ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 67 за 2014 г.

ISSN 2071-2898 (Print)
ISSN 2071-2901 (Online)

Горючкина И.В.

О сходимости обобщенного степенного ряда, являющегося формальным решением алгебраического ОДУ в общем случае

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Горючкина И.В. О сходимости обобщенного степенного ряда, являющегося формальным решением алгебраического ОДУ в общем случае // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2014. № 67. 14 с.
URL: http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2014-67

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
ИМЕНИ М.В. КЕЛДЫША

И. В. Горючкина

О СХОДИМОСТИ ОБОБЩЕННОГО СТЕПЕННОГО РЯДА, ЯВЛЯЮЩЕГОСЯ ФОРМАЛЬНЫМ РЕШЕНИЕМ АЛГЕБРАИЧЕСКОГО ОДУ В ОБЩЕМ СЛУЧАЕ

Москва, 2014 г.

УДК 517.91

И. В. Горючкина. О сходимости обобщенного степенного ряда, являющегося формальным решением алгебраического ОДУ в общем случае. Препринт Института прикладной математики им. М. В. Келдыша РАН. Москва, 2014.

В этом препринте изучаются некоторые свойства обобщенных степенных рядов, которые являются формальными решениями алгебраических обыкновенных дифференциальных уравнений. В частности, изучается структура множества показателей степени таких рядов и предлагается доказательство теоремы о достаточном условии их сходимости.

I. V. Goryuchkina. On convergence of generalized power series that is a formal solution of algebraic ODE in the general case. Preprint of the Keldysh Institute of Applied Mathematics of RAS. Moscow, 2014.

In this preprint we study some properties of generalized power series that are formal solutions of algebraic ordinary differential equations. Particularly we study the structure of the set of the power exponents of these series and propose a proof of theorem on sufficient condition of their convergence.

Как известно, решения нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) не всегда удается найти в виде комбинаций от композиций элементарных и специальных функций. В таких случаях используюся различные виды локального и глобального анализа, позволяющие получить информацию о решении ОДУ. К методам локального анализа относятся методы вычисления формальных рядов, являющихся решениями уравнений. Найти формальное решение означает найти множество показателей степени и коэффициенты этого ряда. Выписать явно коэффициенты возможно крайне редко. Если говорить о степенных рядах, то обычно выписывают коэффициенты начальной части ряда, указывают количество произвольных постоянных ряда и степени независимой переменной, при которых стоят эти произвольные постоянные.

Здесь мы будем рассматривать формальные решения алгебраических (полиномиальных) ОДУ, имеющих вид *обобщенных степенных рядов*, т. е. степенных рядов с комплексными показателями степени и постоянными коэффициентами. Далее будем называть такого вида формальные решения *степенными разложениями решений*. И докажем, что множество показателей степени (носитель) степенных разложений лежит в множестве, которое является конечнопорожденной полугруппой по сложению. В случае вещественных показателей степени подобные утверждения и доказательства имеются в работах Д. Григорьева и М. Зингера [1], Ж. Кано [2] и А.Д. Брюно [3]. Также отметим, что в работе Брюно указано, что все утверждения, сформулированные для вещественных показателей степени, можно сформулировать и для комплексных показателей степени. Все эти авторы используют в своих работах различные обобщения метода многоугольника Ньютона для вычисления возможных асимптотик и степенных разложений решений аналитических ОДУ.

Что касается теорем о достаточных условиях сходимости формальных степенных и обобщенных степенных рядов, которые являются решениями алгебраических ОДУ, то для формального ряда Тейлора имеется утверждение и доказательство в работе Б. Мальгранжа [4], а для обобщенных степенных рядов с вещественными показателями степени имеется утверждение в работе А. Д. Брюно [3].

1. Исходное уравнение и его формальное решение

Рассматривается обыкновенное дифференциальное уравнение (ОДУ)

$$f(x, y, \delta y, \ldots, \delta^n y) = 0, \tag{1}$$

где $f(x, y, \delta y, \ldots, \delta^n y)$ – это многочлен своих аргументов с комплексными коэффициентами,

$$\delta = x\,\frac{d}{dx}, \qquad \delta^n = \delta^{n-1} \circ \delta,$$

т. е., например,

$$\delta^2 = \delta \circ \delta = x\,\frac{d}{dx}\left(x\,\frac{d}{dx}\right) = x^2\frac{d^2}{dx^2} + x\frac{d}{dx}.$$

Пусть уравнение (1) имеет формальное решение

$$y = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^{s_k}, \tag{2}$$

где $c_k,\ s_k \in \mathbb{C},\ -\infty < \operatorname{Re} s_k \leqslant \operatorname{Re} s_{k+1}$, и если $\operatorname{Re} s_k = \operatorname{Re} s_{k+1}$, то $\operatorname{Im} s_k < \operatorname{Im} s_{k+1}$,

$$\lim_{k\to+\infty} \operatorname{Re} s_k = +\infty,$$

количество показателей степени s_k с одинаковой вещественной частью $\operatorname{Re} s_k$ конечно.

Ряд (2) будем называть *обобщенным степенным рядом*. Если обобщенный степенной ряд (2) формально удовлетворяет уравнению (1), то такой ряд будем называть (*формальным*) *степенным разложением решения* уравнения (1).

Обозначим множество целых неотрицательных чисел через $\mathbb{Z}_+$, а множество вещественных неотрицательных чисел через $\mathbb{R}_+$.

2. Переход к уравнению специального вида

В случае когда

$$\left.\frac{\partial f(x, y_0, \ldots, y_n)}{\partial y_j}\right|_{\text{на решении (2)}} = a_j\, x^{\varepsilon} + b_j\, x^{\varepsilon+\theta_j} + \ldots, \tag{3}$$

где $y_j = \delta^j y,\ a_j,\ b_j,\ \varepsilon,\ \theta_j \in \mathbb{C},\ |a_0| + \ldots + |a_n| \neq 0,\ \operatorname{Re}\theta_j > 0$, то согласно лемме 1 [5] существует такой номер $\mu \in \mathbb{Z}_+$, что для любого целого $m \geqslant \mu$ с помощью преобразования

$$y = \sum_{k=0}^{m} c_k x^{s_k} + x^{s_m} u, \qquad m \geqslant \mu, \tag{4}$$

уравнение (1) приводится к уравнению специального вида

$$x^{\varepsilon}\ [L(\delta)u + g(x, u, \delta u, \ldots, \delta^n u)] = 0, \tag{5}$$

где $L(\delta)$ – это линейный дифференциальный оператор, который является нетривиальным многочленом от δ и обладает свойствами

$$L(\delta)\, c x^{\lambda} = c L(\lambda) x^{\lambda}, \quad L(\delta)\, x^{\lambda} u = x^{\lambda}\, L(\delta + \lambda) u, \quad c,\, \lambda \in \mathbb{C}, \tag{6}$$

$g(x,\, u,\, \delta u,\, \ldots,\, \delta^n u)$ – это конечная сумма членов вида

$$\alpha\, x^{q_1} u^{q_{20}} (\delta u)^{q_{21}} \ldots (\delta^n u)^{q_{2n}}, \tag{7}$$

$\alpha,\ q_1 \in \mathbb{C}$, $\mathrm{Re}\, q_1 > 0$, $q_{20}, \ldots, q_{2n} \in \mathbb{Z}_+$, $q_2 = q_{20} + \ldots + q_{2n}$.

Далее будем полагать, что условие (3) выполняется.

Сделаем в уравнении (1) преобразование (4) с $m = \mu$, получим уравнение специального вида

$$x^{\varepsilon_\mu} \left[L_\mu(\delta)\, u + g_\mu(x, u, \ldots, \delta^n u) \right] = 0,$$

где $\varepsilon_\mu \in \mathbb{C}$, $L_\mu(\delta)$ – это линейный дифференциальный оператор, который является нетривиальным многочленом от δ, $g_\mu(x,\, u,\, \ldots,\, \delta^n u)$ – это конечная сумма членов вида (7).

Многочлен $L_\mu(\lambda)$ степени $l \leqslant n$ имеет l корней $\lambda_1, \ldots, \lambda_l$. Их можно упорядочить согласно неубыванию их вещественных частей $\mathrm{Re}\, \lambda_1 \leqslant \ldots \leqslant \mathrm{Re}\, \lambda_l$. Поскольку выбор $m \geqslant \mu$ в преобразовании (4) произволен, то выберем m так, чтобы выполнялось еще и неравенство

$$\mathrm{Re}\, (s_m - s_\mu) > \mathrm{Re}\, \lambda_l. \tag{8}$$

Сделаем в уравнении (1) преобразование (4) с учетом вышеперечисленных условий выбора номера m, получим уравнение (5) с

$$L(s_k - s_m) \neq 0 \quad \text{для всех} \quad k > m, \tag{9}$$

$L(\delta) = L_\mu(\delta + s_m)$.

Итак, далее будем рассматривать уравнение

$$L(\delta) u + g(x, u, \delta u, \ldots, \delta^n u) = 0, \tag{10}$$

которое получается делением уравнения (5) на x^ε, в предположении, что для $L(\delta)$ выполнено условие (9).

Уравнение (10) имеет формальное решение

$$u = \sum_{k=m+1}^{\infty} c_k x^{s_k - s_m}, \tag{11}$$

где m, c_k и s_k те же, что и в формулах (2), (4) и (9).

Если многочлен $f(x, y_0, y_1, \ldots, y_n)$ и все его частные производные по $y_0, \ldots,$ y_n до k-го порядка обращаются в нуль тождественно на решении (2), а какая-то из частных производных $k+1$-го порядка не обращается в нуль тождественно, то в качестве исходного многочлена следует рассматривать k раз продифференцированный многочлен $f(x, y_0, y_1, \ldots, y_n)$ по переменным $y_0, \ldots, y_n$, такой, что его частная производная по одной из переменных $y_0, \ldots, y_n$ не обратится в нуль тождественно на решении (2).

Таким образом, задача изучения решений уравнения (1) всегда сводится к задаче изучения решений уравнения (5).

Еще раз отметим, что вычислить отрезок ряда (2) длины m можно пользуясь методами [1] – [3].

3. О носителях специального уравнения и его решения

Множество показателей степени $s_k - s_m$ формального решения (11) уравнения (10) назовем *носителем формального решения* (11).

Каждому слагаемому уравнения (10) вида (7) поставим в соответствие точку (его *векторный показатель степени*) (q_1, q_2), $q_2 = q_{20} + \ldots + q_{2n}$.

Совокупность всех точек (q_1, q_2), соответствующих всем слагаемым уравнения (10), назовем *комплексным носителем уравнения* (10).

Предложение 1. *Комплексный носитель уравнения* (10) *лежит в множестве*

$$\left\{\mathbf{K}(a_1, \ldots, a_s) \bigcup \{0\}\right\} \times \mathbb{Z}_+, \tag{12}$$

где

$$\mathbf{K}(a_1, \ldots, a_s) = \{m_1 a_1 + \ldots + m_s a_s,\ \operatorname{Re} a_j > 0,\ m_j \in \mathbb{Z}_+\}, \tag{13}$$

$a_1, \ldots, a_s$ *– это конечный набор линейно независимых над* $\mathbb{Z}$ *комплексных чисел таких, что образованная ими полугруппа* $\mathbf{K}(a_1, \ldots, a_s)$ *содержит все комплексные с положительными вещественными частями показатели степени переменной* x *уравнения* (10).

Доказательство. Преобразование (4) приводит полиномиальное уравнение (1) к уравнению (5) с конечным числом слагаемых. Поскольку показателей степени переменной x уравнения (10) конечное число и x входит в уравнение либо в нулевой степени, либо в комплексных степенях с положительными вещественными частями, то комплексные показатели степени x с положительными вещественными частями порождают полугруппу по сложению $\mathbf{G}$. Согласно лемме 3 [5], найдутся линейно независимые над $\mathbb{Z}$ комплексные числа $a_1, \ldots, a_s$ с $\operatorname{Re} a_1 > 0, \ldots, \operatorname{Re} a_s > 0,$ такие, что образованная ими полугруппа $\mathbf{K}(a_1, \ldots, a_s)$ будет содержать полугруппу $\mathbf{G}$. ■

Предложение 2. *Носитель формального решения* (11) *уравнения* (10) *содержится в множестве* (13).

Доказательство. Обозначим $U = (u, \delta u, \dots, \delta^n u)$. Далее подставим выражение $u = c_{m+1}x^{s_{m+1}-s_m} + v$ в уравнение (10), получим

$$L(s_{m+1}-s_m)c_{m+1}x^{s_{m+1}-s_m} + L(\delta)v + \left. g(x,U)\right|_{u\,=\,c_{m+1}x^{s_{m+1}-s_m}} + \tag{14}$$

$$\left.\frac{\partial g(x,U)}{\partial u}\right|_{u\,=\,c_{m+1}x^{s_{m+1}-s_m}} v + \dots + \left.\frac{\partial g(x,U)}{\partial\,\delta^n u}\right|_{u\,=\,c_{m+1}x^{s_{m+1}-s_m}} \delta^n v + \dots = 0.$$

Поскольку решение (11) удовлетворяет уравнению (10), то

$$g(x,0) = b_{m+1}x^{s_{m+1}-s_m} + \dots,$$

где $b_{m+1} \in \mathbb{C}$, и, следовательно,

$$\left. g(x,U)\right|_{u\,=\,c_{m+1}x^{s_{m+1}-s_m}} = b_{m+1}x^{s_{m+1}-s_m} + \dots.$$

Тогда получаем линейное по c_{m+1} уравнение

$$L(s_{m+1}-s_m)\,c_{m+1} \,+\, b_{m+1} \,=\, 0, \tag{15}$$

которое имеет решение $c_{m+1} = -b_{m+1}/L(s_{m+1}-s_m)$, где $L(s_{m+1}-s_m) \neq 0$ в силу (9). Поскольку

$$\mathbf{S}(g(x,0)) \subset \mathbf{K}(a_1, \dots, a_s),$$

то показатель степени

$$s_{m+1} - s_m \in \mathbf{K}(a_1, \dots, a_s).$$

Отметим, что уравнение (14) аналогично уравнению (5), т. е. уравнение (14) – это уравнение специального вида

$$L(\delta)v + \tilde{g}(x, v, \delta v, \dots, \delta^n v) = 0, \tag{16}$$

где $L(\delta)$ – это линейный дифференциальный оператор (тот же самый, что и в уравнении (10)), $\tilde{g}(x, v, \delta v, \dots, \delta^n v)$ – это сумма членов вида

$$\alpha\, x^{q_1} v^{q_{20}} (\delta v)^{q_{21}} \dots (\delta^n v)^{q_{2n}},$$

$\alpha,\ q_1 \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Re} q_1 > 0$, $q_{20}, \dots, q_{2n} \in \mathbb{Z}_+$. Нетрудно проверить, что носитель уравнения (16) лежит в множестве (12) (так как нетривиальная линейная комбинация с целыми неотрицательными коэффициентами точек множества (12) и точки $(s_{m+1}-s_m, 0)$ лежит в множестве (12)).

Очевидно, что, последовательно вычисляя члены $c_k x^{s_k - s_m}$ (аналогично тому, как вычислялся член $c_{m+1}x^{s_{m+1}-s_m}$) ряда (11), будем получать уравнения, подобные уравнению (16) (специального вида с одним и тем же оператором $L(\delta)$), носители которых лежат в множестве (12). Поскольку $L(s_k - s_m) \neq 0$ для всех $k > m$, то среди показателей степени ряда (11) нет показателей степени, отличных от тех, что лежат в множестве (13). Поэтому все показатели степени решения (11) уравнения (10) являются элементами конечнопорожденного Z_+-полумодуля (13). ■

В случае вещественных показателей степени в формальном решении (11) уравнения (10) множество (13) указано в [3] явно.

4. Вспомогательные рассуждения

Далее нам будет необходимо, чтобы для всех $k > p \geqslant m+1$ выполнялось неравенство

$$|s_k - s_m| \geqslant 1. \tag{17}$$

Для этого в уравнении (10) сделаем преобразование

$$u = \sum_{k=m+1}^{p} c_k x^{s_k - s_m} + w \tag{18}$$

где p выбран так, что $|s_p - s_m| \geqslant 1$. Получим уравнение

$$L(\delta)w + \tilde{g}(x, w, \delta w, \ldots, \delta^n w) = 0, \tag{19}$$

где линейный дифференциальный оператор $L(\delta)$ тот же, что и в уравнении (10), функция $\tilde{g}(x, w, \delta w, \ldots, \delta^n w)$ – это сумма членов вида

$$\alpha\, x^{q_1} w^{q_{20}} (\delta w)^{q_{21}} \ldots (\delta^n w)^{q_{2n}},$$

$\alpha, q_1 \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Re} q_1 > 0$, $q_{20}, \ldots, q_{2n} \in \mathbb{Z}_+$, $q_2 = q_{20} + \ldots + q_{2n}$. Кроме того, носитель уравнения (19) лежит в множестве (12).

Уравнение (19) имеет единственное (однозначным образом определенное) формальное решение

$$w = \sum_{k=p+1}^{\infty} c_k x^{s_k - s_m}, \tag{20}$$

где c_k и $s_k - s_m$ те же, что и в формуле (2), и для всех $s_k - s_m$ с $k \geqslant p+1$ выполнены неравенства (9) и (17).

Отметим, что формальное решение (20) определено единственным образом, поскольку при подстановке его в уравнение (19) для каждого коэффициента c_k получаем уравнение $L(s_k - s_m)\, c_k + b_k = 0$, $b_k \in \mathbb{C}$, которое в силу выполнения условия (9) имеет единственное решение $c_k = -b_k / L(s_k - s_m)$.

Рассмотрим ряд

$$\delta^l \left(\sum_{k=p+1}^{\infty} c_k\, x^{s_k - s_m} \right) = \sum_{k=p+1}^{\infty} c_k\, (s_k - s_m)^l\, x^{s_k - s_m}, \quad l \in \mathbb{Z}_+. \tag{21}$$

Обозначим $M = (m_1, \ldots, m_s),\ m_1, \ldots, m_s \in \mathbb{Z}_+$.

Если показатели степени $s_k - s_m \in \mathbf{K}(a_1, \ldots, a_s)$, то ряд (21) можно записать в виде

$$\sum_{M \in \mathbb{Z}_+^s} c_M\ (m_1 a_1 + \ldots + m_s a_s)^l\ x^{m_1 a_1 + \ldots + m_s a_s}, \tag{22}$$

где $c_M = c_k$ с $s_k - s_m = m_1 a_1 + \ldots + m_s a_s,\ k \geqslant p + 1$.

Введем обозначения

$$\xi_1 = x^{a_1},\ \ldots,\ \xi_s = x^{a_s}. \tag{23}$$

С учетом формулы (23) с рядом (22) можно отождествить ряд

$$\sum_{M \in \mathbb{Z}_+^s} c_M\ (m_1 a_1 + \ldots + m_s a_s)^l\ \xi_1^{m_1} \ldots \xi_s^{m_s}. \tag{24}$$

Если для коэффициентов $c_M \in \mathbb{C}$ ряда

$$\sum_{M \in \mathbb{Z}_+^s} c_M\ \xi_1^{m_1} \ldots \xi_s^{m_s} \tag{25}$$

и коэффициентов $C_M \in \mathbb{R}$ ряда

$$\sum_{M \in \mathbb{Z}_+^s} C_M\ \xi_1^{m_1} \ldots \xi_s^{m_s} \tag{26}$$

выполняются неравенства

$$C_M \geqslant |c_M| \geqslant 0 \qquad \text{для всех} \qquad M \in \mathbb{Z}_+^s, \tag{27}$$

то ряд (26) является *мажорантным* для ряда (25).

Если коэффициенты $c_M \in \mathbb{C}$ и $C_M \in \mathbb{R}$ удовлетворяют неравенствам (27), то ряд

$$\sum_{M \in \mathbb{Z}_+^s} C_M\ |m_1 a_1 + \ldots + m_s a_s|^n\ \xi_1^{m_1} \ldots \xi_s^{m_s} \tag{28}$$

мажорирует ряд

$$\sum_{M \in \mathbb{Z}_+^s} c_M\ (m_1 a_1 + \ldots + m_s a_s)^n\ \xi_1^{m_1} \ldots \xi_s^{m_s}. \tag{29}$$

5. О сходимости формального решения ОДУ

Теорема. *Если в уравнении* (10) *порядка* n (*которое получается из уравнения* (1) *с решением* (2) *с помощью преобразования* (4) *в случае выполнения условия* (3)) *линейный дифференциальный оператор* $L(\delta)$ *также имеет порядок* n*, то обобщенный степенной ряд* (11) *с носителем* (13) *абсолютно и равномерно сходится в секторе* $\mathcal{S}$ [1] *с вершиной в нуле достаточного малого радиуса и раствора меньшего* 2π.

Доказательство. Рассмотрим уравнение (19), которое получается из уравнения (10) с помощью замены переменной (18). Оно имеет порядок n. Согласно условиям теоремы 1 порядок оператора $L(\delta)$ также равен n. Докажем, что формальное решение (20) уравнения (19) (а значит, и формальное решение (11) уравнения (10)) абсолютно и равномерно сходится для достаточно малых $|x|$ и $|\arg x| < \pi$.

Для этого запишем уравнение (19) в виде

$$L(\delta)w = -\tilde{g}(x,\, w,\, \delta w, \delta^2 w, \ldots, \delta^n w). \tag{30}$$

Поскольку для оператора $L(\delta)$ уравнения (19) выполнены неравенства (9) и (17), то существует положительное вещественное число σ, такое, что

$$|L(s_k - s_m)| \geqslant \sigma\, |s_k - s_m|^n\,, \tag{31}$$

т. е.

$$0 \,<\, \sigma \,\leqslant\, \inf_{k \geqslant p+1} \frac{|L(s_k - s_m)|}{|s_k - s_m|^n}.$$

Обозначим $\delta^l\, w = w_l,\;\; l = 0, \ldots, n$. Тогда сумма $-\tilde{g}(x, w_0, w_1, \ldots, w_n)$ имеет вид

$$-\tilde{g}(x, w_0, w_1, \ldots, w_n) = \sum_{T,Q} \alpha_{\,T,Q}\;\; x^{t_1 a_1 + \ldots + t_s a_s}\;\; w_0^{q_{20}} w_1^{q_{21}} \ldots w_n^{q_{2n}}, \tag{32}$$

где $\alpha_{\,T,Q} \in \mathbb{C}$, $T = (t_1, \ldots, t_s) \in \mathbb{Z}_+^s$, $t_1 + \ldots + t_s > 0$, $Q = (\,q_{20}, \ldots, q_{2n}) \in \mathbb{Z}_+^{n+1}$.

Учитывая обозначения (23) и равенство (32), запишем уравнение (19) в виде

$$b_n w_n + \ldots + b_0 w_0 = \sum_{T,Q}\; \alpha_{\,T,Q}\; \xi_1^{t_1}\, \ldots\, \xi_s^{t_s}\;\; w_0^{q_{20}} w_1^{q_{21}} \ldots w_n^{q_{2n}}, \tag{33}$$

где $b_n w_n + \ldots + b_0 w_0 = L(\delta) w,\;\; b_0, \ldots, b_n \in \mathbb{C}$, $b_n \neq 0$.

[1] Раствор угла сектора $\mathcal{S}$ такой, что решение (11) уравнения (10) определяет в секторе $\mathcal{S}$ однозначную функцию. Из доказательства теоремы следует, что это решение является комбинацией голоморфной функции и степенных функций $x^{a_1}, \ldots, x^{a_s}$, $\operatorname{Re} a_i > 0$. Поэтому это решение можно продолжить как многозначную функцию на полную окрестность нуля.

Наряду с уравнением (33) рассмотрим уравнение

$$\sigma W = \sum_{T,Q} |\alpha_{T,Q}| \, \xi_1^{t_1} \ldots \xi_s^{t_s} \; W^{q_{20}} W^{q_{21}} \ldots W^{q_{2n}}, \tag{34}$$

где правая часть уравнения получается из правой части уравнения (33) заменой коэффициентов $\alpha_{T,Q}$ на их модули $|\alpha_{T,Q}|$ и всех переменных $w_0, \ldots, w_n$ на переменную W.

Метод построения уравнения (34) заимствован из §7, гл. 1, [6].

Покажем, что уравнение (34) в окрестности нуля $\xi_1 = \ldots = \xi_s = W = 0$ имеет единственное голоморфное решение (28), которое мажорирует ряд (29).

Обозначим дифференцирование по ξ_j через ∂_j, где $j = 1, \ldots, s$.

Подставим выражения

$$w_l = \sum_{M \in \mathbb{Z}_+^s} c_M \, (m_1 a_1 + \ldots + m_s a_s)^l \, \xi_1^{m_1} \ldots \xi_s^{m_s}, \quad l = 0, \ldots, n,$$

в уравнение (33), получим равенство, в левой и правой части которого стоят бесконечные ряды по $\xi_1, \ldots, \xi_s$. Ряд, который стоит в правой части этого равенства, обозначим через ϕ. Тогда для коэффициента c_M получаем уравнение

$$L(m_1 a_1 + \ldots + m_s a_s) \, c_M = \left. \frac{\partial_1^{m_1} \ldots \partial_s^{m_s} \phi}{m_1! \ldots m_s!} \right|_{\xi_1 = \ldots = \xi_s = 0}.$$

Пусть $H_l = (h_{1l}, \ldots, h_{sl})$, $K_i = (k_{1i}, \ldots, k_{si}) \in \mathbb{Z}_+^s$.

Для того чтобы упростить последующие формулы, введем обозначения для условий суммирования:

$$\mathrm{A}_M = \left\{ (H_0, \ldots, H_n) : \, t_1 + \sum_{l=0}^{n} h_{1l} = m_1, \; \ldots, \; t_s + \sum_{l=0}^{n} h_{sl} = m_s \right\};$$

$$\mathrm{B}_{H_l} = \left\{ (K_1, \ldots, K_{q_{2l}}) : \; \sum_{i=1}^{q_{2l}} k_{1i} = h_{1l}, \; \ldots, \; \sum_{i=1}^{q_{2l}} k_{si} = h_{sl} \right\}.$$

Воспользуемся формулой производной произведения

$$\frac{\partial_1^{m_1} \ldots \partial_s^{m_s} \left(\xi_1^{t_1} \ldots \xi_s^{t_s} \, w_0^{q_{20}} \ldots w_n^{q_{2n}} \right)}{m_1! \ldots m_s!} = \sum_{\mathrm{A}_M} \prod_{l=0}^{n} \frac{\partial_1^{h_{1l}} \ldots \partial_s^{h_{sl}} \, w_l^{q_{2l}}}{h_{1l}! \ldots h_{sl}!}, \tag{35}$$

где $m_1 \geqslant t_1, \ldots, m_s \geqslant t_s$.

Если $q_{2l} \geqslant 1$, то

$$\frac{\partial_1^{h_{1l}} \ldots \partial_s^{h_{sl}} \, w_l^{q_{2l}}}{h_{1l}! \ldots h_{sl}!} = \sum_{\mathrm{B}_{H_l}} \prod_{i=1}^{q_{2l}} \frac{\partial_1^{k_{1i}} \ldots \partial_s^{k_{si}} \, w_l}{k_{1i}! \ldots k_{si}!}.$$

Таким образом, получаем

$$\left.\frac{\partial_1^{m_1}\ldots\partial_s^{m_s}\phi}{m_1!\,\ldots\,m_s!}\right|_{\xi_1=\cdots=\xi_s=0} = \sum \alpha_{T,Q} \sum_{\mathrm{A}_M} \prod_{l=0}^{n} \left.\frac{\partial_1^{h_{1l}}\,\ldots\,\partial_s^{h_{sl}}\,w_l^{q_{2l}}}{h_{1l}!\,\ldots\,h_{sl}!}\right|_{\xi_1=\ldots=\xi_s=0}, \qquad (36)$$

где

$$\left.\frac{\partial_1^{h_{1l}}\ldots\partial_s^{h_{sl}}\,w_l^{q_{2l}}}{h_{1l}!\,\ldots\,h_{sl}!}\right|_{\xi_1=\ldots=\xi_s=0} = \sum_{\mathrm{B}_{H_l}} \prod_{i=1}^{q_{2l}} (k_{1i}\,a_1+\ldots+k_{si}\,a_s)^l\,c_{K_i} \qquad (37)$$

при $1\leqslant q_{2l}\leqslant h_{1l}+\ldots+h_{sl}$ (и $=0$ при $q_{2l}>h_{1l}+\ldots+h_{sl}$ или при $q_{2l}=0$).

Напомним, что в уравнении (33), а значит, и в формуле (35) показатели степени $t_1+\ldots+t_s>0$.

Для коэффициента c_M с $m_1+\ldots+m_s=1$ получаем уравнение

$$L(m_1a_1+\ldots+m_sa_s)\;c_M=\alpha_{M,(0,\ldots,0)},$$

а для коэффициента c_M с $m_1+\ldots+m_s>1$ получаем уравнение

$$L(m_1a_1+\ldots+m_sa_s)\,c_M=p_M\left(\{c_{K_i}\},\;\{\alpha_{\,T,Q}\}\right),$$

где $k_{1i}\leqslant m_1,\;\ldots,k_{si}\leqslant m_s$, но $k_{1i}+\ldots+k_{si}<m_1+\ldots+m_s$ (здесь стоит строгое неравенство, поскольку в правой части равенства (37) каждое слагаемое, содержащее множитель c_M, содержит множитель $c_{(0,\ldots,0)}$, равный нулю), p_M – это многочлен своих переменных, восстанавливаемый по формулам (36) и (37).

Теперь подставим решение (28) в уравнение (34), получим равенство, в левой и правой части которого стоят бесконечные ряды по $\xi_1,\ldots,\xi_s$. Учитывая аналогию и различие между правыми частями уравнений (33) и (34), для коэффициента C_M при $q_{20}+\ldots+q_{2n}\geqslant 1$ получаем выражение

$$\sigma|m_1a_1+\ldots+m_sa_s|^n\,C_M=\sum|\alpha_{T,Q}|\sum_{A_M}\prod_{l=0}^{n}\left.\frac{\partial_1^{h_{1l}}\ldots\partial_s^{h_{sl}}\,W^{q_{2l}}}{h_{1l}!\ldots h_{sl}!}\right|_{\xi_1=\ldots=\xi_s=0}, \qquad (38)$$

где при $q_{2l}\geqslant 1$

$$\left.\frac{\partial_1^{h_{1l}}\ldots\partial_s^{h_{sl}}W^{q_{2l}}}{h_{1l}!\ldots h_{sl}!}\right|_{\xi_1=\ldots=\xi_s=0} = \sum_{B_{H_l}}\prod_{i=1}^{q_{2l}}|k_{1i}\,a_1+\ldots+k_{si}\,a_s|^n\,C_{K_i}. \qquad (39)$$

Отметим, что если номер $M\in\mathbb{Z}_+^s$ такой, что $m_1a_1+\ldots+m_sa_s=s_k$, $k<p+1$, тогда для таких значений M коэффициенты $c_M=0$.

Тогда для коэффициентов c_M и C_M с $m_1+\ldots+m_s=1$ справедливы соотношения

$$\sigma\,|m_1a_1+\ldots+m_sa_s|^n\,C_M=|\alpha_{M,(0,\ldots,0)}|=|L(m_1a_1+\ldots+m_sa_s)|\;|c_M|$$

$$\Rightarrow \ |c_M| = \frac{\sigma|m_1a_1 + \ldots + m_sa_s|^n \, C_M}{|L(m_1a_1 + \ldots + m_sa_s)\,|} \leqslant C_M.$$

А при $m_1 + \ldots + m_s > 1$ имеет место равенство

$$\sigma \ |m_1a_1 + \ldots + m_sa_s|^n \ C_M = P_M\left(\{C_{K_i}\}, \{|\alpha_{\,T,Q}|\}\right),$$

где $k_{1i} \leqslant m_1, \ \ldots, k_{si} \leqslant m_s$, но $k_{1i} + \ldots + k_{si} < m_1 + \ldots + m_s$, P_M – это многочлен своих переменных, восстанавливаемый по формулам (38), (39).

При этом из построения следует, что

$$|p_M\left(\{c_{K_i}\}, \{|\alpha_{\,T,Q}|\}\right)| \leqslant |P_M\left(\{c_{K_i}\}, \{|\alpha_{\,T,Q}|\}\right)|.$$

Получаем соотношения:

$$|L(m_1a_1 + \ldots + m_sa_s)|\,|c_M| = |p_M\left(\{c_{K_i}\}, \ \{\alpha_{\,T,Q}\}\right)|$$

$$\leqslant |p_M\left(\{c_{K_i}\}, \ \{|\alpha_{\,T,Q}|\}\right)| \leqslant |P_M(\{c_{K_i}\}, \ \{|\alpha_{\,T,Q}|\})| \leqslant$$

$$\leqslant P_M(\{C_{K_i}\}, \ \{|\alpha_{\,T,Q}|\}) = \sigma\,|m_1a_1 + \ldots + m_sa_s|^n \, C_M$$

$$\Longrightarrow |c_M| \leqslant \frac{\sigma\,|m_1a_1 + \ldots + m_sa_s|^n \ C_M}{|L(m_1a_1 + \ldots + m_sa_s)|} \leqslant C_M.$$

Итак, мы доказали, что ряд (28) мажорирует ряд (29).

Уравнение (34) удовлетворяет условиям (в точке $\xi_1 = \ldots = \xi_s = W = 0$ обе части уравнения (34) и частная производная по W его правой части равны нулю, а частная производная по W его левой части не равна нулю, а равна $\sigma > 0$) аналитической версии теоремы Коши о неявной функции (см. §4, гл. I, [7]), согласно которой в окрестности нуля $\xi_1 = \ldots = \xi_s = W = 0$ оно имеет единственное голоморфное решение $W(\xi_1, \ldots, \xi_s)$, $W(0, \ldots, 0) = 0$ (однозначным образом определенное начальными данными). Так как формальное решение (28) определено единственным образом, то формальное и голоморфное решения совпадают. Следовательно, имеется такой поликруг $\mathcal{C} = \{(\xi_1, \ \ldots, \ \xi_s) : |\xi_1| \leqslant r, \ \ldots, \ |\xi_s| \leqslant r, \ r \in \mathbb{R}_+\}$, в котором степенной ряд (28) сходится абсолютно и равномерно. Кроме того, формальное решение (29) определено единственным образом и теми же самыми начальными данными, что и решение (28). А поскольку ряд (28) мажорирует ряд (29) и

$$|x^{a_1}| \leqslant |\xi_1|, \ \ \ldots, \ \ |x^{a_s}| \leqslant |\xi_s|$$

для достаточно малых $|x|$ и $|\arg x| < \pi$, то ряд (20) абсолютно и равномерно сходится для указанных x. ■

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Grigor'ev D.Y., Singer M.F.* Solving ordinary differential equations in terms of series with real exponents. Trans. Amer. Math. Soc. 1991. Vol. 327, P. 329-351.

2. *Cano J.* On the series defined by differential equations, with an extention of the Puiseux polygon construction to these equations. Analysis. 1993. Vol. 14. P. 103-119.

3. *Брюно А.Д.* Асимптотики и разложения решений обыкновенного дифференциального уравнения. УМН. 2004. Т. 59. № 3. С. 31–80.

4. *Malgrange B.* Sur le théorème de Maillet. Asymptotic Anal. 1989. Vol. 2. P. 1-4.

5. *Gontsov R.R., Goryuchkina I.V.* On the convergence of generalized power series satisfying an algebraic ODE. 2014. URL: http://arxiv.org/abs/1407.1330

6. *Брюно А.Д., Горючкина И.В.* Асимптотические разложения решений шестого уравнения Пенлеве. Труды московского математического общества. 2010. Т. 71. С. 6–118.

7. *Шабат Б.В.* Введение в комплексный анализ. Часть 2. Санкт-Петербург. Издательство "Лань". 2004. 464 с.