ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 58 за 2014 г.

Голубев Ю.Ф.

Функция Аппеля в динамике систем твердых тел

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Голубев Ю.Ф. Функция Аппеля в динамике систем твердых тел // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2014. № 58. 16 с. URL: http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2014-58

О р д е н а   Л е н и н а
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М.В.Келдыша
Р о с с и й с к о й   а к а д е м и и   н а у к

Ю.Ф.Голубев

Функция Аппеля в динамике систем твердых тел

Москва — 2014

Голубев Ю.Ф.

Функция Аппеля в динамике систем твердых тел.

Представлена эффективная формула для расчета функции Аппеля в динамике свободного твердого тела. Выполнен анализ соответствующей системы динамических уравнений Аппеля. Получены динамические уравнения Аппеля как для плоской цепочки твердых тел, так и для пространственной цепочки. Рассмотрены некоторые случаи возможных упрощений систем уравнений. Системы динамических уравнений дополнены необходимыми кинематическими уравнениями.

Ключевые слова: твердое тело, цепочка тел, функция Аппеля, динамические уравнения

Yury Filippovich Golubev

Appel’s Function in the Dynamics of Rigid Body Systems.

The effective formula for the Appel’s function calculation in the dynamics of a free rigid body is presented. The analysis of the relevant Appel’s system of dynamic equations is fulfilled. Appel’s dynamic equations are deduced for a flat chain of rigid bodies as well as for spatial chain. Some cases of possible simplification for systems of equations are considered. Systems of dynamic equations are supplemented by necessary kinematic equations.

Key words: rigid body, chain of bodies, Appel’s function, dynamic equations

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект 13-01-00184а

Оглавление

Введение

Математическое описание сложных твердотельных механических систем часто встречает трудности аналитического характера из-за громоздких промежуточных формул. При этом нередко используется хорошо отлаженный формализм получения уравнений Лагранжа 2-го рода. Преимущество этого подхода состоит в относительной простоте выражения для кинетической энергии системы, основанной на классическом представлении кинетической энергии твердого тела через соответствующий тензор инерции, а также в стандартности операций, необходимых для вывода уравнений движения. Вместе с тем, с вычислительной точки зрения, получающиеся уравнения движения оказываются весьма «сырыми», т.к. содержат значительное число «лишних» операций [1] из-за большого числа взаимно уничтожающихся членов [2,3]. Альтернативный метод, свободный от указанного недостатка, основан на непосредственном применении метода Даламбера-Лагранжа, когда мысленно разрезаются шарниры, соединяющие соседние тела, а возникающие реакции исключаются с использованием виртуальных перемещений тел в шарнирах [4,5]. Метод универсален и эффективен, особенно при использовании символьных преобразований на ЭВМ. Возможен вариант численного решения задачи моделирования, состоящий в непосредственном поиске минимума принуждения по Гауссу для исследуемой системы тел, а также вывод уравнений движения непосредственно из принципа Гаусса [6]. Уравнения Аппеля применяются значительно реже, что, по-видимому, связано с трудностями при составлении выражения для энергии ускорений системы, которое даже для одного твердого тела имеет существенно более сложный вид, чем кинетическая энергия. Отметим, что для составления уравнений Аппеля требуется по существу не сама энергия ускорений, а только ее часть, называемая функцией Аппеля, которая получается в результате исключения из энергии ускорений членов, не содержащих независимых параметров (квазиускорений) [1], однозначно определяющих ускорения точек системы в силу наложенных на нее связей. В препринте приводятся эффективные формулы, выражающие функцию Аппеля для твердого тела через ускорение некоторой его точки и угловое ускорение. Для демонстрации эффективности предложенной формулы составляются уравнения движения для цепочки шарнирно соединенных тел. Полученные уравнения могут служить основой для составления уравнений движения произвольных систем со структурой дерева. Это могут быть, например, манипуляторы на подвижной основе, шагающие машины, твердотельные модели антропоморфных устройств и др.

1. Функция Аппеля для свободного твердого тела

Определение. Энергия ускорений W механической системы есть квадратичная форма

$$W=\frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{N}m_\nu\mathbf{w}_\nu^2,$$

где N число материальных точек системы, m_ν, $\mathbf{w}_\nu$ — соответственно масса материальной точки с индексом ν и ее ускорение.

Энергия ускорений обладает свойством аддитивности по элементам системы и подчиняется формуле Кёнига [1]:

$$W=\frac{M\mathbf{w}_c^2}{2}+W^*, \tag{1.1}$$

где $M=\sum_{\nu=1}^{N}m_\nu$ — масса всей системы, $\mathbf{w}_c$ — ускорение ее центра масс, W^* — энергия ускорений системы относительно ее центра масс (относительно осей Кёнига, имеющих начало в центре масс и движущихся поступательно в инерциальной системе координат).

Определение. Функцией Аппеля называется часть энергии ускорений, которая останется, если из энергии ускорений удалить все слагаемые, не зависящие от квазиускорений (независимых параметров, однозначно определяющих ускорение материальных точек системы, совместимое со связями).

Функция Аппеля, как и энергия ускорений, обладает свойством аддитивности по точкам системы. Ускорения точек твердого тела выражаются формулой Ривальса [1]:

$$\mathbf{w}_\nu=\mathbf{w}_c+\dot{\boldsymbol{\omega}}\times\boldsymbol{\rho}_\nu+\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\rho}_\nu),$$

где $\dot{\boldsymbol{\omega}}$, $\boldsymbol{\omega}$ — соответственно угловое ускорение и угловая скорость твердого тела, $\boldsymbol{\rho}_\nu$ — радиус-вектор точки тела, имеющий начало в центре масс. Пусть в качестве независимых ускорений выбраны ускорение центра масс тела и его угловое ускорение. Тогда в соответствии с формулой (1.1) функция Аппеля S твердого тела дается выражением

$$S=\frac{m}{2}\mathbf{w}_c^2+\frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{N}m_\nu(\dot{\boldsymbol{\omega}}\times\boldsymbol{\rho}_\nu)^2+\sum_{\nu=1}^{N}m_\nu(\dot{\boldsymbol{\omega}}\times\boldsymbol{\rho}_\nu)\cdot[\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\rho}_\nu)], \tag{1.2}$$

где m — масса тела, а тело предполагается состоящим из конечного числа элементов массы m_ν каждый. Для сплошных тел суммы в правой части следует рассматривать, как интегральные суммы в смысле Римана. Второе слагаемое в правой части выражения (1.2) вполне аналогично выражению для кинетической энергии T^* твердого тела относительно его центра масс:

$$T^*=\frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{N}m_\nu(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\rho}_\nu)^2=\frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}\cdot\mathbf{J}_c\boldsymbol{\omega},$$

где $\mathbf{J}_c$ — центральный тензор инерции [1], примененный к вектору угловой скорости тела, как к матрице столбцу. Поэтому правую часть выражения (1.2) можно представить в виде

$$S=\frac{m}{2}\mathbf{w}_c^2+\frac{1}{2}\dot{\boldsymbol{\omega}}\cdot\mathbf{J}_c\dot{\boldsymbol{\omega}}+\sum_{\nu=1}^{N}m_\nu(\dot{\boldsymbol{\omega}}\times\boldsymbol{\rho}_\nu)\cdot[\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\rho}_\nu)], \tag{1.3}$$

где центральный тензор инерции применяется к угловому ускорению $\dot{\boldsymbol{\omega}}$. С использованием известных формул аналитической геометрии [7] преобразуем выражение

$$(\dot{\boldsymbol{\omega}}\times\boldsymbol{\rho}_\nu)\cdot[\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\rho}_\nu)]=(\dot{\boldsymbol{\omega}}\times\boldsymbol{\rho}_\nu)\cdot[\boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{\rho}_\nu)-\boldsymbol{\rho}_\nu\boldsymbol{\omega}^2]=(\dot{\boldsymbol{\omega}}\times\boldsymbol{\rho}_\nu)\cdot\boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{\rho}_\nu)=$$
$$=-\dot{\boldsymbol{\omega}}\cdot[\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\rho}_\nu(\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{\rho}_\nu)]=\dot{\boldsymbol{\omega}}\cdot\{\boldsymbol{\omega}\times[\boldsymbol{\omega}\boldsymbol{\rho}_\nu^2-\boldsymbol{\rho}_\nu(\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{\rho}_\nu)]\}=\dot{\boldsymbol{\omega}}\cdot\{\boldsymbol{\omega}\times[\boldsymbol{\rho}_\nu\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\rho}_\nu)]\}.$$

Похожие преобразования можно найти в книге [8]. Подставив этот результат в правую часть формулы (1.3), окончательно найдем

$$S=\frac{m}{2}\mathbf{w}_c^2+\frac{1}{2}\dot{\boldsymbol{\omega}}\cdot\mathbf{J}_c\dot{\boldsymbol{\omega}}+\dot{\boldsymbol{\omega}}\cdot(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{K}_c^*),\tag{1.4}$$

где $\mathbf{K}_c^*$ — вектор кинетического момента тела относительно его центра масс в системе координат Кёнига [1]:

$$\mathbf{K}_c^*=\mathbf{J}_c\boldsymbol{\omega}=\sum_{\nu=1}^{N}m_\nu[\boldsymbol{\rho}_\nu\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\rho}_\nu)].$$

Пусть теперь в качестве независимых ускорений выбраны ускорения произвольной точки A тела. Тогда ускорение центра масс тела можно выразить формулой

$$\mathbf{w}_c=\mathbf{w}_A+\dot{\boldsymbol{\omega}}\times\mathbf{r}_c+\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}_c),$$

где $\mathbf{w}_A$— ускорение точки A, $\mathbf{r}_c$ — радиус-вектор центра масс тела, имеющий начало в точке A. Здесь независимыми параметрами для подсчета функции Аппеля будут ускорения $\mathbf{w}_A$ и $\dot{\boldsymbol{\omega}}$. Функция Аппеля S_c для материальной точки массы m, расположенной в центре масс тела, подсчитывается по формуле

$$S_c=\frac{m}{2}\mathbf{w}_A^2+\frac{m}{2}(\dot{\boldsymbol{\omega}}\times\mathbf{r}_c)^2+m\mathbf{w}_A\cdot(\dot{\boldsymbol{\omega}}\times\mathbf{r}_c)+m\mathbf{w}_A\cdot[\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}_c)]+$$
$$+m(\dot{\boldsymbol{\omega}}\times\mathbf{r}_c)\cdot[\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}_c)].$$

Видим, что при подстановке в формулу (1.4) найденного выражения в ее правой части возникает группа слагаемых

$$\frac{m}{2}(\dot{\boldsymbol{\omega}}\times\mathbf{r}_c)^2+\frac{1}{2}\dot{\boldsymbol{\omega}}\cdot\mathbf{J}_c\dot{\boldsymbol{\omega}}=\frac{1}{2}\dot{\boldsymbol{\omega}}\cdot\mathbf{J}_A\dot{\boldsymbol{\omega}},$$

где, согласно теореме Кёнига, $\mathbf{J}_A$ есть момент инерции тела относительно точки A, поскольку первое слагаемое есть энергия ускорений материальной точки массы m, расположенной в центре масс тела, в осях координат, поступательно движущихся с точкой A. Аналогично получим

$$m(\dot{\boldsymbol{\omega}}\times\mathbf{r}_c)\cdot[\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}_c)]+\dot{\boldsymbol{\omega}}\cdot(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{K}_c^*)=m\dot{\boldsymbol{\omega}}\cdot(\boldsymbol{\omega}\times(\mathbf{r}_c\times(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}_c))+\dot{\boldsymbol{\omega}}\cdot(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{K}_c^*)=$$
$$=\dot{\boldsymbol{\omega}}\cdot(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{K}_A^*),$$

Поскольку выражение $m(\mathbf{r}_c\times(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}_c))$ есть кинетический момент материальной точки массы m, расположенной в центре масс тела, относительно точки A в системе координат, поступательно движущейся вместе с точкой A. Таким образом, функция Аппеля для твердого тела в этом случае принимает вид

$$S=\frac{m}{2}\mathbf{w}_A^2+m\mathbf{w}_A\cdot(\dot{\boldsymbol{\omega}}\times\mathbf{r}_c)+m\mathbf{w}_A\cdot[\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}_c)]+\frac{1}{2}\dot{\boldsymbol{\omega}}\cdot\mathbf{J}_A\dot{\boldsymbol{\omega}}+\dot{\boldsymbol{\omega}}\cdot(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{K}_A^*),\quad(1.5)$$

где $\mathbf{K}_A^*$ — кинетический момент тела в системе координат, поступательно движущейся вместе с точкой A.

Если движение твердого тела дополнительно стеснено какими-либо связями, то тогда следует определить независимые параметры, определяющие ускорения тела совместимые со связями, и выразить значения $\mathbf{w}_c$ и $\dot{\boldsymbol{\omega}}$, либо $\mathbf{w}_A$ и $\dot{\boldsymbol{\omega}}$ через эти параметры.

2. Анализ динамических уравнений в форме Аппеля

Обобщенные силы, отвечающие независимым ускорениям, выбранным для функции Аппеля вида (1.4), вычисляются по формулам

$$\mathbf{Q}_w=\sum_{\nu=1}^{N}\frac{\partial(\mathbf{F}_\nu\cdot\mathbf{w}_\nu)}{\partial\mathbf{w}_c}=\sum_{\nu=1}^{N}\mathbf{F}_\nu\,,\ \mathbf{Q}_\omega=\sum_{\nu=1}^{N}\frac{\partial(\mathbf{F}_\nu\cdot\mathbf{w}_\nu)}{\partial\dot{\boldsymbol{\omega}}}=\sum_{\nu=1}^{N}\frac{\partial(\dot{\boldsymbol{\omega}}\cdot(\boldsymbol{\rho}_\nu\times\mathbf{F}_\nu))}{\partial\dot{\boldsymbol{\omega}}}=\sum_{\nu=1}^{N}\boldsymbol{\rho}_\nu\times\mathbf{F}_\nu\,.$$

Здесь $\mathbf{Q}_w$ — вектор обобщенных сил, соответствующих ускорению центра масс, а $\mathbf{Q}_\omega$ — вектор обобщенных сил, соответствующих угловому ускорению тела. При вычислении обобщенных сил принято во внимание, что активные силы $\mathbf{F}_\nu$ согласно принципу детерминированности Ньютона [1] от ускорений не зависят.

Динамические уравнения Аппеля, следующие из формулы (1.4), принимают вид

$$\frac{\partial S}{\partial\mathbf{w}_c}=m\mathbf{w}_c=\sum_{\nu=1}^{N}\mathbf{F}_\nu\,,\qquad\frac{\partial S}{\partial\dot{\boldsymbol{\omega}}}=\mathbf{J}_c\dot{\boldsymbol{\omega}}+\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{K}_c^*=\sum_{\nu=1}^{N}\boldsymbol{\rho}_\nu\times\mathbf{F}_\nu\,.\quad(2.1)$$

Первое уравнение системы (2.1), очевидно, выражает теорему об изменении центра масс системы. В левой части второго уравнения (2.1) стоит полная производная по времени от вектора кинетического момента. Покажем это, поскольку координаты всех векторов первоначально рассматривались в системе Кёнига, а не в системе координат, жестко связанной с телом. Выполняя последовательно дифференцирование по времени, найдем

$$\begin{aligned}\frac{d\mathbf{K}_c^*}{dt}&=\frac{d}{dt}\sum_{\nu=1}^{N}m_\nu[\boldsymbol{\rho}_\nu\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\rho}_\nu)]=\sum_{\nu=1}^{N}m_\nu[\boldsymbol{\rho}_\nu\times(\dot{\boldsymbol{\omega}}\times\boldsymbol{\rho}_\nu)]+\sum_{\nu=1}^{N}m_\nu[\dot{\boldsymbol{\rho}}_\nu\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\rho}_\nu)]+\\&+\sum_{\nu=1}^{N}m_\nu[\boldsymbol{\rho}_\nu\times(\boldsymbol{\omega}\times\dot{\boldsymbol{\rho}}_\nu)]=\mathbf{J}_c\dot{\boldsymbol{\omega}}+\sum_{\nu=1}^{N}m_\nu[\dot{\boldsymbol{\rho}}_\nu\times\dot{\boldsymbol{\rho}}_\nu]+\sum_{\nu=1}^{N}m_\nu[\boldsymbol{\rho}_\nu\times(\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\rho}_\nu))]=\\&=\mathbf{J}_c\dot{\boldsymbol{\omega}}+\sum_{\nu=1}^{N}m_\nu[\boldsymbol{\rho}_\nu\times(\boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{\rho}_\nu))]=\mathbf{J}_c\dot{\boldsymbol{\omega}}+\boldsymbol{\omega}\times\sum_{\nu=1}^{N}m_\nu[-\boldsymbol{\rho}_\nu(\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{\rho}_\nu)+\boldsymbol{\omega}\boldsymbol{\rho}_\nu^2]=\\&=\mathbf{J}_c\dot{\boldsymbol{\omega}}+\boldsymbol{\omega}\times\sum_{\nu=1}^{N}m_\nu[\boldsymbol{\rho}_\nu\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\rho}_\nu)]=\mathbf{J}_c\dot{\boldsymbol{\omega}}+\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{K}_c^*.\end{aligned}\quad(2.2)$$

Второе уравнение (2.1) имеет в точности такой же вид, как известное уравнение Эйлера в динамике твердого тела. Разница в том, что все векторы, входящие во второе уравнение (2.1) могут быть представлены координатами в любой системе координат Кёнига, в то время, как в стандартных уравнениях Эйлера эти векторы должны быть представлены координатами в системе координат, жестко связанной с телом. Заметим также, что функции Аппеля вида (1.4) и (1.5), будучи скалярами, не меняются при преобразованиях координат. Абсолютные скорости и ускорения, входящие в них, могут быть выражены путем простой подстановки через скорости и ускорения, взятые в любых других координатах. Тогда, соответственно, изменятся и следующие из указанных функций Аппеля динамические уравнения.

Рассмотрим динамические уравнения, получаемые с помощью функции Аппеля вида (1.5). В ней независимыми параметрами будем считать ускорения $\mathbf{w}_A$ и $\dot{\boldsymbol{\omega}}$. По теореме Ривальса выразим ускорение любой точки тела через эти параметры [1]:

$$\mathbf{w}_\nu = \mathbf{w}_A + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r}_\nu + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_\nu),$$

где вектор $\mathbf{r}_\nu$ имеет начало в точке A. Тогда обобщенные силы имеют вид

$$\mathbf{Q}_w = \sum_{\nu=1}^{N} \frac{\partial(\mathbf{F}_\nu \cdot \mathbf{w}_\nu)}{\partial \mathbf{w}_A} = \sum_{\nu=1}^{N} \mathbf{F}_\nu\,,\ \mathbf{Q}_\omega = \sum_{\nu=1}^{N} \frac{\partial(\mathbf{F}_\nu \cdot \mathbf{w}_\nu)}{\partial \dot{\boldsymbol{\omega}}} = \sum_{\nu=1}^{N} \frac{\partial(\dot{\boldsymbol{\omega}} \cdot (\mathbf{r}_\nu \times \mathbf{F}_\nu))}{\partial \dot{\boldsymbol{\omega}}} = \sum_{\nu=1}^{N} \mathbf{r}_\nu \times \mathbf{F}_\nu\,.$$

С помощью функции Аппеля (1.5) найдем следующие динамические уравнения:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial S}{\partial \mathbf{w}_A} = m\{\mathbf{w}_A + (\dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r}_c) + [\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_c)]\} = \sum_{\nu=1}^{N} \mathbf{F}_\nu, \\ &\frac{\partial S}{\partial \dot{\boldsymbol{\omega}}} = m(\mathbf{r}_c \times \mathbf{w}_A) + \mathbf{J}_A \dot{\boldsymbol{\omega}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{K}_A^* = \sum_{\nu=1}^{N} \mathbf{r}_\nu \times \mathbf{F}_\nu. \end{aligned} \tag{2.3}$$

Первое уравнение системы (2.3) выражает, очевидно, теорему о движении центра масс. Покажем, что второе уравнение выражает теорему об изменении полного кинетического момента тела относительно подвижной точки A. Выполнив преобразования, аналогичные (2.2), получим

$$\frac{d\mathbf{K}_A^*}{dt} = \mathbf{J}_A \dot{\boldsymbol{\omega}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{K}_A^*.$$

Далее

$$m(\mathbf{r}_c \times \mathbf{w}_A) = \frac{d(m\mathbf{r}_c \times \mathbf{v}_A)}{dt} + (\mathbf{v}_A \times m\mathbf{v}_c)\,.$$

Здесь принято во внимание, что

$$\mathbf{v}_A \times \mathbf{v}_c = \mathbf{v}_A \times [\mathbf{v}_A + (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_c)] = \mathbf{v}_A \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_c) \text{ и } \frac{d\mathbf{r}_c}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_c\,.$$

Поэтому левая часть второго уравнения системы (2.3) преобразуется к виду

$$m(\mathbf{r}_c\times\mathbf{w}_A)+\mathbf{J}_A\dot{\boldsymbol{\omega}}+\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{K}_A^*=\mathbf{v}_A\times\mathbf{Q}+\frac{d}{dt}[(m\mathbf{r}_c\times\mathbf{v}_A)+\mathbf{K}_A^*]=$$
$$=\mathbf{v}_A\times\mathbf{Q}+\frac{d}{dt}\sum_{\nu=1}^{N}m_\nu[\mathbf{r}_\nu\times(\mathbf{v}_A+\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\rho}_\nu]=\mathbf{v}_A\times\mathbf{Q}+\frac{d\mathbf{K}_A}{dt},$$

где $\mathbf{K}_A$ — вектор полного кинетического момента тела (вычисленный по абсолютным скоростям точек тела) относительно точки A, а $\mathbf{Q}$ — количество движения тела [1]. Таким образом, полученные уравнения динамики твердого тела в форме Аппеля согласуются с общими теоремами динамики системы.

Рассмотрим далее некоторые приложения полученных формул.

3. Многозвенная плоская цепочка твердых тел

Пусть система состоит из K твердых тел, последовательно соединенных друг с другом цилиндрическими шарнирами, оси которых параллельны. Такая система представляет собой механизм, звенья которого могут совершать плоскопараллельные движения друг относительно друга в плоскости, перпендикулярной оси шарниров, а сама эта плоскость может двигаться в пространстве произвольно.

В цепочке содержится два крайних тела, имеющих лишь одно соединение с соседним телом. Из этих двух крайних тел произвольно выберем одно, назовем его базовым и присвоим ему номер 1. Остальные тела, начиная от базового, перенумеруем в порядке их следования. Массы тел обозначим m_ν, $\nu=\overline{1,K}$. В базовом теле выберем точку A, не совпадающую с шарниром этого тела, и обозначим $\mathbf{r}_1$ радиус вектор из точки A к шарниру, соединяющему первое и второе тела. Соответственно обозначим $\mathbf{r}_\nu$, $\nu=\overline{2,K-1}$, радиус-векторы, начинающиеся в шарнире, соединяющем тело с номером $\nu-1$ и тело с номером ν и заканчивающиеся в шарнире, соединяющем тело с номером ν и тело с номером $\nu+1$. Единичный вектор оси шарниров обозначим буквой $\mathbf{e}$. Направление этого вектора жестко привязано к базовому (первому) телу.

Вся цепочка совершает абсолютное движение вместе с базовым телом, имеющим ускорение $\mathbf{w}_A$ точки A, угловую скорость $\boldsymbol{\omega}$ и угловое ускорение $\dot{\boldsymbol{\omega}}$. Остальные звенья цепочки совершают относительное движение в шарнирных углах с угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}_\nu=\omega_\nu\mathbf{e}$ звена с номером ν относительно звена с номером $\nu-1$. По тереме о сложении скоростей абсолютная угловая скорость ν-го звена $\boldsymbol{\Omega}_\nu$ выражается формулой

$$\boldsymbol{\Omega}_\nu=\boldsymbol{\omega}+\mathbf{e}\sum_{\mu=2}^{\nu}\omega_\mu\,, \tag{3.1}$$

а его абсолютное угловое ускорение имеет вид

$$\dot{\boldsymbol{\Omega}}_\nu=\dot{\boldsymbol{\omega}}+\mathbf{e}\sum_{\mu=2}^{\nu}\dot{\omega}_\mu+(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{e})\sum_{\mu=2}^{\nu}\omega_\mu\,. \tag{3.2}$$

Ускорения $\mathbf{w}_\nu$ точек соединения тела с номером ν и тела с номером $\nu-1$ выражаются формулами

$$\mathbf{w}_2 = \mathbf{w}_A + \dot{\boldsymbol{\omega}}\times\mathbf{r}_1 + \boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}_1),$$

$$\mathbf{w}_\nu = \mathbf{w}_A + \dot{\boldsymbol{\omega}}\times\mathbf{r}_1 + \sum_{\mu=2}^{\nu-1}\dot{\boldsymbol{\Omega}}_\mu\times\mathbf{r}_\mu + \boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}_1) + \sum_{\mu=2}^{\nu-1}\boldsymbol{\Omega}_\mu\times(\boldsymbol{\Omega}_\mu\times\mathbf{r}_\mu),\ \ \nu=\overline{3,N}. \quad (3.3)$$

Для расчета функции Аппеля ν-го тела воспользуемся формулой (1.5) с учетом введенных обозначений:

$$S_\nu = \frac{m_\nu}{2}\mathbf{w}_\nu^2 + m_\nu\mathbf{w}_\nu\cdot(\dot{\boldsymbol{\Omega}}_\nu\times\mathbf{c}_\nu) + m_\nu\mathbf{w}_\nu\cdot[\boldsymbol{\Omega}_\nu\times(\boldsymbol{\Omega}_\nu\times\mathbf{c}_\nu)] + \frac{1}{2}\dot{\boldsymbol{\Omega}}_\nu\cdot\mathbf{J}_\nu\dot{\boldsymbol{\Omega}}_\nu + \dot{\boldsymbol{\Omega}}_\nu\cdot(\boldsymbol{\Omega}_\nu\times\mathbf{K}_\nu^*),$$

$$S_1 = \frac{m_1}{2}\mathbf{w}_A^2 + m_1\mathbf{w}_A\cdot(\dot{\boldsymbol{\omega}}\times\mathbf{c}_1) + m_1\mathbf{w}_A\cdot[\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{c}_1)] + \frac{1}{2}\dot{\boldsymbol{\omega}}\cdot\mathbf{J}_A\dot{\boldsymbol{\omega}} + \dot{\boldsymbol{\omega}}\cdot(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{K}_1^*),$$

$$\mathbf{K}_\nu^* = \mathbf{J}_\nu\boldsymbol{\Omega}_\nu, \quad \mathbf{K}_1^* = \mathbf{J}_A\boldsymbol{\omega}, \quad \nu=\overline{2,N},$$

где $\mathbf{K}_\nu^*$, $\mathbf{J}_\nu$ — кинетический момент и тензор инерции ν-го тела в осях координат, движущихся поступательно и имеющих начало в точке соединения тела с номером ν и тела с номером $\nu-1$, $\mathbf{c}_\nu$— радиус-вектор центра масс ν-го тела с началом в той же точке, $\mathbf{K}_1^*$, $\mathbf{J}_A$ — кинетический момент и тензор инерции 1-го тела в осях координат, движущихся поступательно и имеющих начало в точке A, $\mathbf{c}_1$— радиус-вектор центра масс 1-го тела с началом в той же точке A. Функция Аппеля S всей цепочки дается формулой

$$S = \sum_{\nu=1}^{K} S_\nu\,. \quad (3.4)$$

Для того, чтобы иметь возможность записать динамические уравнения цепочки, следует задать действующие силы. Пусть это будут сила тяжести и межзвенные шарнирные моменты. Сила тяжести приложена к центру масс каждого звена. Ускорение $\boldsymbol{\sigma}_\nu$ центра масс ν-го звена выразим формулой

$$\boldsymbol{\sigma}_\nu = \mathbf{w}_\nu + \dot{\boldsymbol{\Omega}}_\nu\times\mathbf{c}_\nu + \boldsymbol{\Omega}_\nu\times(\boldsymbol{\Omega}_\nu\times\mathbf{c}_\nu), \quad \boldsymbol{\sigma}_1 = \mathbf{w}_A + \dot{\boldsymbol{\omega}}\times\mathbf{c}_1 + \boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{c}_1), \quad \nu=\overline{2,\mathrm{K}}\ . \quad (3.5)$$

Независимыми параметрами задачи служат ускорение $\mathbf{w}_A$, угловое ускорение $\dot{\boldsymbol{\omega}}$ первого тела и межзвенные угловые ускорения $\dot{\omega}_\nu$, $\nu=\overline{2,\mathrm{K}}$. Обобщенные силы, вызванные силой тяжести и соответствующие указанным параметрам, имеют вид

$$\mathbf{Q}_w = \sum_{\mu=1}^{K} m_\mu \frac{\partial(\mathbf{g}\cdot\boldsymbol{\sigma}_\mu)}{\partial\mathbf{w}_A},\ \mathbf{Q}_\omega = \sum_{\mu=1}^{K} m_\mu \frac{\partial(\mathbf{g}\cdot\boldsymbol{\sigma}_\mu)}{\partial\dot{\boldsymbol{\omega}}},\ Q_\nu = \sum_{\mu=1}^{K} m_\mu \frac{\partial(\mathbf{g}\cdot\boldsymbol{\sigma}_\mu)}{\partial\dot{\omega}_\nu}.$$

Векторный параметр $\mathbf{w}_A$ входит как отдельное слагаемое во все ускорения $\boldsymbol{\sigma}_\mu$. Поэтому

$$\mathbf{Q}_w = \mathbf{g}\sum_{\mu=1}^{K} m_\mu \quad (3.6)$$

и представляет собой вес всей цепочки. Параметр $\dot{\boldsymbol{\omega}}$ входит отдельным слагаемым в угловые ускорения каждого звена. Поэтому

$$\mathbf{Q}_\omega = \sum_{\mu=2}^{K} m_\mu \frac{\partial(\mathbf{g}\cdot\mathbf{w}_\mu)}{\partial\dot{\boldsymbol{\omega}}} + \sum_{\mu=1}^{K} m_\mu \mathbf{c}_\mu \times \mathbf{g}.$$

Из формул (3.3) найдем

$$\mathbf{Q}_\omega = \sum_{\mu=1}^{K} m_\mu \sum_{i=1}^{\mu-1} \mathbf{r}_i \times \mathbf{g} + \sum_{\mu=1}^{K} m_\mu \mathbf{c}_\mu \times \mathbf{g} = \sum_{\mu=1}^{K} m_\mu \left(\sum_{i=1}^{\mu-1} \mathbf{r}_i + \mathbf{c}_\mu \right) \times \mathbf{g}. \tag{3.7}$$

Здесь принято, что

$$\sum_{i=1}^{0} \mathbf{r}_i \times \mathbf{g} = 0.$$

Видно, что вектор $\mathbf{Q}_\omega$ представляет собой момент силы тяжести относительно точки A, действующий от всех элементов системы.

Как следует из формул (3.2), (3.3), параметр $\dot{\omega}_\nu$ входит в выражение для ускорений $\boldsymbol{\sigma}_\mu$ и $\mathbf{w}_\mu$ только, если $\mu \geq \nu$. Поэтому

$$Q_\nu = \sum_{\mu=\nu+1}^{K} m_\mu \frac{\partial(\mathbf{g}\cdot\boldsymbol{\sigma}_\mu)}{\partial\dot{\omega}_\nu} + m_\nu (\mathbf{c}_\nu \times \mathbf{g})\cdot\mathbf{e}.$$

Далее

$$Q_\nu = \sum_{\mu=\nu+1}^{K} m_\mu \frac{\partial(\mathbf{g}\cdot\mathbf{w}_\mu)}{\partial\dot{\omega}_\nu} + \left(m_\nu (\mathbf{c}_\nu \times \mathbf{g}) + \sum_{\mu=\nu+1}^{K} m_\mu (\mathbf{c}_\mu \times \mathbf{g}) \right)\cdot\mathbf{e}.$$

Учитывая формулу (3.3), окончательно получим

$$Q_\nu = \left[\sum_{\mu=\nu+1}^{K} m_\mu \left(\sum_{i=\nu}^{\mu-1} \mathbf{r}_i + \mathbf{c}_\mu \right) \times \mathbf{g} + m_\nu (\mathbf{c}_\nu \times \mathbf{g}) \right]\cdot\mathbf{e}. \tag{3.8}$$

Очевидно, что формула (3.8) задает проекцию на шарнирную ось момента силы тяжести относительно точки соединения тел с номерами ν и $\nu-1$ от всех тел с номерами равными ν или превосходящими этот номер.

Найдем формулы для левых частей уравнений Аппеля. Учтем формулы (3.5) и рассмотрим выражение

$$\frac{\partial S}{\partial \mathbf{w}_A} = \sum_{\nu=1}^{K} \frac{\partial S_\nu}{\partial \mathbf{w}_A} = \sum_{\nu=1}^{K} m_\nu \boldsymbol{\sigma}_\nu. \tag{3.9}$$

Правая часть (3.9) дает производную по времени от количества движения системы, а соответствующее векторное уравнение

$$\frac{\partial S}{\partial \mathbf{w}_A} = \sum_{\nu=1}^{K} m_\nu \boldsymbol{\sigma}_\nu = \mathbf{Q}_w \tag{3.10}$$

определяет закон изменения центра масс системы.

Вычислим теперь

$$\frac{\partial S}{\partial\dot{\boldsymbol{\omega}}} = \sum_{\nu=1}^{K} \frac{\partial S_\nu}{\partial\dot{\boldsymbol{\omega}}} = \frac{\partial S_1}{\partial\dot{\boldsymbol{\omega}}} + \sum_{\nu=2}^{K} \frac{\partial S_\nu}{\partial\dot{\boldsymbol{\omega}}} = m_1(\mathbf{c}_1 \times \mathbf{w}_A) + \mathbf{J}_A\dot{\boldsymbol{\omega}} + \boldsymbol{\omega}\times\mathbf{K}_1^* + \sum_{\nu=2}^{K} \frac{\partial S_\nu}{\partial\dot{\boldsymbol{\omega}}}.$$

Как это было отмечено в конце предыдущего раздела, первые три слагаемых полученного выражения составляют производную по времени от кинетического момента первого тела относительно подвижной точки A. Далее, поскольку в каждое выражение (3.2) для угловых ускорений $\dot{\mathbf{\Omega}}_\nu$ переменная $\dot{\boldsymbol{\omega}}$ входит в виде отдельного слагаемого, из полученных выше формул для функций S_ν найдем

$$\frac{\partial S_\nu}{\partial \dot{\boldsymbol{\omega}}} = m_\nu \boldsymbol{\sigma}_\nu \frac{\partial \mathbf{w}_\nu}{\partial \dot{\boldsymbol{\omega}}} + m_\nu(\mathbf{c}_\nu \times \mathbf{w}_\nu) + \mathbf{J}_\nu \dot{\mathbf{\Omega}}_\nu + \mathbf{\Omega}_\nu \times \mathbf{K}_\nu^*,\ \nu = \overline{2,K},$$

где $\boldsymbol{\sigma}_\nu$ дается формулой (3.5). В соответствии с формулой (3.3) будем иметь

$$\frac{\partial S_\nu}{\partial \dot{\boldsymbol{\omega}}} = \sum_{\mu=1}^{\nu-1} \mathbf{r}_\mu \times m_\nu \boldsymbol{\sigma}_\nu + \mathbf{c}_\nu \times m_\nu \mathbf{w}_\nu + \mathbf{J}_\nu \dot{\mathbf{\Omega}}_\nu + \mathbf{\Omega}_\nu \times \mathbf{K}_\nu^*.\ \nu = \overline{2,K}. \tag{3.11}$$

Поэтому

$$\frac{\partial S}{\partial \dot{\boldsymbol{\omega}}} = \sum_{\mu=1}^{K}\left(\sum_{\tau=1}^{\mu-1} \mathbf{r}_\tau \times m_\mu \boldsymbol{\sigma}_\mu + \mathbf{c}_\mu \times m_\mu \mathbf{w}_\mu + \mathbf{J}_\mu \dot{\mathbf{\Omega}}_\mu + \mathbf{\Omega}_\mu \times \mathbf{K}_\mu^*\right).$$

Здесь принято, что $\mathbf{w}_A = \mathbf{w}_1$ и $\dot{\mathbf{\Omega}}_1 = \dot{\boldsymbol{\omega}}$, $\mathbf{\Omega}_1 = \boldsymbol{\omega}$. Выражение для ускорения $\mathbf{w}_\nu$, $\nu = \overline{2,K}$, дается формулами (3.3). В итоге, как и следовало ожидать, уравнение

$$\frac{\partial S}{\partial \dot{\boldsymbol{\omega}}} = \sum_{\mu=1}^{K}\left(\sum_{\tau=1}^{\mu-1} \mathbf{r}_\tau \times m_\mu \boldsymbol{\sigma}_\mu + \mathbf{c}_\mu \times m_\mu \mathbf{w}_\mu + \mathbf{J}_\mu \dot{\mathbf{\Omega}}_\mu + \mathbf{\Omega}_\mu \times \mathbf{K}_\mu^*\right) = \mathbf{Q}_\omega \tag{3.12}$$

выражает теорему об изменении кинетического момента всей цепочки относительно точки A с учетом относительного движения звеньев цепочки.

Рассмотрим выражение

$$\frac{\partial S}{\partial \dot{\omega}_\nu} = \sum_{\mu=\nu}^{K} \frac{\partial S_\mu}{\partial \dot{\omega}_\nu} = \sum_{\mu=\nu}^{K}\left[m_\mu \boldsymbol{\sigma}_\mu \frac{\partial \mathbf{w}_\mu}{\partial \dot{\omega}_\nu} + \left(m_\mu(\mathbf{c}_\mu \times \mathbf{w}_\mu) + \mathbf{J}_\mu \dot{\mathbf{\Omega}}_\mu + \mathbf{\Omega}_\mu \times \mathbf{K}_\mu^*\right)\frac{\partial \dot{\mathbf{\Omega}}_\mu}{\partial \dot{\omega}_\nu}\right]. \tag{3.13}$$

Здесь учтено, что параметр $\dot{\omega}_\nu$ входит в слагаемые функции Аппеля, начиная с индексов $\mu = \nu$ и бóльших.

Из формул (3.2), (3.3) следует, что

$$\frac{\partial \dot{\mathbf{\Omega}}_\mu}{\partial \dot{\omega}_\nu} = \mathbf{e}, \quad \frac{\partial \mathbf{w}_\mu}{\partial \dot{\omega}_\nu} = \mathbf{e} \times \sum_{\tau=\nu}^{\mu-1} \mathbf{r}_\tau .$$

Поэтому

$$\frac{\partial S}{\partial \dot{\omega}_\nu} = \sum_{\mu=\nu}^{K} \frac{\partial S_\mu}{\partial \dot{\omega}_\nu} = \mathbf{e} \cdot \sum_{\mu=\nu}^{K}\left[\left(\sum_{\tau=\nu}^{\mu-1} \mathbf{r}_\tau \times m_\mu \boldsymbol{\sigma}_\mu\right) + m_\mu(\mathbf{c}_\mu \times \mathbf{w}_\mu) + \left(\mathbf{J}_\mu \dot{\mathbf{\Omega}}_\mu + \mathbf{\Omega}_\mu \times \mathbf{K}_\mu^*\right)\right],$$

что представляет собой проекцию на ось шарниров кинетического момента тел с индексами $\overline{\nu, K}$ относительно шарнира, соединяющего тела с номерами $\nu - 1$ и ν. Соответствующее уравнение Аппеля примет вид

$$\mathbf{e} \cdot \sum_{\mu=\nu}^{K}\left[m_\mu\left(\sum_{\tau=\nu}^{\mu-1} \mathbf{r}_\tau \times \boldsymbol{\sigma}_\mu\right) + m_\mu(\mathbf{c}_\mu \times \mathbf{w}_\mu) + \left(\mathbf{J}_\mu \dot{\mathbf{\Omega}}_\mu + \mathbf{\Omega}_\mu \times \mathbf{K}_\mu^*\right)\right] = M_\nu + Q_\nu,\ \nu = \overline{2,K}, \tag{3.14}$$

где M_ν — управляющий момент в шарнире, соединяющем $\nu-1$ и ν -е тела, а Q_ν дается формулой (3.8).

4. Многозвенная пространственная цепочка тел

Предположим теперь, что система состоит из K твердых тел, последовательно соединенных друг с другом цилиндрическими шарнирами, оси которых не параллельны. Такая система представляет собой пространственный механизм, звенья которого могут совершать плоскопараллельные движения друг относительно друга, но для разных пар звеньев плоскости относительного движения будут отличаться. Рассмотрим цепочку, для которой ось каждого шарнира жестко ориентирована относительно предшествующего звена. Тогда формулы, аналогичные (3.1) и (3.2), примут вид

$$\mathbf{\Omega}_\nu = \boldsymbol{\omega} + \sum_{\mu=2}^{\nu} \mathbf{e}_\mu \omega_\mu, \quad \dot{\mathbf{\Omega}}_\nu = \dot{\boldsymbol{\omega}} + \sum_{\mu=2}^{\nu} \mathbf{e}_\mu \dot{\omega}_\mu + \sum_{\mu=2}^{\nu} \mathbf{\Omega}_{\mu-1} \times \mathbf{e}_\mu \omega_\mu, \tag{4.1}$$

где вектор $\mathbf{e}_\mu$ жестко связан с $\mu-1$ телом и задает ось шарнира между телом с номером $\mu-1$ и телом с номером μ, а остальные обозначения совпадают с обозначениями, принятыми в предыдущем разделе. При этом вид формул (3.3), (3.4) и (3.5) сохраняется с учетом (4.1) и в этом случае.

Найдем обобщенные силы из-за действия силы тяжести. По-прежнему независимыми параметрами задачи служат ускорение $\mathbf{w}_A$, угловое ускорение $\dot{\boldsymbol{\omega}}$ первого тела и межзвенные угловые ускорения $\dot{\omega}_\nu$, $\nu = \overline{2,K}$. Очевидно, что формулы (3.6) и (3.7) для обобщенных сил $\mathbf{Q}_w$ и $\mathbf{Q}_\omega$ останутся справедливыми при подстановке в них выражений (4.1). Это видно из (3.5) и (4.1). Формулу (3.8) необходимо заменить следующей

$$Q_\nu = \left[\sum_{\mu=\nu+1}^{K} m_\mu \left(\sum_{i=\nu+1}^{\mu-1} \mathbf{r}_i + \mathbf{c}_\mu \right) \times \mathbf{g} + m_\nu (\mathbf{c}_\nu \times \mathbf{g}) \right] \cdot \mathbf{e}_\nu. \tag{4.2}$$

Она выражает проекцию на шарнирную ось $\mathbf{e}_\nu$ момента силы тяжести относительно точки соединения тел с номерами ν и $\nu-1$ от всех тел с номерами равными ν или превосходящими этот номер.

Из специфики вхождения параметров $\mathbf{w}_A$ и $\dot{\boldsymbol{\omega}}$ в правые части (3.3) и (4.1) заключаем, что выражения (3.9) и (3.11), а также смысл соответствующих уравнений Аппеля сохраняются с учетом того, что в них надо подставлять выражения (4.1). С помощью (4.1) получим

$$\frac{\partial \dot{\mathbf{\Omega}}_\mu}{\partial \dot{\omega}_\nu} = \mathbf{e}_\nu, \quad \frac{\partial \mathbf{w}_\mu}{\partial \dot{\omega}_\nu} = \mathbf{e}_\nu \times \sum_{\tau=\nu}^{\mu-1} \mathbf{r}_\tau.$$

Поэтому

$$\frac{\partial S}{\partial \dot\omega_\nu}=\sum_{\mu=\nu}^{K}\frac{\partial S_\mu}{\partial \dot\omega_\nu}=\mathbf{e}_\nu\cdot\sum_{\mu=\nu}^{K}\left[m_\mu\left(\sum_{\tau=\nu}^{\mu-1}\mathbf{r}_\tau\times\boldsymbol{\sigma}_\mu\right)+m_\mu(\mathbf{c}_\mu\times\mathbf{w}_\mu)+\left(\mathbf{J}_\mu\dot{\boldsymbol{\Omega}}_\mu+\boldsymbol{\Omega}_\mu\times\mathbf{K}^*_\mu\right)\right],$$

а соответствующее уравнение Аппеля примет вид

$$\mathbf{e}_\nu\cdot\sum_{\mu=\nu}^{K}\left[m_\mu\left(\sum_{\tau=\nu}^{\mu-1}\mathbf{r}_\tau\times\boldsymbol{\sigma}_\mu\right)+m_\mu(\mathbf{c}_\mu\times\mathbf{w}_\mu)+\left(\mathbf{J}_\mu\dot{\boldsymbol{\Omega}}_\mu+\boldsymbol{\Omega}_\mu\times\mathbf{K}^*_\mu\right)\right]=M_\nu+Q_\nu, \qquad (4.3)$$

где Q_ν выражается формулой (4.2).

5. Анализ полученных уравнений

Очевидно, что все полученные динамические системы уравнений оказываются линейными по производным по времени от выбранных независимых параметров. Для численных приложений их придется разрешать относительно указанных производных. Сбор коэффициентов при них и обращение соответствующих матриц, по-видимому, целесообразно осуществить средствами компьютерной алгебры и численными методами [4,9]. Выполним некоторые упрощения.

Рассмотрим систему уравнений для цепочки раздела 3 и сравним уравнения (3.14) для индексов ν и $\nu+1$. Уравнение (3.14) для индекса $\nu+1$ примет вид

$$F(\nu+1)=\mathbf{e}\cdot\sum_{\mu=\nu+1}^{K}\left[m_\mu\left(\sum_{\tau=\nu+1}^{\mu-1}\mathbf{r}_\tau\times\boldsymbol{\sigma}_\mu\right)+m_\mu(\mathbf{c}_\mu\times\mathbf{w}_\mu)+\left(\mathbf{J}_\mu\dot{\boldsymbol{\Omega}}_\mu+\boldsymbol{\Omega}_\mu\times\mathbf{K}^*_\mu\right)\right]=M_{\nu+1}+Q_{\nu+1}$$

Преобразуем левую часть уравнения (3.14), взятую для индекса ν:

$$F(\nu)=\mathbf{e}\cdot\sum_{\mu=\nu+1}^{K}\left[m_\mu\left(\sum_{\tau=\nu}^{\mu-1}\mathbf{r}_\tau\times\boldsymbol{\sigma}_\mu\right)+m_\mu(\mathbf{c}_\mu\times\mathbf{w}_\mu)+\left(\mathbf{J}_\mu\dot{\boldsymbol{\Omega}}_\mu+\boldsymbol{\Omega}_\mu\times\mathbf{K}^*_\mu\right)\right]+\mathbf{e}\cdot[m_\nu(\mathbf{c}_\nu\times\mathbf{w}_\nu)+$$

$$+\mathbf{J}_\nu\dot{\boldsymbol{\Omega}}_\nu+\boldsymbol{\Omega}_\nu\times\mathbf{K}^*_\nu]=F(\nu+1)+\mathbf{e}\cdot\left(m_\nu(\mathbf{c}_\nu\times\mathbf{w}_\nu)+\mathbf{J}_\nu\dot{\boldsymbol{\Omega}}_\nu+\boldsymbol{\Omega}_\nu\times\mathbf{K}^*_\nu+\mathbf{r}_\nu\times\sum_{\mu=\nu+1}^{K}m_\mu\boldsymbol{\sigma}_\mu\right).$$

Отсюда находим, что уравнение (3.14), соответствующее индексу ν, эквивалентно следующему

$$\mathbf{e}\cdot\left(\mathbf{J}_\nu\dot{\boldsymbol{\Omega}}_\nu+\boldsymbol{\Omega}_\nu\times\mathbf{K}^*_\nu+m_\nu(\mathbf{c}_\nu\times\mathbf{w}_\nu)+\mathbf{r}_\nu\times\sum_{\mu=\nu+1}^{K}m_\mu\boldsymbol{\sigma}_\mu\right)=M_\nu+Q_\nu-M_{\nu+1}-Q_{\nu+1}, \qquad (5.1)$$

$$\nu=\overline{2,K}$$

при условии, что $M_{K+1}=Q_{K+1}=0$. Члены, объединенные знаком суммирования, дают суммарную массу, умноженную на ускорение центра масс хвоста цепочки, т.е. цепочки тел с номерами, превосходящими номер ν.

Для плоскопараллельного движения, которое в рассматриваемой постановке возможно лишь в вертикальной плоскости, перпендикулярной вектору $\mathbf{e}$, получим $\boldsymbol{\omega}=\omega_1\mathbf{e}$, и согласно формуле (3.1) будем иметь $\boldsymbol{\Omega}_\nu=\Omega_\nu\mathbf{e}$, $\Omega_\nu=\sum_{\mu=1}^{\nu}\omega_\mu$. Кроме того для левой части (3.12) получим

$$\frac{\partial S}{\partial\dot{\omega}_1}=\frac{\partial S}{\partial\dot{\boldsymbol{\omega}}}\frac{\partial\dot{\boldsymbol{\omega}}}{\partial\dot{\omega}_1}=\mathbf{e}\cdot\sum_{\mu=1}^{K}\left(\sum_{\tau=1}^{\mu-1}\mathbf{r}_\tau\times m_\mu\boldsymbol{\sigma}_\mu+\mathbf{c}_\mu\times m_\mu\mathbf{w}_\mu+\mathbf{J}_\mu\dot{\boldsymbol{\Omega}}_\mu+\boldsymbol{\Omega}_\mu\times\mathbf{K}_\mu^*\right),$$

что, очевидно, сходно с левой частью уравнения (3.14). Поэтому в случае плоскопараллельного движения уравнения (5.1) несколько упрощаются и обобщаются:

$$\left(J_{\nu e}\Omega_\nu+\mathbf{r}_\nu\cdot\sum_{\mu=\nu+1}^{K}m_\mu\boldsymbol{\sigma}_\mu\times\mathbf{e}+\mathbf{c}_\nu\cdot(m_\nu\mathbf{w}_\nu\times\mathbf{e})\right)=M_\nu+Q_\nu-M_{\nu+1}-Q_{\nu+1},\nu=\overline{1,K},\qquad(5.2)$$

где $J_{\nu e}$ есть момент инерции ν-го тела относительно оси с направляющим вектором $\mathbf{e}$ в точке соединения ν-го и $\nu-1$-го тел.

Заметим, что уравнения (5.1) следует рассматривать в совокупности с шестью уравнениями (3.10) и (3.12), что дает полную динамическую систему уравнений Аппеля в случае плоской цепочки. Вместе с тем к уравнениям (5.2) необходимо добавить лишь два уравнения из (3.10), поскольку в случае плоскопараллельного движения будут выполнены соотношения $\mathbf{w}_\nu\cdot\mathbf{e}=0$, $\nu=\overline{1,K}$.

Для пространственной цепочки тел система динамических уравнений Аппеля состоит из уравнений (4.3), дополненных шестью скалярными уравнениями, следующими из уравнений типа (3.10), (3.12) с учетом соотношений (4.1), (4.2).

Система динамических уравнений Аппеля не замкнута. К ней необходимо добавить кинематические уравнения, выражающие конфигурацию и положение всей цепочки в пространстве. Для этого с первым (базовым) телом жестко свяжем подвижный ортонормированный репер $\mathrm{A}\mathbf{e}_1'\mathbf{e}_2'\mathbf{e}_3'$ с началом в точке A. Рассмотрим плоскую цепочку твердых тел раздела 3. Для нее примем $\mathbf{e}_3'=\mathbf{e}$, а единичный вектор $\mathbf{e}_1'$ направим вдоль вектора $\mathbf{e}\times(\mathbf{r}_1\times\mathbf{e})$. Положим вектор $\mathbf{e}_2'=\mathbf{e}_3'\times\mathbf{e}_1'$. Углы относительного вращения звеньев обозначим соответственно φ_ν, $\nu=\overline{2,K}$, так что $\dot{\varphi}_\nu=\omega_\nu$. Пусть начальная конфигурация цепочки соответствует значениям $\varphi_\nu=0$, $\nu=\overline{2,K}$. Зададим ее радиус-векторами $\boldsymbol{\rho}_\nu'$, $\nu=\overline{2,K}$, соединяющими шарнирные точки в репере $\mathrm{A}\mathbf{e}_1'\mathbf{e}_2'\mathbf{e}_3'$. В том же репере возьмем начальные радиус-векторы центров масс $\boldsymbol{\varsigma}_\nu'$, $\nu=\overline{1,K}$ звеньев, исходящие из соответствующих шарнирных точек. Поворот ν-го звена в репере $\mathrm{A}\mathbf{e}_1'\mathbf{e}_2'\mathbf{e}_3'$ происходит на полный угол

$$\psi_\nu=\sum_{\mu=2}^{\nu}\varphi_\mu,\quad \nu=\overline{2,K}.\qquad(5.3)$$

Следовательно, в репере $\mathrm{A}\mathbf{e}'_1\mathbf{e}'_2\mathbf{e}'_3$ радиус-вектор $\boldsymbol{\rho}_\nu$, соединяющий после полного поворота шарниры $\nu-1$-го и ν-го тел, и радиус-вектор $\boldsymbol{\varsigma}_\nu$, соединяющий после такого же поворота $\nu-1$-й шарнир и центр масс ν-го тела, можно выразить формулами [1,5]

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\rho}_\nu &= \boldsymbol{\rho}'_\nu + 2\cos(\psi_\nu/2)(\boldsymbol{\psi}_\nu \times \boldsymbol{\rho}'_\nu) + 2(\boldsymbol{\psi}_\nu \times (\boldsymbol{\psi}_\nu \times \boldsymbol{\rho}'_\nu))\\ \boldsymbol{\varsigma}_\nu &= \boldsymbol{\varsigma}'_\nu + 2\cos(\psi_\nu/2)(\boldsymbol{\psi}_\nu \times \boldsymbol{\varsigma}'_\nu) + 2(\boldsymbol{\psi}_\nu \times (\boldsymbol{\psi}_\nu \times \boldsymbol{\varsigma}'_\nu))\end{aligned}, \qquad (5.4)$$

где вектор $\boldsymbol{\psi}_\nu = \mathbf{e}\sin(\psi_\nu/2)$.

Рассмотрим пространственную цепочку тел из раздела 4. Введем параметры Родрига-Гамильтона, характеризующие вращение ν-го тела относительно $\nu-1$-го:

$$p_\nu = \cos(\varphi_\nu/2),\ \boldsymbol{\theta}_\nu = \mathbf{e}_\nu \sin(\varphi_\nu/2),\ \nu = \overline{2,K},$$

где вектор $\mathbf{e}_\nu$ характеризует поворот ν-го тела относительно $\nu-1$-го и жестко связан с $\nu-1$-м телом. Обозначим $\boldsymbol{\rho}_\nu^{\nu-\mu}$, $\boldsymbol{\varsigma}_\nu^{\nu-\mu}$, $\mu=\overline{1,\nu-1}$, векторы, составленные из координат векторов $\boldsymbol{\rho}_\nu^\nu$, $\boldsymbol{\varsigma}_\nu^\nu$, $\nu=\overline{2,K}$, в репере, жестко связанном с $\nu-\mu$-м телом. Векторы $\boldsymbol{\rho}_\nu^\nu$, $\boldsymbol{\varsigma}_\nu^\nu$, $\nu=\overline{2,K}$, задают положение ν-го шарнира и центра масс ν-го тела относительно $\nu-1$-го шарнира и жестко связаны с ν-м телом. Тогда координаты $\boldsymbol{\rho}_\nu^1$, $\boldsymbol{\varsigma}_\nu^1$, векторов $\boldsymbol{\rho}_\nu^\nu$, $\boldsymbol{\varsigma}_\nu^\nu$, $\nu=\overline{2,K}$, в репере $\mathrm{A}\mathbf{e}'_1\mathbf{e}'_2\mathbf{e}'_3$ могут быть найдены с помощью рекуррентных соотношений

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\rho}_\nu^{\nu-\mu} &= \boldsymbol{\rho}_\nu^{\nu-\mu+1} + 2p_{\nu-\mu+1}(\boldsymbol{\theta}_{\nu-\mu+1} \times \boldsymbol{\rho}_\nu^{\nu-\mu+1}) + 2(\boldsymbol{\theta}_{\nu-\mu+1} \times (\boldsymbol{\theta}_{\nu-\mu+1} \times \boldsymbol{\rho}_\nu^{\nu-\mu+1}))\\ \boldsymbol{\varsigma}_\nu^{\nu-\mu} &= \boldsymbol{\varsigma}_\nu^{\nu-\mu+1} + 2p_{\nu-\mu+1}(\boldsymbol{\theta}_{\nu-\mu+1} \times \boldsymbol{\varsigma}_\nu^{\nu-\mu+1}) + 2(\boldsymbol{\theta}_{\nu-\mu+1} \times (\boldsymbol{\theta}_{\nu-\mu+1} \times \boldsymbol{\varsigma}_\nu^{\nu-\mu+1}))\end{aligned}, \quad \mu=\overline{1,\nu-1}.$$

Далее по смыслу можно отождествить $\boldsymbol{\rho}_\nu^1 = \boldsymbol{\rho}_\nu$, $\boldsymbol{\varsigma}_\nu^1 = \boldsymbol{\varsigma}_\nu$, как векторы, составленные из координат векторов $\boldsymbol{\rho}_\nu^\nu$, $\boldsymbol{\varsigma}_\nu^\nu$ в репере $\mathrm{A}\mathbf{e}'_1\mathbf{e}'_2\mathbf{e}'_3$.

Для того, чтобы найти векторы $\mathbf{r}_\nu$ и $\mathbf{c}_\nu$ как для плоской, так и для пространственной цепочки тел, в репере $\mathrm{A}\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3$, поступательно движущемся вместе с точкой A, необходимо ввести параметры, характеризующие вращение первого тела. Поскольку относительно движения первого тела не имеется никаких предположений, воспользуемся параметрами Родрига-Гамильтона $(q_0, \mathbf{q})$, $\mathbf{q} = q_1\mathbf{e}_1 + q_2\mathbf{e}_2 + q_3\mathbf{e}_3$ [10]. Тогда кинематические уравнения, замыкающие систему уравнений движения, принимают вид [1]

$$\begin{aligned}\dot q_0 &= -0.5(\omega_1 q_1 + \omega_2 q_2 + \omega_3 q_3),\\ \dot q_1 &= \ \ 0.5(\omega_1 q_0 - \omega_2 q_3 + \omega_3 q_2),\\ \dot q_2 &= \ \ 0.5(\omega_2 q_0 - \omega_3 q_1 + \omega_1 q_3),\\ \dot q_3 &= \ \ 0.5(\omega_3 q_0 - \omega_1 q_2 + \omega_2 q_1),\end{aligned} \qquad (5.5)$$

где $\boldsymbol{\omega} = \omega_1\mathbf{e}_1 + \omega_2\mathbf{e}_2 + \omega_3\mathbf{e}_3$. Если предположить, что в начальный момент времени $t=0$ реперы $\mathrm{A}\mathbf{e}'_1\mathbf{e}'_2\mathbf{e}'_3$ и $\mathrm{A}\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3$ совпадают, то начальными данными для системы (5.5) будут значения $q_0(0)=1$, $q_1(0)=q_2(0)=q_3(0)=0$.

Найденные значения $(q_0, \mathbf{q})$ дают возможность вычислить координаты векторов $\mathbf{r}_\nu$ и $\mathbf{c}_\nu$ в репере $A\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3$:

$$\mathbf{r}_\nu = \boldsymbol{\rho}_\nu + 2q_0(\mathbf{q}\times\boldsymbol{\rho}_\nu) + 2(\mathbf{q}\times(\mathbf{q}\times\boldsymbol{\rho}_\nu)),\ \ \mathbf{c}_\nu = \varsigma_\nu + 2q_0(\mathbf{q}\times\varsigma_\nu) + 2(\mathbf{q}\times(\mathbf{q}\times\varsigma_\nu)).$$

Заключение

Представленная выше техника вывода уравнений Аппеля для твердого тела и цепочек твердых тел может быть использована и в том случае, когда к базовому телу подсоединяется не одна, а несколько цепочек твердых тел. Такие случаи возникают при математическом моделировании робототехнических систем, для которых помимо рассмотренных сил следует учитывать также реакции опоры. Примерами могут служить математические модели антропоморфных роботов, колесных, шагающих и колесно-шагающих машин, экскаваторы, некоторые снегоуборочные машины и др. При этом уравнения для характеристик основного тела станут несколько более громоздкими, но левые части уравнений для отдельных цепочек почти не изменятся.

Библиографический список

1. Голубев Ю.Ф. Основы теоретической механики. Учебник. 2-е изд., перераб. и дополн. — М.: Изд-во МГУ, 2000. — 719 с.
2. Голубев Ю.Ф., Алексеева Л.А. Модель динамики шагающего аппарата. Изв. АН СССР, Техническая кибернетика, № 3, 1975.
3. Охоцимский Д.Е., Голубев Ю.Ф. Механика и управление движением автоматического шагающего аппарата. — М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1984. — 312 с.
4. Погорелов Д.Ю. Введение в моделирование динамики систем тел: Учеб. пособие. Брянск: БГТУ, 1997. — 156 с.
5. Виттенбург И.С. Динамика систем твердых тел. М.: Мир, 1980. — 294 с.
6. Ха Зуй Кыонг. Применение экстремального принципа Гаусса к задачам расчета жестких покрытий аэродромов и автомобильных дорог. Диссертация, код специальности ВАК: 05.23.11, 1984. — 160 с.
7. Бахвалов С.В., Бабушкин Л.И., Иваницкая В.П. Аналитическая геометрия. Учебник для педагогических институтов. Издание 3-е. — М.: Просвещение 1965 — 368 с.
8. Лурье А.И. Аналитическая механика. — М.: Наука. Гл. ред. Физ.-мат. лит., 1961. — 824 с.
9. Дьяконов В.П. Энциклопедия компьютерной алгебры — М.: ДМК Пресс, 2009. — 1266 с. ISBN: 978-5-94074-490-0.
10. Голубев Ю.Ф. Алгебра кватернионов в кинематике твердого тела // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. 2013. № 39. 23 с. URL: http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2013-39