



Митрушкин Д.А., Попов Ю.П.

Об одном способе
локального измельчения
расчетной сетки вблизи
кругового источника малого
размера

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Митрушкин Д.А., Попов Ю.П. Об одном способе локального измельчения расчетной сетки вблизи кругового источника малого размера // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2014. № 25. 32 с. URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2014-25>

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
ОРДЕНА ЛЕНИНА
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М.В. КЕЛДЫША

Д.А. Митрушкин, Ю.П. Попов

**Об одном способе локального измельчения
расчетной сетки вблизи кругового
источника малого размера**

Москва, 2014

Д.А. Митрушкин, Ю.П. Попов

Об одном способе локального измельчения расчетной сетки вблизи кругового источника малого размера

Аннотация. В работе предложен метод локального измельчения двумерной расчетной сетки вблизи кругового источника с размерами, существенно меньшими, чем характерный размер задачи. Предложенный подход позволяет «разрешить» границу источника, перейдя от использования точечного источника к прямому заданию граничных условий на гранях сетки, аппроксимирующих форму источника. Особенностью работы является использование при построении локального измельчения принципов локальной ортогональности и согласованности сетки, которые позволяют применять одни и те же правила при построении разностного алгоритма, что и на прямоугольных сетках, в частности, двухточечную аппроксимацию потока через общую грань ячеек. Эффективность предложенного локального измельчения продемонстрирована на примере тестовой задачи Стефана. Проведено сравнение с решениями, полученными на равномерной и неравномерной прямоугольных сетках со сходным количеством расчетных ячеек.

Ключевые слова: расчетные сетки, локальное измельчение, задача Стефана

D.A. Mitrushkin, Yu.P. Popov

Local grid refinement technique for problems with small circular internal boundaries

Abstract. In this work we propose a local grid refinement method for solution of 2D problems with local circular sources of the small size which allows an accurate resolution of the source boundary. The resulting adaptive grid inherits local orthogonality and regularity properties of the standard Cartesian grids which makes possible an easy utilization of standard finite volume techniques (e.g., standard two-point flux approximation). Comparative studies performed on the Stefan test problem demonstrated higher accuracy of the proposed algorithm in comparison with standard approximation using rectangular grids with the same number of computational cells.

Key words: computational grids, local grid refinement, Stefan problem

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 12-01-00793-а) и ведущей научной школы России НШ-6061.2014.2.

Содержание

| | |
|---|----|
| Введение | 3 |
| 1. Постановка задачи | 5 |
| 2. Расчетная сетка..... | 7 |
| 2.1 Основные предположения..... | 7 |
| 2.2 Гибридная сетка..... | 8 |
| 2.2 Прямоугольные сетки | 14 |
| 3. Разностная схема..... | 15 |
| 3.1 Аппроксимация уравнения теплопроводности..... | 15 |
| 3.2 Аппроксимация коэффициентов теплоемкости и теплопроводности | 16 |
| 3.3 Тестовое решение..... | 18 |
| 3.4 Аппроксимация граничных условий..... | 19 |
| 4. Результаты расчетов | 21 |
| Заключение..... | 31 |
| Литература | 32 |

Введение

Работа посвящена разработке метода локального измельчения пространственных сеток при численном решении методом конечных разностей задач математической физики, содержащих особенности – круговые источники с размерами, существенно меньшими, чем характерный размер задачи. Цель – повышение точности сеточного решения без значительного увеличения общего числа ячеек сетки.

Изложение ведется на примере задачи о распространении тепла в среде, сопровождающимся фазовым переходом, при котором существенно изменяются ее теплофизические свойства. Такие задачи возникают, например, при математическом моделировании добычи высоковязких нефтей с помощью закачки теплоносителя в пласт [1]-[3], моделировании физических процессов вблизи скважин, проходящих через зоны вечной мерзлоты, когда они являются источниками тепла. При этом диаметр скважин a составляет доли метра, а характерное расстояние между скважинами и размеры месторождения A варьируются от десятков до сотен и тысяч метров ($a \ll A$). Такая разномасштабность не позволяет использовать подробные сетки во всей расчетной области из-за неприемлемо большого числа ячеек сетки и соответственно большего объема вычислений.

Как правило, решение в окрестности особенностей испытывает резкие изменения во времени и пространстве. В то же время поведение решения в расчете необходимо передавать достаточно точно, так как свойства среды могут зависеть от температуры. В силу сказанного эффективные методы измельчения исходной грубой прямоугольной сетки вблизи особенностей представляют большой практический интерес.

Существуют различные методы построения расчетных сеток с локальным измельчением. В настоящее время наибольшее распространение получили адаптивные сетки типа восьмеричное дерево [4], треугольные сетки [5], сетки Вороного [6] (или REVI grids [7]), которые могут быть как статическими, так и динамически изменяющимися в зависимости от решения. Несмотря на богатые возможности для адаптации, их практическое использование связано с рядом сложностей как с построением таких сеток для задач с геометрическими особенностями, так и с их использованием. В частности, требуется построение конечномерных аппроксимаций специального вида [8], а также разработка вычислительных алгоритмов линейной алгебры, которые бы устойчиво работали для матриц с произвольной структурой.

Альтернативой таким методам является использование адаптивных сеток специального вида, которые, с одной стороны, давали бы необходимую степень адаптивности, а с другой – требовали бы минимальных изменений в существующих вычислительных алгоритмах и программных кодах. Описанию одной из реализаций данной идеи и посвящена настоящая работа.

Предлагаемый в работе метод опирается на требования локальной ортогональности сетки и ее согласованности, что позволяет использовать разностную схему однородно на всей сетке в целом. Качество построенного локального измельчения сетки проверено путем сравнения результатов расчетов, полученных на различных сетках с близким числом расчетных узлов, с решением тестовой задачи Стефана [9].

1. Постановка задачи

Продемонстрируем методику построения предлагаемого локального измельчения пространственной разностной сетки на простом примере. Рассмотрим процесс распространения тепла в пространственной области G , представляющей собой квадрат со стороной A (рис.1). В центре области расположен тепловой источник, имеющий форму круга радиуса a ($a \ll A$).

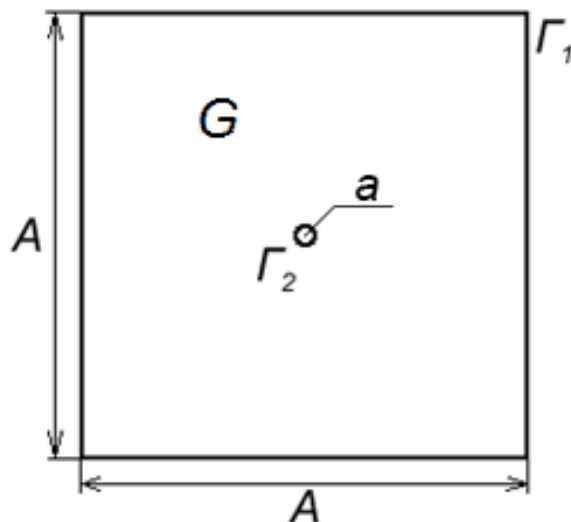


Рис.1 Рассматриваемая область

Граница области G состоит из двух частей: внешней квадратной Γ_1 и внутренней круговой Γ_2 , по которой из G вырезан тепловой источник. Тепловой режим на границах Γ_1 и Γ_2 может быть задан различными способами.

Процесс распространения тепла в области G описывается с помощью уравнения теплопроводности:

$$\frac{\partial E}{\partial t} = -\text{div} \vec{W}, \quad (x, y) \in G, \quad t > 0, \quad (1)$$

здесь t – время, x, y – декартовы пространственные координаты,

$E(T) = \int_0^T C(T) dT$ – объемная плотность внутренней энергии, $T(x, y, t)$ – температура среды, $C(T)$ – коэффициент теплоемкости (на единицу объема), \vec{W} – тепловой поток.

В качестве связи между потоком тепла и температурой в (1) принимается закон Фурье:

$$\vec{W} = -\kappa \text{grad}(T), \quad (2)$$

где $\kappa = \kappa(T)$ – коэффициент теплопроводности.

Рассмотрим процесс теплопереноса в среде при наличии фазового перехода при $T=T^*$, в результате которого скачкообразно изменяются значения теплофизических свойств среды – коэффициентов теплоемкости и теплопроводности, а на самой границе фазового перехода выделяется (поглощается) скрытая теплота фазового перехода.

В начальный момент времени в G задано однородное распределение температуры $T=T_0$ и теплофизических свойств, а также задан поток тепла Q , поступающий в область G через границу источника Γ_2 .

В результате действия источника окружающая среда прогревается, и там, где её температура достигает заданной величины $T^* > T_0$, происходит фазовый переход. Фронт фазового перехода – изотерма $T(x, y, t) = T^*$, на которой выделяется тепловая энергия фазового перехода, распространяется со временем от источника к периферии области. Граница раздела фаз $\Gamma^*(t) = \Gamma^*[x^*(t), y^*(t)]$ определяется заданной температурой фазового перехода T^* .

На границе фазового перехода Γ^* теплофизические свойства вещества испытывают разрыв:

$$C(T) = \begin{cases} C_1, & \text{при } T < T^* \\ C_2, & \text{при } T > T^* \end{cases}, \quad \kappa(T) = \begin{cases} \kappa_1, & \text{при } T < T^* \\ \kappa_2, & \text{при } T > T^* \end{cases}, \quad (3)$$

здесь индексами 1 и 2 отмечены значения соответствующих функций по обе стороны от разрыва. При этом объемная плотность внутренней энергии $E(T)$ на границе фазового перехода Γ^* претерпевает скачок на величину λ , являющуюся скрытой теплотой фазового перехода:

$$E = \int_0^T C(T) dT + \lambda \eta(T - T^*), \quad \text{где } \eta(\xi) = \begin{cases} 1, & \xi \geq 0 \\ 0, & \xi < 0 \end{cases} \quad (4)$$

После подстановки (4) в (1) с учетом того, что производная от функции Хевисайда $\eta(\xi)$ есть δ -функция, получим следующую задачу для уравнения теплопроводности с учетом фазового перехода:

$$\begin{cases} \left(C(T) + \lambda \delta(T - T^*) \right) \frac{\partial T}{\partial t} = -\operatorname{div} W \\ W = -\kappa(T) \operatorname{grad}(T) \end{cases}, \quad (5)$$

называемую задачей Стефана [10].

На внутренней границе Γ_2 зададим суммарный поток тепла от источника, считая его равномерно распределенным по окружности радиуса a :

$$2\pi a W_n|_{\Gamma_2} = Q. \quad (6)$$

Условие на внешней границе Γ_1 будет определено ниже.

2. Расчетная сетка

2.1 Основные предположения

Введем в рассматриваемой расчетной области G грубую равномерную квадратную сетку с шагом h так, чтобы $a \ll h \ll A$, и источник находился в середине центральной ячейки. Выделим вблизи источника подобласть g размером $(m \cdot h) \times (m \cdot h)$ (далее $m=3$), внутри которой будет проводиться локальное измельчение (рис. 2).

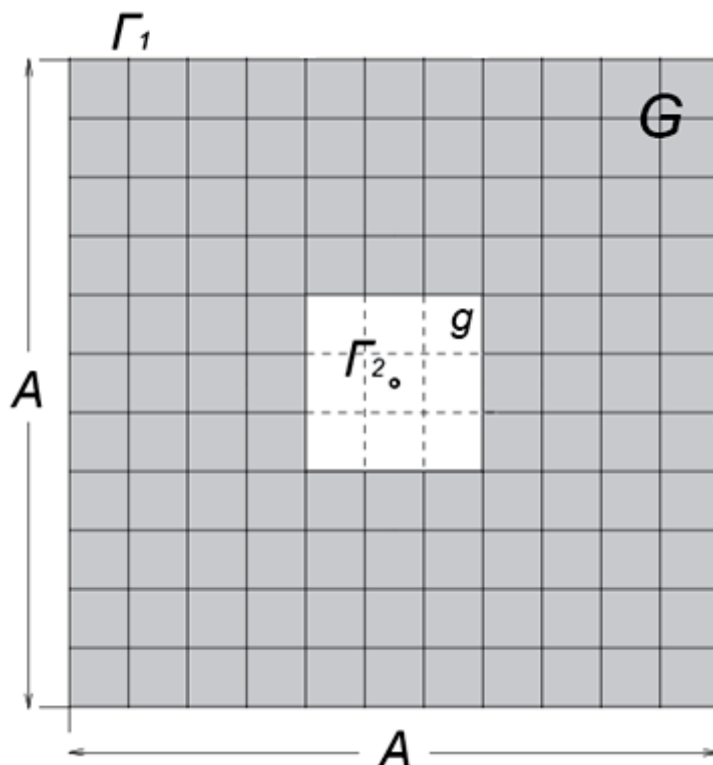


Рис.2 Выделение области для локального измельчения

Расчетная сетка представляет собой набор точек (узлов сетки) в рассматриваемой области, соединенных в соответствующем порядке отрезками, образующими грани ячеек. При переходе от непрерывной дифференциальной задачи к дискретной сеточные функции температуры, коэффициентов теплопроводности и теплоемкости будем относить к «*центрам*» ячеек (некоторым точкам внутри ячеек), а значения тепловых потоков – к граням ячеек. В качестве «центров» ячеек будем использовать геометрический центр ячейки (центр масс).

При построении неравномерного локального измельчения сетки внутри области g будем руководствоваться следующими требованиями:

- 1) Сетка должна быть *согласованной* как в области g , так и на границе с внешней прямоугольной сеткой, то есть каждое ребро ячейки сетки должно содержать только два узла (рис.3).



Рис.3 Пример несогласованной (слева) и согласованной (справа) сеток

- 2) Сетка должна быть *локально ортогональной*, то есть отрезок, соединяющий «центры» соседних ячеек, должен быть ортогонален общему ребру (рис.4).

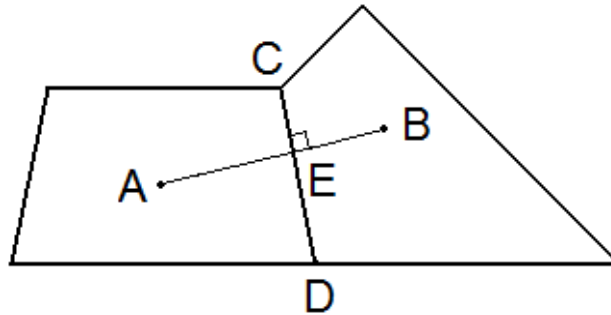


Рис.4 Пример локальной ортогональности $AB \perp CD$, $E \in CD$

- 3) Сетка должна быть согласована с формой источника (граничные ячейки должны передавать особенности формы границы Γ_2 – ее размер и радиальную симметрию).

Выполнение первых двух требований позволит однородным образом конструировать разностную схему во всей области G , то есть использовать одни и те же правила построения для всех ячеек сетки. В частности, это даст возможность использовать двухточечную аппроксимацию для уравнения потока (2). В этом случае касательные компоненты потока тепла вдоль общего ребра соседних ячеек будут отсутствовать, что существенно упростит вычислительные алгоритмы.

Третье условие позволит использовать данные о форме и размере источника, а также характере физических процессов вблизи него, что должно положительно сказаться на качестве численного решения.

2.2 Гибридная сетка

Строить в области g локальное измельчение сетки можно различными способами. В настоящей работе предлагается использовать следующий метод. Область внутри g разбивается на две зоны – внутреннюю и переходную (рис.5а). Область G вне g будем называть внешней зоной (заштрихованная область на рис. 2).

Во внутренней зоне (незаштрихованная область на рис. 5а), в силу радиальной симметрии источника, вводится аналог полярной сетки с равномерным разбиением по углу и с последовательным увеличением шага по радиусу в направлении от внутренней границы Γ_2 (рис. 5б).

Переходная зона (заштрихованная область на рис. 5а) – зона нерегулярной сетки, с помощью которой осуществляется стыковка сеток внутренней и внешней зон.

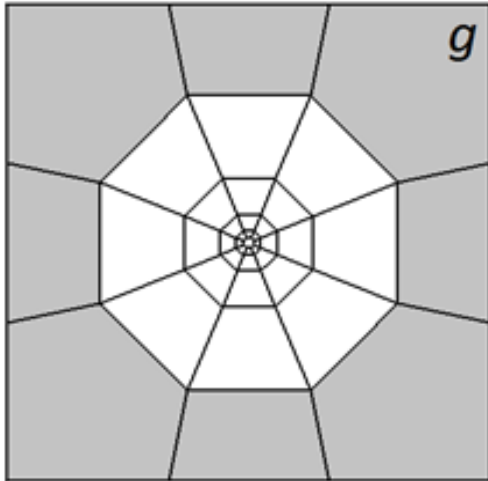


Рис. 5а Локальное измельчение

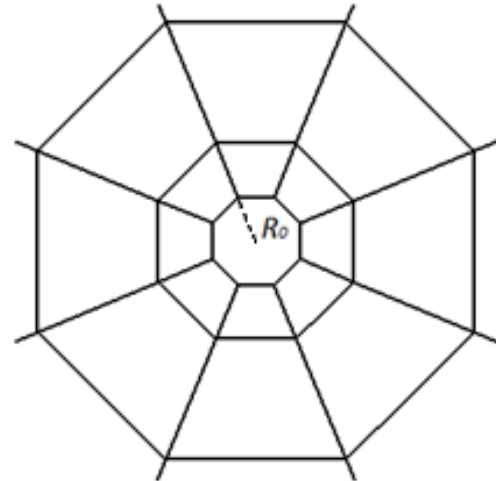


Рис. 5б Сетка в окрестности источника

Получившуюся расчетную сетку в области G , состоящую из прямоугольной внешней сетки, радиально-симметричной внутренней сетки и нерегулярной переходной зоны, будем называть *гибридной сеткой*.

Опишем алгоритм построения сеток в каждой из зон.

Во **внутренней зоне** сетка схожа с полярной, однако ее узлы соединены не дугами соответствующих окружностей, а прямыми линиями. Радиальные направляющие сетки разбивают область на N_φ равных секторов с углами $2\pi/N_\varphi$ (на рис. 5 $N_\varphi=8$). Внутренние узлы сетки находятся на расстоянии R_0 от центра области, а внешние узлы – на расстоянии R_{end} , значение которого будет определено ниже при построении сетки в переходной зоне.

Ячейки сетки во внутренней зоне представляют собой трапеции, а источник заменяется восьмиугольником (рис. 5б), где R_0 выбирается из условия равенства периметра восьмиугольника и длины окружности источника радиуса a :

$$2\sin(\pi/N_\varphi)R_0N_\varphi = 2\pi a, \quad (7)$$

откуда

$$R_0 = \frac{\pi/N_\varphi}{\sin(\pi/N_\varphi)} a. \quad (8)$$

Для случая $N_\varphi=8$ получаем $R_0 \approx 1.026a$, что является вполне приемлемым для качественной передачи границы источника. Таким образом,

для сетки выполняется требование согласованности с формой источника, а именно, учет центральной симметрии и явное выделение внутренней границы.

В общем случае в силу симметрии величина N_φ кратна четырем. Дальнейшее увеличение N_φ значительно увеличит количество узлов во внутренней зоне и существенно усложнит переходную зону, которая в случае $N_\varphi=16$ будет состоять уже из двух слоев ячеек (рис.6). В данной работе остановимся на рассмотрении случая $N_\varphi=8$.

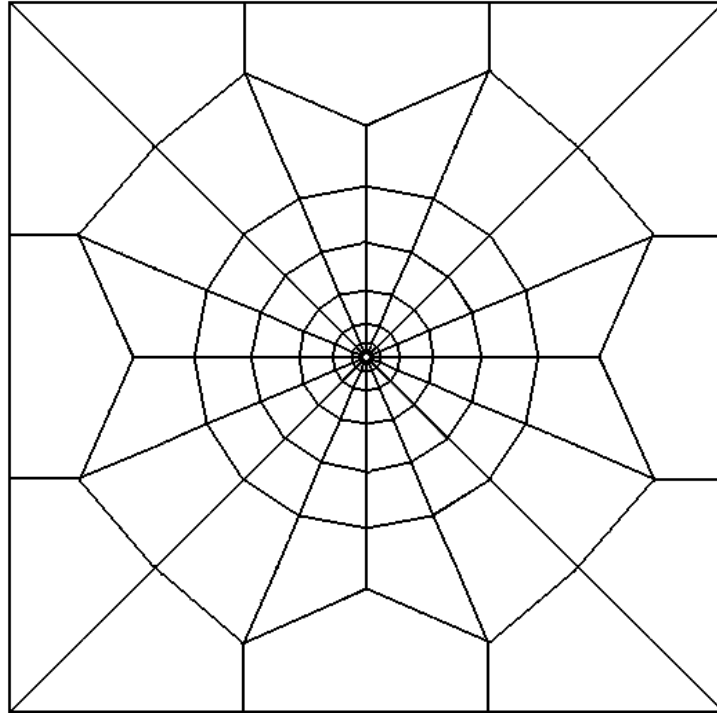


Рис.6 Пример локального измельчения области g для случая $N_\varphi=16$

Каждая из радиальных направляющих сетки (отрезок $[R_0, R_{end}]$) разбивается на N_R частей (слоев сетки), так что сетка в этой зоне состоит из $N_R N_\varphi$ ячеек.

Разбиение направляющих будем проводить из условия, что расстояние от центра источника до каждого последующего узла увеличивается по геометрической прогрессии:

$$R_i = R_0 q^{i-1}, \text{ где } i=1, 2, \dots, N_R, \quad (9)$$

Показатель прогрессии q определяется из условия $R_{N_R} = R_{end}$, откуда:

$$q = \sqrt[N_R-1]{R_{end}/R_0}. \quad (10)$$

Количество слоев сетки N_R может задаваться различными способами, как явно числом, так и, например, из условия равенства в ячейке средней линии трапеции и ее высоты (пунктирные линии на рис. 7).

Высота трапеции равна $(R_i - R_{i-1}) \cos(\pi/N_\varphi)$.

Средняя линия трапеции равна $(R_{i-1} + R_i) \sin(\pi/N_\varphi)$.

В результате имеем следующую рекурсивную зависимость:

$$R_i = \frac{1 + \sin(\pi/N_\varphi)}{\cos(\pi/N_\varphi)} R_{i-1} \text{ или } R_i = \left(\frac{1 + \sin(\pi/N_\varphi)}{\cos(\pi/N_\varphi)} \right)^i R_0. \quad (11)$$

При $N_\varphi = 8$ получаем $R_i \approx 1.5R_{i-1}$.

Построенные с помощью такого алгоритма ячейки разностной сетки по своей форме максимально приближаются к квадратам, что позволяет уменьшить ошибки аппроксимации, связанные с разномасштабностью длин граней ячеек.

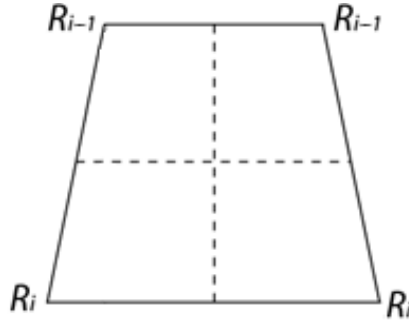


Рис. 7 Ячейка внутренней зоны i -го слоя

Отметим, что разбиение внутренней зоны должно производиться также с учетом размеров ячеек переходной зоны, чтобы не возникало ситуации, когда последний слой ячеек внутренней зоны существенно «тоньше» переходного слоя. Вопрос выбора оптимального разбиения будет дополнительно исследован ниже при проведении численных расчетов.

Очевидно, что для сетки во внутренней зоне, состоящей из таких трапеций, справедливы требования локальной ортогональности и согласованности.

Переходная зона содержит один слой сетки, состоящий из 8 ячеек (4 четырехугольных и 4 пятиугольных), с помощью которых стыкуются сетки во внешней и внутренней зонах (рис. 5а). При этом ячейки переходного слоя содержат узлы внутренней и внешней зон, тем самым автоматически выполняется требование согласованности сетки.

В силу центральной симметрии переходной зоны при описании построения можно ограничиться одной четвертой ее частью (рис.8).

Поместим начало координат в центр источника (точку O). Ось Y направим вертикально вниз, а ось X – горизонтально вправо.

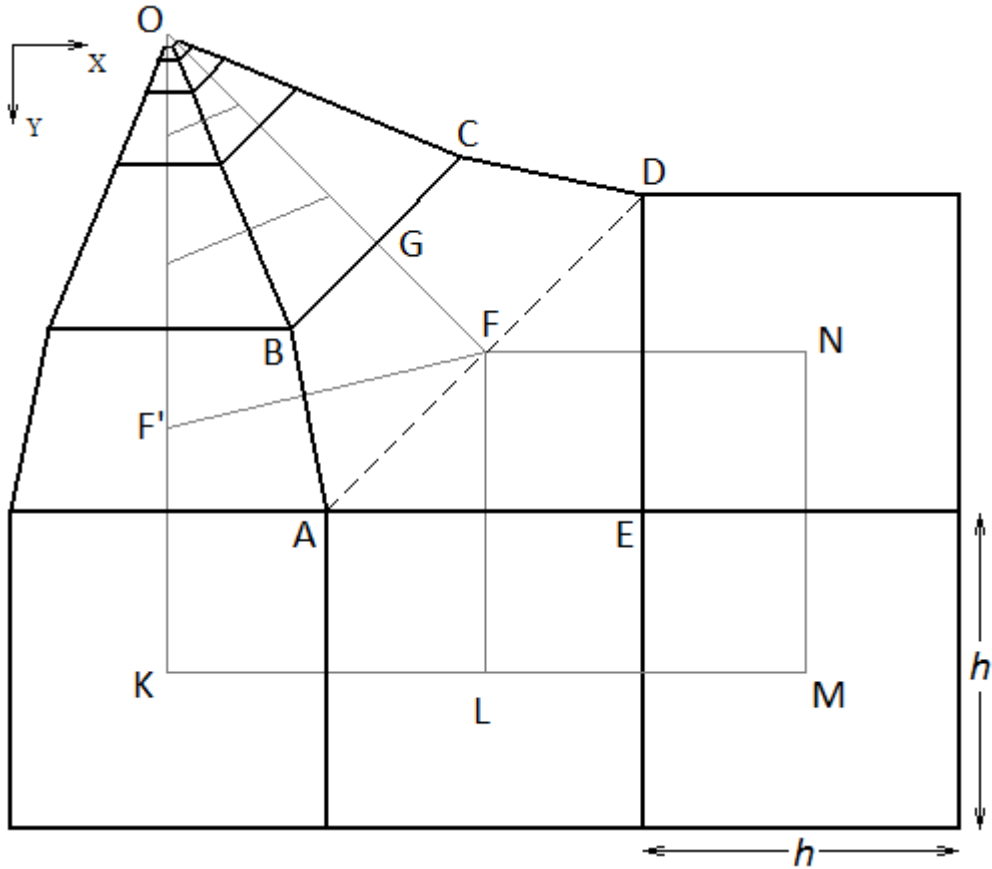


Рис.8 Построение сетки в переходной зоне

Для определения переходной зоны необходимо задать положение внешней границы внутренней зоны (задать $R_{end} = OB = OC$), а также положения «центров» ячеек переходного слоя (точки F и F'). Отметим, что эти параметры не являются независимыми, а связаны между собой и с положениями узлов и «центров» ячеек во внешней и внутренней зонах. Данные связи обусловлены требованием локальной ортогональности сетки.

Так, положение точки F однозначно определяется из условий ортогональности отрезков $FN \perp DE$ и $FL \perp AE$ и фиксированного положения центров ячеек сетки во внешней зоне K, L, M, N :

$$OF = \sqrt{2}h. \quad (13)$$

Точка $F' \in OK$ связана с F условием $FF' \perp AB$.

Таким образом, чтобы полностью определить переходную зону нужно задать либо положение точки F' («центра» трапеции) на отрезке OK , либо задать R_{end} . Данное обстоятельство не позволяет одновременно поместить «центры» F' и F соответствующих ячеек переходного слоя в их центры масс.

Рассмотрим два следующих случая:

- 1) F' является центром масс трапеции переходного слоя

В этом случае расстояние от центра источника O до F' есть:

$$OF' = \frac{(2R_{end} \cos(\pi/N_\varphi) + 3h/2)2R_{end} \sin(\pi/N_\varphi) + (R_{end} \cos(\pi/N_\varphi) + 3h)h}{3(2R_{end} \sin(\pi/N_\varphi) + h)}. \quad (14)$$

Условие локальной ортогональности $FF' \perp AB$ можно переписать в виде равенства нулю скалярного произведения векторов \overline{AB} и $\overline{FF'}$:

$$(\overline{AB}, \overline{FF'}) = 0, \quad (15)$$

где $\overline{AB} = \begin{pmatrix} R_{end} \sin(\pi/N_\varphi) - h/2 \\ R_{end} \cos(\pi/N_\varphi) - 3h/2 \end{pmatrix}$, $\overline{FF'} = \begin{pmatrix} -h \\ OF' - h \end{pmatrix}$.

Откуда получаем следующее уравнение:

$$-(R_{end} \sin(\pi/N_\varphi) - h/2)h + (R_{end} \cos(\pi/N_\varphi) - 3h/2)(OF' - h) = 0,$$

решая которое, находим

$$OF' = h + \frac{h - 2R_{end} \sin(\pi/N_\varphi)}{3h - 2R_{end} \cos(\pi/N_\varphi)}. \quad (16)$$

Приравнивая правые части (14) и (16), получаем следующее кубическое уравнение относительно R_{end} :

$$\begin{aligned} & R_{end}^3 \left[4\cos^2(\pi/N_\varphi) \sin(\pi/N_\varphi) \right] + \\ & + R_{end}^2 \left[h \left(-9\cos(\pi/N_\varphi) \sin(\pi/N_\varphi) + \cos^2(\pi/N_\varphi) - 6\sin^2(\pi/N_\varphi) \right) \right] + \\ & + R_{end} \left[\frac{3}{2} h^2 \left(3\sin(\pi/N_\varphi) - \cos(\pi/N_\varphi) \right) \right] + \frac{3}{2} h^3 = 0, \end{aligned}$$

которое решается методом Виета-Кардано [11].

Отметим, что в данном случае точка F не является центром масс пятиугольника переходного слоя.

2) F является центром масс пятиугольника переходного слоя

Для удобства поместим начало координат в точку F , ось Y направим к точке O , а ось X – к точке D . В силу симметрии пятиугольника его центр масс лежит на оси Y . Соотношение для центра масс пятиугольника $ABCDE$ вычисляется как общий центр масс двух объектов: трапеции $ABCD$ и треугольника ADE :

$$r_{ABCDE}^{cm} = \frac{r_{ABCD}^{cm} S_{ABCD} + r_{ADE}^{cm} S_{ADE}}{S_{ABCD} + S_{ADE}} = \frac{1}{3} \frac{FG^2(2BC + AD) - FE^2 \cdot AD}{FG(BC + AD) + FE \cdot AD}.$$

Так как мы рассматриваем случай, когда центр масс пятиугольника $ABCDE$ совпадает с F , являющейся началом координат, то получаем следующее соотношение:

$$r_{ABCDE}^{cm} = 0, \text{ откуда } FG^2(2BC + AD) - FE^2 \cdot AD = 0,$$

которое в сеточных переменных имеет вид:

$$\left(\sqrt{2}h - R_{end} \cos(\pi/N_\varphi) \right)^2 \left(4R_{end} \sin(\pi/N_\varphi) + \sqrt{2}h \right) - \frac{h^3}{\sqrt{2}} = 0.$$

Получившееся кубическое уравнение относительно R_{end} также решается методом Виета-Кардано. По найденному значению R_{end} с помощью (16)

получаем OF' , то есть определяем положение «центра» трапеции переходного слоя, которое не совпадает с его центром масс.

В первом варианте расхождение между центром масс пятиугольника и точкой F составляет примерно $0.011h$, во втором варианте соответствующее расхождение между точкой F' и центром масс трапеции составляет примерно $0.021h$. В дальнейшем будем использовать первый вариант, когда F' является центром масс трапеции переходного слоя, а расхождение точки F с соответствующим центром масс составляет $\sim 1\%$ от h .

Внешняя зона содержит $N-9$ ячеек исходной квадратной расчетной сетки с шагом h . Отметим, что сетка в этой области исходно является согласованной и локально ортогональной.

2.2 Прямоугольные сетки

Для оценки эффективности предложенного локального измельчения будем сравнивать результаты расчетов задачи Стефана на следующих сетках, заданных во всей области G :

- 1) Неравномерная прямоугольная сетка,
- 2) Равномерная прямоугольная сетка.

При этом количество ячеек этих сеток \bar{N} берется примерно равным количеству ячеек гибридной сетки $\bar{N} \approx N-9 + (N_R + 1)N_\varphi$.

Неравномерная (сгущающаяся к источнику) **прямоугольная сетка** вводится следующим образом: внутренняя круговая граница Γ_2 области G заменяется квадратом, периметр которого равен периметру скважины, а по направлению к внешней границе области Γ_1 строится прямоугольная сетка с шагами, увеличивающимися по геометрической прогрессии (рис.9).

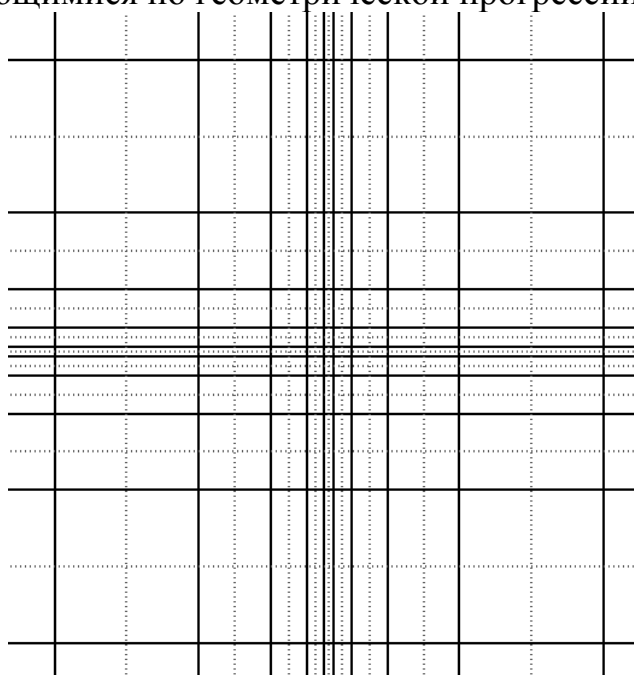


Рис.9 Фрагмент неравномерной прямоугольной сетки

Равномерная прямоугольная сетка в области G строится стандартным образом с единственным условием, чтобы источник попадал в середину центральной ячейки. Поскольку проведение локального измельчения увеличивает количество ячеек сетки на величину $(N_R + 1)N_\varphi - 9$, значительно меньшую, чем количество расчетных узлов исходной сетки N (иначе бы не было смысла проводить локальное измельчение), то шаг построенной равномерной сетки \bar{h} по порядку величины будет не сильно отличаться от шага исходной сетки h , то есть будет выполняться условие $a \ll \bar{h} < h \ll A$. Таким образом, для данной сетки источник останется точечным, и, очевидно, сохранит все проблемы исходной грубой сетки.

3. Разностная схема

3.1 Аппроксимация уравнения теплопроводности

Как отмечалось выше, выполнение требования локальной ортогональности позволяет использовать для гибридной сетки ту же идеологию при построении разностной схемы, что и для прямоугольных сеток, в частности, двухточечную аппроксимацию потока. Таким образом, представленная ниже разностная схема справедлива для всех рассматриваемых сеток. Единственное различие связано с аппроксимацией граничного условия на внутренней границе, что обусловлено различным строением сеток вблизи источника.

Разностную схему будем строить методом конечных объемов (интегро-интерполяционным методом [12]).

Перепишем уравнение (1) в интегральной форме:

$$\int_G (E(t_2) - E(t_1)) dS = - \int_{t_1}^{t_2} \int_G \operatorname{div} W dS dt, \quad (17)$$

где G – площадь ячейки, $t_2 = t_1 + \tau$, τ – шаг по времени.

По формуле Остроградского-Гаусса переходим от поверхностного интеграла к контурному:

$$\int_G (E(t_2) - E(t_1)) dS = - \int_{t_1}^{t_2} \int_\Gamma (W \cdot n) d\gamma dt, \quad (18)$$

где Γ – граница ячейки.

Интегрируя по некоторой ячейке с номером i и учитывая локальную ортогональность построенной сетки (направление вектора потока перпендикулярно грани), получим следующую разностную схему:

$$C(T_i^{j+1}) \frac{T_i^{j+1} - T_i^j}{\tau} S_i = - \sum_k W_{ik}^{j+1} h_{ik}, \quad (19)$$

где $E(t_2) - E(t_1) = \int_{T(t_1)}^{T(t_2)} C(T) dT$ аппроксимируется выражением $C(T_i^{j+1})(T_i^{j+1} - T_i^j)$,

$t_j = t_1$, $t_{j+1} = t_2$, суммирование в правой части ведется по всем граничащим с i

ячейкам k , h_{ik} – длина общей грани между ячейками i и k , W_{ik} – величина теплового потока через эту грань, S_i – площадь ячейки i . Таким образом, соотношение (19) представляет собой полностью неявную схему, которая является абсолютно устойчивой.

Разностная аппроксимация для потока тепла между двумя соседними ячейками с номерами i и k имеет вид:

$$W_{ik}^j = -\bar{\kappa}_{ik} \frac{T_i^j - T_k^j}{h_{ik}}, \quad (20)$$

где h_{ik} – расстояние между центрами ячеек i и k , $\bar{\kappa}_{ik}$ – коэффициент теплопроводности, отнесенный к грани.

Значение коэффициента теплопроводности на грани зависит от значений коэффициента в смежных ячейках $\bar{\kappa}_{ik} = \bar{\kappa}_{ik}(\kappa_i, \kappa_k)$, вид этой зависимости выбирается исходя из особенностей конкретной задачи.

Подставляя (20) в (19), получаем разностную аппроксимацию уравнения теплопроводности для i -й ячейки:

$$C(T_i^{j+1}) \frac{T_i^{j+1} - T_i^j}{\tau} S_i = - \sum_k \bar{\kappa}_{ik} \frac{T_i^{j+1} - T_k^{j+1}}{h_{ik}} h_{ik}. \quad (21)$$

Поскольку коэффициенты теплоемкости или теплопроводности зависят от температуры, то система уравнений (21) является нелинейной. Для ее линеаризации будем использовать метод Ньютона [13].

В результате на каждой нелинейной итерации получаем систему линейных алгебраических уравнений вида $A \cdot T = B$, которая в случае $\bar{\kappa}_{ik} = \bar{\kappa}_{ki}$ имеет симметричную положительно определенную матрицу A . Для решения таких систем уравнений одним из наиболее эффективных методов является метод сопряженных градиентов [14].

3.2 Аппроксимация коэффициентов теплоемкости и теплопроводности

При построении разностной аппроксимации коэффициентов теплоемкости и теплопроводности будем исходить из концепции **однородных разностных схем** [12], то есть схем, при использовании которых вычисления во всех узлах сетки проводятся по единым формулам. При этом области разрыва свойств среды, порождающие разрывность коэффициентов дифференциальной задачи, обычно заменяют достаточно узкими зонами их непрерывного изменения, вводя искусственное «размазывание».

В случае рассматриваемой нами задачи Стефана (5) размазыванию подлежат коэффициенты теплоемкости и теплопроводности. Следуя [10], заменим разрывный коэффициент $C(T) + \lambda \delta(T - T^*)$, непрерывным $\tilde{C}(T)$ так, чтобы на интервале размазывания $(T^* - \Delta, T^* + \Delta)$ выполнялось условие сохранения энергии:

$$\int_{T^*-\Delta}^{T^*+\Delta} \tilde{C}(T) dT = \lambda + \int_{T^*-\Delta}^{T^*} C(T) dT + \int_{T^*}^{T^*+\Delta} C(T) dT, \quad (22)$$

а вне этого интервала $\tilde{C}(T) = C(T)$.

Величина интервала размазывания 2Δ , с одной стороны, должна быть достаточно малой, чтобы сохранить особенность дифференциальной задачи, а с другой стороны, должна быть согласована с шагами по времени и по пространству разностной задачи, так чтобы при движении фронта фазового перехода на каждый шаг по времени в этот интервал попадало хотя бы одно значение температуры в ячейках.

В работе [10] в качестве $\tilde{C}(T)$ на интервале $(T^* - \Delta, T^* + \Delta)$ взята кусочно-постоянная аппроксимация (рис.10):

$$\tilde{C}(T) = \frac{\lambda}{2\Delta} + \frac{C_1 + C_2}{2}. \quad (23)$$

Однако в этом случае функция теплоемкости остается разрывной при $T = T^* \pm \Delta$, что негативно сказывается на сходимости нелинейных итераций.

Будем в качестве $\tilde{C}(T)$ на интервале $(T^* - \Delta, T^* + \Delta)$ использовать непрерывную функцию, состоящую из двух ветвей синусоид (рис.11):

$$\tilde{C}(T) = \begin{cases} \sin\left(\frac{\pi}{2}\left(\frac{T-T^*}{\Delta}\right)\right) \frac{C_3 - C_1}{2} + \frac{C_3 + C_1}{2}, & \text{при } T \in (T^* - \Delta, T^*] \\ -\sin\left(\frac{\pi}{2}\left(\frac{T-T^*}{\Delta}\right)\right) \frac{C_3 - C_2}{2} + \frac{C_3 + C_2}{2}, & \text{при } T \in (T^*, T^* + \Delta) \end{cases}, \quad (24)$$

где $C_3 = \frac{\pi}{\pi - 2} \frac{\lambda}{\Delta} + \frac{C_1 + C_2}{2}$.

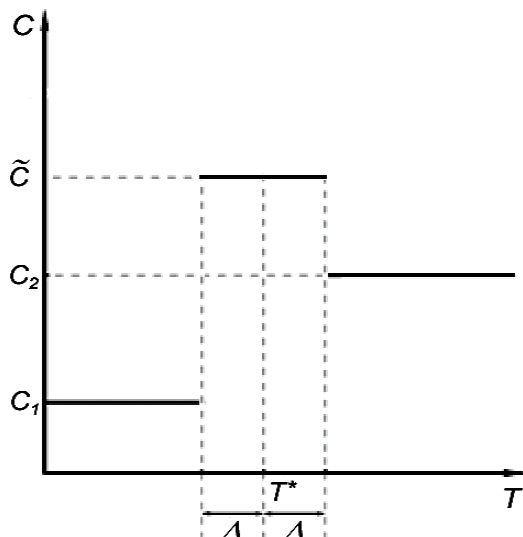


Рис.10 Кусочно-постоянная аппроксимация коэффициента теплоемкости

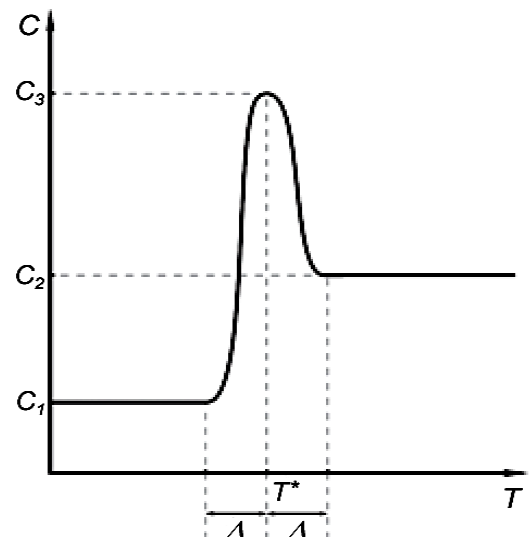


Рис.11 Аппроксимация коэффициента теплоемкости с помощью синусоид

При фазовом переходе коэффициент теплопроводности также испытывает скачок. По аналогии с коэффициентом объемной теплоемкости заменим на интервале $(T^* - \Delta, T^* + \Delta)$ разрывную функцию для коэффициента теплопроводности непрерывной (рис.12):

$$\tilde{\kappa}(T) = \begin{cases} \kappa_1, & \text{при } T \leq T^* - \Delta \\ -\sin\left(\frac{\pi}{2}\left(\frac{T - T^*}{\Delta}\right)\right) \frac{\kappa_1 - \kappa_2}{2} + \frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2}, & \text{при } T \in (T^* - \Delta, T^* + \Delta) \\ \kappa_2, & \text{при } T \geq T^* + \Delta \end{cases} \quad (25)$$

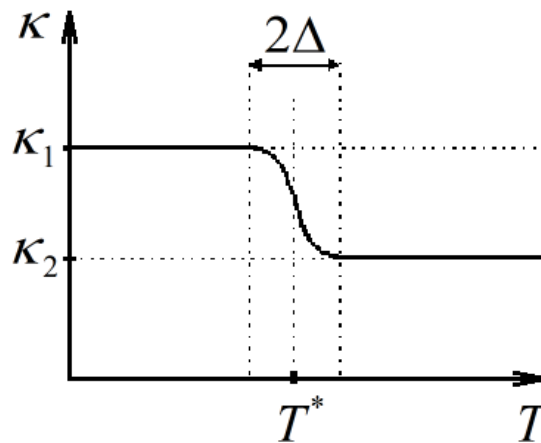


Рис.12 Аппроксимация коэффициента теплопроводности

Для аппроксимации на грани $\bar{\kappa}_{ik}$ будем использовать среднее гармоническое значений коэффициентов теплопроводности в смежных ячейках [15]:

$$\bar{\kappa}_{ik}(\kappa_i, \kappa_k) = \frac{2\kappa_i \kappa_k}{\kappa_i + \kappa_k}.$$

В результате получаем следующую систему уравнений:

$$\tilde{C}(T) \frac{\partial T}{\partial t} = -\text{div} W, \quad W = -\tilde{\kappa}(T) \text{grad}(T), \quad (26)$$

с точностью до обозначений совпадающую с уравнениями (1), (2), для которых разностная аппроксимация имеет вид (21).

3.3 Тестовое решение

Описанная выше задача Стефана не имеет аналитического решения, поэтому для сравнения качества решения на различных сетках будем использовать тестовое решение из того же класса задач. Так, если исходную задачу рассматривать не в квадратной, а в круговой области, то при введении полярных координат она сводится, в силу радиальной симметрии, к одномерной задаче, которая может быть легко решена численно на достаточно подробной сетке с нужной точностью. Найдем это решение и примем его в качестве тестового.

Итак, будем искать решение задачи

$$\tilde{C}(T) \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \tilde{\kappa}(T) \frac{\partial T}{\partial r} \right) \text{ на отрезке } r \in [a, A_1]. \quad (27)$$

В качестве начального условия на всем отрезке задана постоянная температура $T = T_0$.

На внешней границе задано условие непротекания:

$$W|_{r=A_1} = 0. \quad (28)$$

На внутренней границе задан поток, соответствующий условию (6):

$$W|_{r=a} = \frac{Q}{2\pi}. \quad (29)$$

Отметим, что данная задача имеет автомодельное решение [16], которое может быть получено с помощью решения соответствующего трансцендентного уравнения. Однако для простоты будем решать ее численно на достаточно подробной сетке. Величина шага по пространству h_{ex} выбирается из условия $h_{ex} \ll a$. Разностная аппроксимация уравнения (27) строится с помощью метода конечных разностей, для аппроксимации коэффициентов теплоемкости и теплопроводности используются соотношения (24), (25). Полученная система нелинейных уравнений линейризуется с помощью метода Ньютона и далее решается методом прогонки с использованием граничных условий (28), (29).

В силу радиальной симметрии решение задачи (27) можно перенести на двумерную круговую область G_1 с внешним радиусом A_1 и вырезом в центре. При этом A_1 выбирается из условия $G \subset G_1$, то есть должно выполняться неравенство $A_1 \geq \sqrt{2}A/2$.

3.4 Аппроксимация граничных условий

1) Внешняя граница

В качестве граничного условия на внешней границе Γ_1 области G для задачи (5) будем использовать значение потока $(\vec{W}_{ex}(r, t), \vec{n})|_{\Gamma_1}$ из решения тестовой задачи (27).

Поскольку одномерное решение вычисляется на достаточно подробной сетке $h_{ex} \ll a$, то с помощью линейной интерполяции можно с хорошей точностью найти значение температуры в любой точке области G_1 . Далее, для каждой грани исследуемых сеток, лежащей на границе Γ_1 , вычисляется интегральный поток через нее, используя метод гауссовских квадратур на отрезке [17], и находится его нормальная компонента к грани $(\vec{W}_{ex}(r, t), \vec{n})|_{\Gamma_1}$.

2) Внутренняя граница

Гибридная сетка. При построении гибридной сетки круговая граница радиуса a заменялась равным по периметру восьмиугольником (рис.13), что обеспечивало равенство проходящих через них потоков.

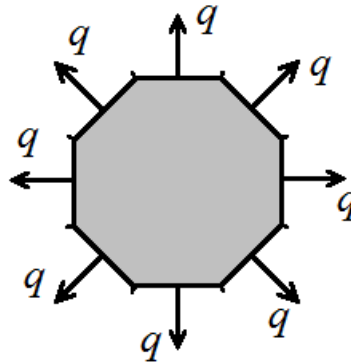


Рис.13 Гибридная сетка. Аппроксимация источника восьмиугольником

Для граничащей с источником ячейки i имеем следующую аппроксимацию уравнения теплопроводности:

$$C(T_i^{j+1}) \frac{T_i^{j+1} - T_i^j}{\tau} S_i = - \sum_k W_{ik}^{j+1} h_{ik}, \quad (30)$$

где суммирование ведется по всем граням k ячейки i . При этом для грани, соответствующей ребру восьмиугольника, из граничных условий получаем:

$$W_{ia} = - \frac{Q}{8h_a}, \quad (31)$$

где $h_{ia} = 2\pi a/8$ – длина ребра восьмиугольника, W_{ia} – поток через это ребро, знак «-» возникает из-за того, что поток W_{ia} направлен против внешней нормали к ячейке i .

Неравномерная прямоугольная сетка. В случае сгущающейся прямоугольной сетки круговой вырез радиуса a заменялся равным по периметру квадратом (рис.14).

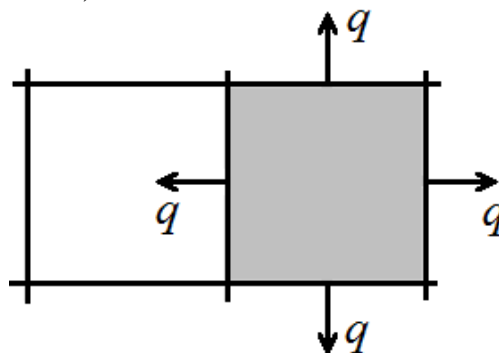


Рис.14 Неравномерная прямоугольная сетка. Аппроксимация источника квадратом

Аппроксимация уравнения теплопроводности для ячейки i , граничащей с источником, также имеет вид (30), а для грани, соответствующей ребру квадрата, из граничных условий получаем:

$$W_{ia} = -\frac{Q}{4h_a}, \quad (32)$$

где $h_a = 2\pi a/4$ – длина ребра квадрата, W_{ia} – поток через это ребро.

Равномерная прямоугольная сетка. Поскольку размер шага равномерной прямоугольной сетки \bar{h} намного больше радиуса скважины $\bar{h} \gg a$, то можно считать, что в центре ячейки задан точечный источник тепла (рис.15).

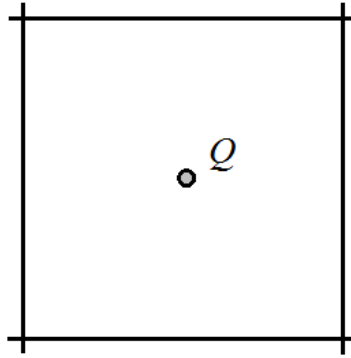


Рис.15 Равномерная прямоугольная сетка. Точечный источник

В этом случае уравнение (16) для ячейки, содержащей скважину, примет вид:

$$\int_G (E(t_2) - E(t_1)) dS = -\int_{t_1}^{t_2} \int_{\Gamma_1 \cup \Gamma_2} (W \cdot n) d\gamma dt + \int_{t_1}^{t_2} \int_{\Gamma_2} Q \delta(r - a) dr dt.$$

Откуда получаем:

$$C(T_i^{j+1}) \frac{T_i^{j+1} - T_i^j}{\tau} S_i = -\sum_k W_{ik}^{j+1} \bar{h} + Q, \quad (33)$$

где i – номер ячейки, содержащей источник.

В результате в случае использования грубой равномерной прямоугольной сетки получаем задачу, эквивалентную исходной, но в области без выреза и с точечным источником мощностью Q в центре.

4. Результаты расчетов

Результаты расчетов описанной выше задачи Стефана на предложенной гибридной расчетной сетке с локальным измельчением сравнивались с результатами, полученными при расчете на равномерной и неравномерной прямоугольных сетках со сходным количеством узлов. В качестве эталонного решения использовалось тестовое решение.

В расчетах задавались следующие значения параметров задачи Стефана: $A=5$, $a=0.01$, $C_1=2060$, $C_2=4138$, $\kappa_1=2.4$, $\kappa_2=0.6$, $\lambda=333500$, $\Delta=0.5$, $T^*=0$, $T_0=-5$, $Q=20$, $\tau=5$,

где предполагалось, что среда представляет собой грунт, пропитанный водой, при этом коэффициенты теплопроводности и теплоемкости для состояния

1 соответствуют замерзшей воде (льду), для состояния 2 – воде в жидком состоянии, а значение λ есть скрытая теплота плавления льда.

Параметры равномерной прямоугольной сетки:

$$N = 15 \times 15 = 225, \bar{h} = 0.3333.$$

Параметры неравномерной прямоугольной сетки:

$$N = 15 \times 15 = 225, h_{\min} = 0.0157, h_{\max} = 1.1599, q_h = 1.8488 \text{ (показатель прогрессии).}$$

Параметры гибридной сетки:

$$N = 224, h = A/13 = 0.3846, N_R = 7, N_\varphi = 8, q_h = 1.6782.$$

Параметры тестового решения:

$$N_{ex} = 50000, A_1 = A, \text{ шаг сетки } h_{ex} = 0.0001.$$

Поскольку при построении разностных схем использовался метод конечных объемов, то полученное в расчетах значение температуры в «центре» ячейки представляет собой осредненное по всей площади ячейки значение. Для корректного сравнения полученных результатов с тестовым решением будем использовать аппарат гауссовских квадратур. В силу того, что тестовое решение задано на достаточно подробной сетке $h_{ex} \ll a$, то с помощью линейной интерполяции можно найти значение температуры $T_{ex}(x, y)$ в любой внутренней точке ячейки. Таким образом, интегрируя функцию $T_{ex}(x, y)$ по площади ячеек рассматриваемых сеток, мы получим осредненное значение тестового решения для каждой ячейки, которое уже можно сравнивать с полученным в расчетах значением.

Результаты расчетов будем сравнивать на контрольные моменты времени, соответствующие 100, 1000, 4000, 10000 и 32000 шагам по времени.

На рисунке 16 изображены профили температуры тестового решения на контрольные моменты времени с учетом фазового перехода и без него.

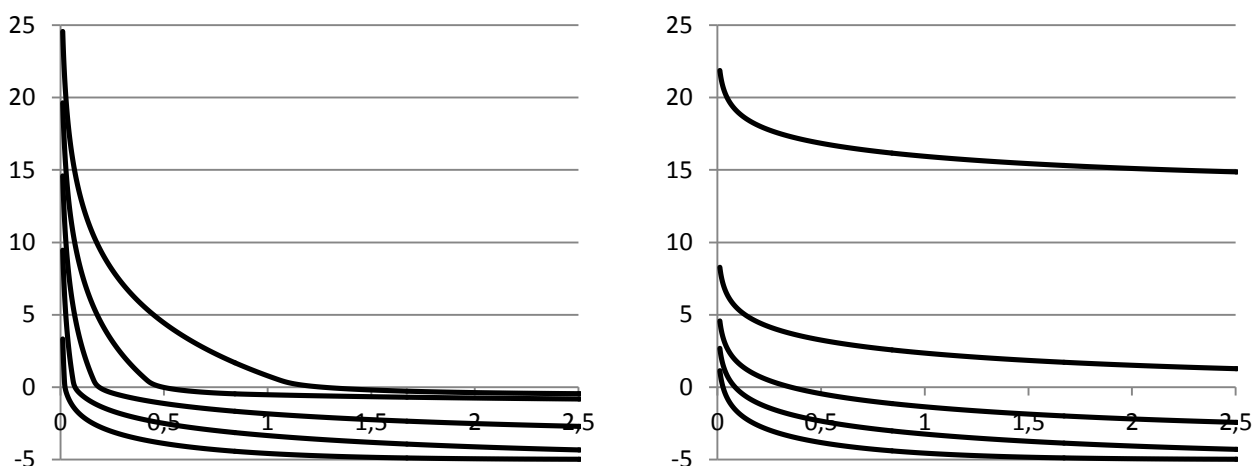


Рис.16 Профили температуры с учетом (слева) и без (справа) фазового перехода

На приведенных графиках видно, что температура вблизи источника увеличивается со временем и происходит прогрев среды. Фронт фазового

перехода постепенно сдвигается к внешней границе области. При переходе через изотерму фазового перехода профиль температуры испытывает излом, связанный со скачком коэффициентов и поглощением энергии. В случае же, когда фазового перехода нет, коэффициенты теплоемкости и теплопроводности не зависят от температуры (их значения соответствуют состоянию 1), рассматриваемая система не расходует энергию на фазовый переход, в результате чего среда прогревается значительно быстрее.

Дальнейшие результаты расчетов приведены для случая, учитывающего фазовый переход.

Для наглядности будем сравнивать положение и форму изотермы фазового перехода для каждой из расчетных сеток на контрольные моменты времени (рис.17-19). Для каждой сетки представлено два рисунка: оригинальный масштаб области G (слева), увеличенный масштаб окрестности источника (справа). Сплошной линией нарисованы изотермы рассчитанных значений, а пунктиром – соответствующие им изотермы тестового решения.

Отметим, что решение задачи Стефана для однородной изотропной среды является симметричным относительно источника, изотермы фазового перехода на последовательные моменты времени представляют собой набор расходящихся концентрических окружностей.

Равномерная прямоугольная сетка. Из-за достаточно больших размеров шага сетки за первые два контрольных момента времени средняя температура внутри центральной ячейки не успевает подняться до значения T^* , и фазовый переход не происходит, хотя соответствующие изотермы тестового решения говорят о его наличии. Начиная с третьего момента времени, фазовый переход проявляется, и с продвижением фронта к внешним границам области его положение и форма стремятся к таковым для тестового решения.

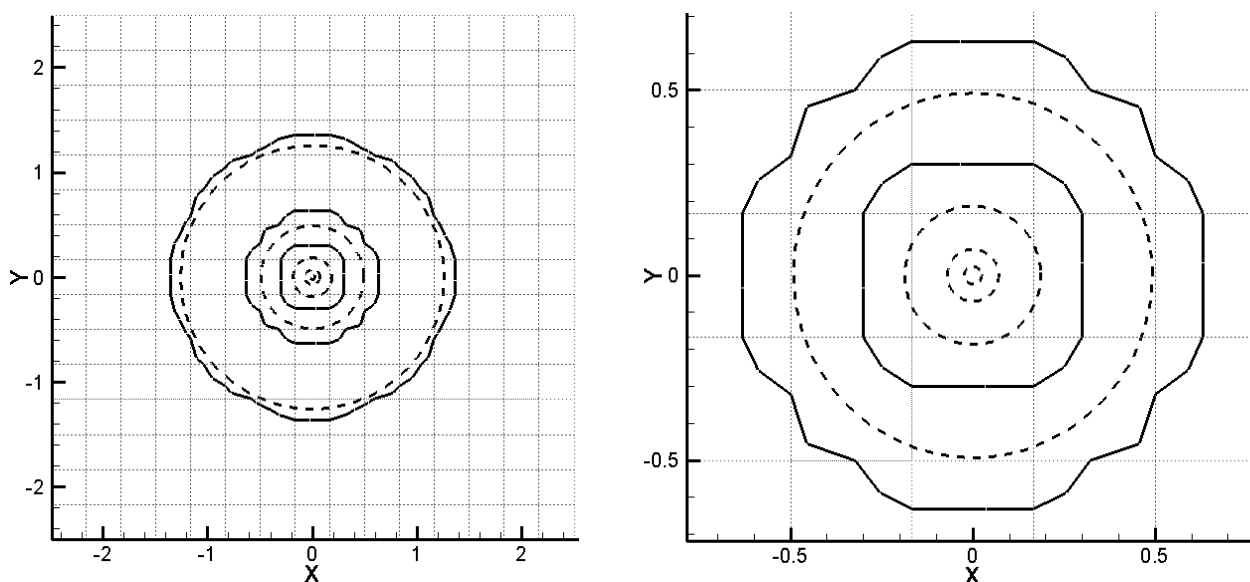


Рис.17 Изотермы фазового перехода. Равномерная прямоугольная сетка

Неравномерная прямоугольная сетка. Поскольку вблизи источника сетка достаточно подробная и размеры ее ячеек сравнимы с размерами источника, фазовый переход проявляется уже на первом контрольном моменте времени. При продвижении фронта к внешним границам области размер ячеек, через которые проходит изотерма фазового перехода, увеличивается, а с ним увеличивается расхождение положения и формы фронта фазового перехода по сравнению с таковыми для тестового решения. Особенно сильно это проявляется в ячейках, расположенных вдоль координатных осей, которые при удалении от источника становятся всё более геометрически вырожденными (длины соседних граней ячейки существенно различаются), в результате чего фронт теряет круговую форму. Существенным минусом данного типа сеток является невозможность их использования при наличии нескольких источников, расположенных не на одной вертикали или горизонтали.

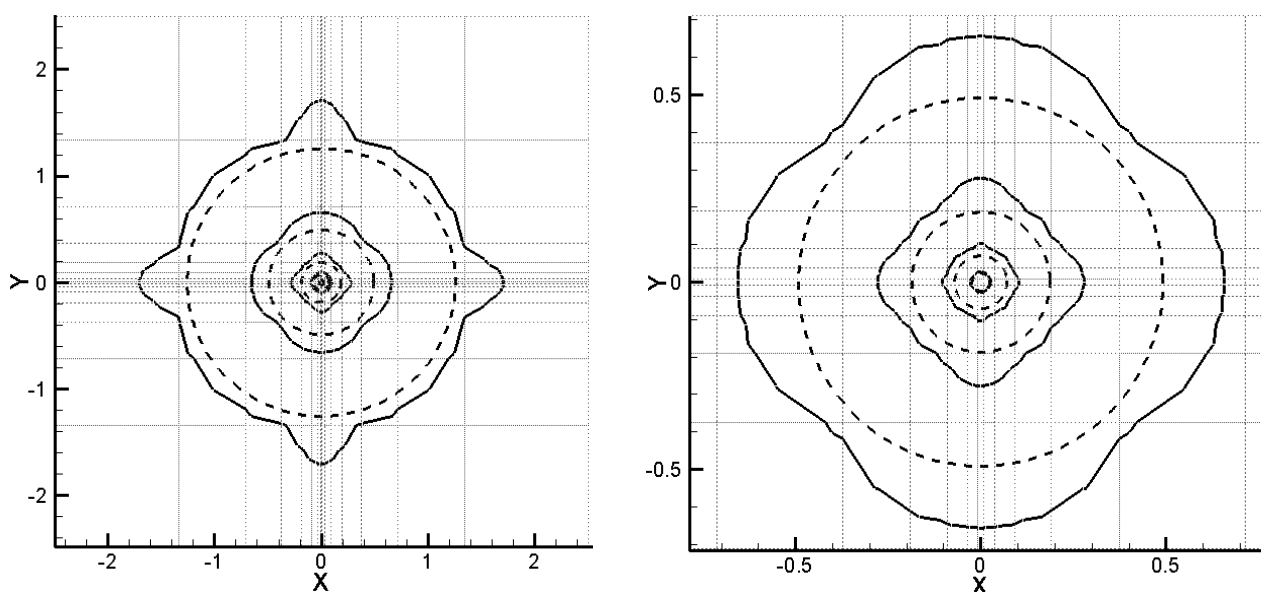


Рис.18 Изотермы фазового перехода. Неравномерная прямоугольная сетка

Гибридная сетка. На первые три контрольных момента времени, когда фронт находится во внутренней зоне, положение и форма изотерм фазового перехода практически не отличаются от тестового решения. Это связано с достаточно подробной сеткой во внутренней зоне, а также ее радиальной симметрией. На четвертый момент времени, когда фронт фазового перехода находится в переходной зоне, его форма несколько искажается, а положение фронта начинает немного опережать таковое на тестовом решении. При продвижении фронта вглубь прямоугольной зоны положение и фронт фазового перехода, как и в случае с прямоугольной равномерной сеткой, стремятся к тестовому решению.

Приведенные результаты демонстрируют преимущество использования гибридной сетки, особенно когда фронт находится в окрестности источника, а это именно та область, где в прикладных задачах требуется высокое качество решения.

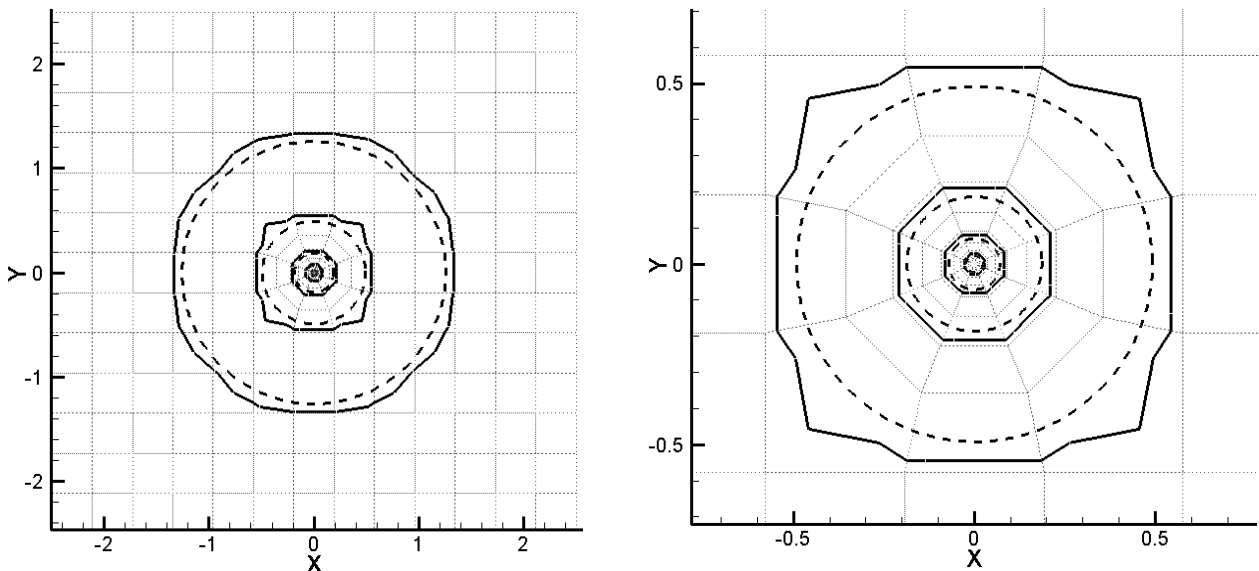


Рис.19 Изотермы фазового перехода. Гибридная сетка

Одной из важных характеристик проведенных расчетов является момент появления фазового перехода. В таблице 1 приведены моменты времени для каждой из рассматриваемых сеток, когда значение температуры хотя бы в одной ячейке превысило T^* .

Таблица 1. Момент появления фазового перехода

| | Номер шага по времени |
|--------------------------------------|-----------------------|
| Тестовое решение | 17 |
| Гибридная сетка | 27 |
| Неравномерная прямоугольная сетка | 62 |
| Равномерная прямоугольная сетка | 1614 |

Из приведенных в таблице результатов видно, что использование грубых сеток не позволяет даже качественно передавать особенности физических процессов, происходящих вблизи источника, в то время как использование сеток с локальным измельчением, содержащих то же число ячеек, позволяет получать не только качественно, но и количественно близкие к тестовому решению результаты расчетов.

Для количественной оценки качества полученных решений построены графики абсолютных ошибок по отношению к тестовому решению в L2- (рис.20) и C-норме (рис.21) на каждый шаг по времени. Очевидно, что для равномерной прямоугольной сетки основная ошибка связана с центральной ячейкой, содержащей источник, поэтому отдельно приведены графики ошибок с учетом центральной ячейки и без нее.

Из представленных результатов видно, что диапазон и среднее значение ошибок на гибридной сетке существенно меньше, чем на остальных сетках. На более поздних моментах времени, когда фронт фазового перехода удаляется от источника, ошибки на всех трех сетках имеют примерно одинаковые значения.

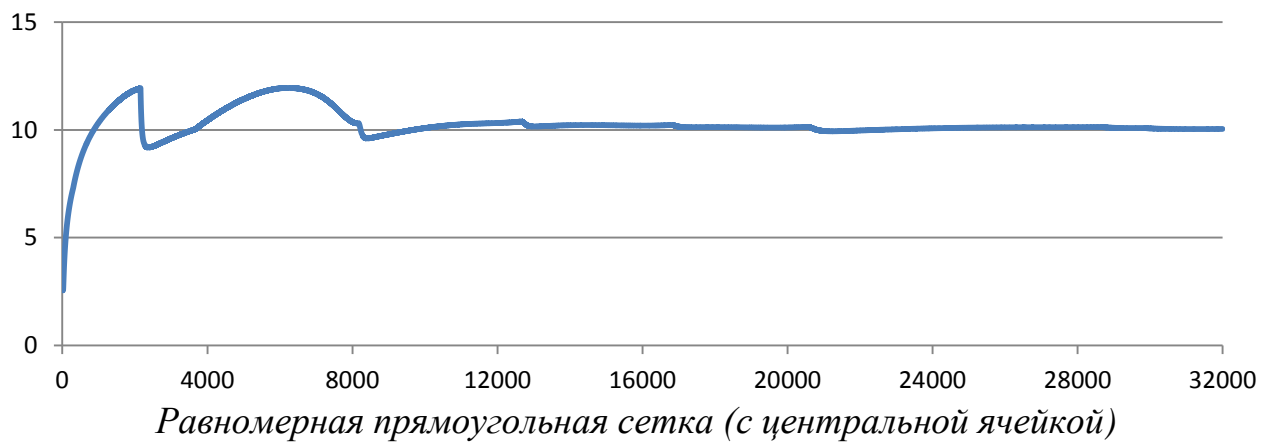
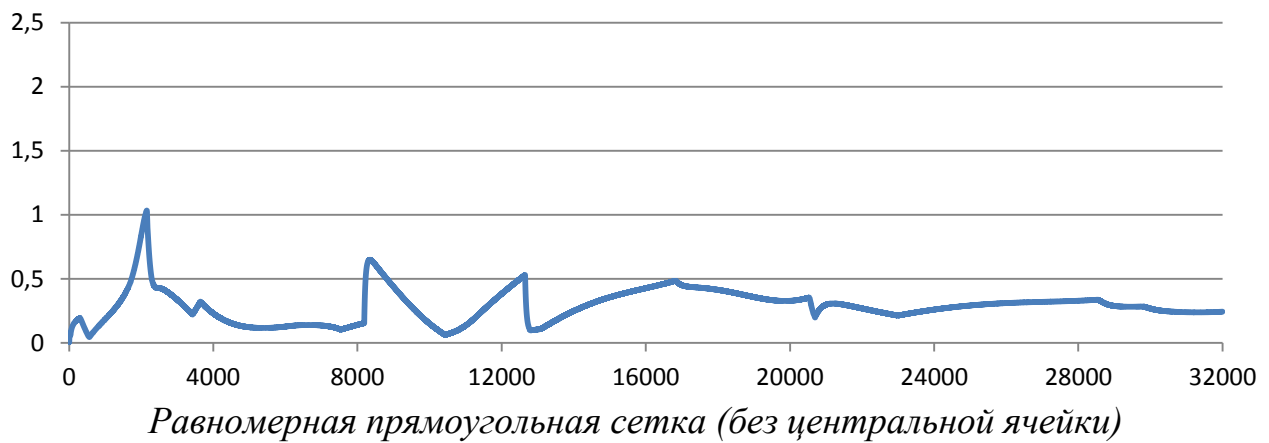
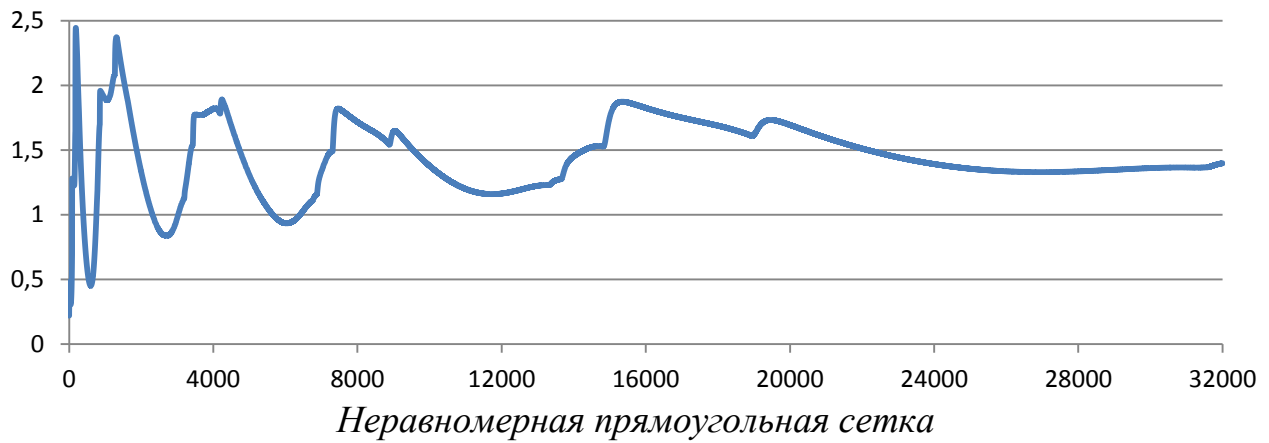
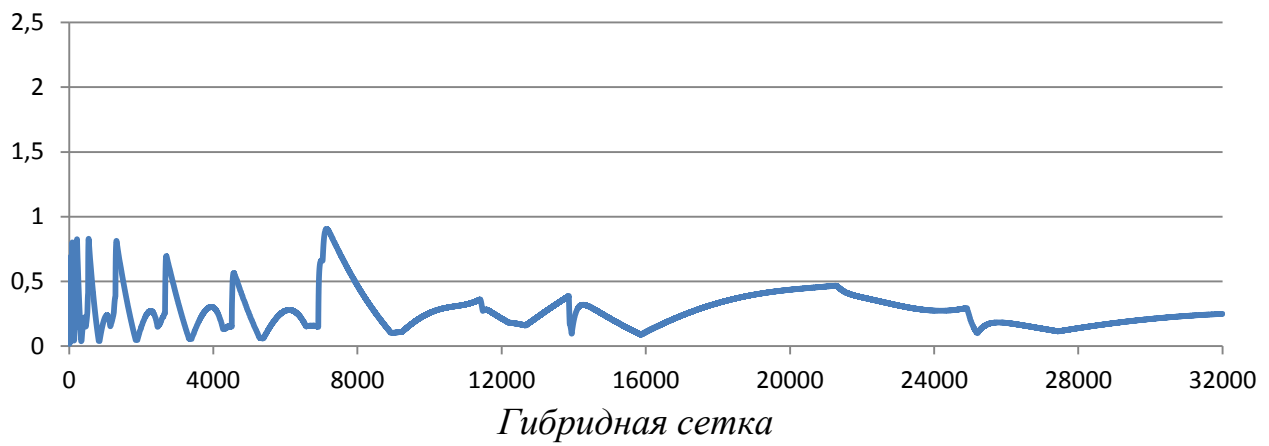
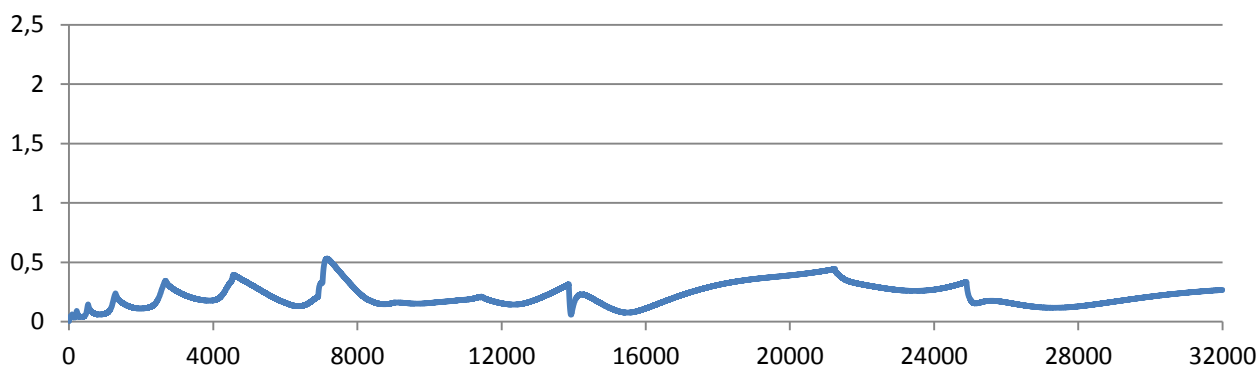
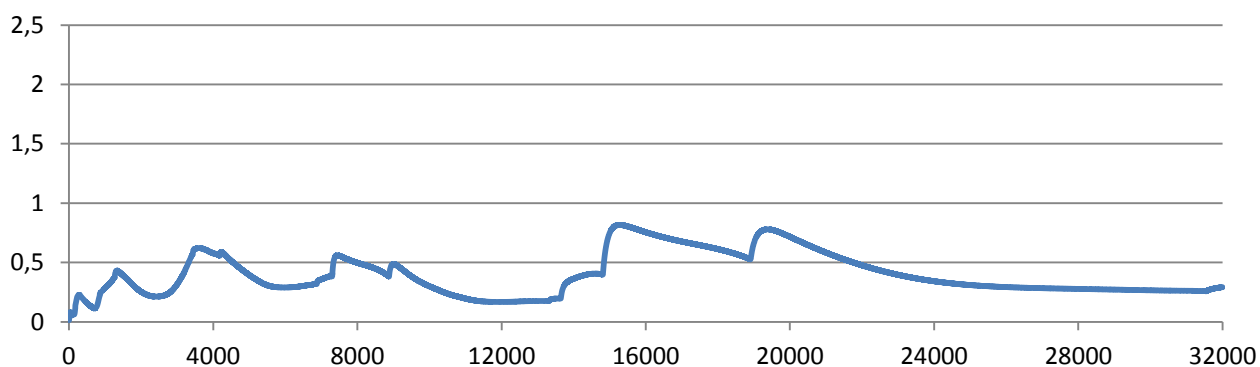


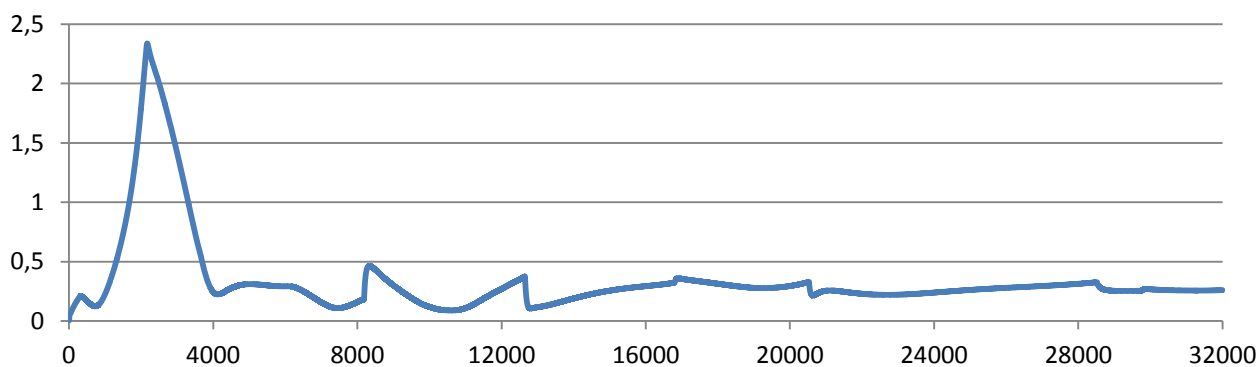
Рис.20 Графики зависимости ошибки в C-норме от времени



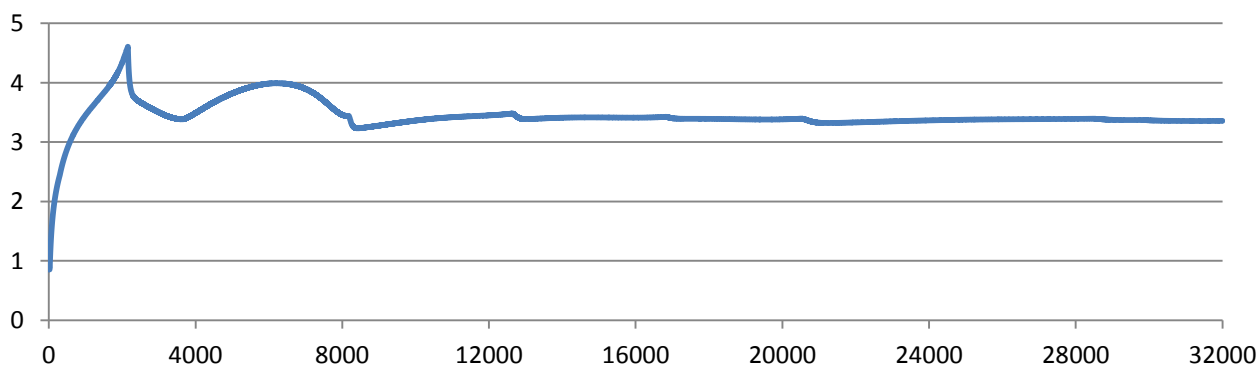
Гибридная сетка



Неравномерная прямоугольная сетка



Равномерная прямоугольная сетка (без центральной ячейки)



Равномерная прямоугольная сетка (с центральной ячейкой)

Рис.21 Графики зависимости ошибки в L2-норме от времени

Оптимальное разбиение внутренней зоны. При построении разбиения по внутренней зоне гибридной сетки мы стремились к выполнению критерия равенства высоты и средней линии трапеций внутренней зоны (11), что предполагало минимизацию разномасштабности граней ячейки. Рассчитанное таким способом количество слоев дало значение $N_R = 6$. Проведенные численные исследования показали следующую зависимость абсолютной ошибки решения в С-норме от количества слоев сетки N_R во внутренней зоне (рис.22):

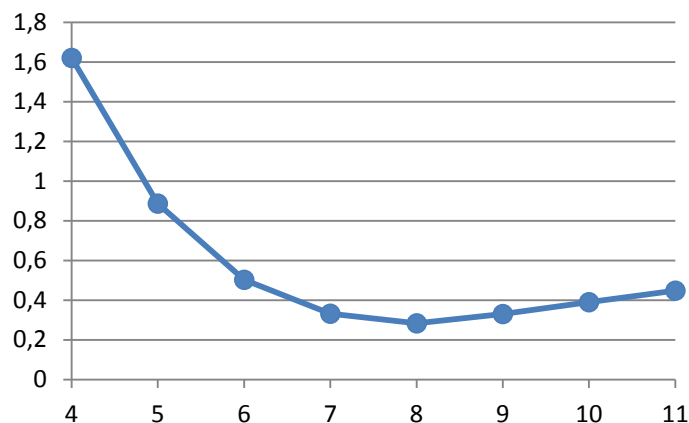


Рис.22 Зависимость абсолютной ошибки решения в С-норме от N_R

Данная зависимость показала, что наилучшим с точки зрения минимума ошибки количеством слоев сетки внутреннего слоя является случай $N_R = 8$.

Как отмечалось при построении гибридной сетки, разбиение внутренней зоны должно производиться также с учетом размеров ячеек переходной зоны. В связи с этим для значений $N_R = 6, \dots, 10$ построим графики $\frac{S_{i+1}}{S_i}(i)$ – зависимости

отношения площадей соседних $i+1$ -й и i -й ячеек от номера ячейки i , где номера отсчитываются от источника вдоль оси X (рис.23):

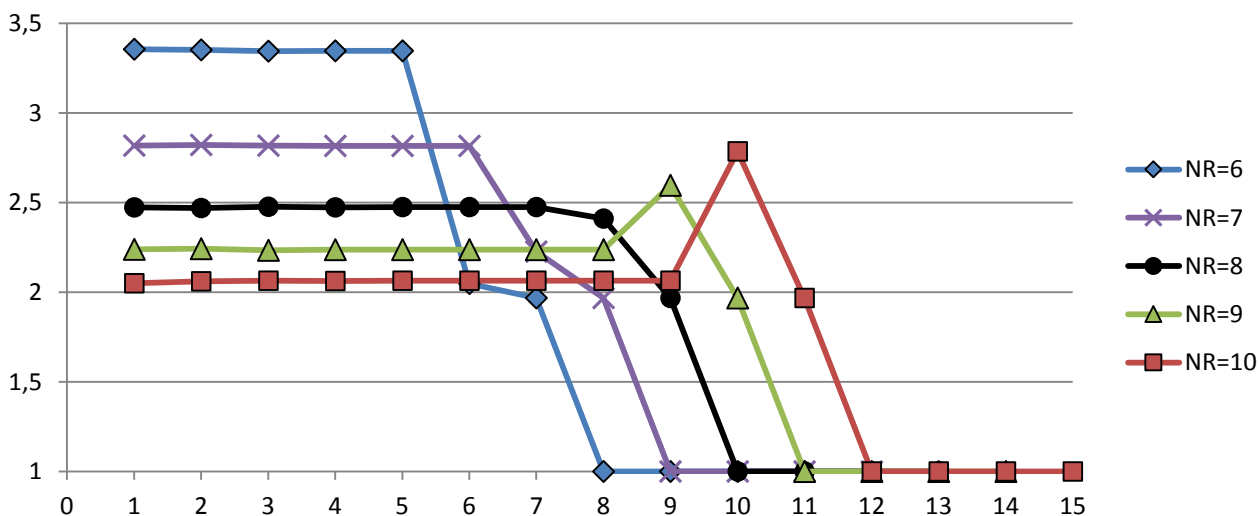


Рис.23 Отношение площадей соседних ячеек вдоль оси X

Из графиков видно, что оптимальное с точки зрения ошибки значение $N_R = 8$ соответствует случаю с минимальным значением максимума функции $\frac{S_{i+1}}{S_i}(i)$, т.е. случаю, когда соседние ячейки минимально отличаются друг от друга по размерам.

Оценка скорости сходимости решения на гибридной сетке.

Проведем численное исследование скорости сходимости приближенного решения, полученного на гибридной сетке, к тестовому решению. Для этого рассмотрим последовательность измельчающихся разностных сеток, стягивающихся к источнику (рис.24), для каждой из которых будем вычислять абсолютную ошибку по отношению к тестовому решению в L2- и C-норме (таб.2).

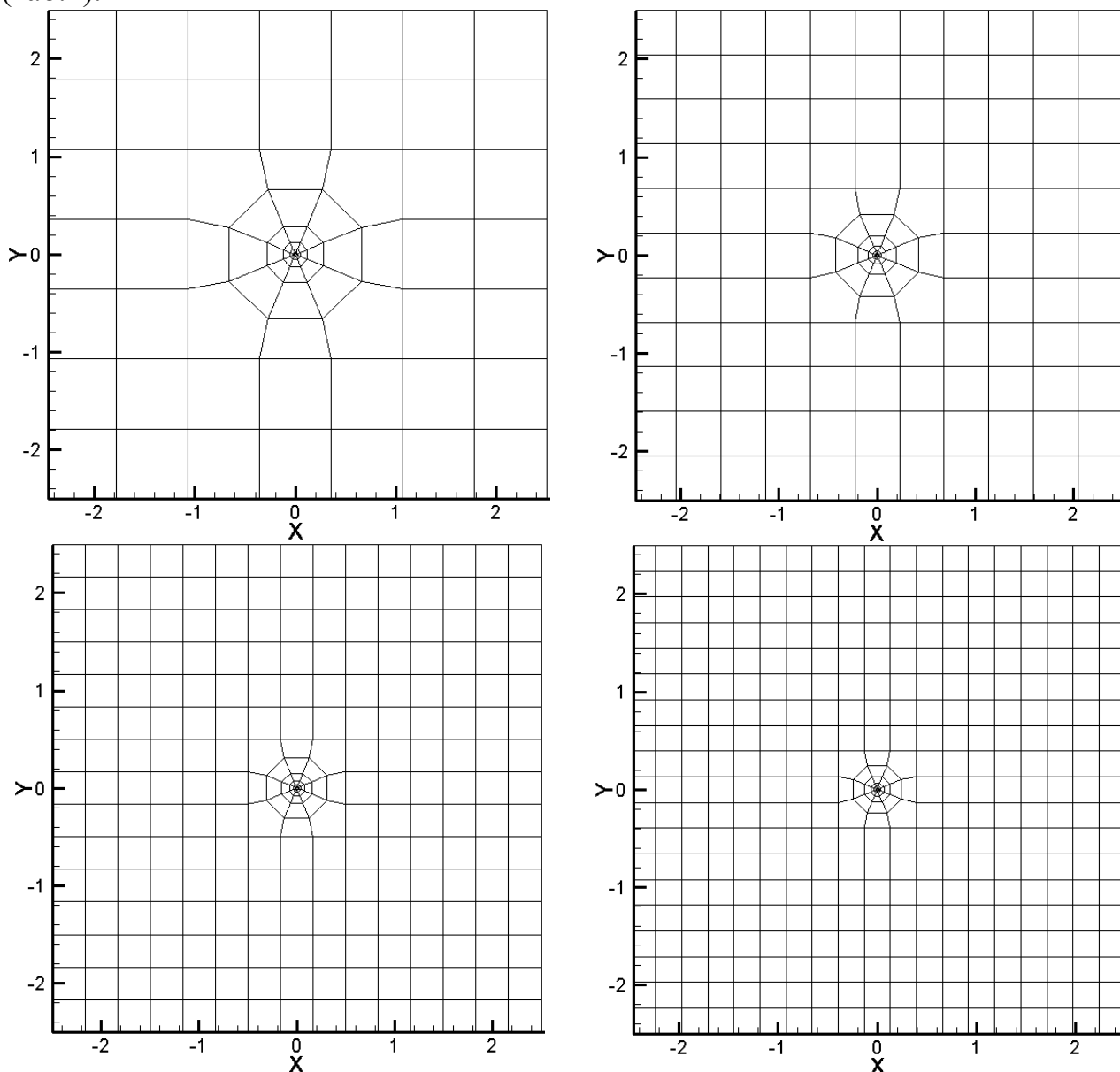


Рис.24 Последовательность измельчающихся сеток

Таблица 2. Оценка скорости сходимости решения в L2 и C-норме

| Количество ячеек сетки | Максимальный шаг по пространству | Ошибка в L2-норме | Ошибка в C-норме |
|------------------------|----------------------------------|-------------------|------------------|
| 80 | 0.714286 | 0.768017 | 3.364690 |
| 152 | 0.454545 | 0.438931 | 1.928337 |
| 256 | 0.333333 | 0.318792 | 1.385595 |
| 392 | 0.263158 | 0.228895 | 1.068230 |
| 560 | 0.217391 | 0.171891 | 0.842931 |
| 760 | 0.185185 | 0.137660 | 0.674220 |
| 992 | 0.161290 | 0.113826 | 0.553517 |
| 1256 | 0.142857 | 0.097706 | 0.457645 |
| 1552 | 0.128205 | 0.085608 | 0.381694 |
| 1880 | 0.116279 | 0.077219 | 0.321136 |

Скорость сходимости решения на данных сетках можно оценить по показателю степенной функции, аппроксимирующей точки на графике зависимости ошибки от максимального шага по пространству (рис.25).

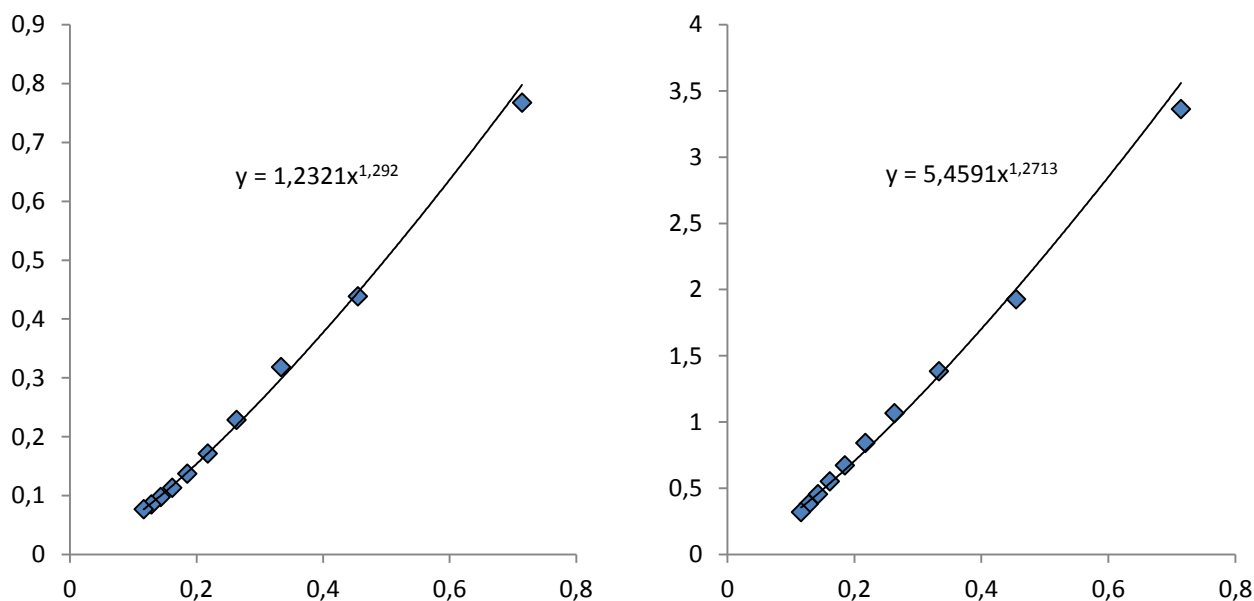


Рис.25 Графики зависимостей ошибки в L2-норме (слева) и C-норме (справа) от максимального шага по пространству

Из представленных результатов можно заключить, что построенный алгоритм локального измельчения обеспечивает скорость сходимости по пространству $O(h^n)$, где $n=1.2$.

Заключение

В работе предложен метод построения локального измельчения расчетной сетки вблизи кругового источника с размерами, существенно меньшими, чем характерный размер задачи. Предложенный подход позволяет «разрешить» границу источника, перейдя от использования точечного источника к прямому заданию граничных условий на гранях сетки, аппроксимирующих источник.

Получившаяся после локального измельчения сетка состоит из трех зон: внешней, содержащей ячейки исходной сетки вне области измельчения, внутренней в непосредственной окрестности источника, обладающей радиальной симметрией, и переходной, соединяющей эти две зоны. Особенностью работы является использование при построении локального измельчения принципов локальной ортогональности и согласованности сетки, которые позволяют применять те же подходы при построении разностного алгоритма, что и на прямоугольных сетках, в частности, двухточечную аппроксимацию потока через общую грань ячеек.

Тестирование построенной гибридной сетки проведено на примере задачи Стефана, когда под действием теплового источника происходит нагрев области, сопровождающийся фазовым переходом, где скачкообразно изменяются теплофизические свойства среды.

Сравнение результатов проведено с использованием равномерной и неравномерной (сгущающейся к источнику) прямоугольных сеток, содержащих сходное количество расчетных ячеек, а в качестве эталонного решения использовалось тестовое одномерное радиально симметричное решение.

Результаты расчетов показали хорошее качество полученного с помощью гибридной сетки решения, в частности, хорошую передачу положения и формы фронта фазового перехода во всей расчетной области, в особенности вблизи источника. Величины абсолютных ошибок в L2 и C-норме при этом имеют меньший разброс и среднее значение, чем на других рассматриваемых сетках.

Проведено численное исследование зависимости точности решения от количества слоев внутренней зоны гибридной сетки, по результатам которого предложен алгоритм оптимального с точки зрения величины ошибки и размеров ячеек разбиения. Также проведено численное исследование скорости сходимости решения на последовательности сгущающихся к источнику гибридных сеток, показавшее скорость сходимости по пространству превышающее единицу.

Литература

1. Борисов В.Е., Критский Б.В., Марченко Н.А., Митрушкин Д.А., Савенков Е.Б., Композиционная неизотермическая модель фильтрации в пористой среде с учетом химических реакций и активной твердой фазы // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2013. № 91. 32 с. URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2013-91>.
2. Митрушкин Д.А., Хабирова Л.К. Математическое моделирование в проблеме добычи высоковязких нефтей // Вестник ЦКР Роснедра, N.1, 2010.
3. Mitrushkin D.A., Pergament A.Kh. On mathematical simulation of heavy oil recovery problem // Proceedings of XII European Conference on the Mathematics of Oil Recovery, P015, Oxford, England, September 2010.
4. Carsten Burstedde, Lucas C. Wilcox, and Omar Ghattas, Scalable Algorithms for Parallel Adaptive Mesh Refinement on Forests of Octrees. SIAM Journal on Scientific Computing 33 no. 3 (2011), pages 1103-1133.
5. Behrens J., Bader M. 2009 Efficiency considerations in triangular adaptive mesh refinement. Phil. Trans. R. Soc. A 367, 4577–4589.
6. Palagi, C.L. and Aziz, K. 1994. Use of Voronoi Grids in Reservoir Simulation. SPE Advanced Technology Series 2 (2): 69-77.
7. Mlacnik M., Durlofsky L., Heinemann Z. (2006) Sequentially adapted flow-based PEBI grids for reservoir simulation. SPE International Journal for Numerical Methods in Engineering, pages 317-327.
8. Chen, Z.: On the control volume finite element methods and their applications to multiphase flow. Networks and Heterogeneous Media 1, 689–706 (2006).
9. Stefan, J. Über die Verdampfung und die Auflösung als Vorgänge der Diffusion // Ann. Phys. — Berlin 277, 727–747, 1890.
10. Самарский А.А., Моисеенко Б.Д. Экономичная схема сквозного счета для многомерной задачи Стефана // ЖВМ и МФ.—1965.—Т.5, №5.—С. 816–827.
11. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров, М.: Наука, 1968 г. — с. 47.
12. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Об однородных разностных схемах // ЖВМ и МФ. — 1961. — Т. 1, №1. — С. 5–63.
13. Самарский А.А., Попов Ю.П. Разностные методы решения задач газовой динамики. — М.: Наука, 1980.
14. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы. Бином, 2004.
15. Самарский А.А. Введение в теорию разностных схем. — М.: Наука, 1971.
16. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. — М.: Наука, 1977.
17. Галанин М.П., Савенков Е.Б. Методы численного анализа математических моделей. — М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2010. — 591 с.