ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 46 за 2014 г.

Боровин Г.К., Лапшин В.В., Юрин Е. А.

Нелинейная модель коллинеарного удара с сухим трением

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Боровин Г.К., Лапшин В.В., Юрин Е. А. Нелинейная модель коллинеарного удара с сухим трением // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2014. № 46. 14 с. URL: http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2014-46

О р д е н а   Л е н и н а
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М.В.Келдыша
Р о с с и й с к о й   а к а д е м и и   н а у к

Г.К.Боровин, В.В.Лапшин, Е.А.Юрин

Нелинейная модель коллинеарного удара с сухим трением

Москва, 2014 г.

Боровин Г.К., Лапшин В.В., Юрин Е.А. Нелинейная модель коллинеарного удара с сухим трением

Рассмотрена нелинейная упругопластическая модель коллинеарного удара тела о неподвижное препятствие, построенная на основе моделей удара Герца и Ханта-Кроссли. Получены первые интегралы уравнений движения в фазах деформации и восстановления. Определены коэффициент восстановления и потерянная при ударе кинетическая энергия и их зависимость от постоянной сухого трения. Получено решение уравнения движения тела в процессе удара в квадратурах. Приведены результаты математического моделирования.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ № 13-01-00655а и гранта Президента РФ № НШ-4748.2012.8 для ведущих научных школ РФ.

Ключевые слова: коллинеарный удар, коэффициент восстановления, нелинейная динамика.

Borovin G.K., Lapshin V.V., Yurin E.A. Nonlinear model of collinear collision taking into account dry friction

A nonlinear elastoplastic model of collinear body collision with a fixed obstacle is investigated. This model is constructed on the basis of Hertz and Hunt-Crossley. The first integrals of the motion equations during the phases of deformation and restitution are obtained. The coefficient of restitution and loss of the kinetic energy during the collision and their dependence on a constant dry friction are determined. The solution of body motion equations during collision in quadratures is obtained. The results of mathematical modeling are presented.

This work was supported by RFBR grant № 13-01-00655a and Russian President grant № НШ-4748.2012.8 for leading scientific schools.

Key words: collinear collision, coefficient of restitution, nonlinear dynamics.

1. Введение

В работе рассматривается наиболее простой случай задачи об ударе тела о неподвижную поверхность (препятствие) в предположении, что до и после удара тело движется поступательно вдоль одной и той же оси. Форма тела и препятствия может быть различной, но при этом ударные силы их взаимодействия сводятся к равнодействующей, направленной вдоль этой оси, и линия действия равнодействующей проходит через центр масс тела. Предполагается, что ударные силы взаимодействия существенно больше остальных сил и действием последних можно пренебречь [1-10]. Задача о коллинеарном соударении двух тел решается аналогично [1, 3].

Коэффициентом восстановления при ударе называется отношение модулей скоростей тела после удара V^+ и до удара V^- [1-9]

$$k = \left| \frac{V^+}{V^-} \right| = -\frac{V^+}{V^-} \quad . \tag{1}$$

Наиболее точная модель удара связана с исследованием динамики движения вязко-упруго-пластичных деформируемых тел [1-3], она сложна и требует большого объема численных расчетов [1-3].

Модель удара Ньютона (стереомеханический удар) [1-3] основана на предположении, что время удара бесконечно мало и перемещением тела в процессе удара можно пренебречь. Ньютон сделал предположение, что коэффициент восстановления определяется материалом, из которого изготовлены тела, и не зависит от скорости соударения. Он разбил процесс удара на две фазы. В фазе деформации скорость тела уменьшается до нуля и накапливается энергия упругих деформаций. В фазе восстановления накопленная потенциальная энергия освобождается и тело разгоняется в противоположном направлении.

Пуассон ввел другое определение коэффициента восстановления как отношения импульсов ударной силы взаимодействия в фазах восстановления и деформации. В рассматриваемой задаче эти два определения эквивалентны. В более сложных случаях, например, при косом ударе тела о неподвижное препятствие (движение тела до удара и после удара произвольное), эти определения не эквивалентны, и следует использовать определение Пуассона [1-3, 7].

Модель удара Ньютона не позволяет определить многие важные параметры удара, его продолжительность, максимальную величину силы взаимодействия тел, их деформацию и т.д.

Широкое распространение получила линейная вязкоупругая модель удара Кельвина-Фойхта [1-3], в которой предполагается, что контактная сила взаимодействия тел при ударе сводится к линейной силе упругости и линейной силе сопротивления

$$F = F(x, \dot{x}) = -cx - \mu\dot{x} \quad ,$$

где c и μ – постоянные коэффициенты упругости и сопротивления, x – деформация тела и препятствия при ударе. В процессе удара $x \geq 0$. Уравнение движения тела при ударе является линейным дифференциальным уравнением с постоянными коэффициентами и имеет аналитическое решение. Коэффициент восстановления при ударе при этом постоянный. Модель противоречит естественным физическим представлениям. Сила взаимодействия тел в начале и конце удара равна силе сопротивления и отлична от нуля. Если в процессе деформации меняется пятно контакта, то представляется неестественным предположение о линейной зависимости упругой силы взаимодействия и силы сопротивления от деформации.

Потерянная при ударе кинетическая энергия

$$\Delta T = \frac{m(V^-)^2}{2} - \frac{m(V^+)^2}{2} = \frac{m(V^-)^2}{2}(1-k^2) \qquad (2)$$

при постоянном значении коэффициента восстановления пропорциональна квадрату скорости соударения V^-.

Экспериментальные данные, приведенные в монографии Гольдсмита [1] и в [10], опровергают этот результат и показывают, что с ростом скорости соударения тел коэффициент восстановления монотонно убывает.

В волновой теории удара [1-3] тела являются упругими и нет остаточной деформации тел. Потеря энергии при ударе обусловлена возникающими при ударе упругими звуковыми волнами распространения деформации. Скорость распространения этих волн равна скорости звука и зависит от свойств материала. В инженерной практике волновая теория используется для расчета удара стержней о препятствие.

Если время прохождения упругих волн через все тело меньше продолжительности удара и происходит несколько отражений волн за время удара, то влиянием упругих волн можно пренебречь [1-4]. На таких предположениях строится контактная теория удара Герца. Герц [1-5] предположил, что упругая сила контактного взаимодействия тел при ударе зависит от деформации x так же, как и в случае статического равновесия. Он показал, что если тело и препятствие в окрестности точки соприкосновения имеют сферическую поверхность и их деформации малы по сравнению с их радиусами, то с учетом увеличения пятна контакта с ростом деформации x сила упругого взаимодействия равна

$$F(x) = -cx^{\frac{3}{2}} \quad ,$$

где c – константа, значение которой определяется радиусами этих сферических поверхностей и материалом, из которого изготовлены тела. Герц [4-5] рассмотрел абсолютно упругий удар. Уравнение движение тела при этом имеет интеграл энергии и интегрируется в квадратурах, т.е. его решение сводится к вычислению определенного интеграла. Результаты Герца хорошо согласуются с экспериментальными данными [1].

Хант и Кроссли [6] обобщили модель удара Герца, ввели в нее силу вязкого трения между частицами соударяющихся тел. В силу того, что при увеличении пятна контакта увеличивается количество частиц, трущихся друг о друга, они предположили, что сила вязкого трения растет пропорционально упругой силе взаимодействия тел. Тогда контактная сила взаимодействия тела и препятствия определяется соотношением

$$F = F(x, \dot{x}) = -cx^n - bcx^n \dot{x} \quad ,$$

где c – коэффициент упругости, b – постоянная сопротивления, n – постоянная, которая определяется формой поверхности тела и препятствия в окрестности точки соприкосновения, x – перемещение тела (деформация), причем $x \geq 0$. В частности, для сферической поверхности тел $n = \frac{3}{2}$, для плоской поверхности $n = 1$. В работе [6] показано, что коэффициент восстановления является монотонно убывающей функцией скорости соударения. При малых скоростях соударения V^- коэффициент восстановления линейным образом зависит от V^-

$$k = 1 - \tfrac{2}{3} b V^- \quad .$$

При исследовании этой модели удара Хант и Кроссли проводили численное интегрирование нелинейного уравнения движения тела в процессе удара.

Данная модель является развитием модели Герца на случай, когда тело и препятствие подчиняются законам вязкоупругого деформирования. Модель построена в предположении, что можно пренебречь волновыми процессами, деформации при ударе малы, величиной остаточной деформации также можно пренебречь. Эти предположения обусловливают ограничения на величину скорости соударения, используемые материалы, форму и размеры тела. Рассматриваемая модель справедлива для компактных тел, изготовленных из достаточно жесткого материала, при относительно небольших (до нескольких метров в секунду) скоростях соударения. К недостаткам этой модели удара можно отнести невозможность абсолютно неупругого удара и стремление коэффициента восстановления к единице при стремлении скорости соударения к нулю независимо от материала, из которого изготовлены тела.

Эту модель можно обобщить [8-9], положив

$$F = F(x, \dot{x}) = -f(x) - bf(x)\dot{x} \quad ,$$

где $f(x)$ – упругая сила взаимодействия тел при ударе, причем $f(0) = 0$ и $f(x)$ является возрастающей функцией при $x \geq 0$.

В [8-9] получен первый интеграл уравнений движения тела при ударе. Аналитически построена зависимость коэффициента восстановления и потерянной при ударе кинетической энергии от скорости соударения. Получено решение уравнения движения тела в квадратурах.

В данной статье рассмотрена нелинейная упругопластическая модель коллинеарного удара тела о неподвижное препятствие, построенная на основе моделей удара Герца и Ханта-Кроссли. Предполагается, что трение между частицами деформируемых в процессе удара тел является сухим трением. Получены первые интегралы уравнений движения в фазах деформации и восстановления. Определены коэффициент восстановления и потерянная при ударе кинетическая энергия и их зависимость от постоянной сухого трения. Получено решение уравнения движения тела в квадратурах. Приведены результаты математического моделирования.

В этой модели удара возможен абсолютно неупругий удар. Коэффициент восстановления меньше единицы и не зависит от скорости соударения. Последний результат не согласуется с экспериментальными данными. В связи с этим в дальнейшем предполагается рассмотреть вязко-упруго-пластичную модель удара.

2. Нелинейная упругопластическая модель удара

Рассмотрим модель удара, аналогичную модели Ханта и Кроссли [3, 6, 8, 9], но предположим, что трение между частицами тела, деформируемого при ударе, является сухим. Тогда контактная сила взаимодействия тела и препятствия определяется соотношением

$$F = F(x,\dot{x}) = -f(x) - df(x)\operatorname{sgn}\dot{x} \quad ,$$

где x – перемещение тела в процессе удара (деформация); $f(x)$ – упругая сила взаимодействия тел при ударе; d – постоянная сухого трения.

В процессе удара деформация $x \geq 0$, в начале и в конце удара $x = 0$. Упругая сила взаимодействия тел при ударе равна нулю в начале и конце удара $f(0) = 0$ и является возрастающей функцией деформации x.

В моделях удара Герца и Ханта-Кроссли предполагается, что упругая сила взаимодействия тел при ударе равна $f(x) = cx^n$, где c – коэффициент упругости, n – постоянная, которая определяется формой поверхности тела и препятствия в окрестности точки соприкосновения. В частности, для сферической поверхности тел $n = \frac{3}{2}$, для плоской поверхности $n = 1$.

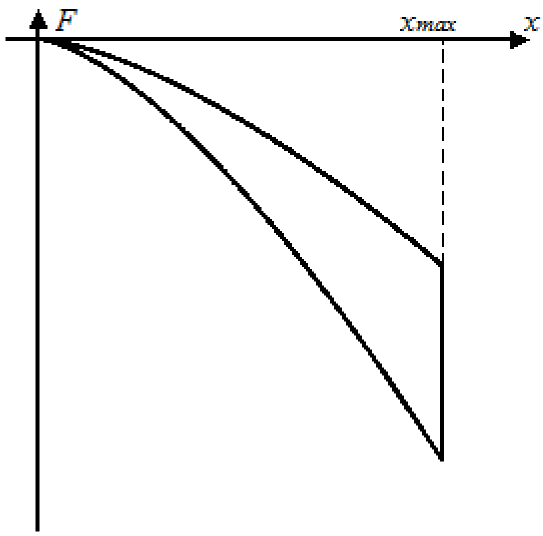

Рис. 1. Зависимость контактной силы от деформации при упругом ударе.

Уравнение движения тела в фазе деформации (при $V = \dot{x} > 0$) имеет вид

$$m\ddot{x} = F(x,\dot{x}) = -f(x)(1+d) \quad , \qquad (3)$$

где m – масса тела.

В конце фазы деформации скорость движения $V=\dot{x}=0$. Если постоянная сухого трения $d\geq 1$, то в конце фазы деформации тело останавливается. Контактная сила взаимодействия равна нулю. Удар является абсолютно неупругим.

Если $d<1$, то удар является упругим и в фазе восстановления (при $V=\dot{x}>0$) уравнение движения имеет вид

$$m\ddot{x}=F(x,\dot{x})=-f(x)(1-d) \quad . \tag{4}$$

Зависимость контактной силы от деформации в случае упругого удара приведена на рис. 1.

Обозначим через $\Pi(x)$ потенциальную энергию упругой деформации

$$\Pi(x)=\int_0^x f(x)dx \quad .$$

В частности, $\Pi(x)=\dfrac{cx^{n+1}}{n+1}$ при $f(x)=cx^n$.

Исключим время t из дифференциальных уравнений движения (3)–(4) с помощью преобразования $\ddot{x}=\dfrac{dV}{dt}=\dfrac{dV}{dx}\dfrac{dx}{dt}=V\dfrac{dV}{dx}$. Разделяя переменные в полученных уравнениях и интегрируя их, получим первые интегралы – интегралы энергии. В фазе деформации

$$V^2=(V^-)^2-\frac{2(1+d)\Pi(x)}{m} \quad , \tag{5}$$

и в фазе восстановления

$$V^2=\frac{2(1-d)(\Pi(x_{\max})-\Pi(x))}{m} \quad , \tag{6}$$

где $x_{\max}$ – максимальное перемещение тела при ударе или значение x конце фазы деформации. Значение $x_{\max}$ определяется как решение уравнения $V(x_{\max})=0$. В результате в силу (5) $x_{\max}$ является решением уравнения

$$\Pi(x_{\max})=\frac{m(V^-)^2}{2(1+d)} \quad . \tag{7}$$

При $f(x)=cx^n$ потенциальная энергия упругой деформации $\Pi(x)=\dfrac{cx^{n+1}}{n+1}$, а решением (13) является

$$x_{\max} = \left[\frac{(n+1)m(V^-)^2}{2c(1+d)} \right]^{\frac{1}{n+1}} \quad .$$

Соотношения (5)–(6) позволяют получить решение уравнений движения (3)–(4) в квадратурах как решение уравнения с разделяющимися переменными $\dot{x} = V(x)$. В фазе деформации

$$\int_0^x \sqrt{\frac{m}{m(V^-)^2 - 2(1+d)\Pi(x)}}\, dx = t \quad ,$$

а в фазе восстановления

$$\int_0^{x_{\max}} \sqrt{\frac{m}{m(V^-)^2 - 2(1+d)\Pi(x)}}\, dx - \int_{x_{\max}}^{x} \sqrt{\frac{m}{2(1-d)\left(\Pi(x_{\max}) - \Pi(x)\right)}}\, dx = t \quad ,$$

где $x_{\max}$ является решением (7).

Эти уравнения определяют в неявном виде закон движения тела при ударе.

3. Коэффициент восстановления и потерянная кинетическая энергия

Из первых интегралов уравнений движения (7)–(8), в силу того, что в начале и конце удара $x = 0$, получим, что начальная и конечная безразмерная скорость при ударе связаны соотношением

$$\frac{\left(V^+\right)^2}{1+d} = \frac{\left(V^-\right)^2}{1-d} = \frac{2\Pi(x_{\max})}{m} \quad .$$

В силу (1) коэффициент восстановления k равен

$$k = \sqrt{\frac{1-d}{1+d}} \quad . \qquad (12)$$

График зависимости коэффициента восстановления от постоянной сухого трения d приведен на рис. 2. С ростом d коэффициент восстановления монотонно убывает и становится равным нулю при $d = 1$ (т.е. удар становится абсолютно пластическим). При этом коэффициент восстановления не зависит от скорости соударения, что противоречит экспериментальным данным [1, 10].

Кинетическая энергия, потерянная при ударе, ΔT определяется соотношением (2). Обозначим через T^{-} кинетическую энергию тела до удара, тогда

$$\frac{\Delta T}{T^{-}} = 1 - k^2 = \frac{2d}{1+d} \quad ,$$

зависит только от постоянной сухого трения d. График этой зависимости приведен на рис. 2.

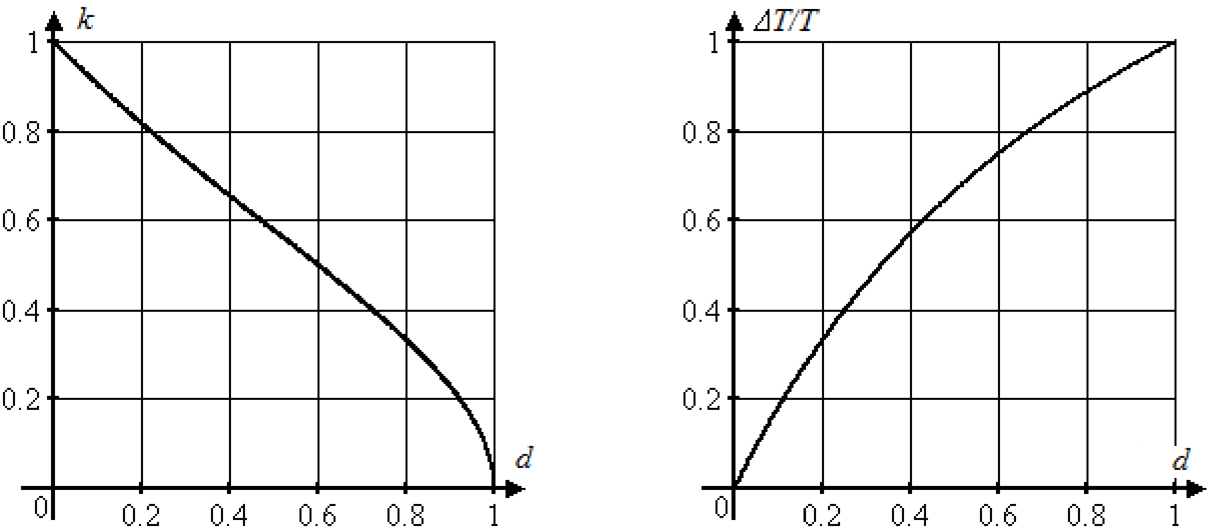

Рис.2. Зависимость коэффициента восстановления k и $\Delta T / T^{-}$ от постоянной сухого трения d.

4. Результаты математического моделирования

Если поверхность тела и препятствия в окрестности точки соприкосновения сферическая, то сила упругой деформации в соответствии с результатами Герца [4-5] имеет вид $f(x) = cx^{\frac{3}{2}}$, где

$$\frac{1}{c} = \frac{3}{4}\left(\frac{1-\mu_1^2}{E_1} + \frac{1-\mu_2^2}{E_2}\right)\sqrt{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}} \quad ,$$

$E_{1,2}$ – модули упругости, $\mu_{1,2}$ – коэффициенты Пуассона, $R_{1,2}$ – радиусы поверхности тела и препятствия.

В качестве примера рассмотрим удар резинового шарика массой $m = 0{,}1\,кг$ о массивную бетонную плиту. Положим для резины $\rho_1 = 1800 кг/м^3$,

$E_1 = 0.8*10^7\ H/м^2$, $\mu_1 = 0.5$, для бетона – $E_2 = 2750*10^7\ H/м^2$, $\mu_2 = 0.15$, тогда радиус шарика $R_1 = 2.367 см$, коэффициент упругости $c = 2.1873*10^6\ H/м^{3/2}$. В расчетах положим, что постоянная сухого трения $d = 0.3$.

На рис. 3 показана зависимость от времени перемещения тела (деформации) и контактной силы взаимодействия тела и препятствия при $V^- = 0.5; 1; 2; 3; 4$ и $5\ м/с$. На рис. 4 – зависимость максимального перемещения тела (максимальной деформации) и продолжительности удара от скорости соударения V^-.

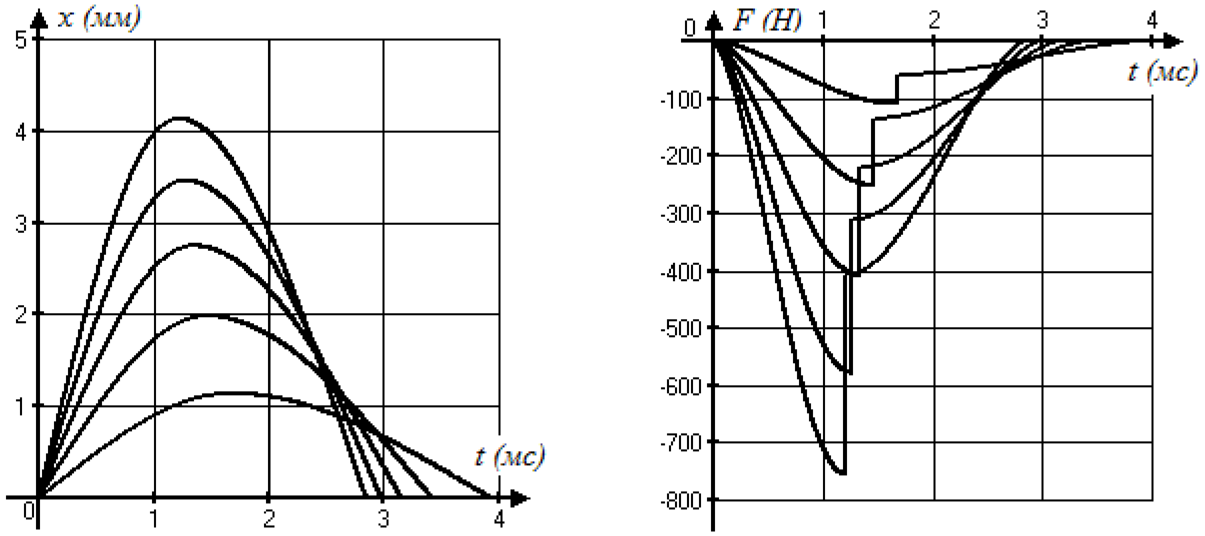

Рис. 3. Зависимость от времени деформации и контактной силы при $V^- = 0.5; 1; 2; 3; 4$ и $5\ м/с$.

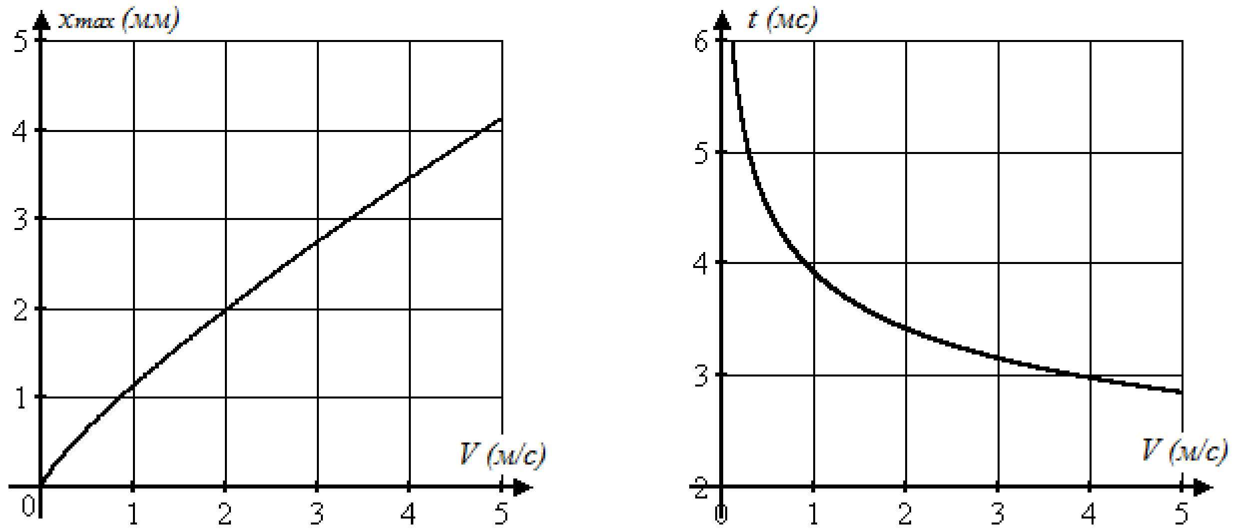

Рис. 4. Зависимость максимальной деформации и продолжительности удара от скорости соударения.

5. Заключение

На основе моделей удара Герца и Ханта-Кроссли построена нелинейная упругопластическая модель коллинеарного удара тела о неподвижное препятствие. Предполагается, что трение между частицами деформируемых в процессе удара тел является сухим. Получены первые интегралы уравнений движения в фазах деформации и восстановления. Получено решение уравнения движения тела в процессе удара в квадратурах. В модели удара Герца удар является абсолютно упругим. В вязкоупругой модели удара Ханта-Кроссли удар является упругим, коэффициент восстановления уменьшается с ростом скорости и стремится к единице при уменьшении скорости соударения. В рамках построенной упругопластической модели удара возможны абсолютной неупругий и упругий удар. При упругом ударе коэффициент восстановления уменьшается при увеличении постоянной трения и не зависит от скорости соударения. Последнее противоречит экспериментальным данным. Этот недостаток позволит устранить переход к более сложной вязко-упруго-пластичной модели удара, учитывающей и вязкое и сухое трение между частицами соударяющихся тел.

Литература

1. *Гольдсмит В.* Удар. Теоретические и физические свойства соударяемых тел. М.: Стройиздат. 1965. 448 с.
2. *Пановко Я.Г.* Введение в теорию механического удара. М.: Наука. 1977. 232 с.
3. *Иванов А.П.* Динамика систем с механическими соударениями. М.: Международная программа образования. 1997. 336 с.
4. *Herts H.* Über die Berührung Fester Elastischer Körper //Journal Reine und Angewandte Mathematik. 1882. B. 92. S. 156-171.
5. Герц Г. Принципы механики, изложенные в новой связи. М.: АН СССР. 1959. 387 с.
6. *Hunt K.H., Crossley F.R.E.* Coefficient of Restitution Interpreted as Damping in Vibroimpact //ASME Journal of Applied Mechanics. 1975. № 6. P. 440-445.

7. *Лапшин В.В.* Удар тела о препятствие //Инженерный журнал: наука и инновации. 2013. вып. 12. 17 с. URL: http://engjournal.ru/catalog/eng/teormech/1134.html .
8. *Дягель Р.В., Лапшин В.В.* О нелинейной вязкоупругой модели коллинеарного удара Ханта-Кроссли // Известия РАН. Механика твердого тела. 2011. № 5. С. 164-173.
9. *Dyagel R.V., Lapshin V.V.* On a nonlinear viscoelastic model of Hunt-Crossley impact // Mechanics of Solides. 2011. V. 46. № 5. P. 798-806.
10. *Кочетков А.В., Федотов П.В.* Некоторые вопросы теории удара // Интернет-журнал "Науковедение". 2013. № 5. 15 с. URL: http://naukovedenie.ru/PDF/110tvn513.pdf .

Оглавление