u)^{q_{21}} \cdot \ldots \cdot (\delta^n u)^{q_{2n}}, \tag{11}$$

$\alpha,\ q_1 \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Re} q_1 \geqslant 0$, $q_{20}, \dots, q_{2n} \in \mathbb{Z}_+$, *и если* $q_1 = 0$, *то* $q_{20} + \dots + q_{2n} > 1$.

Формальные ряды вида (7) будем называть *обобщенными степенными рядами.*

Если многочлен $F(x, y_0, y_1, \dots, y_n)$ и все его частные производные по y_0, y_1, …, y_n до k-го порядка обращаются в нуль тождественно на решении (7), а частная производная $k+1$-го порядка по переменной y_j не обращается в нуль тождественно, то в качестве исходного многочлена следует рассматривать k раз продифференцированный по y_j многочлен $F(x, y_0, y_1, \dots, y_n)$. Таким образом, задача изучения решений уравнения (6) всегда сводится к задаче изучения решений уравнения (10).

Во втором параграфе статьи изучается формальное решение (7) уравнения (6) в предположении, что показатели степени s_k этого решения также удовлетворяют условиям

$$s_0, \dots, s_{\mu-1} \in \mathbb{Z},\ \ s_\mu \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Q},\ \ s_\mu,\ s_{\mu+1},\ \dots \in \mathbf{K} \subset \mathbb{C},\ c_\mu \neq 0, \tag{12}$$

где

$$\mathbf{K} = \{s_\mu + m_1 r_1 + m_2 r_2,\ m_1, m_2 \in \mathbb{Z}_+\},^{2} \tag{13}$$

$r_1,\ r_2 \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Re} r_1, \operatorname{Re} r_2 > 0$, r_1 и r_2 являются нетривиальными линейными комбинациями от s_μ и 1 с целыми коэффициентами (т. е. s_μ – единственная комплексная образующая множества $\mathbf{K}$) и линейно независимы над $\mathbb{Z}$. Общий случай конечного числа образующих множества $\mathbf{K}$ здесь не рассматривается. Кроме того, предполагается что уравнение (10) получается из уравнения (6) заменой зависимой переменной (9) с тем же самым номером μ.

Заметим, что всем известным формальным решениям уравнений Пенлеве[3], соответствуют множества показателей степени, каждое из которых образовано не более чем одним нерациональным числом.

В третьем параграфе статьи, с учетом перечисленных в предыдущем абзаце предположений, доказывается

[2]Множество (13) можно было бы записать в более простом виде $\mathbf{K} = \{l_1 + l_2 s_\mu,\ \ l_1, l_2 \in \mathbb{Z}\}$. Но в разделе 3 данной работы используется тот факт, что в формуле (13) числа $m_1,\ m_2 \in \mathbb{Z}_+$.

[3]В частности, все формальные решения уравнений Пенлеве, имеющие вид обобщенных степенных рядов, известны [2] – [6].

Теорема 1. *Если в уравнении* (10)*, которое получается из уравнения* (6) *с решением* (7) *заменой переменной* (9)*, оператор* $L(\delta)$ *имеет порядок* n*, то формальное решение*

$$u = \sum_{k=\mu+1}^{\infty} c_k\, x^{s_k - s_\mu} \tag{14}$$

равномерно сходится для достаточно малых $|x|$ *и* $|\arg x| < \pi$.

1. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 1

Отметим, что в работе Мальгранжа [7] приведено доказательство леммы 1 в случае целых показателей степени формального решения (7) уравнения (6). Его подход применим и в случае, когда показатели степени $s_k \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Re} s_k \to +\infty$ при $k \to +\infty$, $-\infty < \operatorname{Re} s_0 \leqslant \operatorname{Re} s_1 \leqslant \operatorname{Re} s_2 \leqslant \dots$, число показатателей степени s_k с одинаковой вещественной частью $\operatorname{Re} s_k$ конечно. Далее будем использовать технические приемы работы [7].

Преобразование (9) запишем в виде композиции преобразований $y = x^{s_0}\, v$ и

$$v = \sum_{k=0}^{\mu} c_k\, x^{s_k - s_0} + x^{s_\mu - s_0} u. \tag{15}$$

Сначала сделаем в уравнении (6) преобразование $y = x^{s_0} v$ и домножим результат на x в некоторой неотрицательной степени ε_0, после чего получим уравнение

$$H(x, v, \delta v, \dots, \delta^n v) = 0, \tag{16}$$

где $H(x, v, \delta v, \dots, \delta^n v)$ – это сумма членов вида

$$\alpha\, x^{q_1}\, v^{q_{20}} (\delta v)^{q_{21}} \cdot \ldots \cdot (\delta^n v)^{q_{2n}},$$

$\alpha,\ q_1 \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Re} q_1 \geqslant 0$, $q_{20}, \dots, q_{2n} \in \mathbb{Z}_+$. Уравнение (16) имеет решение $v = \varphi$, где

$$\varphi = \sum_{k=0}^{\infty} c_k\, x^{s_k - s_0} \quad \text{с} \quad \operatorname{Re}(s_k - s_0) \geqslant 0. \tag{17}$$

Обозначим

$$\varphi^{\,\mu} = \sum_{k=0}^{\mu} c_k\, x^{s_k - s_0}, \tag{18}$$

тогда $\varphi = \varphi^\mu + x^{s_\mu - s_0}\psi$ и $\Phi = (\varphi, \delta\varphi, \dots, \delta^n\varphi) = \Phi^\mu + x^{s_\mu - s_0}\Psi$, где

$$\Psi = (\psi, (\delta + s_\mu - s_0)\psi, \dots, (\delta + s_\mu - s_0)^n \psi).$$

Легко проверить, что условие (8) для уравнения (6) с решением (7) равносильно условию

$$\sum_{j=0}^{n} \left| \frac{\partial H}{\partial v_j}(x, \Phi) \right| \not\equiv 0, \quad v_j = \delta^j v, \tag{19}$$

для уравнения (16) с решением (17). Применяя формулу Тейлора к соотношению $H(x, \Phi) = 0$, получаем

$$\begin{gathered} H(x, \Phi^{\mu} + x^{s_\mu - s_0}\Psi) = H(x, \Phi^{\mu}) + x^{s_\mu - s_0} \sum_{i=0}^{n} \frac{\partial H}{\partial v_i}(x, \Phi^{\mu})\ \psi_i + \\ + \frac{x^{2\,(s_\mu - s_0)}}{2} \sum_{i,\,j=0}^{n} \frac{\partial^2 H}{\partial v_i \partial v_j}(x, \Phi^{\mu})\ \psi_i \psi_j\ + \cdots = 0, \quad \psi_i = (\delta + s_\mu - s_0)^i \psi. \end{gathered} \tag{20}$$

Определим функцию $p(\varphi)$, которая каждому формальному степенному ряду φ (с постоянными коэффициентами и комплексными показателями степени, которые упорядочены по неубыванию вещественных частей, и число показателей степени с одинаковой вещественной частью конечно) ставит в соответствие вещественное число, равное наименьшему среди всех вещественных частей показателей степени этого ряда, и пусть $p(0) = +\infty$.

Пусть $\theta \in \mathbb{C}$ и

$$\operatorname{Re}\theta = \min\left\{ p\left(\frac{\partial H}{\partial v_0}(x, \Phi)\right),\ \ldots,\ p\left(\frac{\partial H}{\partial v_n}(x, \Phi)\right) \right\}.$$

Напомним, что функция $H(x, v_0, \ldots, v_n)$ и все ее неравные тождественно нулю частные производные по переменным $v_0, \ldots, v_n$ содержат переменные $v_0, \ldots, v_n$ в целых неотрицательных степенях, а x – в комплексных степенях с неотрицательными вещественными частями.

Пусть μ такой, что $\operatorname{Re}(s_\mu - s_0) \geqslant \operatorname{Re}\theta$ и $\operatorname{Re} s_{\mu+1} > \operatorname{Re} s_\mu$ (напомним, что ряд ψ начинается со степени $s_{\mu+1} - s_\mu$), тогда для любого номера $i = 0, \ldots, n$ выполнено неравенство

$$p\left(x^{s_\mu - s_0} \sum_{j=0}^{n} \frac{\partial^2 H}{\partial v_i \partial v_j}(x, \Phi^{\mu})\ \psi_j + \ldots \right) > \operatorname{Re}\theta. \tag{21}$$

Поскольку

$$\frac{\partial H}{\partial v_i}(x, \Phi) - \frac{\partial H}{\partial v_i}(x, \Phi^{\mu}) = x^{s_\mu - s_0} \sum_{j=0}^{n} \frac{\partial^2 H}{\partial v_i \partial v_j}(x, \Phi^{\mu})\ \psi_j + \ldots,$$

то

$$\min\left\{ p\left(\frac{\partial H}{\partial v_0}(x, \Phi^{\mu})\right),\ \ldots,\ p\left(\frac{\partial H}{\partial v_n}(x, \Phi^{\mu})\right) \right\} = \operatorname{Re}\theta. \tag{22}$$

Так как $V = \Phi$ формально удовлетворяет уравнению (16), то $H(x, \Phi^{\mu})$ – это конечная сумма. Члены этой суммы упорядочим согласно неубыванию вещественных частей показателей степени, и если несколько членов имеют одинаковые вещественные части показателей степени, то упорядочим эти члены по возрастанию мнимых частей показателей степени. Тогда первый член этой суммы имеет показатель степени $\theta + s_{\mu+1} - s_0$.

Далее в соотношении (20) среди линейных по $\psi_0, \psi_1, \dots, \psi_n$ членов выделим слагаемые вида $x^{\theta+s_\mu-s_0} A_j \psi_j, \ A_j \in \mathbb{C}$. Положим

$$L(\delta) = \sum_{j=0}^{n} A_j (s_\mu - s_0 + \delta)^j \not\equiv 0. \tag{23}$$

Тогда, положив $\varepsilon = \theta + s_\mu - s_0$, отделив $x^\varepsilon L(\delta)\psi$ от остальных слагаемых соотношения (20) и вынося общий множитель x^ε за скобку, получаем уравнение специального вида (10) с решением $u = \psi$. ■

2. СПЕЦИФИКА ИЗУЧАЕМЫХ УРАВНЕНИЯ И ЕГО РЕШЕНИЯ

Далее при $|x| \to 0, |\arg(x)| < \pi$ изучается формальное решение (7) уравнения (6) в предположении, что выполнены условия:

I. показатели степени решения (7) определены формулами (12) и (13);

II. уравнение (6) преобразованием (9) с тем же самым номером μ, что и в формулах (12) и (13), приводится к уравнению (10).

Тогда с помощью преобразования (9) эта задача сводится к задаче изучения решения (14) уравнения

$$L(\delta)u + N(x, u, \delta u, \dots, \delta^n u) = 0, \tag{24}$$

которое получается из уравнения (10) делением на x^ε. При этом показатели степени формального решения (14) лежат в множестве

$$\{m_1 r_1 + m_2 r_2, \ \ m_1, m_2 \in \mathbb{Z}_+, \ m_1 + m_2 > 0\} \subset \mathbb{C}, \tag{25}$$

где r_1 и r_2 те же, что и в формуле (13).

Каждому слагаемому вида (11) уравнения (24) поставим в соответствие точку $(q_1, q_2) \in \mathbb{C} \times \mathbb{Z}_+$, где $q_2 = q_{20} + \dots + q_{2n}$. Совокупность всех таких точек, соответствующих каждому слагаемому уравнения, будем называть *комплексным носителем уравнения* (24). Проекцию комплексного носителя на вещественную плоскость переменных $\operatorname{Re} q_1, q_2$ будем называть *вещественным носителем уравнения* (24) (или просто *носителем уравнения* (24)).

В третьем параграфе в доказательстве теоремы 1 делается переход от уравнения (24) с комплексными показателями степени к уравнению с целыми показателями степени, но с бо́льшим числом переменных. Для того чтобы совершить этот переход, нам необходимо знать структуру множества, которому принадлежат комплексные показатели степени уравнения (24). Докажем вспомогательную лемму о свойствах комплексного носителя уравнения (24).

Лемма 2. *Если для уравнения* (6) *и его решения* (7) *выполнены условия* I *и* II*, то комплексный носитель уравнения* (24) *лежит в множестве*

$$\{t_1 r_1 + t_2 r_2, \ \ t_1, \, t_2 \in \mathbb{Z}_+\} \times \mathbb{Z}_+, \tag{26}$$

где r_1 *и* r_2 *те же, что и в формуле* (13).

Доказательство. Сделаем в уравнении (6) преобразование

$$y = \sum_{k=0}^{\mu-1} c_k x^{s_k} + z. \tag{27}$$

Умножим результат на x в некоторой целой неотрицательной степени. Получим уравнение

$$h(x, z, \delta z, \ldots, \delta^n z) = 0, \tag{28}$$

где $h(x, z, \delta z, \ldots, \delta^n z)$ – это многочлен своих переменных. Носитель этого уравнения лежит в целочисленной решетке $\mathbb{Z}^2$. Согласно теореме 1.1. из [1], если формальный ряд $z = \sum\limits_{k=\mu}^{\infty} c_k x^{s_k}$ удовлетворяет уравнению (28), то первый член этого ряда $z_0 = c_\mu x^{s_\mu}$ является решением укороченного уравнения $\hat{h}_1^{(0)}(x, \, z, \, \delta z, \, \ldots, \, \delta^n z) = 0$, которое соответствует некоторой вершине $\Gamma_1^{(0)} = R_0 \in \mathbb{Z}^2$ многоугольника $\Gamma(h)$ уравнения (28), и вектор $-(1, \operatorname{Re} s_\mu)$ лежит в нормальном конусе $\mathbf{U}_1^{(0)}$ этой вершины. Напомним, что нормальным конусом $\mathbf{U}_1^{(0)}$ вершины $\Gamma_1^{(0)}$ называется угол с вершиной в точке ноль, заключенный между лучами, натянутыми на внешние нормали примыкающих к этой вершине ребер. Кроме того, существуют векторы R_1 и $R_2 \in \mathbb{Q}^2$, такие, что множество

$$\{R_0 + t_1 R_1 + t_2 R_2, \ t_1, t_2 \in \mathbb{Z}_+\} \subset \mathbb{Z}^2, \tag{29}$$

содержит носитель $\mathbf{S}(h)$ уравнения (28). Согласно предложению 3.2 из [1] носитель формального решения $z = \sum\limits_{k=\mu}^{\infty} c_k x^k$ уравнения (28) имеет вид (13), где $r_1 = \langle R_1, \ (1, s_\mu) \rangle, \ \ r_2 = \langle R_2, \ (1, s_\mu) \rangle.$

Здесь и далее скобки $\langle \ \rangle$ означают скалярное произведение векторов.

Теперь сделаем в уравнении (28) преобразование $z = x^{s_\mu}(c_\mu + u)$. Каждый моном вида

$$\alpha\, x^{\,q_1}\, z^{\,q_{20}}(\delta z)^{\,q_{21}} \cdot \ldots \cdot (\delta^n z)^{\,q_{2n}} \tag{30}$$

многочлена $h(x, z, \delta z, \ldots, \delta^n z)$ преобразуется в выражение

$$\alpha\, x^{q_1+q_2 s_\mu} \left[(c_\mu + u)^{q_{20}} \cdot (c_\mu s_\mu + (s_\mu + \delta)u)^{q_{21}} \cdot \ldots \cdot \left(c_\mu s_\mu^n + (s_\mu + \delta)^n u\right)^{q_{2n}} \right], \tag{31}$$

где $\alpha \in \mathbb{C}$, $q_2 = q_{20} + \cdots + q_{2n}$. То, что стоит в квадратных скобках в формуле (31), является многочленом переменных $u, \delta u, \ldots, \delta^n u$ и носитель этого выражения лежит в множестве $\{0\} \times \mathbb{Z}_+$. А поскольку $(q_1, q_2) \in \mathbf{S}(h)$, то носитель выражения (31), а значит, и носитель всего уравнения (10), лежит в множестве

$$\{\varepsilon + t_1 r_1 + t_2 r_2,\ t_1,\, t_2 \in \mathbb{Z}_+\} \times \mathbb{Z}_+,$$

где $\varepsilon = \langle R_0, (1, s_\mu)\rangle$, $r_1 = \langle R_1,\ (1, s_\mu)\rangle$, $r_2 = \langle R_2,\ (1, s_\mu)\rangle$. И наконец, разделив результат на x^ε, получаем, что носитель уравнения (24) лежит в множестве (26). ■

Число $\lambda \in \mathbb{C}$ называется *характеристическим числом* оператора $L(\delta)$ уравнения (10), если оно удовлетворяет уравнению $L(\lambda) = 0$. Если $L(\lambda) = 0$, то $L(\delta)\ c_\lambda\, x^\lambda = c_\lambda\, x^\lambda\ L(\lambda) = 0$ и коэффициент c_λ – произвольный. Отсюда следует, что ряд (14) может содержать произвольные постоянные (параметры) c_k при $x^{s_k - s_\mu}$, для которых $L(s_k - s_\mu) = 0$. Значения $s_k - s_\mu$ в разложении (14), для которых $L(s_k - s_\mu) = 0$, называются *критическими*.

Далее нам будет необходимо, чтобы для всех k, начиная с некоторого номера $m + 1$ $(m \geqslant \mu + 1)$, $|s_k| \to \infty$ при $k \to \infty$, выполнялись неравенства

$$|L(s_k - s_\mu)| > 0 \tag{32}$$

и

$$|s_k - s_\mu| \geqslant 1. \tag{33}$$

Для этого сделаем замену зависимой переменной в уравнении (24)

$$u = \sum_{k=\mu+1}^{m} c_k\, x^{s_k - s_\mu} + w, \tag{34}$$

где номер m выбран так, что 1) $\operatorname{Re}(s_{m+1} - s_\mu) > \operatorname{Re}\lambda$ для всех λ, удовлетворяющих уравнению $L(\lambda) = 0$ (т. е. все произвольные постоянные решения (14) содержатся в сумме $\sum\limits_{k=\mu+1}^{m} c_k\, x^{s_k - s_\mu}$), 2) $|s_{m+1} - s_\mu| \geqslant 1$.

После замены переменной (34) в уравнении (24) получим уравнение

$$L(\delta)w + \widetilde{N}(x, w, \delta w, \ldots, \delta^n w) = 0, \tag{35}$$

где $L(\delta)$ – тот же многочлен, что и в уравнении (24), функция $\widetilde{N}(x, w, \delta w, \ldots, \delta^n w)$ – это сумма членов вида

$$\alpha\, x^{q_1}\, w^{q_{20}} (\delta w)^{q_{21}} \cdot \ldots \cdot (\delta^n w)^{q_{2n}},$$

где $\alpha,\ q_1 \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Re} q_1 \geqslant 0$, $q_{20}, \ldots, q_{2n} \in \mathbb{Z}_+$, $q_2 = q_{20} + \cdots + q_{2n}$ и, если $q_1 = 0$, то $q_2 > 1$. Точки (q_1, q_2) лежат в множестве (26). Это следует из того, что нетривиальная с неотрицательными целыми коэффициентами линейная комбинация точек носителя уравнения (24) и точек $(s_k - s_\mu, 0)$ с $k \geqslant \mu + 1$ также содержится в множестве (26).

Уравнение (35) имеет единственное (поскольку все коэффиценты однозначно определенны) формальное решение

$$w = \sum_{k=m+1}^{\infty} c_k\, x^{s_k - s_\mu}, \tag{36}$$

где c_k и $s_k - s_\mu$ те же, что и в формуле (14), и для $s_k - s_\mu$ выполнены неравенства (32) и (33).

Обозначим $w_j = \delta^j \left(\sum\limits_{k=m+1}^{\infty} c_k\, x^{s_k - s_\mu} \right)$, $j = 0, \ldots, n$. Тогда

$$w_j = \sum_{k=m+1}^{\infty} c_k\, (s_k - s_\mu)^j\, x^{s_k - s_\mu}. \tag{37}$$

Пусть $M = (m_1, m_2)$, где $m_1,\ m_2 \in \mathbb{Z}_+$.

Показатели степени $s_k - s_\mu$ ряда (37) принадлежат множеству (25), поэтому ряд (37) можно записать в виде

$$w_j = \sum_{M \in \mathbb{Z}_+^2} c_M\, (m_1 r_1 + m_2 r_2)^j\, x^{m_1 r_1 + m_2 r_2}, \tag{38}$$

где $c_M = c_k,\ m_1 r_1 + m_2 r_2 = s_k - s_\mu,\ k \geqslant m + 1$.

Введем переменные

$$\xi_1 = x^{r_1}, \qquad \xi_2 = x^{r_2}. \tag{39}$$

С учетом формулы (39) с рядом (38) можно отождествить ряд

$$w_j = \sum_{M \in \mathbb{Z}_+^2} c_M\, (m_1 r_1 + m_2 r_2)^j\, \xi_1^{m_1} \xi_2^{m_2}. \tag{40}$$

Если для коэффициентов $c_M \in \mathbb{C}$ ряда

$$\sum_{M\in\mathbb{Z}_+^2} c_M\ \xi_1^{m_1}\xi_2^{m_2} \tag{41}$$

и коэффициентов $C_M \in \mathbb{R}$ ряда

$$\sum_{M\in\mathbb{Z}_+^2} C_M\ \xi_1^{m_1}\xi_2^{m_2} \tag{42}$$

выполняются неравенства

$$C_M \geqslant |c_M| \geqslant 0, \tag{43}$$

то *ряд* (42) называется *мажорантным для ряда* (41).

Если коэффициенты c_M и C_M удовлетворяют неравенствам (43), то ряд

$$W = \sum_{M\in\mathbb{Z}_+^2} C_M\ |m_1r_1 + m_2r_2|^n\ \ \xi_1^{m_1}\xi_2^{m_2} \tag{44}$$

мажорирует ряд

$$w_n = \sum_{M\in\mathbb{Z}_+^2} c_M\ (m_1r_1 + m_2r_2)^n\ \ \xi_1^{m_1}\xi_2^{m_2}. \tag{45}$$

3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1

Рассмотрим уравнение (35), которое получается из уравнения (24) с помощью замены переменной (34). Согласно условиям теоремы 1 степень многочлена $L(\delta)$ равна n. Докажем, что формальное решение (36) уравнения (35) (а значит, и формальное решение (14) уравнения (24)) равномерно сходится для достаточно малых $|x|$ и $|\arg x| < \pi$.

Для этого запишем уравнение (35) в виде

$$L(\delta)w = -\widetilde{N}(x,\, w,\, \delta w, \delta^2 w, \ldots, \delta^n w). \tag{46}$$

Напомним, что $L(\delta)\, x^{s_k - s_\mu} = L(s_k - s_\mu)\, x^{s_k - s_\mu}$. Поскольку в разложении (36) для всех $k > m > \mu$, выполнены неравенства (32) и (33), то существует положительное вещественное число σ, такое, что

$$|L(s_k - s_\mu)| \geqslant \sigma\ |s_k - s_\mu|^n\,, \tag{47}$$

т. е.

$$0 < \sigma \leqslant \inf_{k>m} \frac{|L(s_k - s_\mu)|}{|s_k - s_\mu|^n}.$$

Обозначим $\delta^j w = w_j,\ j = 0, \ldots, n$. Тогда сумма $-\widetilde{N}(x, w_0, w_1, \ldots, w_n)$ имеет вид

$$-\widetilde{N}(x, w_0, w_1, \ldots, w_n) = \sum_{T,Q} \alpha_{\,T,Q}\ \ x^{t_1 r_1 + t_2 r_2}\ \ w_0^{q_{20}} w_1^{q_{21}} \cdot \ldots \cdot w_n^{q_{2n}}, \qquad (48)$$

где $\alpha_{\,T,Q} \in \mathbb{C}$, $T = (t_1, t_2) \in \mathbb{Z}_+^2$, $Q = (\,q_{20}, \ldots, q_{2n}) \in \mathbb{Z}_+^{n+1}$. При этом если $t_1 = t_2 = 0$, то $q_{20} + \cdots + q_{2n} > 1$, а если $q_{20} = \cdots = q_{2n} = 0$, то $t_1 + t_2 > 0$.

Учитывая преобразование (39) и равенство (48), уравнение (46) запишем в виде

$$a_n w_n + \cdots + a_0 w_0 = \sum_{T,Q}\ \alpha_{\,T,Q}\ \ \xi_1^{t_1}\ \xi_2^{t_2}\ \ w_0^{q_{20}} w_1^{q_{21}} \cdot \ldots \cdot w_n^{q_{2n}}, \qquad (49)$$

где $a_n w_n + \cdots + a_0 w_0 = L(\delta) w,\ a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$, $a_n \neq 0$.

Наряду с уравнением (49) рассмотрим уравнение

$$\sigma\, W = \sum_{T,Q}\ |\alpha_{\,T,Q}|\ \ \xi_1^{t_1}\ \xi_2^{t_2}\ \ W^{q_{20}} W^{q_{21}} \cdot \ldots \cdot W^{q_{2n}}, \qquad (50)$$

где правая часть уравнения получается из правой части уравнения (49) заменой коэффициентов $\alpha_{\,T,Q}$ на их модули $|\alpha_{\,T,Q}|$ и всех переменных $w_0, \ldots, w_n$ на переменную W. Метод построения уравнения (50) заимствован из [5].

Аналогично тому, как это делалось в работе [9], покажем, что уравнение (50) в окрестности нуля $\xi_1 = \xi_2 = W = 0$ имеет единственное голоморфное решение (44), которое мажорирует ряд (45).

Обозначим дифференцирование по ξ_1 через ∂_1, а дифференцирование по ξ_2 через ∂_2.

Подставим выражения

$$w_j = \sum_{M \in \mathbb{Z}_+^2} c_M\, (m_1 r_1 + m_2 r_2)^j\, \xi_1^{m_1} \xi_2^{m_2}, \ \ j = 0, \ldots, n,$$

в уравнение (49), получим равенство, в левой и правой части которого стоят бесконечные ряды по ξ_1 и ξ_2. Ряд, который стоит в правой части этого равенства, обозначим через ϕ. Тогда для коэффициента c_M получаем уравнение

$$L(m_1 r_1 + m_2 r_2)\, c_M = \left.\frac{\partial_1^{m_1}\, \partial_2^{m_2}\, \phi}{m_1!\, m_2!}\right|_{\xi_1 = \xi_2 = 0}.$$

Пусть $L_j = (l_{1j}, l_{2j})$, $K_i = (k_{1i}, k_{2i})$.

Для того, чтобы упростить последующие формулы, введем обозначения для условий суммирования:

$$\mathrm{A}_M = \Big\{(l_{10},\ldots,l_{1n},l_{20},\ldots,l_{2n}) \in \mathbb{Z}_+^{2n+2} : t_1 + \sum_{j=0}^{n} l_{1j} = m_1, t_2 + \sum_{j=0}^{n} l_{2j} = m_2\Big\};$$

$$\mathrm{B}_{L_j} = \Big\{(k_{10},\ldots,k_{1q_{2j}},k_{20},\ldots,k_{2q_{2j}}) \in \mathbb{Z}_+^{2q_{2j}+2} : \sum_{i=1}^{q_{2j}} k_{1i} = l_{1j}, \sum_{i=1}^{q_{2j}} k_{2i} = l_{2j}\Big\}.$$

Воспользуемся формулой производной произведения

$$\frac{\partial_1^{m_1}\partial_2^{m_2}\left(\xi_1^{t_1}\,\xi_2^{t_2}\,w_0^{q_{20}}\cdot\ldots\cdot w_n^{q_{2n}}\right)}{m_1!\,m_2!} = \sum_{\mathrm{A}_M}\prod_{j=0}^{n}\frac{\partial_1^{l_{1j}}\,\partial_2^{l_{2j}}\,w_j^{q_{2j}}}{l_{1j}!\,l_{2j}!}, \tag{51}$$

где $m_1 \geqslant t_1$, $m_2 \geqslant t_2$. Если $q_{2j} \geqslant 1$, то

$$\frac{\partial_1^{l_{1j}}\partial_2^{l_{2j}}\,w_j^{q_{2j}}}{l_{1j}!\,l_{2j}!} = \sum_{\mathrm{B}_{L_j}}\prod_{i=1}^{q_{2j}}\frac{\partial_1^{k_{1i}}\partial_2^{k_{2i}}\,w_j}{k_{1i}!\,k_{2i}!}.$$

Таким образом, получаем

$$\left.\frac{\partial_1^{m_1}\partial_2^{m_2}\phi}{m_1!\,m_2!}\right|_{\xi_1=\xi_2=0} = \sum\alpha_{T,Q}\sum_{\mathrm{A}_M}\prod_{j=0}^{n}\left.\frac{\partial_1^{l_{1j}}\,\partial_2^{l_{2j}}\,w_j^{q_{2j}}}{l_{1j}!\,l_{2j}!}\right|_{\xi_1=\xi_2=0}, \tag{52}$$

где

$$\left.\frac{\partial_1^{l_{1j}}\partial_2^{l_{2j}}\,w_j^{q_{2j}}}{l_{1j}!\,l_{2j}!}\right|_{\xi_1=\xi_2=0} = \sum_{\mathrm{B}_{L_j}}\prod_{i=1}^{q_{2j}}(k_{1i}r_1+k_{2i}r_2)^j\,c_{K_i} \tag{53}$$

при $1 \leqslant q_{2j} \leqslant l_{1j}+l_{2j}$ (и $=0$ при $q_{2j} > l_{1j}+l_{2j}$ или при $q_{2j}=0$).

Напомним, что если в уравнении (49), а значит, и в формуле (51) показатели степени $t_1=t_2=0$, то $\sum\limits_{j=0}^{n} q_{2j} > 0$, а если $\sum\limits_{j=0}^{n} q_{2j} = 0$, то $t_1+t_2>0$.

Для коэффициентов $c_{(1,0)}$ и $c_{(0,1)}$ получаем уравнения $L(r_1)\;c_{(1,0)} = \alpha_{(1,0),(0,\ldots,0)}$, $L(r_2)\;c_{(0,1)} = \alpha_{(0,1),(0,\ldots,0)}$, а для коэффициента c_M с $m_1+m_2>1$ получаем уравнение

$$L(m_1r_1+m_2r_2)\,c_M = p_M\left(\{c_{K_i}\},\ \{\alpha_{T,Q}\}\right),$$

где $k_{1i} \leqslant m_1$, $k_{2i} \leqslant m_2$, но $k_{1i}+k_{2i} < m_1+m_2$,[4] p_M – это многочлен своих переменных, восстанавливаемый по формулам (52) и (53).

Теперь подставим решение (44) в уравнение (50), получим равенство, в левой и правой части которого стоят бесконечные ряды по ξ_1 и ξ_2. Учитывая аналогию

[4]Здесь стоит строгое неравенство, поскольку в правой части равенства (53) каждое слагаемое, содержащее множитель c_M, содержит нулевой множитель $c_{(0,0)}$.

и различие между правыми частями уравнений (49) и (50), для коэффициента C_M при $q_{20}+\cdots+q_{2n}\geqslant 1$ получаем выражение

$$\sigma|m_1r_1+m_2r_2|^n\,C_M=\sum|\alpha_{T,Q}|\sum_{A_M}\prod_{j=0}^{n}\left.\frac{\partial_1^{l_{1j}}\partial_2^{l_{2j}}\,W^{q_{2j}}}{l_{1j}!\,l_{2j}!}\right|_{\xi_1=\xi_2=0}, \tag{54}$$

где при $q_{2j}\geqslant 1$

$$\left.\frac{\partial_1^{l_{1j}}\partial_2^{l_{2j}}W^{q_{2j}}}{l_{1j}!\,l_{2j}!}\right|_{\xi_1=\xi_2=0}=\sum_{B_{L_j}}\prod_{i=1}^{q_{2j}}|k_{1i}r_1+k_{2i}r_2|^n\,C_{K_i}. \tag{55}$$

Тогда

$$\sigma\,|r_1|^n\,C_{(1,0)}=|\alpha_{(1,0),(0,\ldots,0)}|=|L(r_1)|\,|c_{(1,0)}|\;\Rightarrow\;|c_{(1,0)}|=\frac{\sigma|r_1|^n\,C_{(1,0)}}{|L(r_1)\,|}\leqslant C_{(1,0)}.$$

$$\sigma\,|r_2^n|\,C_{(0,1)}=|\alpha_{(0,1),(0,\ldots,0)}|=|L(r_2)|\,|c_{(0,1)}|\;\Rightarrow\;|c_{(0,1)}|=\frac{\sigma|r_2|^n\,C_{(0,1)}}{|L(r_2)|}\leqslant C_{(0,1)}.$$

$$\sigma\;|\langle M,\,R\rangle|^n\;C_M=P_M\left(\{C_{K_i}\},\{|\alpha_{\,T,Q}|\}\right),$$

где $k_{1i}\leqslant m_1,\;\;k_{2i}\leqslant m_2$, но $k_{1i}+k_{2i}<m_1+m_2$, P_M – это многочлен своих переменных, восстанавливаемый по формулам (54), (55).

При этом, из построения следует, что

$$|p_M\left(\{c_{K_i}\},\{|\alpha_{\,T,Q}|\}\right)|\leqslant|P_M\left(\{c_{K_i}\},\{|\alpha_{\,T,Q}|\}\right)|.$$

Получаем соотношения:

$$\begin{gathered}|L(m_1r_1+m_2r_2)|\,|c_M|=|p_M\left(\{c_{K_i}\},\;\{\alpha_{\,T,Q}\}\right)|\\ \leqslant|p_M\left(\{c_{K_i}\},\;\{|\alpha_{\,T,Q}|\}\right)|\leqslant|P_M(\{c_{K_i}\},\;\{|\alpha_{\,T,Q}|\})|\leqslant\\ \leqslant P_M(\{C_{K_i}\},\;\{|\alpha_{\,T,Q}|\})=\sigma\,|m_1r_1+m_2r_2|^n\,C_M\\ \Longrightarrow|c_M|\leqslant\frac{\sigma\,|m_1r_1+m_2r_2|^n\;C_M}{|L(m_1r_1+m_2r_2)|}\leqslant C_M.\end{gathered}$$

Итак, мы доказали, что ряд (42) мажорирует ряд (41).

Уравнение (50) удовлетворяет условиям теоремы Коши о неявной функции (см. §4, гл. I, [8]), согласно которой в окрестности нуля $\xi_1=\xi_2=W=0$ оно имеет единственное голоморфное решение $W(\xi_1,\xi_2)$, $W(0,0)=0$ (однозначным образом определенное начальными данными). Так как формальное решение (45) определено единственным образом (теми же самыми начальными данными, что и решение (44)), то формальное и голоморфное решения совпадают. Поскольку ряд (44) мажорирует ряд (45) и $|x^{r_1}|\leqslant|\xi_1|$, $|x^{r_2}|\leqslant|\xi_2|$ для достаточно малых $|x|$ и $|\arg x|<\pi$, то ряд (36) равномерно сходится для указанных x. ■

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Брюно А.Д.* Асимптотики и разложения решений обыкновенного дифференциального уравнения. УМН. 2004. Т. 59. №3. С. 31–80.

2. *Gromak I.V., Laine I., Shimomura S.* Painlevé Differential Equations in the Complex Plain. Berlin, New York: Walter de Gruyter. 2002.

3. *Брюно А.Д., Гриднев А.В.* Степенные и экспоненциальные разложения решений третьего уравнения Пенлеве. Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. 2003. №51. 19 с.
   URL: http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2003-51

4. *Брюно А.Д., Парусникова А.В.* Локальные разложения решений пятого уравнения Пенлеве. Доклады академии наук. 2011. Т. 438. №4. С. 439-443.

5. *Брюно А.Д., Горючкина И.В.* Асимптотические разложения решений шестого уравнения Пенлеве. Труды московского математического общества. 2010. Т. 71. С. 6–118.

6. *Guzzetti D.* A Review on The Sixth Painlevé Equation. 2012. 31 p.
   http://arxiv.org/pdf/1210.0311.pdf

7. *Malgrange B.* Sur le théorème de Maillet. Asymptotic Anal. 1989. Vol. 2. P. 1-4.

8. *Шабат Б.В.* Введение в комплексный анализ. Часть 2. Санкт-Петербург. Издательство ”Лань”. 2004. 464 с.

9. *Gontsov R., Goryuchkina I.* An analytic proof of the Malgrange-Sibuya theorem on the convergence of formal solutions of an ODE. 2013. 9 p.
   http://arxiv.org/pdf/1311.6416v1.pdf

10. *Горючкина И.В.* О сходимости степенного ряда с нерациональными показателями степени, являющегося формальным решением алгебраического ОДУ. Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. 2013. №65. 24 с.
    URL: http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2013-65