



**Захваткин М. В.**

Определение и прогнозирование параметров движения космического аппарата с учетом возмущений, вызванных работой бортовых систем

**Рекомендуемая форма библиографической ссылки:** Захваткин М. В. Определение и прогнозирование параметров движения космического аппарата с учетом возмущений, вызванных работой бортовых систем // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2014. № 45. 30 с.  
URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2014-45>

О р д е н а   Л е н и н а  
И Н С Т И Т У Т   П Р И К Л А Д Н О Й   М А Т Е М А Т И К И  
и м е н и   М . В . К е л д ы ш а  
Р о с с и й с к о й   а к а д е м и и   н а у к

М.В.Захваткин

**Определение и прогнозирование  
параметров движения космического  
аппарата с учетом возмущений,  
вызванных работой бортовых систем**

Москва – 2014

**Захваткин М.В.**

**Определение и прогнозирование параметров движения космического аппарата с учетом возмущений, вызванных работой бортовых систем**

Излагаются разработанные модели и методики решения задач уточнения и прогнозирования параметров движения космических аппаратов, движение которых претерпевает существенные возмущения, вызванные переменным световым давлением и работой двигателей стабилизации. Эффективность демонстрируется на примере обработки реальной внешнетраекторной и телеметрической информации КА «Спектр-Р».

**Ключевые слова:** определение орбиты, световое давление, двигатели-маховики.

**Mikhail Vitalyevich Zakhvatkin**

**Spacecraft orbit determination and prediction taking into account perturbations due to on-board system operation**

The paper describes developed models and techniques for orbit determination and prediction of a spacecraft, the motion of which undergoes significant perturbations due to variable solar radiation pressure and occasional firings of stabilization system thrusters. Impact on orbital accuracy is being showed on actual tracking and on-board data of the «Spectrum-R» («Radioastron») spacecraft.

**Key words:** orbit determination, solar radiation pressure, reaction wheels.

## Оглавление

Введение . . . . .	3
Модель движения КА . . . . .	4
Траекторные и бортовые измерения . . . . .	10
Измерения импульсов разгрузок . . . . .	11
Измерения возмущающих моментов . . . . .	12
Определение параметров движения . . . . .	14
Результаты уточнения орбиты КА «Спектр-Р» . . . . .	16
Прогнозирование движения КА . . . . .	18
Учет будущих возмущений от разгрузок ДМ . . . . .	19
Результаты прогнозирования движения КА «Спектр-Р» . . . . .	21
Заключение . . . . .	25
Библиографический список . . . . .	26

## Введение

Фундаментальные космические исследования являются приоритетным направлением Федеральной космической программы России до 2030 г. В настоящее время на рабочей орбите находится космический аппарат (КА) «Спектр-Р». В текущем десятилетии планируется развертывание внеатмосферных обсерваторий «Спектр-РГ», «Спектр-УФ», «Гамма-400», «Спектр-М», а также запуск орбитальных зондов и посадочных аппаратов для исследования Луны по проекту «Луна-Глоб». Задачи управления движением и навигационной привязки проводимых научных экспериментов предъявляют высокие требования к точности определения и прогнозирования параметров движения этих КА.

Современные модели гравитационного поля Земли и модели движения планет Солнечной системы позволяют с высокой точностью учитывать влияние гравитационных сил, действующих на искусственный спутник Земли. В то же время для функционирующих КА ошибки определения и прогнозирования параметров движения возникают, как правило, из-за неадекватного учета возмущающих факторов негравитационной природы, связанных с конструктивными и функциональными особенностями аппарата.

Конструкция большинства вышеперечисленных КА построена на базе платформы «Навигатор», разработанной в НПО им. С.А. Лавочкина. В состав модуля входит система ориентации и стабилизации, реализованная с использованием электромеханических исполнительных органов (ЭМИО). Разгрузка кинетического момента, накопленного ЭМИО, происходит при помощи реактивных двигателей системы стабилизации, реализованной по моментной схеме, что приводит к возмущению движения центра масс КА. Другим источником негравитационных возмущений является давление солнечной радиации, зависящее от изменяющейся ориентации КА и отражающих свойств его поверхности. Оба упомянутых источника возмущений существенно осложняют построение достаточно точной модели движения КА, необходимой для решения задач управления полетом и привязки результатов научных экспериментов.

Данная работа посвящена проблеме навигации космических аппаратов, определению и прогнозированию параметров их движения с учетом как внешних возмущений, так и возмущений, обусловленных работой бортовых систем аппарата. Ее актуальность подтверждена трехлетним опытом работ по баллистико-навигационному обеспечению полета и навигационной привязки научных экспериментов космического аппарата «Спектр-Р», запущенного в июле 2011 г. в соответствии с проектом создания высокоорбитального наземно-космического радиоинтерферометра «Радиоастрон». Большое удаление КА от Земли обеспечивает более высокое разрешение по сравнению с

наземными интерферометрами и космическими интерферометрами на низких орбитах. Реализовать это преимущество можно только при условии высокоточного определения параметров базы интерферометра, а следовательно, параметров движения КА. Основные требования к точности определения параметров движения КА составляют по положению  $\pm 600$  м, по скорости  $\pm 2$  см/с, по ускорению  $\pm 10^{-8}$  м/с<sup>2</sup>. Выполнить эти требования невозможно без учета возмущений, обусловленных работой бортовых систем аппарата. Возникла необходимость разработки параметризованной модели давления солнечной радиации, учитывающей ориентацию аппарата и свойства его поверхности, а также методики определения параметров движения аппарата путем совместной обработки внешнетраекторных и телеметрических данных [17].

## Модель движения КА

Штатный полет КА на платформе «Навигатор» проходит по пассивной траектории, прерывающейся сеансами проведения разгрузок ЭМИО, сопровождающимися включением двигателей стабилизации (ДС) КА. Разгрузки могут происходить несколько раз за сутки и представляют собой попеременное включение двигателей стабилизации с целью погасить суммарный кинетический момент аппарата вместе с двигателями-маховиками (ДМ). Процесс длится 1–3 минуты, за которые происходит несколько десятков включений двигателей. Поскольку длительность разгрузки существенно меньше характерного времени обращения КА, принятая модель учитывает влияние разгрузки на движение аппарата как мгновенное приращение скорости в среднем взвешенный момент времени. Таким образом, совокупное влияние разгрузок ЭМИО на движение КА на исследуемом интервале времени, содержащем  $n$  разгрузок, описывается множеством пар  $\{t_i, \Delta \mathbf{v}_i\}_{i=1}^n$  времен приложения и значений соответствующих приращений скорости, полученных КА в результате разгрузки.

Параметры разгрузки оцениваются, исходя из данных бортовых измерений, передающихся по телеметрическому каналу. Эти данные содержат ориентацию КА в момент проведения разгрузки, а также характеристики каждого включения ДС: время включения, длительность работы двигателя и массу отработанного топлива. Для  $j$ -го включения ДС в составе  $i$ -й разгрузки ориентация КА определяет направление соответствующего приращения скорости центра масс КА  $\mathbf{e}_{i,j}$ , а длительность включения и расход топлива — тягу двигателя и, следовательно, величину приращения скорости КА  $\Delta v_{i,j}$ . Время приложения импульса разгрузки и его измеренное значение вычисляются по

формулам

$$t_i = \frac{\sum_{j=1}^{N_i} \Delta v_{i,j} t_{i,j}}{\sum_{j=1}^{N_i} \Delta v_{i,j}}, \quad \Delta \mathbf{v}_i^0 = \sum_{i=1}^{N_i} \mathbf{e}_{i,j} \Delta v_{i,j}, \quad (1)$$

где  $N_i$  — количество включений ДС во время  $i$ -й разгрузки,  $t_{i,j}$  — время  $j$ -го включения ДС в рамках  $i$ -й разгрузки.

Движение КА между соседними разгрузками пассивно и удовлетворяет уравнению,

$$\frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = -\mu \frac{\mathbf{r}}{r^3} + \mathbf{f}_g + \mathbf{f}_{ng}$$

где

$\mathbf{r}$  — радиус-вектор аппарата, проведенный из основного притягивающего центра;

$\mu$  — гравитационная постоянная основного притягивающего центра;

$\mathbf{f}_g$  — возмущения гравитационной природы;

$\mathbf{f}_{ng}$  — возмущения негравитационной природы.

Выбор системы координат и моделей возмущений во многом зависит от орбиты КА. Для определенности опишем модель для КА «Спектр-Р», поскольку далее в работе практическое применение разработанных моделей и методов будет исследоваться на примере реальных данных этого аппарата. КА «Спектр-Р» находится на высокоэллиптической околоземной орбите с эксцентриситетом, варьирующимся в пределах от 0.59 до 0.96, и периодом около 9 суток. В качестве системы координат используется геоцентрическая система, совпадающая с координатной частью международной геоцентрической системой координат [1]. В качестве эфемеридного времени используется шкала земного времени ТТ.

Среди гравитационных возмущений учитывается нецентральная часть геопотенциала, гравитация Луны, Солнца и планет, изменение гравитационного поля вследствие деформации Земли под действием притяжения Луны и Солнца (твердые приливы), дополнительное возмущающее ускорение, вызванное эффектами общей теории относительности. Негравитационные возмущения включают давление солнечного излучения, давление излучения Земли и торможение в атмосфере Земли на участках ниже 1.5 тыс. км над поверхностью.

Гравитационное поле Земли представлено разложением геопотенциала по сферическим функциям в соответствии с моделью EGM-96 [8] до гармоники степени 75 и порядка 75. Для получения координат Луны, Солнца и

планет используются таблицы, основанные на теории движения Луны и планет DE421 [5]. Для описания влияния приливных сил используется модель, учитывающая деформацию Земли в направлении возмущающего тела (Луны или Солнца), в форме первого члена в разложении потенциала по сферическим функциям [3; 12]. Дополнительное релятивистское ускорение, обусловленное использованием геоцентрической системы, рассчитывалось согласно рекомендациям [10]. Давление излучения Земли учитывается согласно [6], поверхности Земли при этом разбивается на 18x9 участков с постоянными коэффициентами альбедо. Расчет плотности атмосферы осуществляется на основе модели рекомендованной ГОСТ Р 25645.166-2004 [22].

Световое давление занимает особое место в используемой модели движения. В случае аппаратов «Спектр-Р» и «Миллиметрон», обладающих большой площадью поверхности, оно сильнее возмущает движение центра масс, чем разгрузки двигателей-маховиков (см. таблицу 1). Кроме того, космические обсерватории на платформе «Навигатор» поддерживают ориентацию в соответствии с программой наблюдений и в общем случае не сохраняют ориентацию относительно Солнца. В совокупности со сложной формой поверхности КА это приводит к необходимости учета ориентации аппарата в пространстве при расчете возмущающего ускорения от светового давления.

Таблица 1. Возмущающие ускорения движения центра масс КА «Спектр-Р»

Источник	Максимальное, м/с <sup>2</sup>	Среднее, м/с <sup>2</sup>
Сферические гармоники	$3.8 \cdot 10^{-3}$	$3.3 \cdot 10^{-6}$
Луна, Солнце, планеты	$2.3 \cdot 10^{-4}$	$4.1 \cdot 10^{-5}$
<b>Световое давление</b>	$1.9 \cdot 10^{-7}$	$1.5 \cdot 10^{-7}$
<b>Разгрузки<sup>1</sup></b>	$5.8 \cdot 10^{-8}$	$5.8 \cdot 10^{-8}$
Приливы	$6.6 \cdot 10^{-8}$	$2.3 \cdot 10^{-11}$
Излучение Земли	$2.1 \cdot 10^{-8}$	$1.1 \cdot 10^{-10}$

Возмущение, обусловленное световым давлением, зависит от ориентации относительно Солнца и характеристик освещенной поверхности КА. Поток солнечного излучения на определенном расстоянии практически постоянен во времени и лишь немного изменяется с одиннадцатилетним циклом солнечной активности. Суммарная энергия потока солнечного излучения, проходящего перпендикулярно через единицу площади за единицу времени на расстоянии одной астрономической единицы ( $AU$ ) от Солнца, описывается солнечной постоянной, усредненное значение которой равно  $S_0 = 1361 \text{ Вт/м}^2$ . Мощность излучения убывает с квадратом расстояния до Солнца. Импульс единичного

<sup>1</sup>Условное ускорение, равное среднему отношению величины приращения скорости КА к среднему интервалу между разгрузками.

фотона  $p$  связан с его энергией  $E$  выражением  $E = c \cdot p$ , где  $c$  — скорость света. Следовательно, давление потока на абсолютно черную пластину, расположенную перпендикулярно к нему на расстоянии  $r$  от Солнца, будет равно изменению потока импульса за единицу времени

$$P = \frac{S_0}{c} \left( \frac{AU}{r} \right)^2. \quad (2)$$

Световое давление на произвольную поверхность хорошо описывается при помощи разбиения падающего потока на три части [4; 7; 19]: поглощенную, отраженную зеркально и отраженную диффузно (рис. 1). Под диффузным отражением понимается отражение по закону косинусов Ламберта. Рассмотрим плоскую поверхность площади  $A$  и единичным вектором нормали  $\mathbf{n}$ , на которую в направлении  $\mathbf{s}$  падает свет. Предположим, что поверхность обладает коэффициентом отражения  $\alpha$  и зеркальности  $\mu$ . Иными словами  $(1 - \alpha)$  всего потока поглощается поверхностью, оставшаяся часть отражается, часть  $\mu$  отраженного света отражается зеркально,  $(1 - \mu)$  — диффузно. Используя (2) запишем выражения для сил давления различных составляю-

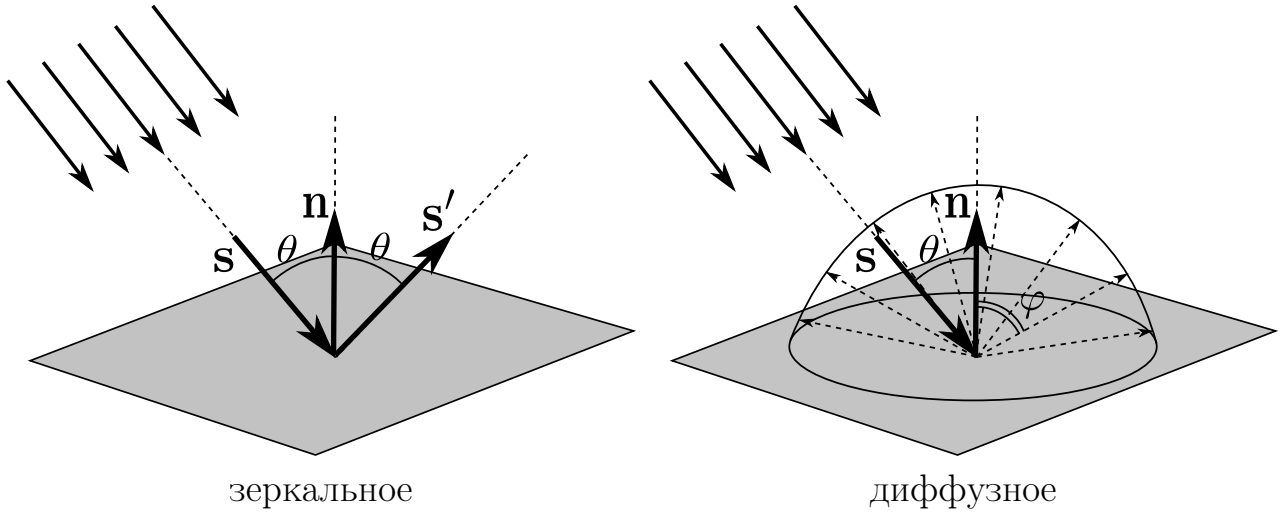


Рис. 1. Отражение света

щих падающего света: поглощенного (3), зеркально отраженного (4) и диффузно отраженного (5)

$$\mathbf{F}_0 = \Phi_0 A \cdot (1 - \alpha) \cos \theta \cdot \mathbf{s}, \quad (3)$$

$$\mathbf{F}_s = \Phi_0 A \cdot 2\alpha\mu \cos^2 \theta \cdot (-\mathbf{n}), \quad (4)$$

$$\mathbf{F}_d = \Phi_0 A \cdot \alpha(1 - \mu) \cos \theta \left( \mathbf{s} - \frac{2}{3} \cdot \mathbf{n} \right), \quad (5)$$



где

$$\Phi_0 = \frac{S_0}{c} \left( \frac{AU}{r} \right)^2.$$

Возмущающее ускорение от светового давления, действующего на аппарат, поверхность которого состоит из  $N$  плоских элементов, представляется в виде

$$\mathbf{f}_{sp} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^N \eta_i \mathbf{F}_{sp}^{(i)}(A_i, \theta_i, \alpha_i, \mu_i),$$

где

$M$  — масса аппарата;

$\eta_i$  — функция освещенности элемента, равная нулю, если элемент находится в тени, единице при полном освещении Солнцем, и промежуточной величине, если КА находится в полутени или элемент освещен не полностью;

$A_i$  — площадь элемента;

$\theta_i$  — угол падения света на элемент;

$\alpha_i$  — коэффициент отражения элемента;

$\mu_i$  — коэффициент зеркальности элемента.

На практике удобнее разделить все элементы поверхности на  $m$  групп, каждая из которых обладает своим набором коэффициентов  $\alpha_j$  и  $\mu_j$ . Суммарное количество параметров, описывающих отражающую способность всей поверхности аппарата, в этом случае будет равно  $2m$ . Ускорение, обусловленное световым давлением, записывается в виде

$$\mathbf{f}_{sp} = \frac{1}{M} \sum_{j=1}^m \left[ (1 - \alpha_j) \mathbf{F}_0^j + \alpha_j \mu_j \mathbf{F}_s^j + \alpha_j (1 - \mu_j) \mathbf{F}_d^j \right]. \quad (6)$$

Входящие в (6) силы  $\mathbf{F}_0^j$ ,  $\mathbf{F}_s^j$  и  $\mathbf{F}_d^j$  описываются выражениями

$$\mathbf{F}_0^j = \sum_{i \in S_j} \eta_i \mathbf{F}_0(A_i, \theta_i, \alpha = 0),$$

$$\mathbf{F}_s^j = \sum_{i \in S_j} \eta_i \mathbf{F}_s(A_i, \theta_i, \alpha = 1, \mu = 1),$$

$$\mathbf{F}_d^j = \sum_{i \in S_j} \eta_i \mathbf{F}_d(A_i, \theta_i, \alpha = 1, \mu = 0),$$

где  $S_j$  — индексное множество элементов, входящих в  $j$ -ю группу, а функции под знаком суммы соответствуют выражениям (3–5). Отметим, что такая модель позволяет вдобавок рассчитать момент сил светового давления

$$\mathbf{M}_{sp} = \sum_{j=1}^m \left[ (1 - \alpha_j) \mathbf{M}_0^j + \alpha_j \mu_j \mathbf{M}_s^j + \alpha_j (1 - \mu_j) \mathbf{M}_d^j \right], \quad (7)$$

где моменты  $\mathbf{M}_0^j$ ,  $\mathbf{M}_s^j$  и  $\mathbf{M}_d^j$  описываются выражениями

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_0^j &= \sum_{i \in S_j} \eta_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_0(A_i, \theta_i, \alpha = 0), \\ \mathbf{M}_s^j &= \sum_{i \in S_j} \eta_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_s(A_i, \theta_i, \alpha = 1, \mu = 1), \\ \mathbf{M}_d^j &= \sum_{i \in S_j} \eta_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_d(A_i, \theta_i, \alpha = 1, \mu = 0), \end{aligned}$$

$\mathbf{r}_i$  — радиус-вектор геометрического центра  $i$ -го элемента относительно центра масс КА.

При построении модели светового давления КА «Спектр-Р» использовалась упрощенная модель поверхности, состоящая из трех элементов: антенны космического радиотелескопа (КРТ), центрального модуля и панелей солнечных батарей [18]. Для расчета светового давления, действующего на КРТ, а также учета возникающей тени (рис. 2), поверхность антенны разбивалась на множество плоских элементов. При этом элемент считался освещенным, если освещен его центр. Проверка затенения элемента осуществлялась при помощи проекции солнечного луча на плоскости, содержащие панели солнечных батарей или грани центрального модуля.

По характеристикам отражения поверхность разделена на две части. Первая часть включает антенну КРТ и центральный модуль, вторая часть — панели солнечных батарей. Идентичность отражающих свойств поверхностей антенны КРТ и центрального модуля обусловлена тем, что перед запуском обе поверхности были покрыты одинаковой многослойной экранно-вакуумной теплоизоляцией. Вместо четырех коэффициентов  $(\alpha_1, \mu_1)$  и  $(\alpha_2, \mu_2)$ , соответствующих двум типам поверхностей, использовались только три коэффициента:  $(\alpha_1, \mu_1)$  и  $\alpha_2$ . В силу того, что панели солнечных батарей ориентированы нормально по отношению к направлению на Солнце с точностью в несколько градусов, коэффициенты  $\alpha_2$  и  $\mu_2$  оказываются сильно скоррелированы. Для определенности коэффициент  $\mu_2$  полагался равным единице, что эквивалентно отсутствию диффузного отражения от панелей солнечных батарей.

Использование упрощенной модели поверхности КА и последующая параметризация модели светового давления уже находили успешное

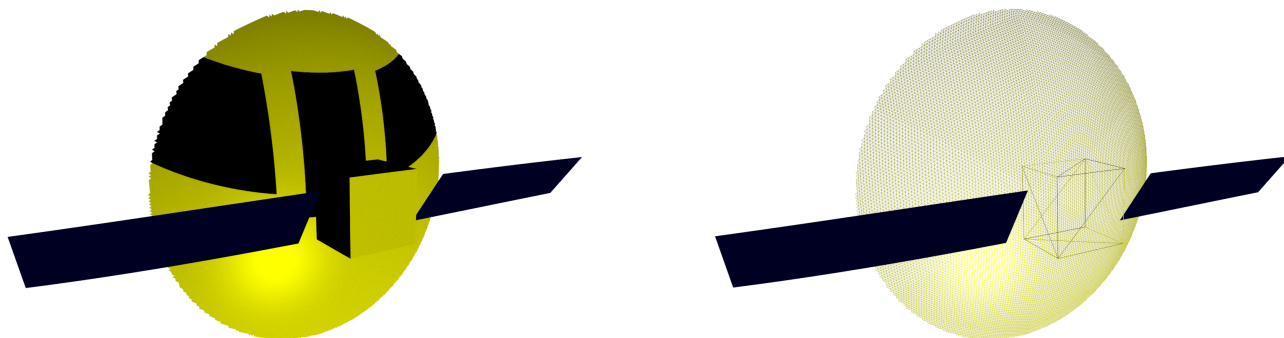


Рис. 2. Модель поверхности КА «Спектр-Р», пример возникающей тени и конечно-элементное представление поверхности КРТ

применение при высокоточном определении орбит аппаратов спутниковой системы навигации GPS/ГЛОНАСС [11] и топографических миссий TOPEX/Poseidon [9] и Jason-1,2 [2]. Однако описанные в данных работах модели используют более простую форму поверхности КА (т.н. “box-wing”, состоящую из центрального модуля и панелей СБ), что делает их неприменимыми для аппаратов сложной формы или со сложной структурой возникающей тени.

## Траекторные и бортовые измерения

Измерения текущих навигационных параметров (ИТНП), проводящиеся с участием наземных станций, являются основным источником траекторной информации о КА. Как правило они включают радиотехнические измерения наклонной дальности и радиальной скорости. Навигационная поддержка КА «Спектр-Р» также дополняется лазерными измерениями дальности и оптическими измерениями положения КА на небесной сфере. Более подробная информация о составе и характеристиках ИТНП КА «Спектр-Р» приведена в работе [16]. При моделировании расчетных аналогов траекторных измерений использовались алгоритмы, описанные в работе [21].

Для получения дополнительной информации о возмущениях от разгрузок двигателей-маховиков и переменного светового давления будем использовать бортовые измерения, в том числе данные звездных датчиков об ориентации КА в пространстве, параметры работы двигателей стабилизации, а также скорости вращения двигателей-маховиков. Знание ориентации КА в пространстве необходимо для использования сложной модели светового давления и определения направления приращения скорости КА в результате работы двигателей стабилизации. Точность кватернионов ориентации, получаемых со звездных датчиков, достаточно высока, чтобы непосредственно использовать измеренные значения ориентации аппарата. Исключе-

ние составляют моменты проведения разгрузок, когда ошибки знания ориентации должны быть учтены. Данные о работе двигателей стабилизации позволяют измерить величину импульса разгрузки ЭМИО, скорости вращения двигателей-маховиков дают информацию о возмущающем моменте и, как следствие, о параметрах светового давления. Рассмотрим отдельно каждый тип измерений.

## Измерения импульсов разгрузок

Измеряемыми величинами являются длительность работы двигателя и расход топлива. Номинальная удельная тяга двигателя выражается через длительность его работы при помощи табличных данных. Расчетное значение приращения скорости от  $j$ -го включения двигателя во время  $i$ -й разгрузки представляется в виде

$$\Delta v_{i,j} = \frac{\Delta m_{i,j} I_y(\tau_{i,j}) g}{M},$$

где

$\Delta m_{i,j}$  — масса отработанного топлива;

$I_y$  — удельная тяга двигателя;

$\tau_{i,j}$  — время работы двигателя;

$g$  — ускорение свободного падения;

$M$  — текущая масса аппарата.

Удельная тяга ДС определяется линейной интерполяцией табличных данных. Масса аппарата считается постоянной в ходе всей разгрузки. Расход топлива всех двигателей телеметрируется, поэтому изменение массы КА за длительный промежуток времени известно. Измеренное значение суммарного импульса  $i$ -ой разгрузки рассчитывается согласно выражению (1), значения направлений  $\mathbf{e}_{i,j}$  в инерциальной СК рассчитываются с использованием известной ориентации КА во время разгрузки и номинальных значений направлений тяги двигателей в связанной СК.

Измерение импульса разгрузки определяет вектор из трех компонент. Для использования этих измерений в задаче уточнения орбиты определим соответствующую ковариационную и весовую матрицы. Определим ошибки измерения единичного приращения скорости  $\Delta \mathbf{v}_{i,j}$ . Ошибка содержится как в измерении величины  $\Delta v_{i,j}$  так и в определении направления  $\mathbf{e}_{i,j}$ . Будем

предполагать, что ошибки определения направления малы, а их распределение зависит только от угла между номинальным и фактическим направлением. Тогда ошибку измерения  $\Delta \mathbf{v}_{i,j}$  можно представить случайным вектором с нулевым математическим ожиданием и ковариационной матрицей вида  $\text{diag}(\sigma_v^2, \sigma_d^2, \sigma_d^2)$  в СК, ось  $OX$  которой направлена вдоль  $\mathbf{e}_{i,j}$ . Значения  $\sigma_v$  и  $\sigma_d$  соответствуют ошибкам определения величины  $\Delta v_{i,j}$  и направления  $\mathbf{e}_{i,j}$ .

При переходе к СК, в которой задан вектор направления тяги  $\mathbf{e}$  (в данном случае  $\mathbf{e}_{i,j}$ ), ковариационная матрица преобразуется к виду

$$\mathbf{K} = \sigma_d^2(\mathbf{E} - \mathbf{e} \cdot \mathbf{e}^\top) + \sigma_v^2 \mathbf{e} \cdot \mathbf{e}^\top,$$

где  $\mathbf{E}$  — единичная матрица. Весовая матрица измеренного импульса разгрузки получается обращением суммы ковариационных матриц отдельных включений. Отметим частный случай, когда тяга всех включающихся двигателей направлена в одну сторону  $\mathbf{e}_{i,j} = \mathbf{e}_{i,k} = \mathbf{e}_i, \forall j, k$ . Весовая матрица принимает простой вид

$$\mathbf{P}_i = \frac{1}{\sigma_D^2}(\mathbf{E} - \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_i^\top) + \frac{1}{\sigma_V^2} \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_i^\top, \quad (8)$$

где  $\sigma_V$  и  $\sigma_D$  суммарные продольные и поперечные ошибки. Такая схема работы двигателей характерна для КА на платформе «Навигатор». При решении задачи уточнения орбиты КА «Спектр-Р» предполагалось, что ошибки исполнения по величине составляют 10%, квадратичная ошибка в ортогональном направлении соответствует отклонению направления в полградуса от номинального.

## Измерения возмущающих моментов

Действующий на аппарат момент внешних сил связан со скоростями вращения самого аппарата и его подвижных частей, в частности, двигателей-маховиков. В общем случае момент внешних сил может быть выражен при помощи динамического уравнения Эйлера. Для этого потребуется знание скоростей вращения аппарата и маховиков, а также их первых производных по времени. Ориентация и скорости вращения маховиков постоянно измеряются, и необходимые величины могут быть найдены. Для КА на платформе «Навигатор» характерен частный случай движения, в ходе которого двигателями-маховиками поддерживается постоянная ориентация аппарата в инерциальном пространстве. В этом случае действующий на аппарат возмущающий момент равен скорости изменения кинетического момента системы маховиков

$$\sum_{i=1}^N \mathbf{a}_i I_i \dot{\Omega}_i = \mathbf{M}_{sp} + \mathbf{M}_g, \quad (9)$$

где

$\mathbf{a}_i$  — направляющие косинусы оси вращения  $i$ -го ДМ;

$I_i$  — момент инерции  $i$ -го ДМ относительно оси вращения;

$\Omega_i$  — скорость вращения  $i$ -го ДМ;

$\mathbf{M}_{sp}$  — момент сил светового давления;

$\mathbf{M}_g$  — гравитационный момент.

Уравнение (9) записано в связанной СК. Скорость изменения кинетического момента ДМ, стоящая в левой части уравнения, является измеряемой величиной, а значения в правой части зависят от положения КА, его ориентации и коэффициентов светового давления.

Если на временном интервале  $(t_1, t_2)$ , длина которого много меньше одного года, ориентация аппарата относительно неподвижных осей не изменяется, то действующий момент сил светового давления можно считать постоянным. Выбрав неподвижную систему таким образом, чтобы она совпадала со связанной на рассматриваемом интервале, можно переписать выражение (9) в виде

$$\sum_{i=1}^N \mathbf{a}_i I_i (\Omega_i(t_2) - \Omega_i(t_1)) = \mathbf{M}_{sp}(t_2 - t_1) + \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{M}_g dt. \quad (10)$$

В общем случае интеграл от гравитационного момента можно рассчитать численно. Для аппаратов, планируемых к запуску в окрестность точки  $L_2$  системы Солнце–Земля, влияние гравитационного момента пренебрежимо мало. Для запущенного на орбиту КА «Спектр-Р» максимальный гравитационный момент сравнивается со средним моментом от светового давления на высотах около 30 тыс. км, поэтому на расстояниях между Землей и КА, превышающих 100 тыс. км, интегралом в правой части (10) можно пренебречь. Для большей части измерений возмущающего момента можно записать следующее рассогласование измеренных и расчетных величин:

$$\boldsymbol{\xi} = \frac{\sum_{i=1}^N \mathbf{a}_i I_i (\Omega_i(t_2) - \Omega_i(t_1))}{t_2 - t_1} - \mathbf{M}_{sp}(\Lambda(t_2), \alpha_1, \mu_1, \dots, \alpha_m, \mu_m, \mathbf{r}). \quad (11)$$

Для описания соответствующей весовой матрицы  $\mathbf{P}^{sp}$ , которая понадобится при уточнении орбиты КА, выведем значение ковариационной матрицы  $\mathbf{K}_\Omega$  кинетического момента ДМ. Предположим, что направления  $\mathbf{a}_i$  заданы точно, и ошибки присутствуют только в определении скоростей вращения маховиков  $\Omega_i$ . Тогда совокупность скоростей вращения маховиков является

случайным вектором с независимыми нормально распределенными элементами. В предположении, что моменты инерции всех маховиков равны, их суммарный кинетический момент в осях связанной СК можно представить в виде

$$\mathbf{L}_\omega = I\mathbf{A}\Omega,$$

где  $I$  — момент инерции маховика относительно его оси вращения,  $\mathbf{A}$  — матрица направляющих косинусов осей вращения маховиков. К примеру, матрица направляющих косинусов осей ДМ КА «Спектр-Р» имеет вид

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \sin \alpha & \sin \alpha & \sin \alpha & \sin \alpha & -\sin \alpha & -\sin \alpha & -\sin \alpha & -\sin \alpha \\ 0 & -\cos \alpha & 0 & \cos \alpha & 0 & \cos \alpha & 0 & -\cos \alpha \\ \cos \alpha & 0 & -\cos \alpha & 0 & -\cos \alpha & 0 & \cos \alpha & 0 \end{pmatrix},$$

где  $\alpha = 15^\circ$ . Пусть среднеквадратичные ошибки определения  $\Omega_i$  равны  $\sigma_v$ , тогда ковариационная матрица кинетического момента представляется в виде

$$\mathbf{K}_\Omega = I^2\sigma_v^2\mathbf{A}\mathbf{A}^\top = I^2\sigma_v^2 \begin{pmatrix} 8\sin^2 \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 4\cos^2 \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 4\cos^2 \alpha \end{pmatrix}.$$

Нетрудно показать, что если направления  $\mathbf{a}_i$  имеют небольшие ошибки  $\sigma_d$ , как в случае с импульсами разгрузок, искомая ковариационная матрица также будет иметь диагональный вид

$$\mathbf{K}_\Omega = I^2\sigma_d^2\mathbf{E} + I^2(\sigma_v^2 - \sigma_d^2)\mathbf{A}\mathbf{A}^\top,$$

что облегчает расчет искомой весовой матрицы

$$\mathbf{P}^{sp} = \mathbf{K}_\Omega^{-1} \cdot (t_2 - t_1)^2. \quad (12)$$

## Определение параметров движения

Рассмотрим движение КА на временном интервале  $(t_n, t_k)$ , в течение которого произошло  $n$  разгрузок двигателей-маховиков

$$(t_1, \Delta\mathbf{v}_1^0), (t_2, \Delta\mathbf{v}_2^0), \dots, (t_n, \Delta\mathbf{v}_n^0), \quad t_i \in (t_n, t_k), i = 1, \dots, n.$$

Действующее на КА световое давление в принятой модели описывается неизвестными параметрами  $\alpha_1, \dots, \alpha_m, \mu_1, \dots, \mu_m$ . На заданном интервале времени проведены траекторные измерения  $\Psi$ , в общем случае включающие в себя измерения дальности, радиальной скорости и угловых положения КА

$$\Psi = \{\mathbf{D}, \dot{\mathbf{D}}, \alpha, \delta\}.$$

Предположим, что на протяжении рассматриваемого временного интервала аппарат  $N$  раз находился в неизменной ориентации вдали от притягивающих тел. Для каждого из таких событий определим временные рамки  $[t_1^j, t_2^j]$  и величины рассогласований  $\boldsymbol{\xi}_j$  согласно (11). В принятой модели движение КА определяется следующим расширенным вектором параметров

$$\mathbf{Q} = \{\mathbf{X}_0(t_0), \alpha_1, \dots, \alpha_m, \mu_1, \dots, \mu_m, \Delta \mathbf{v}_1, \dots, \Delta \mathbf{v}_n\},$$

где  $\mathbf{X}_0(t_0)$  — вектор состояния аппарата на момент  $t_0 \in [t_H, t_K]$ . В качестве вектора состояния будем использовать координаты и скорость КА в инерциальном пространстве,  $\{\alpha_i, \mu_i\}_{i=1}^m$  — коэффициенты светового давления,  $\{\Delta \mathbf{v}_j\}_{j=1}^n$  — мгновенные приращения скорости КА в результате разгрузок.

Используя введенные обозначения, определим функционал

$$\begin{aligned} \Phi = & (\boldsymbol{\Psi}_o - \boldsymbol{\Psi}_c)^\top \mathbf{P} (\boldsymbol{\Psi}_o - \boldsymbol{\Psi}_c) + \sum_{j=1}^N \boldsymbol{\xi}_j^\top \mathbf{P}_j^{sp} \boldsymbol{\xi}_j + \\ & + \sum_{i=1}^n (\Delta \mathbf{v}_i^0 - \Delta \mathbf{v}_i)^\top \mathbf{P}_i (\Delta \mathbf{v}_i^0 - \Delta \mathbf{v}_i), \end{aligned} \quad (13)$$

где

$\boldsymbol{\Psi}_o$  — полученные (измеренные) значения траекторных измерений;

$\boldsymbol{\Psi}_c$  — расчетные значения траекторных измерений, зависящие от движения аппарата  $\boldsymbol{\Psi}_c = \boldsymbol{\Psi}_c(\mathbf{Q})$ ;

$\mathbf{P}$  — весовая матрица траекторных измерений;

$\mathbf{P}_j^{sp}$  — весовые матрицы измерений моментов светового давления;

$\mathbf{P}_i$  — весовые матрицы измерений импульсов разгрузок.

Выражение (13) отличается от функционала, используемого в классическом варианте определения орбиты по траекторным измерениям методом максимального правдоподобия [13], наличием двух дополнительных слагаемых. Каждое из этих слагаемых содержит рассогласования между функциями от измеренных величин, предоставляемых бортом КА, и расчетных значений, зависящих от элементов  $\mathbf{Q}$ . В этом смысле отделение их от траекторных измерений является условным. Весовые матрицы  $\mathbf{P}_i$  и  $\mathbf{P}_j^{sp}$ , входящие в (13), рассчитываются согласно (8) и (12).

Будем искать такие параметры движения  $\mathbf{Q}$ , которые доставляют максимум функции правдоподобия  $\mathcal{L}(\boldsymbol{\Psi}|\mathbf{Q}) = P(\mathbf{Q}|\boldsymbol{\Psi})$  [14; 15]. Что эквивалентно

$$\mathbf{Q} = \arg \min \Phi(\mathbf{Q}),$$



в том случае, если невязки из (13) распределены по стандартному нормальному закону с ковариационными матрицами, равными обращенным весовым матрицам из того же выражения. Для поиска минимума функционала ищутся его стационарные точки. Поиск можно проводить, к примеру, методом обобщенных касательных Ньютона от начального приближения, полученного при помощи более простых моделей. Для этого необходимо знать частные производные входящих в функционал (13) слагаемых по уточняемым параметрам  $\mathbf{Q}$ . Отметим лишь, что для поиска частных производных по импульсам разгрузок  $\Delta \mathbf{v}_i$  нет необходимости в интегрировании дополнительных уравнений в вариациях [15], а частные производные расчетного значения момента светового давления по параметрам светового давления получаются непосредственно из выражения (7).

## Результаты уточнения орбиты КА «Спектр-Р»

Для оценки эффективности описанной методики применим ее для реконструкции движения КА «Спектр-Р». Рассмотрим два временных интервала в 2013-м году: с 20 февраля по 10 апреля и с 10 апреля по 30 мая. Описанную выше модель движения, включающую модель светового давления, зависящую от трех уточняемых параметров  $\alpha_1$ ,  $\mu_1$  и  $\alpha_2$ , и уточняемые импульсы разгрузок маховиков, будем использовать в качестве основной модели для реконструкции орбиты КА на выбранных временных интервалах. Для оценки того, каким образом учет функциональных и конструктивных особенностей КА в модели движения влияет на качество полученной орбиты, рассмотрим три дополнительные модели.

Первая модель движения наиболее простая. Она учитывает все внешние возмущения пассивного движения, описанные выше, кроме светового давления, которое в этом случае описывается простой моделью (см., например [20]), справедливой для равномерно окрашенной сферы. Использовалась следующая реализация простой модели ускорения от светового давления:

$$\mathbf{f}_{sp} = -\varkappa \frac{\mu_C}{|\mathbf{R}_C - \mathbf{r}|^3} (\mathbf{R}_C - \mathbf{r}),$$

где  $\mu_C$  — гравитационный параметр Солнца,  $\mathbf{R}_C$  — радиус-вектор Солнца,  $\mathbf{r}$  — радиус-вектор аппарата. Световое давление при этом зависит от ориентации аппарата и характеризуется одним неизвестным коэффициентом  $\varkappa$ , который вносится в число уточняемых параметров.

Во второй модели учитываются разгрузки двигателей-маховиков, а на пассивных участках между разгрузок движение рассчитывается по простой модели. Световое давление также описывается одним коэффициентом, который уточняется. Импульсы разгрузок имеют фиксированные значения, совпадающие с измеренными, полученными из телеметрии.

Таблица 2. Безразмерные СКО траекторных измерений, полученные в результате уточнения орбиты КА «Спектр-Р» на интервалах 20.02.2013–10.04.2013 ( $\sigma_1$ ) и 10.04.2013–30.05.2013 ( $\sigma_2$ ). Рассогласование полученных решений в момент времени 10.04.13 00:00:00 UT по положению ( $\Delta r$ ) и по скорости ( $\Delta v$ ).

№	Световое давление	Разгрузки	$\sigma_1$	$\sigma_2$	$\Delta r$ , км	$\Delta v$ , мм/с
1	Упрощенное, $\kappa$	Не учитываются	12.436	9.185	71.71	288.1
2	Упрощенное, $\kappa$	Учитываются	4.729	6.788	36.76	113.3
3	Сложное, $\alpha_1, \mu_1, \alpha_2$	Учитываются	1.208	0.637	7.57	8.9
4	Сложное, $\alpha_1, \mu_1, \alpha_2$	Уточняются	0.362	0.316	0.21	2.3

Третья модель, также как и вторая, использует измеренные значения импульсов разгрузок, не уточняя их. Но при этом в модели движения световое давление описывается моделью с тремя коэффициентами  $\alpha_1$ ,  $\mu_1$  и  $\alpha_2$ , которые уточняются наряду с начальным вектором состояния.

Четвертая модель — основная, она включает сложное световое давление и нефиксированные значения импульсов разгрузок двигателей-маховиков.

При уточнении ошибка измерения дальности полагалась равной 100 м, ошибка запросных измерений радиальной скорости была установлена на уровне 10 мм/с, беззапросных измерений — 5 мм/с. Предполагалось, что ошибки оптических измерений прямого восхождения и склонения равны одной угловой секунде и не имеют между собой корреляции. Результаты согласования траекторных измерений приведены в таблице 2. Как видно из таблицы, постепенное улучшение модели движения приводит к улучшению согласования измерений; учет сложного светового давления и уточнение импульсов разгрузок улучшает согласование измерений в 29–34 раза на выбранных интервалах уточнения. Рассогласования измеренных и расчетных величин траекторных измерений и импульсов разгрузок, полученные с использованием сложной модели светового давления и уточнением импульсов разгрузок, приведены на рисунках 7 и 8.

Решения, полученные на разных интервалах при помощи одной и той же модели и методики уточнения, сравнивались в промежуточной точке для дополнительной проверки точности. Результаты сравнения приведены в двух последних столбцах таблицы 2.

Для каждого из способов уточнения полученные на двух интервалах параметры светового давления согласуются между собой. В случае использования сложной модели светового давления и уточнения импульсов разгрузок коэффициенты светового давления уточнились в следующих интервалах:  $\alpha_1 = 0.86 - 0.87$ ,  $\mu_1 = 0.08 - 0.13$ ,  $\alpha_2 = 0.07 - 0.09$ , что хорошо соотносится со свойствами материалов поверхностей, которым соответствуют эти коэффици-

енты. Результаты согласования траекторных измерений и решений, полученных на соседних интервалах, подтверждают эффективность предложенной модели светового давления и методики определения параметров движения.

## Прогнозирование движения КА

Вопрос прогнозирования движения очень важен. Для околоземные аппаратов вроде «Спектра-Р» существенное отличие прогнозного движения от реального может повлиять на расчетные зоны видимости КА и планируемые научные эксперименты. Более важное значение точность прогноза движения имеет для аппаратов, чей запуск запланирован в окрестность лагранжевой точки  $L_2$  системы Солнце–Земля, поскольку от нее зависит план коррекций, необходимых для удержания КА на заданной траектории, расход топлива и общее время активного существования аппарата.

Выше было показано, что наибольшую неопределенность в динамическую модель рассматриваемых КА приносят световое давление и разгрузки двигателей-маховиков. Эти возмущения взаимосвязаны: световое давление создает не только ускорение центра масс КА, но также является основным источников возмущающего момента, от которого зависят параметры разгрузок.

Для учета этих возмущений при прогнозировании движения необходимо знать будущую ориентацию КА, поскольку от нее зависят сила и момент светового давления. При описании моделирования будущих возмущений будем полагать, что ориентация КА известна на всем интервале прогнозирования. Подобное предположение правомерно, т.к. рассматриваемая платформа не предусматривает незапланированные изменения ориентации в штатном режиме полета, а аппараты, имеющие ее в качестве основы, являются космическими обсерваториями, чьи наблюдения и, соответственно, ориентация должны планироваться заранее.

Со знанием будущей ориентации и набора коэффициентов  $(\alpha_i, \mu_i)$ , полученных в результате уточнения орбиты, мы можем рассчитывать соответствующее ускорение (6) в уравнении движения центра масс. Кинетический момент, накапливаемый двигателями-маховиками, в общем случае можно выразить при помощи уравнения Эйлера:

$$\dot{\mathbf{K}} = \mathbf{M} - \mathcal{J}\dot{\boldsymbol{\omega}} - \boldsymbol{\omega} \times \mathcal{J}\boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{K}, \quad (14)$$

где

$$\mathbf{K} \text{ — кинетический момент двигателей-маховиков, } \mathbf{K} = \sum_{i=1}^N \mathbf{a}_i I_i \Omega_i;$$

$\mathbf{M}$  — момент внешних сил;

$\mathcal{J}$  — тензор инерции КА в связанной СК;

$\boldsymbol{\omega}$  — абсолютная угловая скорость КА в проекциях на оси связанной СК.

Поскольку программа ориентации аппарата известна, кинетический момент маховиков может быть получен интегрированием (14) от момента последнего измерения скорости маховиков. Наиболее простой вид уравнения накопления кинетического момента маховиками принимает в случае, если аппарат поддерживает текущую ориентацию в абсолютном пространстве и  $\boldsymbol{\omega} \equiv 0$ . В таком случае кинетический момент маховиков будет накапливаться линейно на протяжении интервала постоянной ориентации. Информация о том, как должен изменяться кинетический момент маховиков, может быть использована для предсказания времени проведения разгрузок и величин, полученных в результате приращений скорости КА.

## Учет будущих возмущений от разгрузок ДМ

Решение о проведении разгрузки двигателей-маховиков не принимается произвольно, а подчиняется ряду правил. К ним очевидно относится такое, которое требует разгрузки, если  $\mathbf{K} \notin U$ , где  $U$  — некоторая известная область допустимых значений кинетического момента ДМ. Такая область может быть задана, например, ограничением на скорости вращения двигателей-маховиков. В реальности моменты проведения разгрузок зависят от множества других факторов, например, от программы переориентации КА, требующей наличия запаса изменения кин. момента ДМ, и распределения технологического времени, свободного от научных наблюдений.

Предположим, что принято решение о проведении разгрузки маховиков в момент времени  $t_p$ . К этому времени маховиками будет накоплен кинетический момент  $\mathbf{K}(t_p) = \mathbf{K}_p$ . Будем считать, что целью проведения разгрузки является уменьшение кинетического момента ДМ до нуля. Система стабилизации КА имеет  $m \geq 3$  реактивных двигателей, чьи центры истечения имеют координаты  $\{\mathbf{r}_i\}_{i=1}^m$  в связанной системе координат, центр которой совпадает с центром масс аппарата. Направления истечения ДС описываются направляющими косинусами  $\{\mathbf{e}_i\}_{i=1}^m$ . Учитывая, что разгрузка производится при сохранении ориентации КА в пространстве, запишем изменение кинетического момента КА вместе с топливом от момента  $t_p$  до момента завершения работы двигателей  $t_p + \delta t$  в осях неподвижной системы, которые в момент  $t_p$  совпадают с осями связанной системы

$$\mathbf{K}_a(t_p + \delta t) + \mathbf{K}(t_p + \delta t) + \sum_{i=1}^m \mathbf{r}_i \times \mathbf{e}_i p_i - \mathbf{K}_a(t) - \mathbf{K}(t_p) = \mathbf{M}\delta t, \quad (15)$$

где  $p_i$  — величина импульса топлива, отработанная  $i$ -м ДС,  $\mathbf{K}_a(t)$  — момент количества движения КА с неподвижными маховиками,  $\mathbf{M}$  — момент внешних сил. Поскольку ориентация КА сохраняется во время разгрузки, длительность  $\delta t$  и возмущающие моменты малы, а конечный кинетический момент маховиков принят равным нулю, выражение (15) можно преобразовать к виду

$$\mathbf{C}\mathbf{p} = \mathbf{K}_p, \quad (16)$$

где  $\mathbf{C} = (\mathbf{r}_1 \times \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{r}_m \times \mathbf{e}_m)$ ,  $\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_m)^\top$ . Дополним полученное равенство очевидными ограничениями

$$p_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, m \quad (17)$$

Будем искать оценку  $\mathbf{p}$ , удовлетворяющую (16) и (17) и доставляющую минимум форме

$$\sum_{i=1}^m p_i \rightarrow \min. \quad (18)$$

Ограничения (16), (17) и условие минимума (18) соответствуют канонической форме задачи линейного программирования, а искомая оценка  $\mathbf{p}$  может быть найдена одним из множества разработанных алгоритмов (см., например [23]). Полученный в результате решения оптимальный вектор обозначим  $\mathbf{p}^*$ . Работа двигателей с найденными импульсами  $\mathbf{p}^*$  соответствует реализации разгрузки с минимальными затратами топлива.

Приращение скорости КА в результате подобной оптимальной разгрузки обозначим следующим образом:

$$\Delta \mathbf{v}_{\text{опт}} = -\frac{1}{M} \sum_{i=1}^m \mathbf{e}_i p_i,$$

где  $M$  — текущая масса КА. Оценку реального импульса разгрузки будем искать в виде функции  $\Delta \mathbf{v}(\Delta \mathbf{v}_{\text{опт}})$ . При отсутствии информации о фактических разгрузках используется тождественная функция.

На примере фактических разгрузок КА «Спектр-Р» осуществим поиск линейной зависимости между импульсом оптимального включения и фактическим импульсом разгрузки. Поскольку тяга ДС, силовым образом изменяющих кинетический момент КА, направлена в одну сторону, то направления оптимального и фактического импульса разгрузки будут совпадать. Линейная связь между величинами импульсов разгрузок описывается выражением  $\Delta v = a\Delta v_{\text{опт}} + b$ . Для поиска неизвестных параметров  $a$  и  $b$  рассмотрим

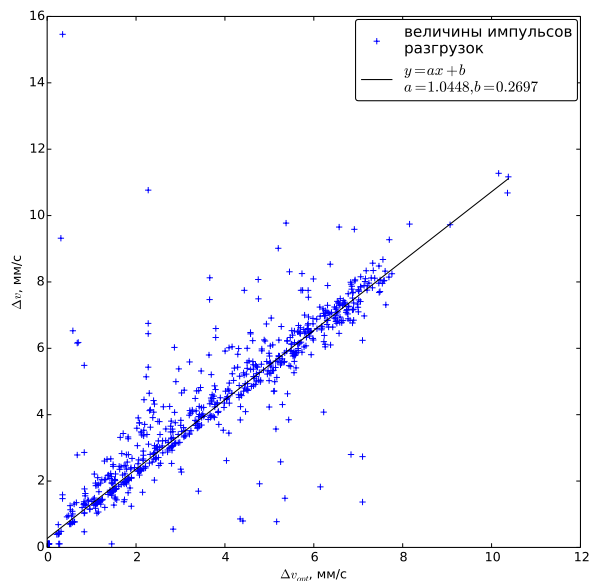


Рис. 3. Соотношение величин импульсов оптимальных и фактических разгрузок 08.2011–09.2013

разгрузки КА «Спектр-Р» с июля 2011 по сентябрь 2013 года. В качестве фактических  $\Delta v$  будем использовать телеметрические данные о включениях ДС. По данным о скоростях вращения маховиков восстановим изменения кинетического момента маховиков в результате разгрузок и вычислим приращения скорости при оптимальном включении двигателей  $\Delta v_{\text{опт}}(\Delta \mathbf{K})$ . Зависимость  $\Delta v$  от  $\Delta v_{\text{опт}}$  приведена на рисунке 3. После отсева выбросных точек и проведения регрессии были получены следующие значения коэффициентов:  $a = 1.0448$ ,  $b = 0.2697$  мм/с.

## Результаты прогнозирования движения КА «Спектр-Р»

Воспользуемся предложенной методикой учета возмущений от разгрузок ДМ для прогнозирования движения КА «Спектр-Р». Для этого вернемся к двум временным интервалам, рассмотренным в разделе уточнения орбиты КА. В качестве интервала прогнозирования выберем второй временной интервал  $(t_{\text{н}}, t_{\text{к}})$ , имеющий границы  $t_{\text{н}} = 2013-04-10 00:00:00$  UT и  $t_{\text{к}} = 2013-05-30 00:00:00$  UT. Будем считать, что движение КА, полученное в ходе уточнения на этом интервале при помощи четвертой, наиболее сложной, модели, является истинным движением. Прогнозное движение будем рассчитывать от вектора состояния КА и параметров светового давления, уточненных на первом временном интервале с 20.02.2013 по 10.04.2013.

Для сравнения рассмотрим несколько вариантов расчета прогноза движения. Первый расчет строится с использованием простой пассивной модели движения. Интегрирование уравнений движения ведется от соответствующих начальных условий, полученных для этой модели в разделе уточнения

параметров движения КА «Спектр-Р». Три других расчета базируются на более сложной модели движения, которая включает сложную модель светового давления, зависящую от трех параметров, и учитывает возмущения от разгрузок ДМ. Каждому из этих трех вариантов соответствует различный набор смоделированных разгрузок. В одном из вариантов разгрузка производится, если смоделированный кин. момент ДМ выходит за границы заданного множества, ограничивающего скорости вращения двигателей-маховиков величиной 3000 об/мин. Разгрузки смоделированные таким образом будем называть «вынужденными». В другом варианте разгрузки производятся ежедневно в 08:30 МДВ — назовем их «регулярными». Предпосылкой к такому выбору времени стал анализ проведенных разгрузок КА «Спектр-Р», показавший, что существенная доля всех разгрузок приходится на интервал времени между 08:00 и 09:00 МДВ. Последний вариант расчета предполагает приложение фактических импульсов разгрузок ДМ для иллюстрации важности более точного учета разгрузок при прогнозе движения КА.

Моделирование «вынужденных» и «регулярных» разгрузок проводилось с использованием расчетного значения накапливаемого ДМ кинетического момента  $\mathbf{K}(t)$ , рассчитанного в неподвижных осях. Момент сил светового давления рассчитывался с использованием значений коэффициентов  $\alpha_1$ ,  $\mu_1$  и  $\alpha_2$ , полученных на интервале уточнения орбиты, т.е. на первом интервале. Накопленный кинетический момент между двумя разгрузками ДМ переводился в импульс разгрузки. Известная ориентация КА в момент проведения разгрузки определяет направление импульса, а также положение вектора накопленного кинетического момента в связанной СК. Расчет величины импульса производился по описанному выше алгоритму.

На рисунке 4 синей линией показано изменение величины кинетического момента маховиков  $\mathbf{K}(t)$  на рассматриваемом интервале прогнозирования в отсутствие разгрузок, полученное из ориентации КА и моделей момента сил светового давления и гравитационного момента. Черной линией на том же рисунке показано, как накапливался кин. момент маховиков согласно данным телеметрии. Как видно из графика, прогнозное изменение кин. момента близко к фактическому. Красными и желтыми полосками на рисунке 4 показаны времена проведения и соответствующие величины «вынужденных» и «регулярных» разгрузок маховиков, смоделированных при помощи прогноза  $\mathbf{K}(t)$ .

Сравним четыре прогнозных движения КА «Спектр-Р» на интервале 10.04.2013 – 30.05.2013 с фактическим движением на этом же интервале, полученным в ходе уточнения орбиты. Максимальные отклонения прогнозных положений КА от фактического в проекциях на тангенциальное, нормальное и бинормальное направление приведены в таблице 3. Основная часть ошибки прогноза сосредоточена в продольном направлении. Изменение продольной

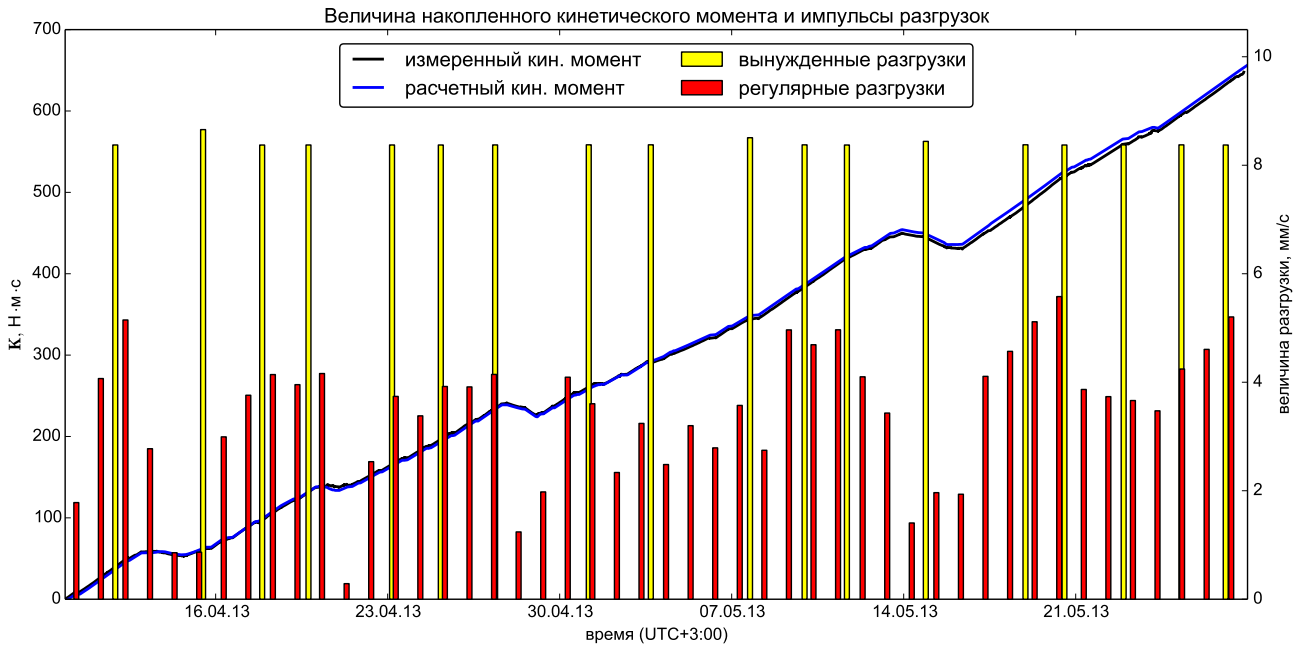


Рис. 4. График предсказанного накопления кин. момента маховиков и двух вариантов прогноза импульсов разгрузок

Таблица 3. Величина максимального отклонения прогноза от фактического движения по положению

№	Разгрузки	$\Delta R_t$ , км.	$\Delta R_n$ , км.	$\Delta R_b$ , км.
1	не учитываются	382.858	34.654	49.543
2	«вынужденные» (прогноз)	92.367	6.526	6.112
3	«регулярные» (прогноз)	51.264	6.251	6.772
4	фактические	3.514	0.876	1.131

ошибки со временем показано на рисунках 5 и 6. Максимальные отклонения наблюдаются при прохождении перицентров, что свидетельствует о временной природе ошибки. С каждым витком продольная ошибка прогноза по простой модели увеличивается, достигая 380 км на последнем витке. При прогнозировании с использованием более сложной модели, учитывающей будущую ориентацию КА и разгрузки ДМ, наблюдаются гораздо меньшие отклонения от фактического движения. При этом изменение ошибки носит неравномерный характер, поскольку связано с тем, насколько хорошо прогнозные разгрузки описывают возмущения от реальных разгрузок.

Отметим, что прогнозы с «вынужденными» и «регулярными» разгрузками являются реальными прогнозами движения, поскольку в них моделируются возмущения от разгрузок на основании прогноза о накоплении кин. момента маховиков. В то же время прогнозное движение с возмущениями от фактических разгрузок, полученных из телеметрии и очевидно недоступных при составлении реального прогноза, показывает, какой точности можно до-



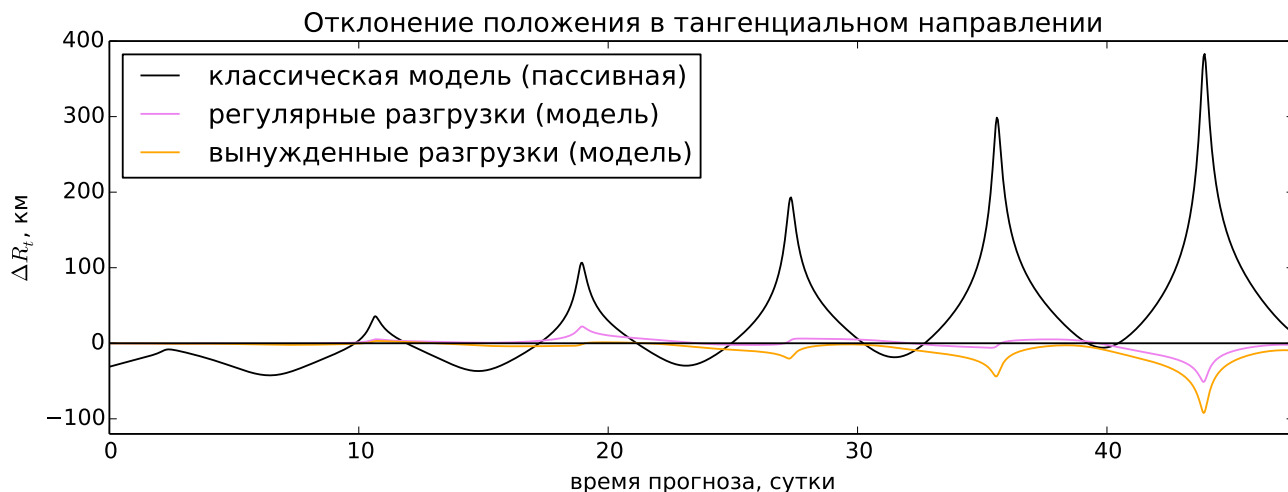


Рис. 5. Изменение продольной ошибки прогноза положения КА со временем (мелкий масштаб)

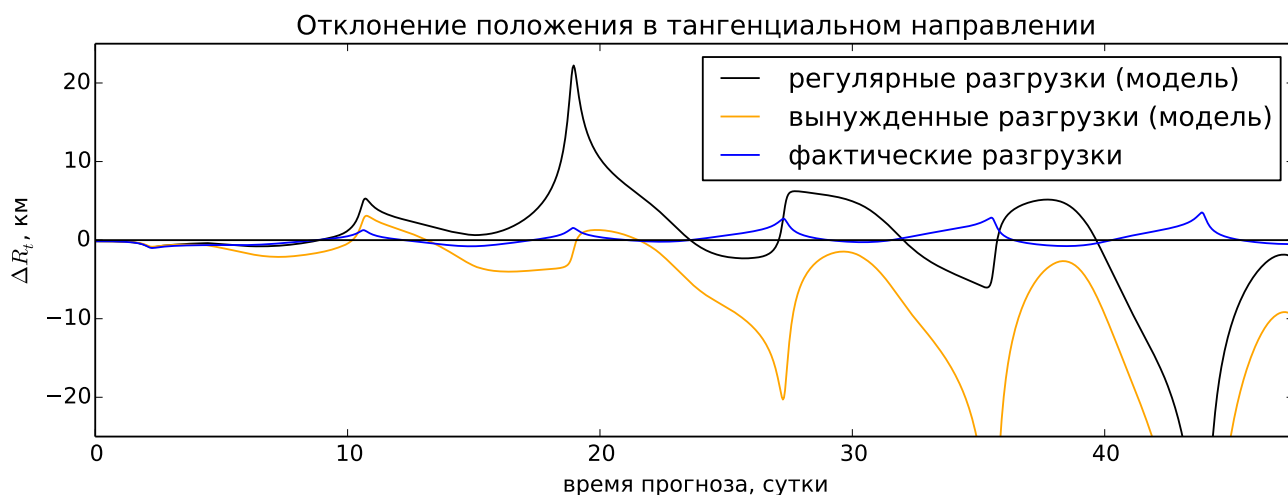


Рис. 6. Изменение продольной ошибки прогноза положения КА со временем (крупный масштаб)

биться, если свести к минимуму неопределенность предсказания импульсов разгрузок.

Предложенный способ прогноза движения на основе «регулярных» разгрузок позволил сократить максимальную ошибку в предсказании положения в 7.5 раз по сравнению с простой пассивной моделью движения. Большой разброс в отклонениях прогнозного движения сложной модели говорит о том, что способ предсказания разгрузок маховиков существенным образом влияет на точность прогнозного движения.

## Заключение

На основе разработанной модели силы и момента светового давления, учитывающей форму и характеристики поверхности КА, была решена задача определения орбиты КА «Спектр-Р» и навигационной привязки научных измерений с ошибками в 20–30 раз меньшими, чем при использовании стандартных моделей. Примененный метод использует как внешнетраекторные, так и бортовые измерения.

Учет ориентации КА и предстоящих разгрузок ДМ на интервале прогнозирования позволяет существенно повысить точность прогноза движения аппарата. В приведенном в качестве примера случае ошибка прогнозирования положения КА «Спектр-Р» на 50 суток вперед уменьшилась в 7 раз (с 387 км до 52 км).

Изложенные результаты также видятся полезными для решения навигационных задач перспективных научных КА, базирующихся на платформе «Навигатор» и обладающих схожими особенностями движения.

## Библиографический список

1. *Arias E. F., Charlot P., Feissel M., Lestrade J.-F.* The extragalactic reference system of the International Earth Rotation Service, ICRS. // *Astronomy and Astrophysics*. — 1995. — Ноябрь. — Т. 303. — С. 604–608.
2. *Berthias J.-P., Broca P., Ferrier C., Gratton S.* JASON-1: a New Reference for Precise Orbit Determination // IAF abstracts, 34th COSPAR Scientific Assembly. — 2002.
3. *Eanes R. J., Schutz B., Tapley B.* Earth and ocean tide effects on Lageos and Starlette // *Earth and ocean tide effects on Lageos and Starlette* / под ред. J. Т. Куо. — E. Sckweizerbart'sche Verlagabuchhandlung, окт. 1983. — С. 239–250.
4. *Fliegel H. F., Gallini T. E., Swift E. R.* Global Positioning System Radiation Force Model for geodetic applications // *J. Geophys. Res.* — 1992. — Янв. — Т. 97, В1. — С. 559–568. — DOI: 10.1029/91JB02564.
5. *Folkner W. M., Williams J. G., Boggs D. H.* The Planetary and Lunar Ephemeris DE 421 // *Interplanetary Network Progress Report*. — 2009. — Август. — Т. C1. — С. 42–178.
6. *Knocke P. C., Ries J. C., Tapley B. D.* Earth radiation pressure effects on satellites. — American Institute of Aeronautics, Astronautics, 1988.
7. *Kubo-oka T., Sengoku A.* Solar radiation pressure model for the relay satellite of SELENE // *Earth Planets and Space*. — 1999. — Т. 51, № 9. — С. 979–986.
8. *Lemoine F. G., Kenyon S. C., Factor J. K., Trimmer R. G.* [и др.] The Development of the Joint NASA GSFC and the National Imagery and Mapping Agency (NIMA) Geopotential Model EGM96 // *NASA*. — 1998. — Т. 1, № 07. — С. 575.
9. *Marshall J. A., Luthcke S.* Modeling radiation forces acting on Topex/Poseidon for precision orbit determination // *Journal of Spacecraft and Rockets*. — 1994. — Т. 31. — С. 99–105. — ISSN 0022-4650. — DOI: 10.2514/3.26408.

10. *Petit G., Luzum B.* IERS Conventions (2010): тех. отч. ; Verlag des Bundesamts für Kartographie und Geodäsie. — 2010. — С. 179. — IERS Technical Note ; 36.
11. *Rodriguez-Solano C. J., Hugentobler U., Steigenberger P.* Adjustable box-wing model for solar radiation pressure impacting GPS satellites // *Advances in Space Research.* — 2012. — Апр. — Т. 49, № 7. — С. 1113—1128. — ISSN 0273-1177. — DOI: 10.1016/j.asr.2012.01.016.
12. *Sanchez B. V.* Rotational dynamics of mathematical models of the nonrigid earth: дис. ... канд. / Sanchez B. V. — Texas Univ., Austin., дек. 1975.
13. *Аким Э. Л., Энеев Т. М.* Определение параметров движения космического летательного аппарата по данным траекторных измерений // *Космические исследования.* — 1963. — Т. 1, № 1. — С. 5—50.
14. *Боровин Г. К., Захваткин М. В., Степаньянц В. А., Тучин А. Г.* [и др.] Идентификация маневров, выполненных двигателями малой тяги космического аппарата // *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки.* — 2012. — Спец. выпуск № 3 «Математическое моделирование». — С. 27—36.
15. *Боровин Г. К., Захваткин М. В., Степаньянц В. А., Тучин А. Г.* [и др.] Определение параметров орбиты и маневра космического аппарата при заданном времени приложения импульса // *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки.* — 2012. — Спец. выпуск № 4 «Математическое моделирование». — С. 76—86.
16. *Заславский Г. С., Захваткин М. В., Ильин И. С., Корянов В. В.* [и др.] Баллистико-навигационное обеспечение полета КА "Спектр-Р" // *Космонавтика и ракетостроение.* — 2014. — Т. 74, № 1. — С. 15—29.
17. *Кардашев Н. С., Хартов В. В., ..., Захваткин М. В.* [и др.] Космическая миссия «Радиоастрон». Первые результаты // *Вестник НПО им. С.А.Лавочкина.* — 2012. — Т. 3, № 14. — С. 4—21. — ISSN 2075-6941.
18. *Кардашев Н. С., Хартов В. В., ..., Захваткин М. В.* [и др.] «Радиоастрон» – телескоп размером 300 000 км: основные параметры и первые результаты наблюдений // *Астрономический Журнал.* — 2013. — Т. 90, № 3. — С. 179—222. — DOI: 10.7868/S000462991303002X.
19. *Комаров М. М., Сазонов В. В., Климович Д. Н.* Расчет сил и моментов светового давления, действующих на роторный солнечный парус // *Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша РАН.* — 1995. — № 59. — С. 18.
20. *Справочное руководство по небесной механике и астродинамике / под ред. Г. Н. Дубошин.* — Наука, 1976. — С. 864.

21. *Тучин А. Г., Комовкин С. В., Лавренов С. М., Тучин Д. А., Ярошевский В. С.* Небесно-механическая интерпретация радиотехнических измерений наклонной дальности и радиальной скорости // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша РАН. — 2013. — № 66. — С. 30. — URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2013-66>.
22. *Федорова Р. С.* Атмосфера Земли верхняя. Модель плотности для баллистического обеспечения полетов искусственных спутников Земли: тех. отч. ; 4 ЦНИИ Минобороны России. — 2004. — ГОСТ Р 25645.166-2004.
23. *Юдин Д. Б., Гольштейн Е. Г.* Линейное программирование (теория, методы и приложения). — Наука, 1969. — С. 424.

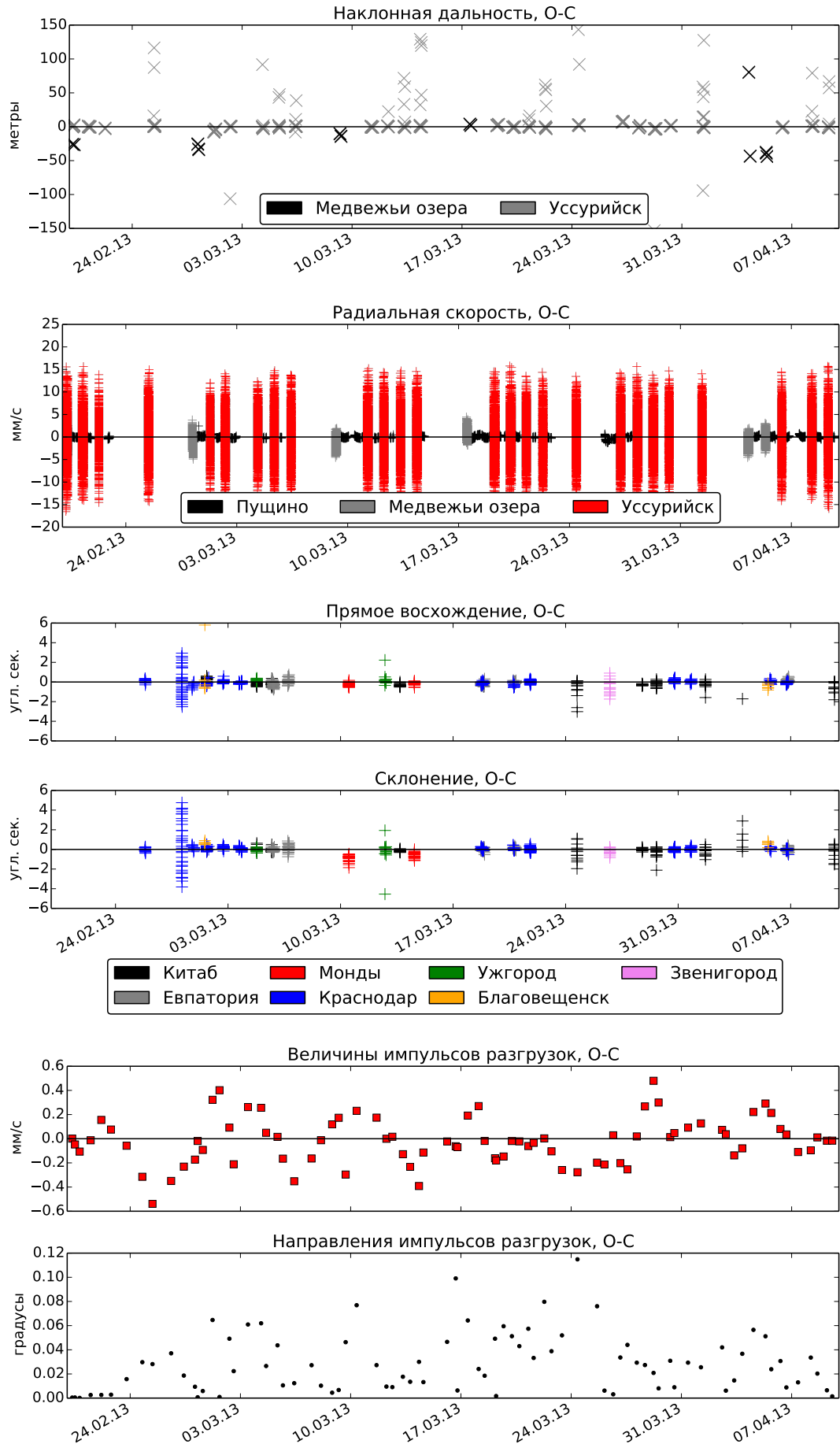


Рис. 7. Рассогласования траекторных измерений КА «Спектр-Р»

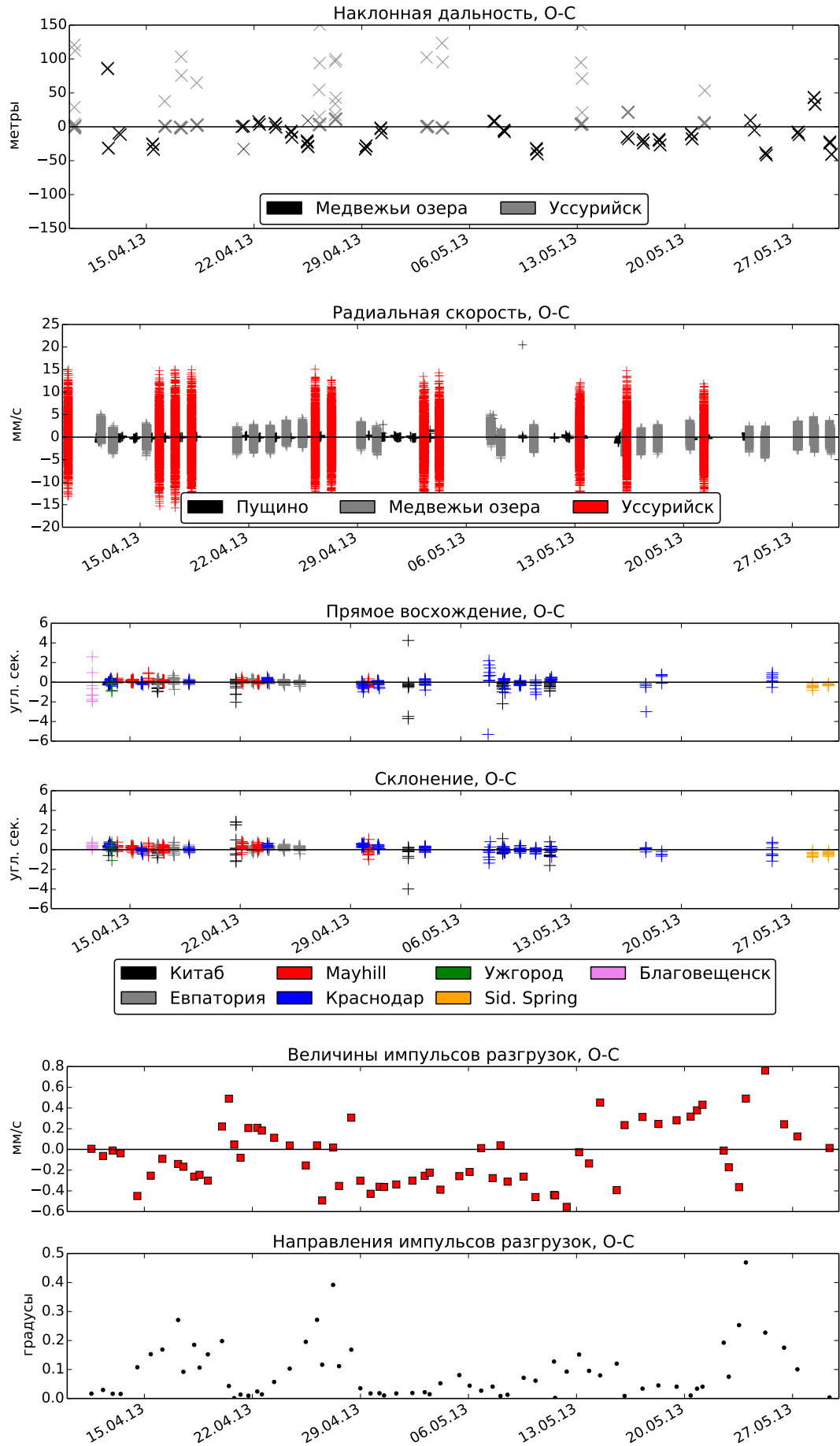


Рис. 8. Рассогласования траекторных измерений КА «Спектр-Р»