



Карпов С. А., Потапенко И.Ф.

О точности моделирования  
интеграла кулоновских  
столкновений методом  
Монте-Карло

**Рекомендуемая форма библиографической ссылки:** Карпов С. А., Потапенко И.Ф. О точности моделирования интеграла кулоновских столкновений методом Монте-Карло // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2014. № 30. 32 с. URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2014-30>

Ордена Ленина  
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ  
имени М.В. Келдыша

С.А. Карпов, И.Ф. Потапенко

О точности моделирования  
интеграла кулоновских столкновений  
методом Монте-Карло

Москва  
2014

**С.А. Карпов, И.Ф. Потапенко**

О точности моделирования интеграла кулоновских столкновений методом Монте-Карло

В предыдущих работах метод прямого моделирования типа Монте-Карло для кинетического уравнения с нелинейным оператором кулоновских столкновений подробно объясняется для случая многокомпонентной плазмы. Дана строгая оценка порядка аппроксимации интеграла столкновений Ландау-Фоккера-Планка (ЛФП) интегралом Больцмана. В данной публикации точность аппроксимации исследуется численно. Показано, что порядок аппроксимации выше, чем это удаётся доказать аналитически. Анализируется возможность выбора оптимальных шагов по времени. Приводится сравнение с аналитическими формулами в задаче электрон-ионной температурной релаксации.

**Ключевые слова:** кулоновские столкновения, уравнение Больцмана, метод Монте-Карло, уравнение Ландау-Фоккера-Планка

**Karpov S.A., Potapenko I.F.**

On the accuracy of Monte Carlo simulation of the Coulomb collision integral

In previous works, discrete simulation Monte Carlo for the kinetic equation with nonlinear Coulomb collision operator is considered in detail for the case of a multicomponent plasma. The rigorous estimation of the order approximation of the Landau-Fokker-Planck collision integral by the Boltzmann integral is given. In the present publication the approximation accuracy is investigated numerically. It is shown that the order of approximation is higher than it can be proved analytically. The possibility of the optimal time steps choice is analyzed. The comparison with the analytical formulas in the electron-ion temperature relaxation problem is provided.

**Key words:** Coulomb collisions, Boltzmann equation, Monte Carlo method, Landau-Fokker-Planck equation

## Оглавление

Введение .....	3
Моделирование интеграла столкновений Ландау методом Монте-Карло ....	4
Реализация метода .....	8
Порядок аппроксимации уравнения ЛФП уравнением Больцмана .....	13
Релаксация температуры двухкомпонентной плазмы с $Z \gg 1$ .....	15
Библиографический список .....	19

## Введение

Актуальность исследования связана с проблемой неприменимости классических гидродинамических моделей для описания широкого круга явлений в астрофизической плазме, для изучения слабоионизованной, низкотемпературной плазмы, абляционного сжатия мишеней. Для современных термоядерных исследований в системах с магнитным удержанием режим промежуточной столкновительности, для которого классические представления о переносе неприменимы, также весьма типичен. Поэтому важным является численное решение системы неоднородных кинетических уравнений Власова-Ландау-Фоккера-Планка. Полноценная реализация такого подхода стала возможна лишь в последнее время в связи с ростом производительности современных компьютеров.

Столкновительный оператор для заряженных частиц был впервые получен Ландау [1], как аппроксимация интеграла столкновений Больцмана в предположении, что средняя энергия кулоновского взаимодействия мала по сравнению со средней кинетической энергией. Через 20 лет этот оператор был вновь выведен в форме нелинейного уравнения Фоккера-Планка [2], [3]. По ряду причин именно эта форма уравнения стала очень популярной в численном моделировании задач управляемого термоядерного синтеза, начиная с 70-х годов (см., например, [4], [5] и ссылки в них). Вывод интеграла Ландау из интеграла столкновений Больцмана для сечений рассеяния общего вида в предположении рассеяния на малые углы был сделан независимо в [6] и [7]. В работах [7], [8] было показано, что модифицированный интеграл столкновений типа Ландау может быть использован как модель уравнения Больцмана для произвольных потенциалов взаимодействия.

Для численного решения пространственно неоднородного кинетического уравнения используют стандартные методы расщепления по физическим процессам. Тогда наиболее нетривиальная часть решения, временной полушаг, описывающий столкновения, сводится к решению эволюционного пространственно однородного уравнения Ландау-Фоккера-Планка (ЛФП) на некотором временном интервале.

Общий метод решения уравнения Больцмана для далекодействующих потенциалов и решения уравнения ЛФП был предложен Бобылевым и Нанбу в 2000 [9]. В некоторой степени это было развитием более раннего подхода Нанбу к кулоновским столкновениям [10]. Методы, предложенные в [9], [10], позднее были приложены к различным моделям задач физики плазмы, исследованы детально и позднее развиты разными авторами (см., например, [11],[12] и ссылки в [12]). Первые численные результаты для некоторых типичных задач физики плазмы в случае двухкомпонентной системы, полученные на основе подобной схемы расчёта, опубликованы в [13],[14]. Подробно

метод объясняется для общего случая многокомпонентной плазмы в работах [15] - [17]. Анализируется возможность выбора оптимальных шагов по времени и возможности ускорения счёта в частном случае. Также дана строгая оценка порядка аппроксимации интеграла столкновений Ландау интегралом Больцмана, а именно  $O(\varepsilon^{1/2})$ , где  $\varepsilon \ll 1$  - параметр аппроксимации.

В данной работе, численно решая изотропное кинетическое уравнение с нелинейным оператором кулоновских столкновений, мы показываем, что порядок аппроксимации выше, чем это можно получить аналитически:  $O(\varepsilon^p)$ ,  $0.7 < p \lesssim 1$ . Кроме того, рассматривается система электронов и многозарядных ионов. Наличие в плазме ионов с большим зарядом приводит к необходимости оптимизировать параметры численного расчёта. В качестве примера рассматривается классическая задача релаксации температуры электронов и ионов и даются сравнения с аналитическими формулами.

## Моделирование интеграла столкновений Ландау методом Монте-Карло

Для полноты изложения приведём предварительные сведения из ранних работ. Пусть  $\{f_i(\mathbf{v}, t), i = 1, \dots, n\}$  - зависящие от времени  $t \geq 0$  функции распределения по скоростям  $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$  частиц  $n$  сортов с массами  $\{m_i, i = 1, \dots, n\}$ , соответственно. Мы предполагаем, что плотности компонент смеси (в физическом пространстве) выражаются интегралами

$$\rho_i(t) = \int_{\mathbb{R}^3} d\mathbf{v} f_i(\mathbf{v}, t), \quad i = 1, \dots, n. \quad (1)$$

Система кинетических уравнений Больцмана для  $f_i(\mathbf{v}, t)$  имеет вид

$$\frac{\partial f_i}{\partial t} = \sum_{j=1}^n Q_{ij}(f_i, f_j), \quad i, j = 1, \dots, n, \quad (2)$$

где

$$\begin{aligned} Q_{ij}(f_i, f_j) &= \int_{\mathbb{R}^3 \times \mathbb{S}^2} d\mathbf{w} d\boldsymbol{\omega} g_{ij}\left(u, \frac{\mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\omega}}{u}\right) [f_i(\mathbf{v}') f_j(\mathbf{w}') - f_i(\mathbf{v}) f_j(\mathbf{w})], \\ \mathbf{v}' &= \frac{1}{m_i + m_j} (m_i \mathbf{v} + m_j \mathbf{w} + m_j u \boldsymbol{\omega}), \\ \mathbf{w}' &= \frac{1}{m_i + m_j} (m_i \mathbf{v} + m_j \mathbf{w} - m_i u \boldsymbol{\omega}); \\ \mathbf{u} &= \mathbf{v} - \mathbf{w}, \quad u \equiv |\mathbf{u}|, \quad \boldsymbol{\omega} \in \mathbb{S}^2; \quad i, j = 1, \dots, n. \end{aligned} \quad (3)$$

Функция  $g_{ij}(u, \mu)$  (индикатрисса рассеяния) выражается формулой

$$g_{ij}(u, \mu) = g_{ji}(u, \mu) = u \cdot \sigma_{ij}(u, \mu), \quad (4)$$

где  $\sigma_{ij}(u, \mu)$  - дифференциальное сечение рассеяния (в системе центра масс сталкивающихся частиц сортов  $i$  и  $j$ ) на угол  $\theta = \arccos(\mu)$ ,  $|\mu| \leq 1$ .

Система уравнений Больцмана (2) интересна для нас только как исходный пункт для перехода к уравнениям Ландау. Для такого перехода нужно выбрать специальный вид функций  $g_{ij}(u, \mu)$ . Этот выбор основан на следующем факте, доказанном много лет назад [7], [8]. Предположим, что функции распределения бесконечно дифференцируемы и быстро убывают на бесконечности со всеми их производными. Следуя идее Ландау, проведём разложение в ряд Тейлора (по малым приращениям скоростей после столкновений) подынтегрального выражения в (3), получим формальный ряд

$$Q_{ij}(f_i, f_j) = \sum_{k=1}^{\infty} Q_{ij}^{(k)}(f_i, f_j), \quad (5)$$

который можно описать следующим образом.

Первый член ряда отвечает приближению Ландау:

$$Q_{ij}^{(1)}(f_i, f_j) = \frac{m_{ij}^2}{2m_i^2} \frac{\partial}{\partial v^\alpha} \int_{\mathbb{R}^3} d\mathbf{w} g_{ij}^{(1)}(u) T^{\alpha\beta}(\mathbf{u}) \left( \frac{\partial}{\partial v^\beta} - \frac{m_i}{m_j} \frac{\partial}{\partial w^\beta} \right) f_i(\mathbf{v}) f_j(\mathbf{w}), \quad (6)$$

где предполагается суммирование по повторяющимся индексам  $\alpha, \beta = 1, 2, 3$ ,

$$\mathbf{u} = \mathbf{v} - \mathbf{w}, \quad m_{ij} = \frac{m_i m_j}{m_i + m_j}, \quad T^{\alpha\beta}(\mathbf{u}) = |\mathbf{u}|^2 \delta^{\alpha\beta} - u^\alpha u^\beta, \quad (7)$$

$$g_{ij}^{(1)}(u) = 2\pi \int_{-1}^1 d\mu g_{ij}(u, \mu)(1 - \mu).$$

Остальные члены ряда (5) можно символически представить в виде

$$Q_{ij}^{(k)}(f_i, f_j) = \int_{\mathbb{R}^3} d\mathbf{w} g_{ij}^{(k)}(u) A_{ij}^{(k)}(\mathbf{v}, \mathbf{w}),$$

$k \geq 2$ , где  $A_{ij}^{(k)}(\mathbf{v}, \mathbf{w})$  является при любом  $k \geq 2$  гладкой интегрируемой функцией, а

$$g_{ij}^{(k)}(u) = 2\pi \int_{-1}^1 d\mu g_{ij}(u, \mu)(1 - \mu)^k. \quad (8)$$

Отсюда становится понятным, при каких условиях система уравнений Больцмана (2) "хорошо аппроксимирует" (на формальном уровне, конечно) соответствующую систему уравнений Ландау, т.е. систему

$$\frac{\partial f_i}{\partial t} = \sum_{j=1}^n Q_{ij}^{(1)}(f_i, f_j), \quad i, j = 1, \dots, n, \quad (9)$$

в обозначениях (6), (7). Напомним, что нашей задачей является, грубо говоря, построить такое уравнение Больцмана (2), которое аппроксимирует заданные уравнения Ландау (9). Для такой аппроксимации достаточно выбрать функции  $g_{ij}$  в виде  $g_{ij}(u, \mu; \varepsilon)$ , где  $\varepsilon > 0$  - малый параметр, и потребовать, чтобы

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} 2\pi \int_{-1}^1 d\mu g_{ij}(u, \mu; \varepsilon)(1 - \mu) &= g_{ij}^{(1)}(u), \\ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} 2\pi \int_{-1}^1 d\mu g_{ij}(u, \mu; \varepsilon)(1 - \mu)^k &= 0, \quad g_{ij}^{(k)}(u) \xrightarrow[k > 2]{} 0, \end{aligned} \quad (10)$$

где  $g_{ij}^{(1)}(u)$  - заданные функции, а  $\varepsilon > 0$  произвольно. В качестве простого примера такой аппроксимации можно рассмотреть функции

$$g_{ij}(u, \mu; \varepsilon) = \frac{1}{2\pi\varepsilon} \delta[1 - \mu - \varepsilon a_{ij}(u)], \quad (11)$$

где

$$a_{ij}(u) = \begin{cases} g_{ij}^{(1)}(u), & \text{при } \varepsilon g_{ij}^{(1)}(u) \leq 2, \\ 2\varepsilon^{-1}, & \text{в противном случае.} \end{cases} \quad (12)$$

Такая не физическая функция  $g_{ij}$  означает, что рассеяние всегда происходит на фиксированный угол  $\theta_{ij} = \arccos[1 - \varepsilon a_{ij}(u)]$  (при столкновении частиц сорта  $i$  и  $j$ ). Такой закон рассеяния очень удобен для метода Монте-Карло (см. ниже). Другое достоинство этой аппроксимации состоит в том, что полная частота столкновений постоянна, т.к.

$$g_{ij}^{tot}(u, \varepsilon) = 2\pi \int_{-1}^1 d\mu g_{ij}(u, \mu; \varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon}. \quad (13)$$

Такую аппроксимацию можно назвать квазимаксвелловской, т.к. полная частота столкновений (для любой пары сортов  $i$  и  $j$ , включая случай  $i = j$ ) не зависит от скоростей. Это также даёт известные преимущества при пользовании методом Монте-Карло.

Отметим, что  $\varepsilon$  имеет размерность  $[t][l]^{-3}$ , но пока мы игнорируем этот факт, считая  $\varepsilon$  просто малым положительным параметром.

Рассмотрим случай уравнения Ландау для классической плазмы из  $n$  сортов заряженных частиц с зарядами  $\{e_i, i = 1, \dots, n\}$ . Считая кулоновский логарифм  $L$  постоянным для всех взаимодействий, получим (см., например, [18]) уравнения (6)-(9), где

$$g_{ij}^{(1)}(u) = 4\pi L \frac{e_i^2 e_j^2}{m_{ij}^2} \frac{1}{u^3}; \quad i, j = 1, \dots, n. \quad (14)$$

Ясно, что уравнения (2), (3), где функция  $g_{ij}(u, \mu; \varepsilon)$  вычисляется по формулам (11), (12), (14), аппроксимируют при  $\varepsilon \rightarrow 0$  систему уравнений Ландау (9) для  $n$ -компонентной плазмы.

Естественное обобщение такой аппроксимации можно получить, подставляя в (2) не функции  $g_{ij}(u, \mu; \varepsilon)$  из (11), (12), а функции

$$g_{ij} \left( u, \mu; \frac{\varepsilon}{\lambda_{ij}} \right), \quad \lambda_{ij} = \lambda_{ji}; \quad i, j = 1, \dots, n,$$

где  $\lambda_{ij}$  - произвольные положительные числа. Тогда полные частоты столкновений (13)

$$g_{ij}^{tot}(u, \varepsilon) = 2\pi \int_{-1}^1 d\mu g_{ij} \left( u, \mu; \frac{\varepsilon}{\lambda_{ij}} \right) = \frac{\lambda_{ij}}{\varepsilon} \quad (15)$$

будут постоянными (не зависящими от скоростей), но различными для разных сортов сталкивающихся частиц. Такой приём можно использовать для ускорения счёта.

Заметим, что формальная ошибка описанной выше аппроксимации интеграла столкновений Ландау  $Q^{(1)}(f_i, f_j)$  интегралом Больцмана  $Q(f_i, f_j)$  имеет первый порядок  $O(\varepsilon)$ , как это следует из ряда (5), где  $Q_{ij}^{(k)}(f_i, f_j) = O(\varepsilon^{k-1})$  для  $k \geq 2$ , если используются формулы типа (11), (12).

Описанная выше простая схема аппроксимации, основанная на равенствах (11), (12), далеко не единственна. Важно лишь удовлетворить условиям (10) и, желательно, условиям постоянства частоты столкновений типа (13) или (15). Мы будем рассматривать ниже только простейшую схему, не пытаясь ее как-то оптимизировать.

Таким образом, рассматривая задачу приближенного (или численного) решения системы уравнений Ландау для  $n$ -компонентной плазмы

$$\frac{\partial f_i(\mathbf{v}, t)}{\partial t} = 2\pi L \sum_{j=1}^n \frac{e_i^2 e_j^2}{m_i^2} \frac{\partial}{\partial v^\alpha} \int_{\mathbb{R}^3} d\mathbf{w} R^{\alpha\beta}(\mathbf{u}) \left( \frac{\partial}{\partial v^\beta} - \frac{m_i}{m_j} \frac{\partial}{\partial w^\beta} \right) f_i(\mathbf{v}) f_j(\mathbf{w}), \quad (16)$$



где

$$R^{\alpha\beta}(\mathbf{u}) = \frac{(u^2\delta^{\alpha\beta} - u^\alpha u^\beta)}{u^3}, \quad \mathbf{u} = \mathbf{v} - \mathbf{w}; \quad \alpha, \beta = 1, 2, 3, \quad i, j = 1, \dots, n,$$

мы на первом этапе выбираем малый параметр  $\varepsilon > 0$  и положительные числа  $\{\lambda_{ij} = \lambda_{ji}; i, j = 1, \dots, n\}$ , а затем приближенно заменяем уравнение Ландау (16) уравнениями Больцмана (2), (3), где

$$g_{ij}(u, \mu; \varepsilon) = \frac{\lambda_{ij}}{2\pi\varepsilon} \delta \left[ 1 - \mu - \text{Min} \left\{ 4\pi\varepsilon \frac{e_i^2 e_j^2 L}{\lambda_{ij} m_{ij}^2 u^3}, 2 \right\} \right]. \quad (17)$$

Поясним далее, как решать уравнение Больцмана (2) методом Монте-Карло. Идея метода принадлежит Г.Бёрду [19], который предложил его в 1960-х годах независимо от более ранних работ М.Каца [20] по вероятностному смыслу уравнения Больцмана. Мы принимаем за основу подход Каца, т.к. он делает метод почти очевидным. Этот подход состоит в том, чтобы связать нелинейные уравнения (2) с некоторым линейным уравнением (Master equation), описывающим достаточно простой случайный процесс.

## Реализация метода

Плотности компонент  $\{\rho_i(t), i = 1, \dots, n\}$ , определяемые интегралами (1), не зависят от времени в пространственно однородной задаче. Удобно выбрать в качестве единиц измерения полную плотность числа частиц системы  $\rho_0$ , тогда

$$\rho_i = c_i \rho_0, \quad c_1 + \dots + c_n = 1, \quad 1 \leq i \leq n,$$

где  $c_i$  - концентрации  $i$ -ого сорта частиц. Выберем также характерные единицы скорости  $v_0$  и времени  $t_0$  и положим

$$\tilde{t} = \frac{t}{t_0}, \quad \tilde{\mathbf{v}} = \frac{\mathbf{v}}{v_0}, \quad f_i(\mathbf{v}, t) = \frac{c_i \rho_0}{v_0^3} \tilde{f}_i(\tilde{\mathbf{v}}, \tilde{t}), \quad 1 \leq i \leq n. \quad (18)$$

Единицу времени для уравнений Ландау удобно выбрать так, чтобы выполнялось равенство

$$\frac{2\pi L e^4}{m^2 v_0^3} \rho_0 t_0 = 1, \quad (19)$$

где  $L$  - кулоновский логарифм, а  $e$  и  $m$  - заряд и масса электрона. Легко проверить, что преобразованные уравнения (16) для функции  $\tilde{f}_i(\tilde{\mathbf{v}}, \tilde{t})$  имеют

вид (тильды опущены)

$$\frac{\partial f_i}{\partial t} = \sum_{j=1}^n \left( \frac{m}{m_i} \right)^2 Z_i^2 Z_j^2 c_j Q_{ij}^{(L)}(f_i, f_j), \quad i = 1, \dots, n, \quad (20)$$

где

$$Q_{ij}^{(L)}(f_i, f_j) = \frac{\partial}{\partial v^\alpha} \int_{\mathbb{R}^3} d\mathbf{w} R^{\alpha\beta}(\mathbf{v} - \mathbf{w}) \left( \frac{\partial}{\partial v^\beta} - \frac{m_i}{m_j} \frac{\partial}{\partial w^\beta} \right) f_i(\mathbf{v}) f_j(\mathbf{w}), \quad (21)$$

$Z_i = e_i/e$ , тензор  $R^{\alpha\beta}(\mathbf{u})$  определен в (16).

При аналогичном обезразмеривании уравнений Больцмана (2), (3), (17) нам нужно также выбрать единицу измерения параметра  $\varepsilon$ , который имеет размерность  $[t][l]^{-3}$ . Удобно положить

$$\varepsilon = \frac{m^2 v_0^3}{2\pi L e^4} \tilde{\varepsilon} \quad (22)$$

где  $\tilde{\varepsilon}$  - безразмерный параметр.

Тогда, с учетом условия (19), уравнения Больцмана (2), (3), (17) преобразуются подстановкой (18), (22) к следующей форме (тильды опущены):

$$\frac{\partial f_i}{\partial t} = \sum_{j=1}^n c_j Q_{ij}(f_i, f_j), \quad i = 1, \dots, n, \quad (23)$$

где  $Q_{ij}(f_i, f_j)$  определены формулами (3), в которых

$$g_{ij}(u, \mu; \varepsilon) = \frac{\lambda_{ij}}{2\pi\varepsilon} \delta \left[ 1 - \mu - 2 \operatorname{Min} \left\{ \frac{Z_i^2 Z_j^2}{\lambda_{ij}} \left( \frac{m}{m_{ij}} \right)^2 \frac{\varepsilon}{u^3}, 1 \right\} \right]. \quad (24)$$

В этих уравнениях величины  $\{c_j, j = 1, \dots, n\}$  характеризуют концентрации компонент. Для конкретности можно считать, что плотность  $\rho_0$  в формулах (18), (19) совпадает с полной плотностью числа частиц плазмы. При этом электроны имеют массу  $m_1 = m$ , заряд  $Z_1 = -1$  и описываются в уравнениях (20) функцией распределения  $f_1(\mathbf{v}, t)$ . Тогда, очевидно,

$$c_1 + \dots + c_n = 1, \quad c_2 Z_2 + \dots + c_n Z_n = c_1 \quad (25)$$

в случае электронейтральной плазмы.

Будем ниже рассматривать уравнение Больцмана (23) не только с  $\delta$ -образными функциями  $g_{ij}(u, \mu; \varepsilon)$  (24), но и с произвольными "квазимаксвелловскими" функциями, удовлетворяющими условиям

$$g_{ij}^{tot} = 2\pi \int_{-1}^1 d\mu g_{ij}(u, \mu; \varepsilon) = \frac{\lambda_{ij}}{\varepsilon}, \quad i, j = 1, \dots, n. \quad (26)$$

Важно, что частота столкновений  $g_{ij}^{tot}$  пары частиц любых сортов  $i$  и  $j$  не зависит от скоростей.

Вероятности столкновений частиц сортов  $i$  и  $j$  имеют вид

$$p_{ij} = q \left(1 - \frac{1}{2}\delta_{ij}\right) c_i c_j \lambda_{ij}, \quad \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} p_{ij} = 1, \quad (27)$$

где постоянная  $q$  определяется из второго равенства (нормировки). Напомним, что постоянные  $\lambda_{ij}$  в приложениях к уравнениям Ландау являются просто свободными параметрами, которые можно использовать для оптимизации вычислений.

Рассмотрим конкретный пример электронейтральной плазмы с зарядом ионов  $Z$ . Система уравнений Ландау для электронов и ионов имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_e}{\partial t} &= \frac{1}{2} \left[ Q_1^{(L)}(f_e, f_e) + Q_\gamma^{(L)}(f_e, f_i) \right], \\ \frac{\partial f_i}{\partial t} &= \frac{\gamma^2}{2} \left[ Q_1^{(L)}(f_i, f_i) + Q_{1/\gamma}^{(L)}(f_i, f_e) \right], \end{aligned} \quad (28)$$

где  $\gamma = m/M$  - отношение массы электрона к массе иона, и для любого  $\theta > 0$

$$Q_\theta^{(L)}(f_1, f_2) = Z_1 Z_2 \frac{\partial}{\partial v^\alpha} \int_{\mathbb{R}^3} d\mathbf{w} R^{\alpha\beta}(\mathbf{v} - \mathbf{w}) \left( \frac{\partial}{\partial v^\beta} - \theta \frac{\partial}{\partial w^\beta} \right) f_1(\mathbf{v}) f_2(\mathbf{w}).$$

Уравнение (28) будет решаться с начальными условиями

$$f_{e,i}|_{t=0} = f_{e,i}^{(0)}(\mathbf{v}), \quad \int_{\mathbb{R}^3} d\mathbf{v} f_{e,i}^{(0)}(\mathbf{v}) = 1. \quad (29)$$

Для приближенного решения задачи (28), (29) выберем малое число  $\varepsilon > 0$  и большое натуральное число  $N_1$ . Мы будем моделировать решение этой задачи эволюцией случайного вектора

$$\mathbf{V}_N(t) = \{\mathbf{v}_1^{(e)}(t), \dots, \mathbf{v}_{N_1}^{(e)}(t); \mathbf{v}_1^{(i)}(t), \dots, \mathbf{v}_{N_1}^{(i)}(t)\} \in \mathbb{R}^{3N}, \quad N = 2N_1. \quad (30)$$

При  $t = 0$  все скорости электронов  $\mathbf{v}_k^{(e)}(0)$  распределяются в  $\mathbb{R}^3$  независимо в соответствии с функцией распределения  $f_e^{(0)}(\mathbf{v})$ , и аналогично распределяются скорости ионов  $\{\mathbf{v}_k^{(i)}(0), k = 1, \dots, N_1\}$ .

Для описания временной эволюции вектора  $\mathbf{V}_N(t)$  нам потребуется также три вспомогательных параметра  $\lambda_{ee}$ ,  $\lambda_{ii}$  и  $\lambda_{ei}$ . Без ограничения общности один из этих параметров можно считать равным единице. Поэтому положим  $\lambda_{ee} = 1$ , где положительные числа  $\lambda_{ei} = \lambda_{ie}$  и  $\lambda_{ii}$  пока произвольны.

Нам понадобятся следующие параметры для двухкомпонентной плазмы с зарядом  $Z_1 = -1$ ,  $Z_2 = Z$ .

- Как следует из (25), концентрации электронов и ионов равны

$$c_i = \frac{c_e}{Z} = 1 - c_e, \quad c_e = \frac{Z}{Z+1}, \quad c_i = \frac{1}{Z+1}.$$

- Тогда вероятности столкновений (27)

$$p_{ee} = \frac{1}{2}qc_e^2, \quad p_{ei} = qc_e c_i \lambda_{ei}, \quad p_{ii} = \frac{1}{2}qc_i^2 \lambda_{ii}, \quad p_{ei} = p_{ie}, \quad \lambda_{ei} = \lambda_{ie},$$

с

$$q = \frac{2}{c_e^2 + 2c_e c_i \lambda_{ei} + c_i^2 \lambda_{ii}} = \frac{2(Z+1)^2}{Z^2 + 2Z\lambda_{ei} + \lambda_{ii}}$$

примут значения

$$p_{ee} = \frac{Z^2}{Z^2 + 2Z\lambda_{ei} + \lambda_{ii}}, \quad p_{ei} = \frac{2Z\lambda_{ei}}{Z^2 + 2Z\lambda_{ei} + \lambda_{ii}}, \quad p_{ii} = \frac{\lambda_{ii}}{Z^2 + 2Z\lambda_{ei} + \lambda_{ii}}. \quad (31)$$

- Шаг по времени (для больших значений  $N_j \simeq c_j N$ ,  $j = 1, \dots, n$ )

$$\tau_N = \frac{\varepsilon}{N} \left[ \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} \left(1 - \frac{1}{2}\delta_{ij}\right) c_i c_j \lambda_{ij} \right]^{-1}$$

в рассматриваемом случае (в единицах  $\nu_0 = 2\pi\Lambda e^4 \rho_0 / m^2 v_{T_0}^3$ ,  $v_0 = v_{T_0}$ ) равен

$$\tau_N = \frac{2\varepsilon}{N} \cdot \frac{(Z+1)^2}{Z^2 + 2Z\lambda_{ei} + \lambda_{ii}}, \quad N = 2N_1. \quad (32)$$

Таким образом, время  $t$  принимает дискретные значения  $t_k = k\tau_N$ ,  $k = 0, 1, \dots$ . Заметим, что всегда  $\tau_N \leq 2\varepsilon(Z+1)^2/NZ^2$  (равенство достигается при  $\lambda_{ei} = \lambda_{ii} = 0$ ). На каждом интервале  $[t_k, t_{k+1})$  происходит в точности одно столкновение. Вероятности столкновений трех возможных типов определяются равенствами (31).

Для заряда  $Z = 1$  вероятности столкновений равны

$$p_{ee} = \frac{1}{(1 + 2\lambda_{ei} + \lambda_{ii})}, \quad p_{ii} = \frac{\lambda_{ii}}{(1 + 2\lambda_{ei} + \lambda_{ii})}, \quad p_{ei} = \frac{2\lambda_{ei}}{(1 + 2\lambda_{ei} + \lambda_{ii})},$$

а шаг по времени

$$\tau_N = \frac{8\varepsilon}{N(1 + 2\lambda_{ei} + \lambda_{ii})}, \quad \tau_N \leq \frac{8\varepsilon}{N}, \quad N = 2N_1. \quad (32)'$$

При этом, в простейшем варианте можно выбрать  $\lambda_{ei} = \lambda_{ii} = 1$ , тогда

$$\tau_N = \frac{2\varepsilon}{N}, \quad p_{ee} = p_{ii} = \frac{1}{4}, \quad p_{ei} = \frac{1}{2}.$$

Заметим, что для  $\lambda_{ei} = \lambda_{ii} = 1$  шаг по времени также равен  $\tau_N = 2\varepsilon/N$  для любого  $Z$ , однако вероятности столкновений существенно зависят от заряда

$$p_{ee} = \frac{Z^2}{Z^2 + 2Z + 1}, \quad p_{ei} = \frac{2Z}{Z^2 + 2Z + 1}, \quad p_{ii} = \frac{1}{Z^2 + 2Z + 1}.$$

После того, как решено, какое из трёх событий, определяемых соответствующими вероятностями, действительно произошло, выбирается случайная пара скоростей частиц соответствующих сортов и "производится столкновение".

Мы кратко опишем, как это делается в случае  $\delta$ -образных функций

$$g_{ij}(u, \mu) = \frac{\lambda_{ij}}{2\pi\varepsilon} \delta \left[ 1 - \mu - 2 \operatorname{Min} \left\{ \frac{Z_i^2 Z_j^2}{\lambda_{ij}} \left( \frac{m}{m_{ij}} \right)^2 \frac{\varepsilon}{u^3}, 1 \right\} \right], \quad i, j = e, i, \quad (33)$$

в соответствующей системе уравнений Больцмана (1) - (2),  $m_{ij}$  - приведённая масса.

При столкновении двух электронов выбирается пара скоростей

$$\mathbf{v}_r^{(e)} = \mathbf{v}, \quad \mathbf{v}_s^{(e)} = \mathbf{w}, \quad 1 \leq r < s \leq N_1.$$

Скорости после столкновения имеют вид

$$\mathbf{v}_r^{(e)'} = \frac{1}{2}(\mathbf{v} + \mathbf{w} + |\mathbf{v} - \mathbf{w}|\boldsymbol{\omega}), \quad \mathbf{v}_s^{(e)'} = \frac{1}{2}(\mathbf{v} + \mathbf{w} - |\mathbf{v} - \mathbf{w}|\boldsymbol{\omega}), \quad \boldsymbol{\omega} \in \mathbb{S}^2,$$

где единичный вектор  $\boldsymbol{\omega}$  определяется в декартовых координатах с осью  $Ox$  вдоль вектора  $\mathbf{u} = \mathbf{v} - \mathbf{w}$  следующим образом:

$$\boldsymbol{\omega} = \left\{ \sqrt{1 - \mu^2} \cos \varphi, \sqrt{1 - \mu^2} \sin \varphi, \mu \right\}, \quad (34)$$

где  $\varphi$  - это случайный угол, равномерно распределенный на интервале  $[0, 2\pi)$ ,

$$\mu = \mu_{ee} = 1 - 2 \operatorname{Min} \left\{ \frac{4\varepsilon}{u^3}, 1 \right\}, \quad \mathbf{u} = \mathbf{v} - \mathbf{w}. \quad (35)$$

Столкновение двух ионов описывается совершенно аналогично. Единственная разница состоит в том, что в формуле (34)  $\mu$  определяется следующим образом:

$$\mu = \mu_{ii} = 1 - 2 \operatorname{Min} \left\{ \frac{4\varepsilon Z^4 \gamma^2}{\lambda_{ii} u^3}, 1 \right\}, \quad \mathbf{u} = \mathbf{v} - \mathbf{w}, \quad \gamma = m/M. \quad (36)$$

Наконец, для столкновения электрона с ионом мы выбираем скорости

$$\mathbf{v}_r^{(e)} = \mathbf{v}, \quad \mathbf{v}_s^{(i)} = \mathbf{w}, \quad 1 \leq r, s \leq N_1,$$

и преобразуем их по формулам

$$\mathbf{v}_r^{(e)'} = \frac{m\mathbf{v} + M\mathbf{w} + M|\mathbf{u}|\boldsymbol{\omega}}{m + M}, \quad \mathbf{v}_s^{(i)'} = \frac{m\mathbf{v} + M\mathbf{w} - m|\mathbf{u}|\boldsymbol{\omega}}{m + M},$$

где в системе координат с осью  $Ox$  вдоль вектора  $\mathbf{u}$  справедлива та же формула (34), в которой

$$\mu = \mu_{ei} = 1 - 2 \operatorname{Min} \left\{ \frac{\varepsilon Z^2 (1 + \gamma)^2}{\lambda_{ei} u^3}, 1 \right\}, \quad \gamma = m/M. \quad (37)$$

Преобразование этих формул к произвольной системе координат достаточно очевидно (см., например, [13]) и для краткости опущено.

Таким образом, отправляясь от начального вектора  $\mathbf{V}_N(0)$ , мы получаем новый вектор  $\mathbf{V}_N(\tau_N)$  после первого столкновения. Далее весь процесс вычислений повторяется без изменений, и счётчик времени увеличивается при каждом столкновении на величину  $\tau_N$  (32).

## Порядок аппроксимации уравнения ЛФП уравнением Больцмана

При настоящем подходе мы берём за основу интеграл столкновений Больцмана и подбираем соответствующее *модельное* сечение рассеяния, зависящее от малого параметра  $\varepsilon$  (параметра аппроксимации). Следуя разработанному аналитическому подходу, мы получим аппроксимацию интеграла столкновений для заряженных частиц Ландау-Фоккера-Планка. Формальная ошибка описанной выше аппроксимации интеграла столкновений Ландау  $Q^{(1)}(f_i, f_j)$  интегралом Больцмана  $Q(f_i, f_j)$  имеет первый порядок  $O(\varepsilon)$ . Аналитически удаётся доказать, что порядок аппроксимации не хуже, чем  $O\sqrt{\varepsilon}$ . Однако, следуя идее, которой мы руководствовались при разработке метода, можно ожидать, что порядок аппроксимации должен быть выше. Для разъяснения ситуации были проведена серия расчётов, в которых мы попытались дать ответ.

Мы рассматриваем один сорт частиц с начальным моноэнергетическим распределением типа  $\delta$ - функции:  $f_0 = \delta(v - 1)$ . Рассматриваем релаксацию этого распределения к равновесному максвелловскому распределению.

Численными параметрами задачи являются:  $N$  - число частиц (скоростей),  $K$  - число испытаний, а также малый параметр  $\varepsilon$ , порядок аппроксимации, связанный с шагом по времени и изменением скорости при парном столкновении частиц. Этот параметр варьировался в следующих пределах:  $0.3 \leq \varepsilon \leq 3.16 \cdot 10^{-4}$ . Основываясь на опыте предыдущих расчётов, мы взяли достаточно большие значения  $N$  и  $K$ , чтобы выявить возможно точнее зависимость решения от параметра аппроксимации. Число частиц  $N = 20000$  по порядку соответствует (приблизительно) стохастической ошибке

$$\varepsilon \propto \frac{1}{\sqrt{N}}, \quad N^{-1/2} \simeq 7 \cdot 10^{-3}. \quad (38)$$

Поэтому минимальное значение, которое мы выбрали в качестве реперной точки,  $\varepsilon_{min} = 3.16 \cdot 10^{-4}$ .

Мы сравниваем моменты функции распределения, соответствующие точным моментам для различных значений параметра аппроксимации в различные моменты времени:

$$M_{2n}(t) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N |\mathbf{v}_i|^{2n} -$$

и отвечающие аналитическими выражениями

$$m_{2n}(t) = \int_{\mathbb{R}^d} |\mathbf{v}|^{2n} f(|\mathbf{v}|, t) d\mathbf{v} \quad \propto \quad f(v, t) = \frac{1}{N} \cdot \sum_{j=1}^N \delta(v - v_j).$$

При этом второй момент  $m_2$  соответствует энергии. Все моменты распределения в начальный момент времени  $m(0) = 1$  и стремятся  $m(t) \rightarrow m_{Max}$  при  $t \rightarrow \infty$ .

Обозначим  $m_k^* = m_k(\varepsilon_{min})$  и определим относительное отклонение от этого наиболее точного в численном расчёте значения ( $\varepsilon_{min} = 3.16 \cdot 10^{-4}$ ) как

$$\Delta_k(\varepsilon_n) = \frac{|m_k(\varepsilon_n) - m_k^*|}{m_k^*},$$

предположив его степенную зависимость  $\Delta_k(\varepsilon) \simeq A \cdot \varepsilon^p$ , где  $A$  - некоторая постоянная.

Расчёты проводились для  $N = 20000$ , количества реализаций  $K = 50$  и

$$\varepsilon = 0.00178, 0.00316, 0.00562, 0.01, 0.0178, 0.0316, 0.0562, 0.1, 0.178, 0.316$$

так, что

$$\lg \varepsilon = -2.75, -2.5, -2.25, -2, -1.75, -1.5, -1.25, -1, -0.75, -0.5.$$

Графики зависимости  $\Delta_k(\varepsilon)$  от  $\varepsilon$ , рис.1 - рис.12, даны в двойном логарифмическом масштабе для различных моментов  $m_k$ . Чтобы учесть высокие моменты функции распределения,  $m_{8,10}$ , количество "частиц" должно быть достаточно большим. Насколько можно видеть из этих графиков, действительно, аппроксимация нашего стохастического метода лучше, чем  $\sqrt{\varepsilon}$ . Ошибки (отклонения) от степенного закона начинаются при приближении системы к равновесию, когда стохастические колебания становятся велики. Это происходит для времён, близких к единице. А также когда значение  $\varepsilon$  сравнимо с оценкой по количеству частиц (38) и не может уже считаться достаточно малым. Заметим, что для большинства практических расчётов достаточно взять  $\varepsilon \simeq 0.05$ .

## Релаксация температуры двухкомпонентной плазмы с $Z \gg 1$

В этом разделе мы рассмотрим вопрос о произвольных положительных величинах  $\lambda_{ij}$  и их роли в выборе параметров численного расчёта. Рассмотрение проведём на примере классической задачи о двухтемпературной релаксации электронов и ионов с малым отношением масс  $\gamma \ll 1$ . Имеет смысл напомнить, что для характеристики релаксации электронов и ионов с разными начальными распределениями и температурами  $T_e$ ,  $T_i$  вводятся три времени релаксации:  $\tau_{ee}$  - электронное,  $\tau_{ii}$  - ионное и время обмена температур  $\tau_{ei}$ . Начальная стадия релаксации сильно зависит от начальных условий. Однако, в любом случае электроны быстро релаксируют к квазиравновесному (монотонному по скорости) распределению за время  $\tau_{ee}$ . Затем происходит релаксация ионов за  $\tau_{ii}$ . В течение самого долгого процесса  $\tau_{ei}$  между электронами и ионами, имеющими локальные максвелловские распределения с разными температурами, происходит обмен энергией. Если предположить, что компоненты плазмы распределены по Максвеллу, то формула для изменения температур во времени имеет вид (см., например, [3, 18])

$$\frac{dT_e}{dt} = -\nu_T (T_e - T_i), \quad (39)$$

где

$$\nu_T = \frac{2m}{M} \nu_{ei} \quad \text{и} \quad \nu_{ei} = \frac{4\sqrt{2\pi} Z^2 e^4 n_i \Lambda_{ei}}{3 m^{1/2} T_e^{3/2}}.$$

Справедливость подобного рассмотрения с иерархией времён  $\tau_{ee} \ll \tau_{ii} \ll \tau_{ei}$ , кроме малости параметра  $\gamma \ll 1$ , накладывает ограничения и на начальные



температуры, которые не должны сильно отличаться. Как правило, энергия электронов в задачах лазерной плазмы всегда значительно выше ионной энергии. Тогда эта иерархия времён не нарушается. Однако, если ионы горячее электронов, то релаксация ионов происходит одновременно с релаксацией температур  $\tau_{ii} \simeq \tau_{ei}$ . Наша задача проверить наш метод, основываясь на этой классической задаче, и получить определённые рекомендации по выбору параметров численного расчёта. В предыдущих работах метод тестировался на задаче двухтемпературной релаксации для однозарядной плазмы. Здесь мы уделяем основное внимание тяжёлым ионам с  $Z \gg 1$ .

Для ускорения расчёта желательно брать максимальный шаг по времени. Его величина (32) ограничивается неравенством

$$\tau_N \leq 2\varepsilon(Z + 1)^2/NZ^2.$$

С другой стороны, нельзя неограниченно уменьшать  $\lambda_{ei}$  и  $\lambda_{ii}$ , поскольку для аппроксимации уравнений Ландау необходимо условие малости угла рассеяния при "большинстве" столкновений. Иначе говоря, в формулах (35)-(37) для косинуса угла рассеяния  $\mu$  должны выполняться условия

$$\frac{4\varepsilon}{|\mathbf{u}_{ee}|^3} \ll 1, \quad \frac{4\varepsilon Z^4 \gamma^2}{\lambda_{ii} |\mathbf{u}_{ii}|^3} \ll 1, \quad \frac{\varepsilon(1 + \gamma)^2 Z^2}{\lambda_{ei} |\mathbf{u}_{ei}|^3} \ll 1, \quad (40)$$

где  $|\overline{\mathbf{u}_{kl}}|$  означает типичную абсолютную величину относительной скорости сталкивающихся частиц. В случае теплового равновесия с (безразмерной) температурой  $T_0$  получим для порядков средних величин  $|\overline{\mathbf{v}_{T_e}}| \sim \gamma^{-1/2} |\overline{\mathbf{v}_{T_i}}| \sim \sqrt{T_0}$ .

Считая, что всегда  $\gamma \ll 1$  (в реальной плазме  $\gamma < 10^{-3}$ ), мы получим для равновесной системы порядки типичных относительных скоростей в виде

$$|\overline{\mathbf{u}_{ee}}| \sim |\overline{\mathbf{u}_{ei}}| \sim \frac{1}{\sqrt{\gamma}} |\overline{\mathbf{u}_{ii}}| \sim \sqrt{T_0}.$$

Поэтому, считая условие

$$\frac{4\varepsilon}{T_0^{3/2}} \ll 1 \quad (41)$$

выполненным, можно выбрать для однозарядной плазмы с  $Z = 1$

$$\lambda_{ii} = \gamma^{1/2}, \quad \lambda_{ei} = \frac{1}{4}, \quad (42)$$

тогда все неравенства (40) выполняются с одинаковой степенью точности. Значение (42) будем называть стандартными. Такой выбор параметров гарантирует условия (41) не только в равновесии, но и во всех случаях, когда

$$|\overline{\mathbf{v}_{T_i}}| \geq \sqrt{\gamma} |\overline{\mathbf{v}_{T_e}}|. \quad (43)$$

Т.е. нарушение этого условия происходит на такой стадии эволюции плазмы, когда типичная кинетическая энергия (температура) ионов  $T_i$  гораздо меньше температуры  $T_e$  электронов. В этом случае стандартное значение  $\lambda_{ii} = \gamma^{1/2}$  должно быть увеличено. Наконец, параметры  $\lambda_{ei}$  и  $\lambda_{ii}$  можно выбирать зависящими от времени, тогда значения (42) выбираются, если плазма уже близка к равновесию. Вопрос об улучшении стандартных значений не очень важен, т.к. шаг по времени  $\tau_N$  (32) мало меняется при малых значениях  $\lambda_{ei}$  и  $\lambda_{ii}$ . Отметим, наконец, что стандартные значения (42) соответствуют обычным представлениям о частоте столкновений частиц разных сортов: столкновения электронов между собой происходят примерно в  $\gamma^{-1/2}$  раз чаще, чем ион-ионные столкновения. При таких значениях шаг по времени (32) равен

$$\tau_N = \frac{16\varepsilon}{N(3 + 2\sqrt{\gamma})} \xrightarrow{\gamma \rightarrow 0} \frac{16\varepsilon}{3N}, \quad N = 2N_1. \quad (44)$$

Выбор параметров (42) позволяет ускорить вычисления почти в 3 раза по сравнению с простейшим выбором  $\lambda_{ei} = \lambda_{ii} = 1$ , при котором  $\tau_N = 2\varepsilon/N$ . Напомним, что ускорение в 4 раза уже невозможно из-за неравенства (32)', так что полученный результат недалек от оптимального. Как было сказано выше, для практических расчётов при достаточно больших  $N \geq 1000$  вполне хорошие результаты получаются при  $\varepsilon \simeq 5 \cdot 10^{-2}$ .

Перейдём к многозарядным ионам  $Z > 1$ . В этом случае условия малости углов рассеяния следующие:

$$\frac{4\varepsilon}{v_{T_e}^3} \ll 1, \quad \frac{\varepsilon Z^2}{\lambda_{ei} v_{T_e}^3} \ll 1, \quad \frac{4\varepsilon Z^4}{\lambda_{ii} M^2 v_{T_i}^3} \ll 1, \quad (45)$$

$M = AM_p$  - безразмерная масса иона,  $A$  - относительная атомная масса,  $M_p$  - отношение массы протона к массе электрона.

Чтобы эти условия выполнялись с одинаковой точностью, нам надо положить

$$\lambda_{ei} \geq \frac{Z^2}{4}, \quad \lambda_{ii} \geq \frac{Z^4}{M^{1/2}(T_i/T_e)^{3/2}}. \quad (46)$$

Чтобы шаг по времени был минимален, нужно взять наименьшие  $\lambda_{ij}$ , для которых неравенства (46) переходят в равенства. Если с  $\lambda_{ei}$  этот выбор ясен, то выбор  $\lambda_{ii}$  зависит не только от отношения масс электронов и ионов, заряда, но и отношения температур (тепловых скоростей), которые могут меняться во времени, а вместе с ними и вероятности столкновений. Для задачи с начальным условием  $T_i/T_e \gg 1$  и конечным  $T_i \simeq T_e$  достаточно взять  $\lambda_{ii} \lesssim Z^4/M^{1/2}$ . Если же в задаче  $T_i/T_e \ll 1$ , то разумно учесть зависимость от времени параметра  $\lambda_{ii}$ .

Проведём некоторые оценки. Пусть

$$\lambda_{ei} = \lambda_{ii} = 1, \quad Z = 10, M = 4 \cdot 10^4, \quad T_e \simeq T_i,$$

тогда из (46) следует, что  $\varepsilon$  нужно уменьшить в  $\varepsilon \rightarrow 0.2\varepsilon$  по сравнению со случаем  $Z = 1$ , а следовательно, и шаг  $\tau_N = 2\varepsilon/N$  уменьшается. Вероятности столкновений в этом случае равны

$$p_{ee} = \frac{100}{121} \simeq 0.826, \quad p_{ei} = \frac{20}{121} \simeq 0.165, \quad p_{ii} = \frac{1}{121} \simeq 0.008.$$

Пусть теперь  $\lambda_{ei} = Z^2/4 = 25$ ,  $\lambda_{ii} = Z^4/M^{1/2}(T_i/T_e)^{3/2} \simeq 50$ , тогда  $\varepsilon$  не меняется, а шаг по времени и вероятности равны

$$\tau_N \simeq \frac{2\varepsilon}{N} \cdot 0.2; \quad p_{ee} = \frac{100}{650} \simeq 0.155, \quad p_{ei} = \frac{500}{650} \simeq 0.77, \quad p_{ii} = \frac{50}{650} \simeq 0.08.$$

Принципиальная разница между расчётами с очень малыми  $\varepsilon$  и  $\lambda_{ei} > 1$ ,  $\lambda_{ii} > 1$ , обеспечивающими выполнение неравенств (45), состоит в том, что  $\varepsilon$  не входит в вероятности столкновений, т.е. при  $\lambda_{ei} = 1$ ,  $\lambda_{ii} = 1$   $Z \gg 1$  получаем  $p_{ee} \approx 1$ ,  $p_{ei} \rightarrow 0$ ,  $p_{ii} \rightarrow 0$ . То есть при учёте вспомогательных параметров, шаг по времени уменьшается практически на ту же величину, но появляется существенная разница в вероятностях столкновений, более отвечающая физическому процессу. Причём расчёт проходит быстрее.

Перейдём к сравнению численных расчётов с аналитической формулой (39). Напомним, что

$$\rho_e = c_e \rho_0, \quad \rho_i = c_i \rho_0, \quad c_e + c_i = 1, \quad c_e = c_i Z$$

и

$$\frac{\rho_e T_e^0 + \rho_i T_i^0}{\rho_e + \rho_i} = c_e T_e(t) + c_i T_i(t) = T_{eq},$$

где  $T_{eq}$  - равновесная температура, а  $T_e^{(0)} \equiv T_0$  и  $T_i^{(0)}$  - начальные температуры электронов и ионов. Введём безразмерные переменные  $\tilde{T}_{e,i} = T_{e,i}/T_0$ ,  $\tilde{t} = t\nu_0$ , тогда уравнение (39) примет вид

$$\frac{d\tilde{T}_e}{d\tilde{t}} = -\frac{4\sqrt{6}}{\sqrt{\pi}} \frac{Z^2 \tilde{T}_e - \tilde{T}_{eq}}{M \tilde{T}_e^{3/2}}, \quad (47)$$

где равновесная температура

$$\tilde{T}_{eq} = c_e \tilde{T}_e^{(0)} + c_i \tilde{T}_i^{(0)}.$$

В качестве начальных условий возьмём моноэнергетические распределения с разными тепловыми скоростями  $\sim \delta(v - v_{e,i}^0)$ .

Далее на рис. 13 - 16 изображена релаксация 2-го момента функции распределения электронов и ионов для различных  $\lambda_{ei}$ ,  $\lambda_{ii}$ ,  $\varepsilon$ . Просчитать с очень маленьким  $\varepsilon$ , которое бы по точности выполнения неравенств (45) соответствовало зеленым кривым с  $\lambda_{ei} > 1$ ,  $\lambda_{ii} > 1$  (предположительно, соответствующие правильному ходу релаксации и обеспечивают выполнение неравенств (45)), пока не удаётся из-за чрезвычайной затратности временных ресурсов. Но по рисункам видно, что сходимость к кривым с  $\lambda_{ei} > 1$ ,  $\lambda_{ii} > 1$  (зеленые кривые) при уменьшении  $\varepsilon$  присутствует.

Далее на рис. 17 и рис. 18 приведены расчётные графики релаксации температуры в двухкомпонентной плазме при  $Z = 10$ ,  $A = 20$ ,  $T_i^{(0)}/T_e^{(0)} = 0.1$  в сравнении с аналитическим расчётом по формуле (47).

На рис. 20 - 22 приведены графики релаксации электронной и ионной температуры в двухкомпонентной плазме в сравнении с аналитическим расчётом по формуле (47) для других начальных температур.

## Библиографический список

- [1] Ландау Л.Д. Кинетическое уравнение в случае кулоновского взаимодействия // ЖЭТФ, 1937, № 7, С.203.
- [2] Rosenbluth M.N., MacDonald W.M., Judd D. Fokker-Planck equation for an inverse-square force // Phys.Rev., 1957, v. 107, p. 1.
- [3] Трубников Б.А. Столкновения частиц в полностью ионизованной плазме. В сб.: Вопросы теории плазмы. Вып.1, М.: Госатомиздат, 1963, С.98-182.
- [4] Днестровский Ю.Н., Костомаров Д.П. Математическое моделирование плазмы. - М.: Наука, 1982, 338 с.
- [5] Karney C.F.F. Fokker-Planck and quasi linear code // Computer Physics Reports, 1986, v. 4, p. 183-244.
- [6] Черчиньяни К. Теория и приложения уравнения Больцмана. - Москва: Мир, 1978, 496 с.
- [7] Бобылев А.В. О разложении интеграла столкновений Больцмана в ряд Ландау // ДАН СССР, 1975, т. 225, № 3, С. 535-538.
- [8] Бобылев А.В. Приближение Ландау в кинетической теории газов и плазмы // Препринт ИПМ им. М.В.Келдыша, АН СССР, 1974, № 76, 49 с.
- [9] Bobylev A.V., Nanbu K. Theory of collision algorithms for gases and plasmas based on the Boltzmann equation and the Landau-Fokker-Planck equation // Phys. Rev. E., 2000, v. 61, p. 4576-4586.

- [10] Nanbu K. Theory of cumulative small-angle collisions in plasmas // Phys.Rev. E. 1997. Vol. 55. p. 4642-4652.
- [11] *Bobylev A.V., Mossberg E., Potapenko I.F.* A DSMC method for the Landau-Fokker-Planck equation. Proceedings of XXV International symposium on RGD, 2006, 479-483, Eds. M.S.Ivanov, A.K.Rebrov, Novosibirsk, Publ. of the Siberian Branch of RAS.
- [12] *Dimarko G., Caflish R., Pareschi L.* Direct Simulation Monte Carlo schemes for Coulomb interactions in plasmas, Commun. Appl. Indust. Math. 1, 72-91 (2010).
- [13] Бобылев А.В., Карпов С.А., Потапенко И.Ф. Метод Монте-Карло для двухкомпонентной плазмы // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша.2012. № 21. 27 с. URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2012-21>
- [14] Бобылев А.В., Потапенко И.Ф., Карпов С.А. Метод Монте-Карло для двухкомпонентной плазмы // Математическое моделирование, 2012, т. 24, № 9, С. 35-49.
- [15] Бобылев А.В., Карпов С.А., Потапенко И.Ф. Методы типа Монте-Карло для моделирования кулоновских столкновений в многокомпонентной плазме // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2012. № 26. 32 с. URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2012-26>
- [16] Bobylev A.V., Potapenko I.F., Karpov S.A. DSMC methods for multicomponent plasmas // AIP Conference Proceedings. 2012, v. 1501, p. 541-548.
- [17] Bobylev A.V., Potapenko I.F., Monte Carlo methods and their analysis for Coulomb collisions in multicomponent plasmas // J. Comput. Phys., 246, 123-144 (2013)
- [18] Силин В.П. Введение в кинетическую теорию газов. -М.: Наука, 1971, 332с.
- [19] *Bird G.A.* Molecular gas dynamics and direct simulation of gas flows (Clarendon Press, Oxford) 1994, 458p.
- [20] *Кас М.* Probability and related topics in physical sciences. Interscience Publishers, Ltd., London, Inc., New York, 1957, 266p.

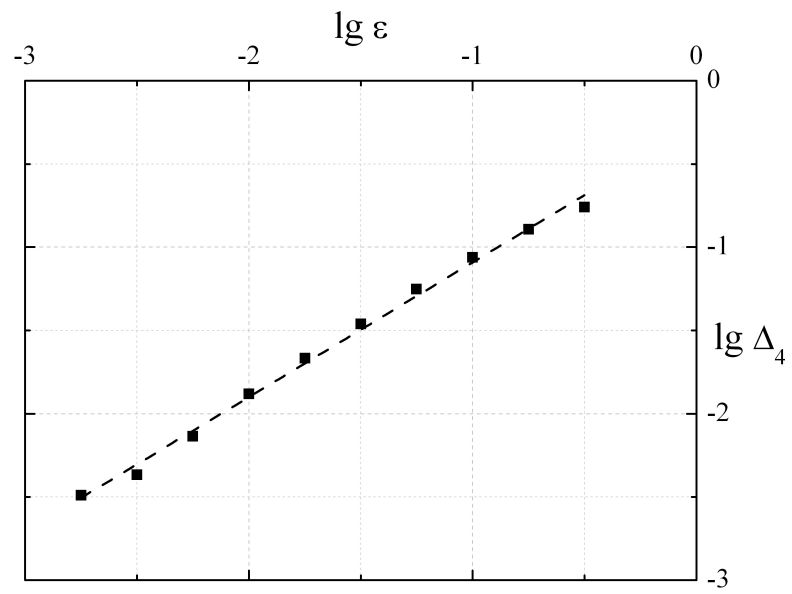


Рис. 1. 4-й момент,  $t = 0.2$ ,  $p = 0.81$ ,  $\lg A = -0.28$ .

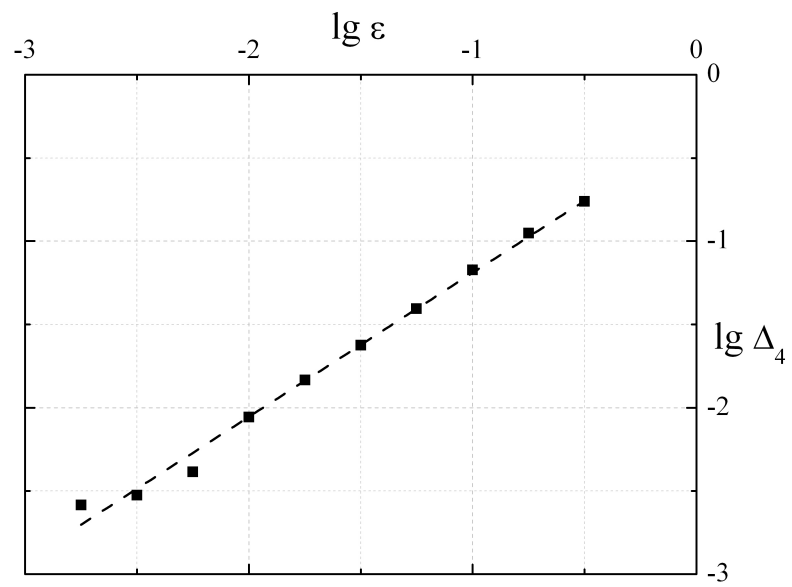


Рис. 2. 4-й момент,  $t = 0.4$ ,  $p = 0.86$ ,  $\lg A = -0.32$ .

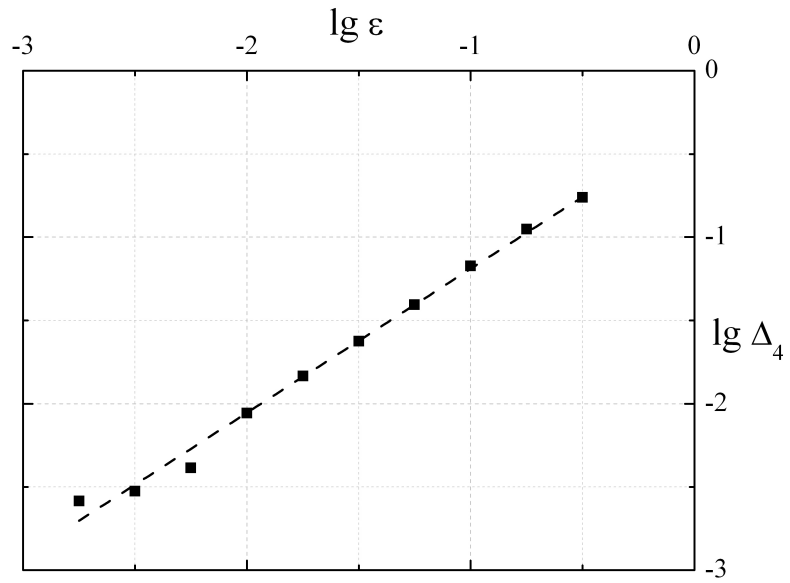


Рис. 3. 4-й момент,  $t = 0.6$ ,  $p = 0.91$ ,  $\lg A = -0.39$ .

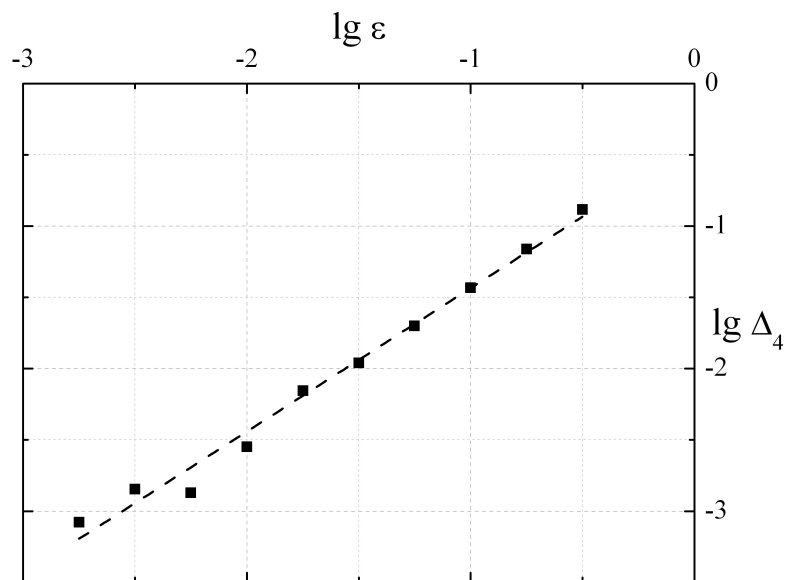


Рис. 4. 4-й момент,  $t = 0.8$ ,  $p = 1.00$ ,  $\lg A = -0.43$ .

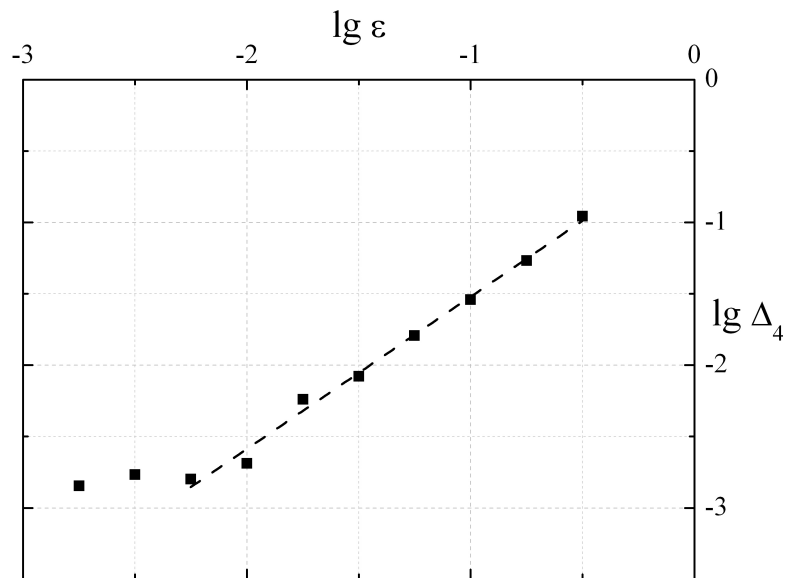


Рис. 5. 4-й момент,  $t = 1.0$ ,  $p = 1.06$ ,  $\lg A = -0.46$ .

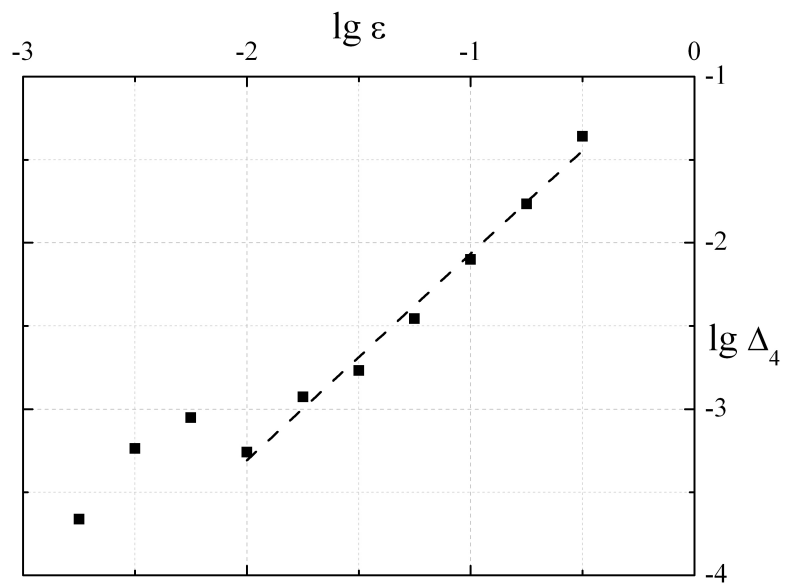


Рис. 6. 4-й момент,  $t = 2.0$ ,  $p = 1.24$ ,  $\lg A = -0.83$ .



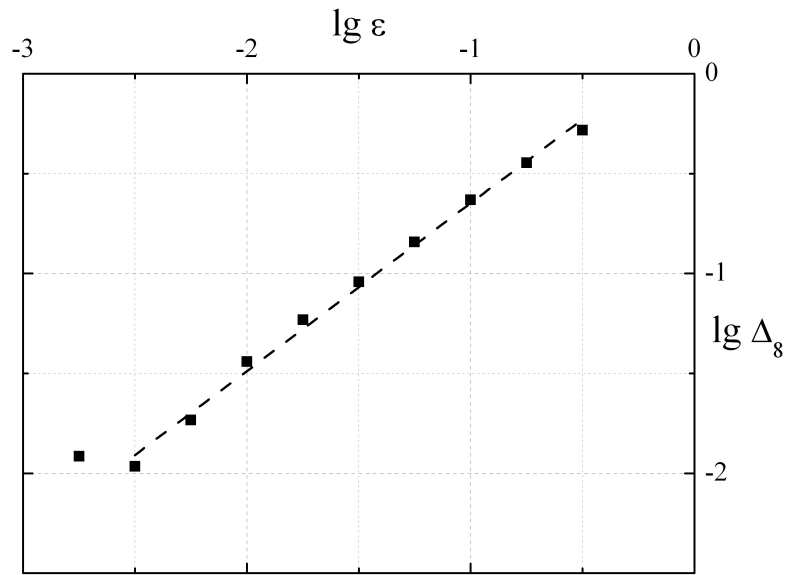


Рис. 7. 8-й момент,  $t = 0.4, p = 0.84, \lg A = 0.19$ .

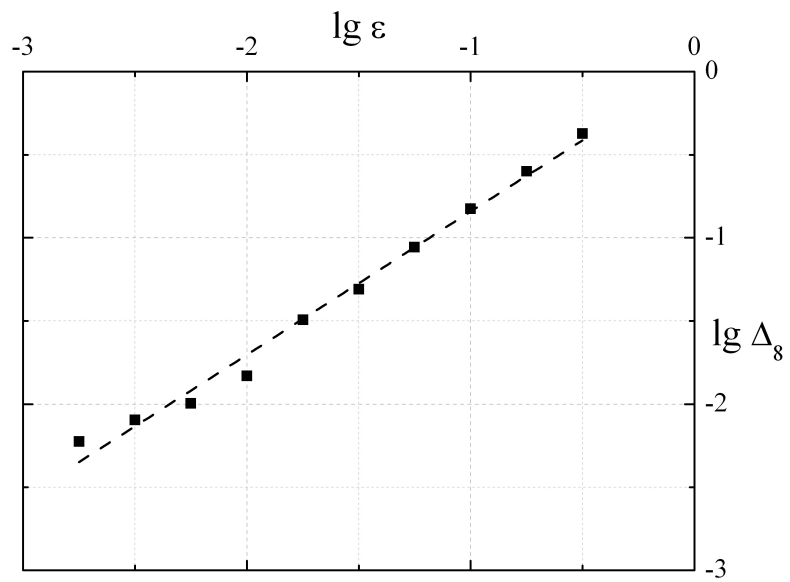


Рис. 8. 8-й момент,  $t = 0.8, p = 0.86, \lg A = 0.02$ .

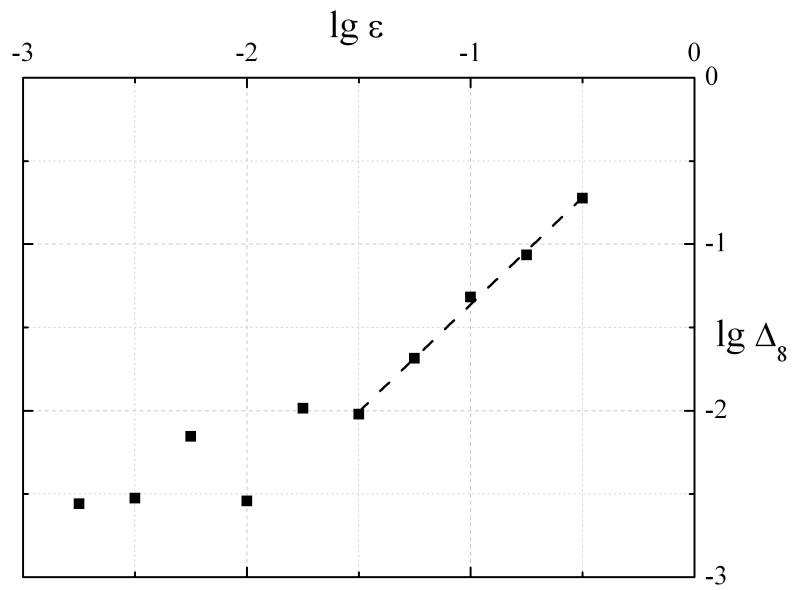


Рис. 9. 8-й момент,  $t = 2.0, p = 1.29, \lg A = -0.08$ .

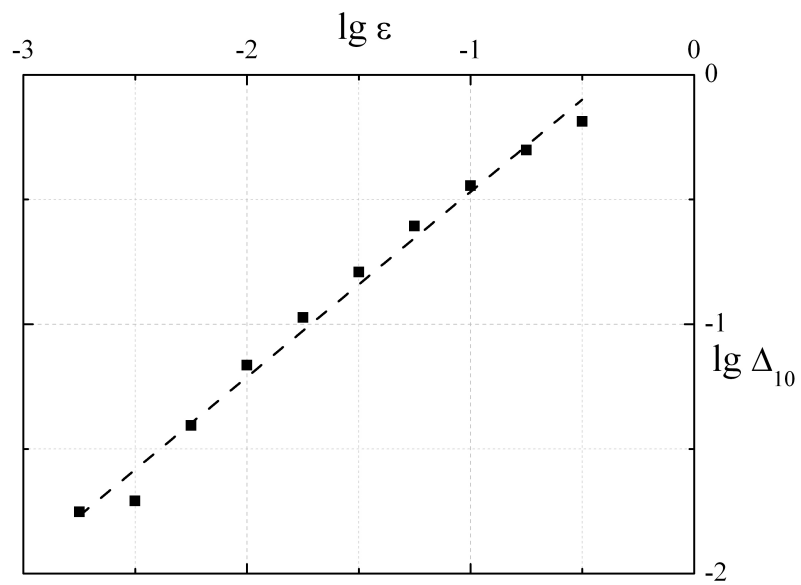


Рис. 10. 10-й момент,  $t = 0.2, p = 0.74, \lg A = 0.27$ .

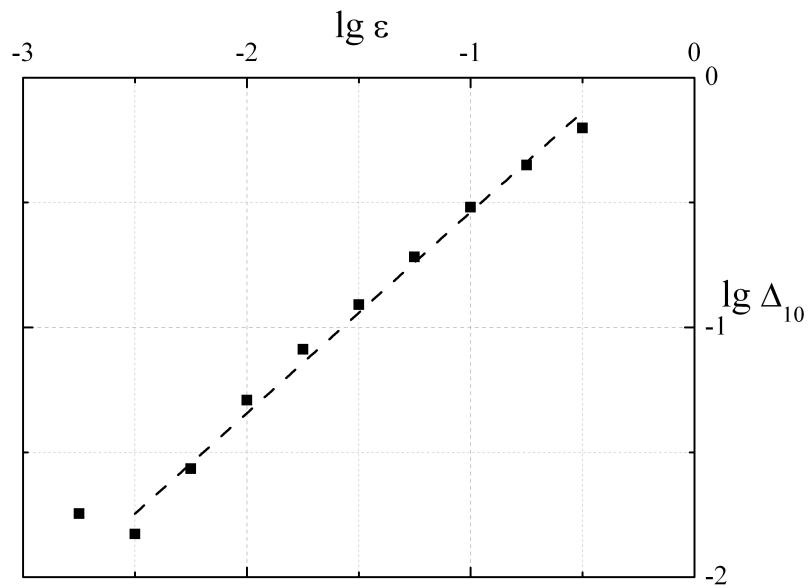


Рис. 11. 10-й момент,  $t = 0.4, p = 0.80, \lg A = 0.27$ .

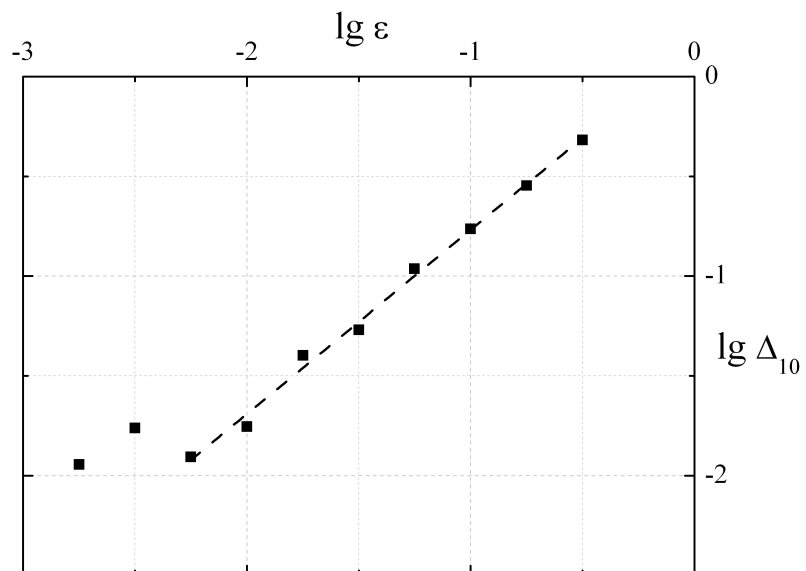


Рис. 12. 10-й момент,  $t = 1.0, p = 0.92, \lg A = 0.15$ .

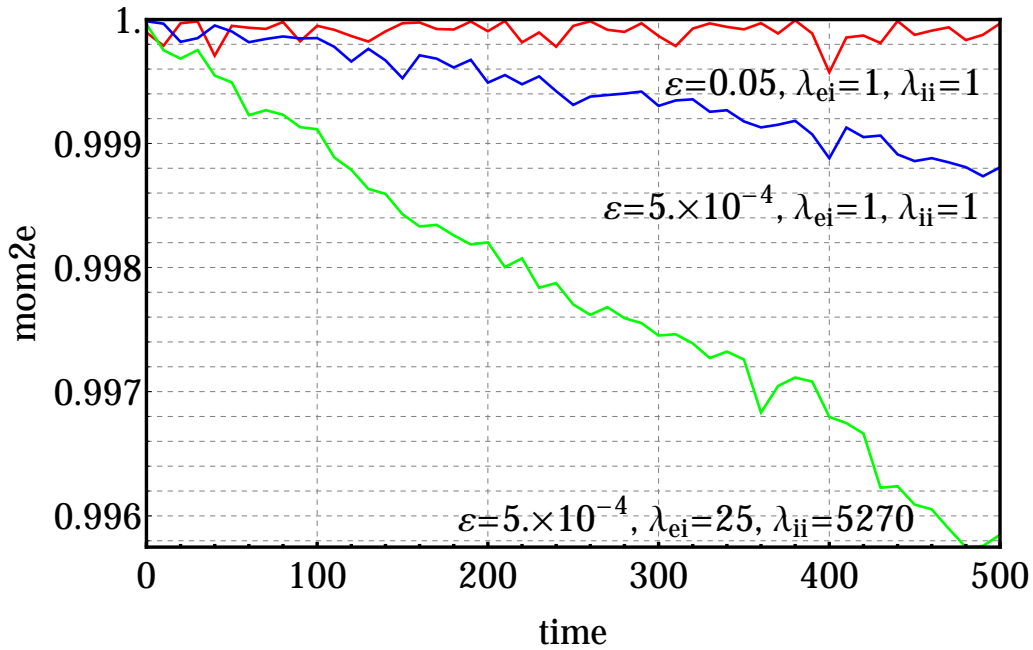


Рис. 13. Второй момент - энергия электронов. Параметры:  $N = 10000$ ,  $K = 1$ ,  $Z = 100$ ,  $T_i^{(0)}/T_e^{(0)} = 0.1$ ,  $A = 200$ ,  $M_p = 1800$  (время в единицах  $\nu_0^{-1}$ ).

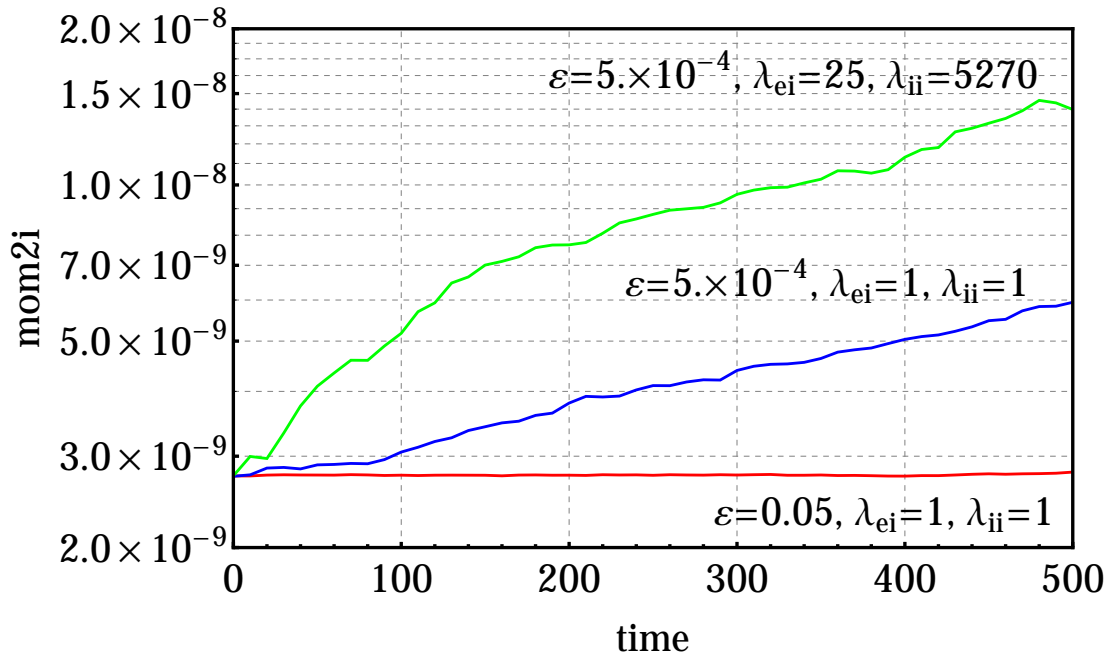


Рис. 14. Второй момент - энергия ионов. Параметры:  $N = 10000$ ,  $K = 1$ ,  $Z = 100$ ,  $T_i^{(0)}/T_e^{(0)} = 0.1$ ,  $A = 200$ ,  $M_p = 1800$ .

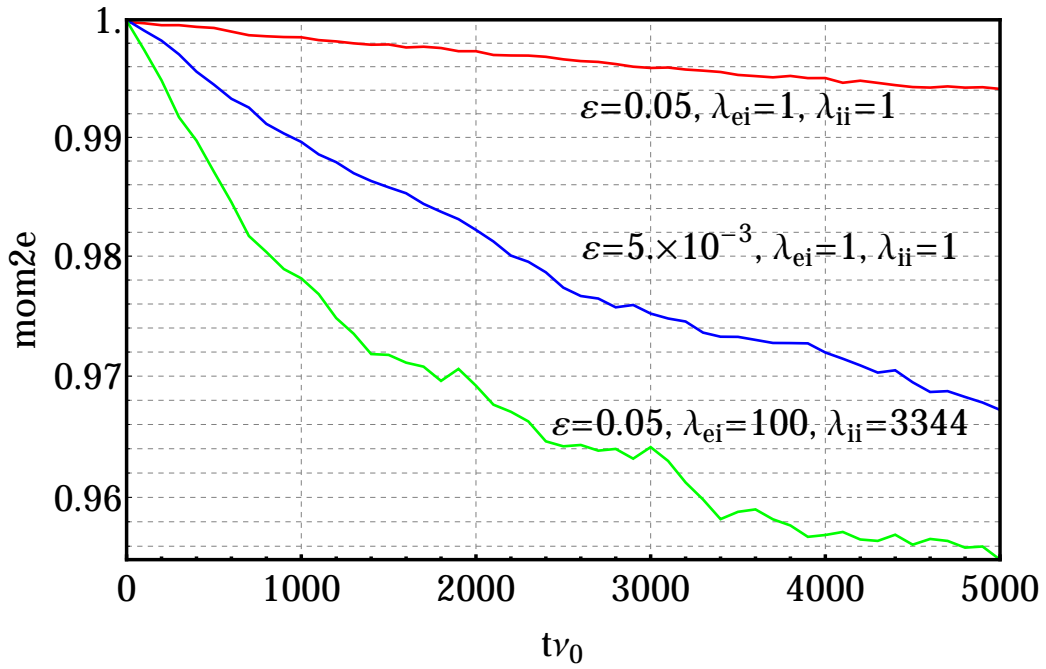


Рис. 15. Второй момент - энергия электронов. Параметры:  $N = 10000$ ,  $K = 1$ ,  $Z = 20$ ,  $T_i^{(0)}/T_e^{(0)} = 0.1$ ,  $A = 64$ ,  $M_p = 1800$ .

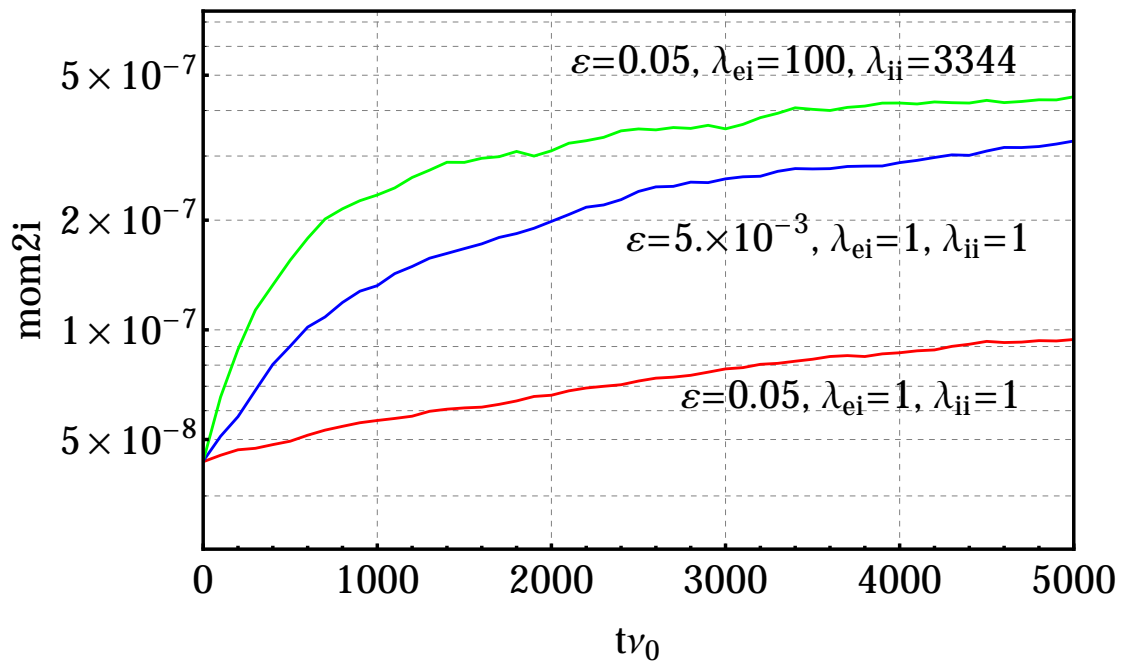


Рис. 16. Второй момент - энергия ионов. Параметры:  $N = 10000$ ,  $K = 1$ ,  $Z = 20$ ,  $T_i^{(0)}/T_e^{(0)} = 0.1$ ,  $A = 64$ ,  $M_p = 1800$ .

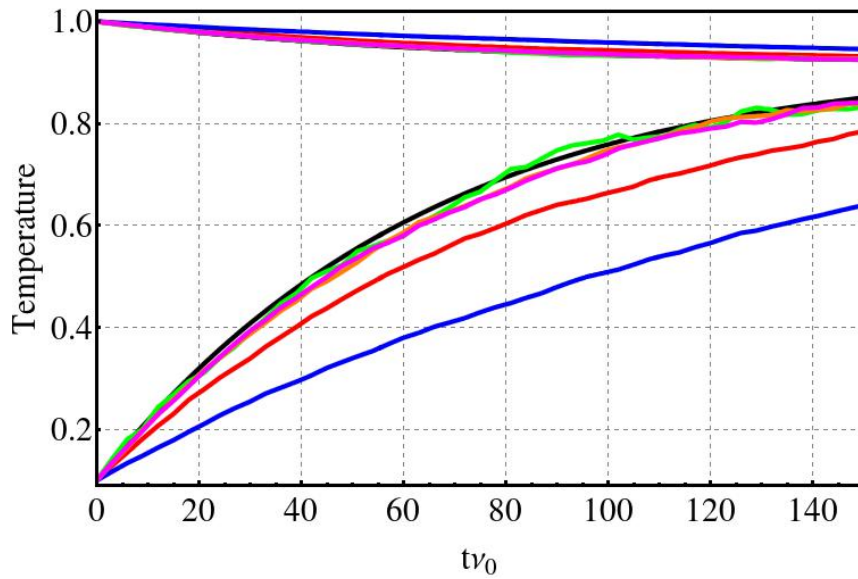


Рис. 17. Общие параметры:  $N = 5000$ ,  $Z = 10$ ,  $T_i^{(0)}/T_e^{(0)} = 0.1$ ,  $A = 20$ ,  $M_p = 1800$ .  $\lambda_{ei} = 25$ ,  $\lambda_{ii} = 1666$ ,  $\varepsilon = 10^{-2}$ ,  $K = 10$  - красная кривая,  $\lambda_{ei} = 1$ ,  $\lambda_{ii} = 1$ ,  $\varepsilon = 10^{-2}$ ,  $K = 10$  - синяя кривая,  $\lambda_{ei} = 1$ ,  $\lambda_{ii} = 1$ ,  $\varepsilon = 3 \cdot 10^{-5}$ ,  $K = 1$  - зелёная кривая,  $\lambda_{ei} = 25$ ,  $\lambda_{ii} = 1666$ ,  $\varepsilon = 5 \cdot 10^{-3}$ ,  $K = 10$  - оранжевая кривая,  $\lambda_{ei} = 250$ ,  $\lambda_{ii} = 16660$ ,  $\varepsilon = 5 \cdot 10^{-2}$ ,  $K = 10$  - фиолетовая кривая, теория (NRL) - чёрная кривая.

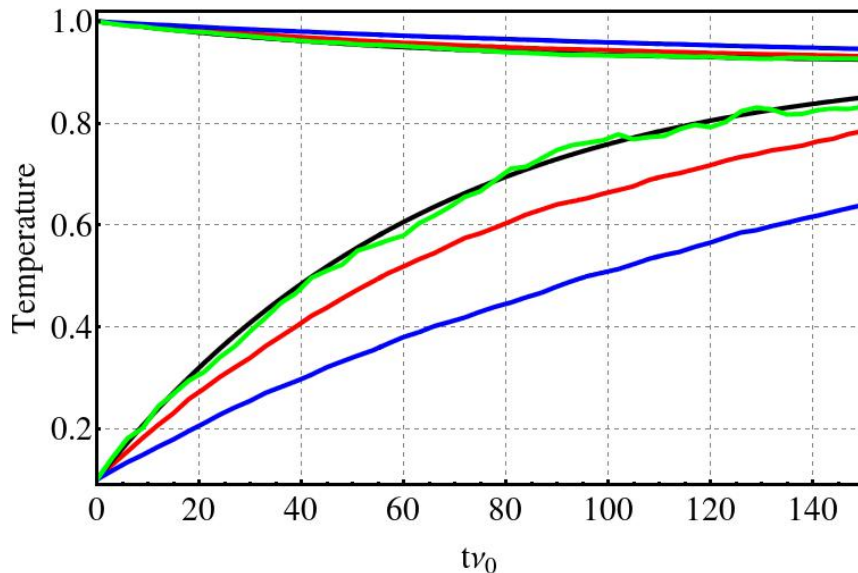


Рис. 18. Общие параметры:  $N = 5000$ ,  $Z = 10$ ,  $T_i^{(0)}/T_e^{(0)} = 0.1$ ,  $A = 20$ ,  $M_p = 1800$ .  $\lambda_{ei} = 25$ ,  $\lambda_{ii} = 1666$ ,  $\varepsilon = 10^{-2}$ ,  $K = 10$  - красная кривая,  $\lambda_{ei} = 1$ ,  $\lambda_{ii} = 1$ ,  $\varepsilon = 10^{-2}$ ,  $K = 10$  - синяя кривая,  $\lambda_{ei} = 1$ ,  $\lambda_{ii} = 1$ ,  $\varepsilon = 3 \cdot 10^{-5}$ ,  $K = 1$  - зелёная кривая, теория (NRL) - чёрная кривая.

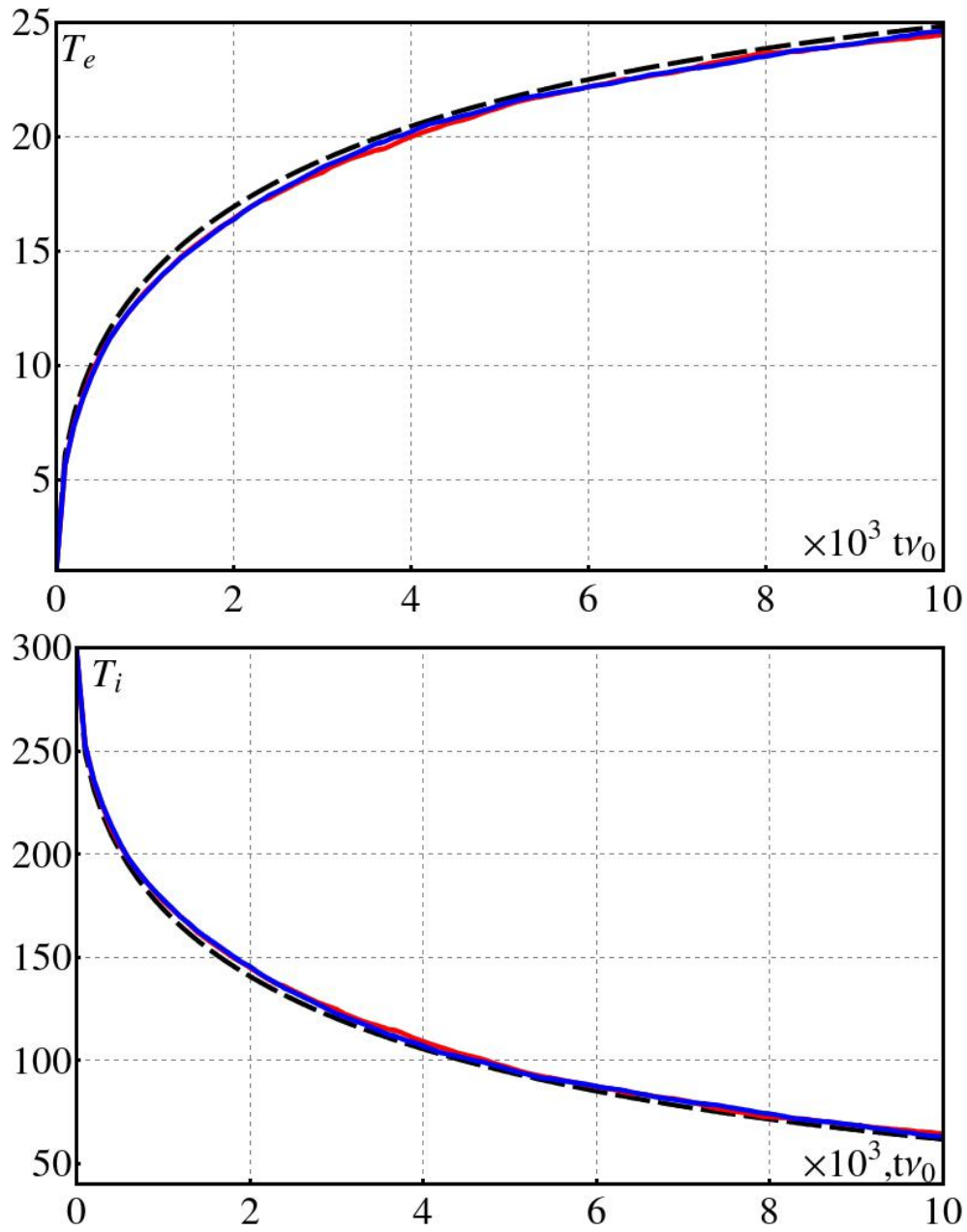


Рис. 19. Сравнение зависимости электронной (сверху) и ионной (снизу) температуры от времени при  $\lambda_{ei} = 25$ ,  $\lambda_{ii} = \lambda_{ii}(t)$ ,  $\lambda_{ii}(0) = 1$  (красная кривая) и  $\lambda_{ei} = 25$ ,  $\lambda_{ii} = 50$  (синяя кривая) с расчётом по формуле (4) (чёрная пунктирная кривая) для параметров  $N = 5000$ ,  $Z = 10$ ,  $T_i^{(0)}/T_e^{(0)} = 300$ ,  $A = 20$ ,  $M_p = 1800$ ,  $K = 1$ ,  $\varepsilon = 0.01$ , начальное распределение изотропное моноэнергетическое.

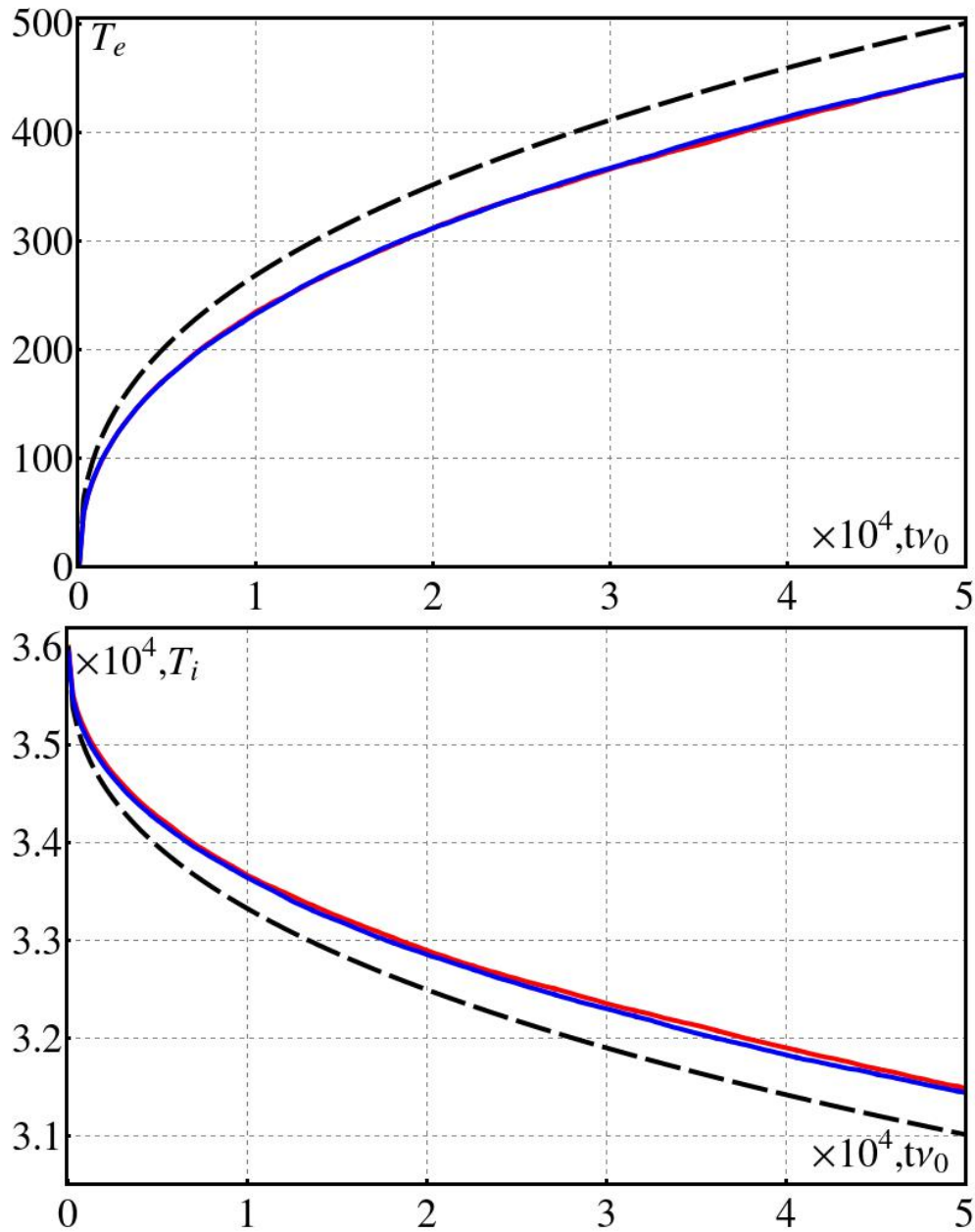


Рис. 20. Сравнение зависимости электронной (сверху) и ионной (снизу) температуры от времени для начального максвелловского распределения при  $N = 20000$ ,  $\lambda_{ii} = 1$ ,  $\varepsilon = 0.05$ ,  $K = 1$  (красная кривая) и начального моноэнергетического распределения при  $N = 5000$ ,  $\lambda_{ei} = 1$ ,  $\lambda_{ii} = 1$ ,  $\varepsilon = 0.05$ ,  $K = 5$  с расчётом по формуле (4) (чёрная пунктирная кривая) для параметров  $Z = 10$ ,  $T_i^{(0)}/T_e^{(0)} = 36000.$ ,  $A = 20$ ,  $M_p = 1800$ .



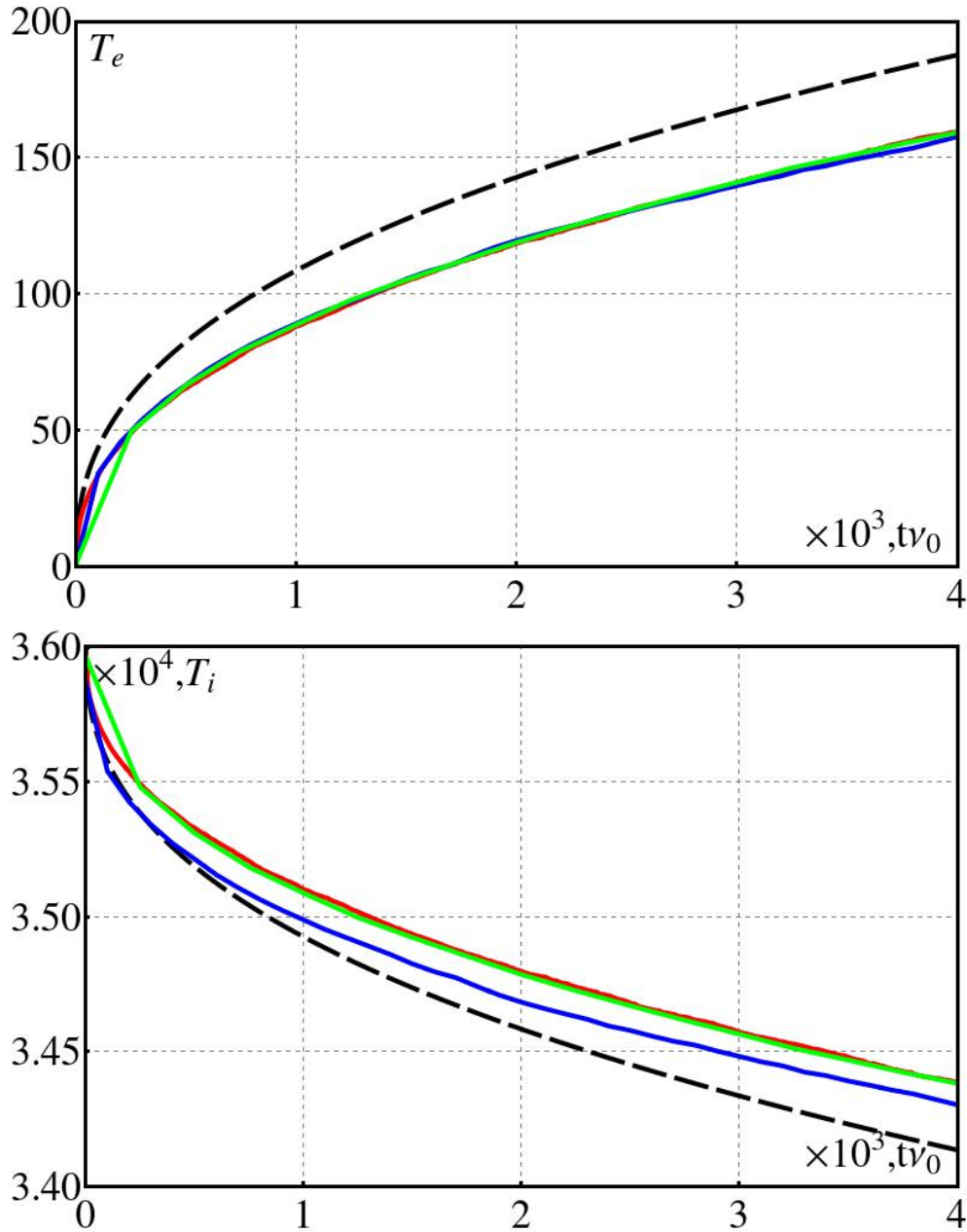


Рис. 21. Сравнение зависимости электронной (сверху) и ионной (снизу) температуры от времени при  $\lambda_{ei} = 1$ ,  $\lambda_{ii} = 1$ ,  $\varepsilon = 0.05$ ,  $K = 5$  (зелёная кривая),  $\lambda_{ei} = 25$ ,  $\lambda_{ii} = \lambda_{ii}(t)$ ,  $\lambda_{ii}(0) = 0$ ,  $\varepsilon = 0.01$ ,  $K = 1$  (красная кривая) и  $\lambda_{ei} = 25$ ,  $\lambda_{ii} = \lambda_{ii}(t)$ ,  $\lambda_{ii}(0) = 0$ ,  $\varepsilon = 0.002$ ,  $K = 1$  (синяя кривая) с расчётом по формуле (4) (чёрная пунктирная кривая) для параметров  $N = 5000$ ,  $Z = 10$ ,  $T_i^{(0)}/T_e^{(0)} = 36000$ .,  $A = 20$ ,  $M_p = 1800$ , начальное распределение изотропное моноэнергетическое.