



ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 83 за 2014 г.



ISSN 2071-2898 (Print)
ISSN 2071-2901 (Online)

Батхин А.Б., Брюно А.Д.

**Исследование одной
вещественной
алгебраической поверхности**

Рекомендуемая форма библиографической ссылки

Батхин А.Б., Брюно А.Д. Исследование одной вещественной алгебраической поверхности // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2014. № 83. 28 с.
URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2014-83>

Публикации по материалам препринта

Батхин А.Б., Брюно А.Д. Исследование одной вещественной алгебраической поверхности // Программирование. 2015. № 2. С. 7-17. ISSN 0132-3474.

Batkhin A.B., Bruno A.D. Investigation of a real algebraic surface // Programming and Computer Software. 2015. Mar. Vol. 41, no. 2. Pp. 74-83. ISSN 0361-7688.

DOI: [10.1134/S0361768815020036](https://doi.org/10.1134/S0361768815020036)

URL: <http://link.springer.com/article/10.1134%2FS0361768815020036>

О р д е н а Л е н и н а
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М.В.КЕЛДЫША
Р о с с и й с к о й а к а д е м и и н а у к

А. Б. Батхин, А. Д. Брюно

**Исследование одной вещественной
алгебраической поверхности**

Москва — 2014

УДК 514.765+517.938

Александр Борисович Батхин, Александр Дмитриевич Брюно

Исследование одной вещественной алгебраической поверхности. Препринт Института прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН, Москва, 2014

Дается описание некоторого вещественного алгебраического многообразия в \mathbb{R}^3 . Это многообразие играет важную роль в исследовании нормализованного потока Риччи на обобщенных пространствах Уоллаха. Для понимания структуры многообразия дается описание всех его особых точек. В силу наличия внутренней симметрии изучаемого объекта, часть исследования проводится с использованием элементарных симметрических многочленов. Все вычисления в препринте выполнены с использованием алгоритмов компьютерной алгебры, в частности, с использованием базисов Грёбнера и алгоритмов работы с полиномиальными идеалами. В качестве сопутствующего результата сформулировано и доказано утверждение о структуре дискриминантной поверхности кубического многочлена.

Ключевые слова: поток Риччи, вещественная алгебраическая поверхность, особая точка.

Alexander Borisovich Batkhin, Alexander Dmitrievich Bruno

On investigation of the certain real algebraic surface

We provide the description of the certain real algebraic variety in \mathbb{R}^3 . This variety plays an important role in investigation of the normalized Ricci flow on generalized Wallach spaces. We provide the description of the all singular points of the variety. All computations in the preprint were done with the help of computer algebra algorithms, in particular with the help of Gröbner basis and algorithms of polynomial ideals. We stated and proved an auxiliary result on the structure of the discriminant surface of the cubic polynomial.

Key words: Ricci flow, real algebraic surface, singular point.

© Институт прикладной математики им. М. В. Келдыша, 2014

© А. Б. Батхин, 2014

© А. Д. Брюно, 2014

Введение

В работах [1—3] начато исследование трехпараметрического семейства специальных однородных пространств с точки зрения нормализованного потока Риччи. Поток Риччи в этом случае задает эволюцию инвариантных (однородных) римановых метрик на рассматриваемых однородных пространствах. Уравнение нормализованного потока Риччи сводится к системе двух обыкновенных дифференциальных уравнений с тремя параметрами a_1, a_2, a_3 :

$$\frac{dx_1}{dt} = \tilde{f}_1(x_1, x_2, a_1, a_2, a_3), \quad \frac{dx_2}{dt} = \tilde{f}_2(x_1, x_2, a_1, a_2, a_3), \quad (1)$$

где \tilde{f}_1 и \tilde{f}_2 — некоторые конкретные функции.

Особым точкам этой системы соответствуют инвариантные метрики Эйнштейна. В особой (неподвижной) точке x_1^0, x_2^0 система (1) имеет два собственных числа λ_1, λ_2 . Если хотя бы одно из них равно нулю, то особая точка x_1^0, x_2^0 называется *вырожденной*. В [1—3] доказана теорема, что множество Ω значений параметров a_1, a_2, a_3 , при которых система (1) имеет хотя бы одну вырожденную особую точку, описывается уравнением

$$\begin{aligned} Q(a_1, a_2, a_3) \stackrel{\text{def}}{=} & (2s_1 + 4s_3 - 1)(64s_1^5 - 64s_1^4 + 8s_1^3 + 240s_1^2s_3 - 1536s_1s_3^2 - \\ & - 4096s_3^3 + 12s_1^2 - 240s_1s_3 + 768s_3^2 - 6s_1 + 60s_3 + 1) - \\ & - 8s_1s_2(2s_1 + 4s_3 - 1)(2s_1 - 32s_3 - 1)(10s_1 + 32s_3 - 5) - \\ & - 16s_1^2s_2^2(52s_1^2 + 640s_1s_3 + 1024s_3^2 - 52s_1 - 320s_3 + 13) + \\ & + 64(2s_1 - 1)s_2^3(2s_1 - 32s_3 - 1) + 2048s_1(2s_1 - 1)s_2^4 = 0, \end{aligned} \quad (2)$$

где s_1, s_2, s_3 — элементарные симметрические многочлены, равные соответственно

$$s_1 = a_1 + a_2 + a_3, \quad s_2 = a_1a_2 + a_1a_3 + a_2a_3, \quad s_3 = a_1a_2a_3. \quad (3)$$

Здесь мы описываем строение вещественного алгебраического многообразия Ω в \mathbb{R}^3 .

Препринт состоит из введения, трех разделов и заключения. В разделе 1 дается схема вывода уравнения (2) и рассматриваются некоторые свойства симметрических многочленов, поскольку часть вычислений проще выполнять в переменных s_i . В разделе 2 вычисляются все особые точки множества Ω . В разделе 3 приводится описание всех компонент множества Ω и их взаимного расположения в \mathbb{R}^3 .

Далее в тексте полужирный шрифт означает вектор из пространства \mathbb{R}^3 , например, $\mathbf{a} \stackrel{\text{def}}{=} (a_1, a_2, a_3)$.

1. Уравнение алгебраического множества Ω

В [1—3] рассматривались уравнения нормализованного потока Риччи на обобщенных пространствах Валлаха. Эти уравнения представляют собой систему трех обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка в нормальной форме Коши относительно переменных $\mathbf{x} \stackrel{\text{def}}{=} (x_1, x_2, x_3)$ инвариантной римановой метрики:

$$\begin{aligned} \dot{x}_i &= f_i(\mathbf{x}, \mathbf{a}), \quad i = 1, 2, 3, \\ f_i &= -1 - a_i x_i \frac{g_i(\mathbf{x})}{x_1 x_2 x_3} + x_i B, \\ B &= \left(\frac{1}{a_1 x_1} + \frac{1}{a_2 x_2} + \frac{1}{a_3 x_3} - \frac{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}{x_1 x_2 x_3} \right) \cdot \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} \right)^{-1}, \end{aligned} \quad (4)$$

где $g_i = x_i^2 - x_k^2 - x_l^2$, а индексы i, k, l берутся как результат циклической перестановки тройки $(1, 2, 3)$.

Величина $V = \prod_{i=1}^3 x_i^{1/a_i}$ есть первый интеграл системы (4), что позволяет свести ее к системе (1).

Правые части системы (4) зависят от трех параметров \mathbf{a} . Особый интерес представляют собой те значения параметров \mathbf{a} , для которых исследуемая система ОДУ имеет особые точки, которым соответствуют метрики Эйнштейна.

Рассматривается множество особых точек

$$\Omega = \{(a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3 \mid (1) \text{ имеет хотя бы одну вырожденную особую точку}\}.$$

В [1, Lemma 4] доказано утверждение, что если точка \mathbf{a} принадлежит множеству Ω и для нее $s_2 \neq 0$ и $s_3 \neq 0$, то она является корнем многочлена Q из (2).

Для получения многочлена Q в работе [1] было проделано следующее:

1) получены выражения двух знаменателей правых частей системы (4) (третий знаменатель это линейная комбинация двух других);

2) вычислена линейная часть системы (4) в точках, отличных от начала координат, и для ее матрицы Якоби найден характеристический многочлен $p(\lambda)$;

3) многочлен $p(\lambda)$ это кубический многочлен со свободным членом тождественно равным нулю. Для него выписано условие, при котором он имеет нулевой корень кратности 2; последнее условие есть критерий того, что система (4) вырождена [1, Lemma 2];

4) поскольку три многочлена, полученные в пп. 1 и 3, являются однородными по переменным \mathbf{x} , то переменную x_3 полагают равной 1 и вычисляют элиминационный идеал;

5) многочлен Q есть нетривиальный множитель этого идеала, и он определяется выражением (2) в переменных \mathbf{s} .

В [1—3] исследована особая точка $P_1 = (1/4, 1/4, 1/4)$ многочлена (2), но там же отмечено, что представляет интерес изучение и других особых точек, удовлетворяющих условию $s_2 \neq 0$.

Далее предлагается исследование всех особых точек вещественного многообразия $\Omega = \{\mathbf{a} \in \mathbb{R}^3 | Q(\mathbf{a}) = 0\}$. Это исследование предполагает последовательное изучение всех особых точек различных порядков, описание многообразия Ω вблизи этих особых точек и вдоль регулярных компонент, а также описание его глобальной структуры.

Отметим, что исследование множества Ω проще проводить в переменных \mathbf{s} , поскольку в них уже учтена внутренняя симметрия многочлена Q относительно произвольной перестановки переменных a_i . Наличие этой перестановочной симметрии приводит к тому, что множество Ω инвариантно относительно циклической группы поворотов пространства \mathbb{R}^3 вокруг оси симметрии с направляющим вектором $(1, 1, 1)$ на угол $2n\pi/3$, $n \in \mathbb{N}$. Тем не менее изучение части особых точек удается непосредственно в переменных \mathbf{a} , а остальных — в переменных \mathbf{s} с последующей интерпретацией полученных результатов в переменных \mathbf{a} .

О структуре дискриминантной поверхности кубического многочлена. Переменные \mathbf{a} можно рассматривать как корни некоторого вспомогательного кубического многочлена $\chi(y)$ с коэффициентами \mathbf{s} :

$$\chi(y) \stackrel{\text{def}}{=} y^3 - s_1 y^2 + s_2 y - s_3. \quad (5)$$

Поскольку исследуется вещественное множество, то в пространстве симметрических переменных \mathbf{s} выделяются только те значения, которые обеспечивают вещественность корней многочлена χ . Условие вещественности корней многочлена (5) формулируются с помощью его дискриминанта $D(\chi)$

$$D(\chi) = -4s_1^3 s_3 + s_1^2 s_2^2 + 18s_1 s_2 s_3 - 4s_2^3 - 27s_3^2, \quad (6)$$

который с точностью до знака есть результат многочленов $\chi(y)$ и $\chi'(y)$.

Если все коэффициенты многочлена (5) вещественны, то поверхность $\mathcal{D}(\chi) \stackrel{\text{def}}{=} \{\mathbf{s} | D(\chi) = 0\}$, называемая *дискриминантной*, делит пространство своих коэффициентов \mathbf{s} на две области: Σ_1 — в которой все корни вещественные и Σ_2 — в которой имеется пара взаимно сопряженных комплексных корней.

Утверждение 1. Для того чтобы многочлен (5) имел все корни вещественные, необходимо и достаточно, чтобы его коэффициенты \mathbf{s} удовлетворяли неравенству $D(\chi) \geq 0$.

Следующее утверждение позволяет конструктивно описать дискриминантную поверхность.

Утверждение 2. *Дискриминантная поверхность $\mathcal{D}(\chi)$ является линейчатой развертывающейся поверхностью и имеет следующую параметризацию:*

$$\mathcal{D}(\chi) : \{s_1 = 3t + u, \quad s_2 = 3t^2 + 2tu, \quad s_3 = t^3 + t^2u\}. \quad (7)$$

Дискриминантная поверхность имеет однопараметрическое семейство особых точек в виде пространственной гладкой кривой σ , являющейся огибающей множества прямых и имеющей параметризацию

$$\sigma : \{s_1 = 3t, \quad s_2 = 3t^2, \quad s_3 = t^3\}. \quad (8)$$

На этой кривой многочлен (5) имеет единственный корень кратности три.

Доказательство. Если многочлен (5) с вещественными коэффициентами имеет единственный корень кратности три, то $\chi = (y - t)^3$, и, следовательно, его коэффициенты задаются формулой (8).

Если многочлен $\chi(y)$ имеет корень кратности два, то все корни его вещественные. Представим в этом случае многочлен χ в виде $\chi = (y - t)^2(y - (t + u))$. Тогда его коэффициенты задаются формулой (7). С другой стороны, кривая σ , как огибающая семейства прямых, имеет всюду ненулевой касательный вектор $\tau = (3, 6t, 3t^2)$. Если на каждой из прямых с направляющим вектором τ ввести параметр $u/3$, то получим параметрическое представление развертывающейся линейчатой поверхности [4], совпадающее с (7). \square

Матрица Якоби преобразования (3), определяющего переход от симметрических переменных \mathbf{s} к переменным \mathbf{a} , имеет вид

$$\mathcal{J} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial \mathbf{a}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a_2 + a_3 & a_1 + a_3 & a_1 + a_2 \\ a_2 a_3 & a_1 a_3 & a_1 a_2 \end{pmatrix},$$

а ее якобиан J равен

$$J \stackrel{\text{def}}{=} \det \mathcal{J} = (a_1 - a_2)(a_2 - a_3)(a_1 - a_3).$$

Следовательно, это преобразование вырождено на трех взаимно симметричных плоскостях \mathcal{M}_i , называемых нами *исключительными*:

$$\mathcal{M}_1 : a_1 = a_2, \quad \mathcal{M}_2 : a_2 = a_3, \quad \mathcal{M}_3 : a_3 = a_1. \quad (9)$$

Отметим, что, исключая с помощью соотношений (3) из выражения дискриминанта (6) переменные \mathbf{s} , получим, что $D(\chi) = J^2$. Таким образом, дискриминантная поверхность \mathcal{D} в переменных \mathbf{a} есть объединение исключительных плоскостей (9), которые, в свою очередь, пересекаются по оси симметрии $a_1 = a_2 = a_3$, на которой все три корня совпадают.

Наконец, для упрощения графического представления полученных результатов авторы выполнили еще одно линейное преобразование, повернув пространство параметров \mathbf{a} так, чтобы ось симметрии с вектором $(1,1,1)$ совпала с аппликатой (вертикалью), а все переменные \mathbf{a} умножили на величину $\sqrt{3}$, что позволило сохранить рациональность коэффициентов многочлена Q в новых переменных. Такое преобразование задается композицией матрицы $\text{diag}(\sqrt{3}, \sqrt{3}, \sqrt{3})$ и матрицы поворота на угол $\arccos \frac{1}{\sqrt{3}}$ вокруг оси $(1, -1, 0)$. Переход $\mathbf{a} = M\mathbf{A}$ от старых переменных \mathbf{a} к новым \mathbf{A} задается матрицей

$$M = \begin{pmatrix} \frac{1 + \sqrt{3}}{6} & \frac{1 - \sqrt{3}}{6} & \frac{1}{3} \\ \frac{1 - \sqrt{3}}{6} & \frac{1 + \sqrt{3}}{6} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

Указанное преобразование переводит плоскости

$$\mathcal{L}_c : \{\mathbf{a} \in \mathbb{R}^3 \mid a_1 + a_2 + a_3 = c\}, \text{ где } c = \text{const} \in \mathbb{R},$$

ортогональные оси симметрии, в плоскости с уравнением $A_3 = c$. В пространстве симметрических переменных \mathbf{s} плоскостям \mathcal{L}_c соответствуют плоскости $s_1 = c$.

Плоскости \mathcal{L}_c используются в дальнейшем для описания глобальной структуры множества Ω (см. раздел 3).

2. Особые точки множества Ω

Определение 1. Пусть $\varphi(X)$ — некоторый многочлен. Точка $X = X^0$ множества $\varphi(X) = 0$ называется *особой точкой k -го порядка*, если в этой точке обращаются в нуль все частные производные многочлена $\varphi(X)$ по x_1, \dots, x_n до k -го порядка включительно и не обращается в нуль хотя бы одна частная производная порядка $k + 1$.

Особые точки k -го порядка множества $\varphi(X) = 0$ определения 1 удобно вычислять с помощью базисов Грёбнера (см., например, [5]) соответствующих идеалов по следующей схеме.

1. Составляется идеал \mathcal{J}_k , состоящий из многочлена φ и всех его частных производных до k -го порядка включительно.

2. Проверяется гильбертова размерность идеала \mathcal{J} . Если она равна нулю, то для каждой из переменных x_i можно вычислить многочлен $\psi_i(x_i)$ наименьшей степени, зависящий только от x_i , который входит в идеал \mathcal{J} . Для каждого из многочленов $\psi_i(x_i)$ проверяется условие существования вещественных корней,

и в случае его выполнения эти корни могут быть найдены либо точно, либо приближенно.

3. Если идеал \mathcal{J} не является нульмерным, то вначале имеет смысл разложить его на примарные идеалы $\mathcal{P}\mathcal{J}_k$ и исследовать в первую очередь те из них, которые не являются нульмерными. Пусть $\mathcal{P}\mathcal{J}_k$ — один из таких идеалов. Если размерность нулей этого идеала равна 1, то, построив его базис Грёбнера, в качестве первого элемента базиса получим многочлен $\psi(x_i, x_j)$ от двух переменных. Вычисляем род алгебраической кривой, задаваемой нулями этого многочлена. Если он равен нулю, то нули идеала $\mathcal{P}\mathcal{J}_k$ можно описать в виде однопараметрического семейства, представленного в виде рациональных функций.

Таблица 1. Особые точки порядка 3

Название	Коорд. \mathbf{a}	Коорд. \mathbf{A}
$P_1^{(3)}$	$\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$	$\left(0, 0, \frac{3}{4}\right)$
$P_2^{(3)}$	$\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$	$\left(0, 0, -\frac{3}{2}\right)$
$P_3^{(3)}$	$\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$	$\left(-\frac{1 + \sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3} - 1}{2}, \frac{1}{2}\right)$
$P_4^{(3)}$	$\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$	$\left(\frac{\sqrt{3} - 1}{2}, -\frac{1 + \sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$
$P_5^{(3)}$	$\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$	$\left(1, 1, \frac{1}{2}\right)$

Вычисления особых точек множества Ω порядков 2 и 3 проводились в переменных \mathbf{a} . Однако на имеющихся у авторов вычислительной технике и программном обеспечении вычислить базис Грёбнера с лексикографическим порядком, а следовательно, и нули идеала \mathcal{J}_1 в этих переменных не удалось. Здесь пришлось проводить соответствующие вычисления в переменных \mathbf{s} , а полученные результаты интерпретировать в переменных \mathbf{a} или \mathbf{A} .

Особые точки второго и третьего порядков множества Ω . Эти точки удалось вычислить в исходных переменных \mathbf{a} .

Идеал \mathcal{J}_3 оказался нульмерным и был разложен на 4 примарных идеала, нули которых дали 5 особых точек третьего порядка. Их координаты приведены в таблице 1 и даны в исходных переменных \mathbf{a} и переменных \mathbf{A} , которые исполь-

зуются для визуализации множества Ω . Точки $P_{1,2}^{(3)}$ лежат на оси симметрии, а три остальные — в плоскости $\mathcal{L}_{1/2} : \{a_1 + a_2 + a_3 = 1/2\}$, которая играет существенную роль в понимании структуры множества Ω .

Идеал \mathcal{J}_2 также нульмерный и раскладывается на семь примарных идеалов. Первый из них не имеет вещественных нулей, следующие четыре идеала дают ранее вычисленные особые точки третьего порядка $P_i^{(3)}$, наконец, два оставшихся идеала определяют три взаимно симметричные особые точки второго порядка $P_i^{(2)}$, приведенные в таблице 2.

Таблица 2. Особые точки порядка 2

Название	Коорд. \mathbf{a}	Коорд. \mathbf{A}
$P_1^{(2)}$	$\left(\frac{1}{2}, 0, 0\right)$	$\left(\frac{1 + \sqrt{3}}{4}, \frac{1 - \sqrt{3}}{4}, \frac{1}{2}\right)$
$P_2^{(2)}$	$\left(0, \frac{1}{2}, 0\right)$	$\left(\frac{1 - \sqrt{3}}{4}, \frac{1 + \sqrt{3}}{4}, \frac{1}{2}\right)$
$P_3^{(2)}$	$\left(0, 0, \frac{1}{2}\right)$	$\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$

Поскольку особые точки порядков два и три образуют конечное дискретное множество, то они либо представляют собой изолированные особенности, либо точки пересечения (касания) однопараметрических семейств особых точек первого порядка.

Особые точки первого порядка множества Ω . Эти точки вычислить непосредственно в переменных \mathbf{a} у авторов не получилось, поэтому вычисления проводились в симметрических переменных \mathbf{s} .

В силу того, что преобразование (3) вырождено на исключительных плоскостях \mathcal{M}_i , то особые точки на них нужно исследовать отдельно. При этом в силу симметрии достаточно изучить особые точки на одной из трех исключительных плоскостей.

Особые точки на плоскости \mathcal{M}_1 . Подставим в многочлен $Q(\mathbf{a})$ уравнение $a_2 = a_1$ исключительной плоскости \mathcal{M}_1 и разложим полученное выражение на множители:

$$\tilde{Q}(a_1, a_3) = -(2a_3 + 1)(8a_1a_3 + 8a_3^2 - 4a_1 - 4a_3 + 1)(16a_1^3 + 16a_1^2a_3 - 4a_1 - 2a_3 + 1)^3.$$

Непосредственной проверкой убеждаемся, что только третий множитель

$$f(a_1, a_3) = 16a_1^3 + 16a_1^2a_3 - 4a_1 - 2a_3 + 1$$

является нулем идеала $\mathcal{J}_1(\mathbf{a})$. Два первых множителя являются результатом сечения множества Ω плоскостью \mathcal{M}_1 .

Алгебраическая кривая $f(a_1, a_3) = 0$ представляет собой кривую рода ноль и допускает рациональную параметризацию, которая дает следующее параметрическое представление множества \mathcal{F} особых точек первого порядка, лежащих в исключительной плоскости \mathcal{M}_1 :

$$\mathcal{F} : \left\{ a_1 = a_2 = \frac{t}{4}, \quad a_3 = -\frac{t^3 - 4t + 4}{4t^2 - 8} \right\}.$$

В переменных \mathbf{A} множество \mathcal{F} имеет следующее представление:

$$\mathcal{F} : \left\{ A_1 = A_2 = \frac{t^3 - 3t + 2}{2t^2 - 4}, \quad A_3 = \frac{t^3 - 4}{4t^2 - 8} \right\}$$

и показано на плоскости (A_1, A_3) на рис. 1. Кривая \mathcal{F} состоит из трех компонент f_1, f_2, f_3 , которые попарно связаны друг с другом через бесконечно удаленную точку. Каждая компонента кривой имеет две ветви, стремящиеся к своей асимптоте. Дальнейшие исследования множества Ω показали, что самая существенная его перестройка происходит при значении $s_1 = A_3 = 1/2$, поэтому ветви тех кривых, которые на рис. 1 проходят через прямую $A_3 = 1/2$, имеют дополнительные обозначения в виде верхнего индекса «+» или «-».

Особые точки первого порядка. Поскольку $\frac{\partial Q}{\partial \mathbf{a}} = J^T \frac{\partial Q}{\partial \mathbf{s}}$, то нули идеала $\mathcal{J}_1(\mathbf{a})$ могут быть найдены через нули идеала $\mathcal{J}_1(\mathbf{s})$ для всех тех точек пространства \mathbb{R}^3 , для которых $J(\mathbf{a}) \neq 0$.

Авторам удалось построить базис Грёбнера идеала $\mathcal{J}_1(\mathbf{s})$ с лексикографическим порядком и выполнить его разложение на примарные идеалы. Из всех найденных примарных идеалов только три идеала не были нульмерными, т. е. имели бесконечное множество решений. В нашем случае нулями этих идеалов являются однопараметрические семейства.

Нули первого из идеалов $\mathcal{J}_1^{(1)} = \{s_1 - 3/4, 32s_2 - 64s_3 - 5\}$ представляют собой прямую, лежащую в плоскости $s_1 = A_3 = 3/4$. Эта прямая пересекается с дискриминантной поверхностью $\mathcal{D}(\chi)$ в точке с координатами $\left(\frac{3}{4}, -\frac{15}{64}, -\frac{25}{128}\right)$

и имеет одну общую точку $\left(\frac{3}{4}, \frac{3}{16}, \frac{1}{64}\right)$ с огибающей σ . Таким образом, в пере-

менных \mathbf{a} и \mathbf{A} этому идеалу соответствует некоторая плоская кривая с изолированной особой точкой. Кривая является рациональной с параметризацией

$$A_1 = k t h(t), \quad A_2 = k h(t), \quad A_3 = -k/3, \quad (10)$$

где

$$h(t) = \frac{t^2 + 1}{(t + 1)(t^2 - 4t + 1)}, \quad k = -\frac{9}{4}.$$

На рисунке 10 эта кривая обозначена $G_{2,3}$ и состоит из трех взаимно симметричных ветвей и изолированной особой точки $P_1^{(3)}$, которой соответствует значение параметра $t = \pm i$. По кривой пересекаются поверхности G_2 и G_3 , сечения которых на рис. 1 обозначены g_2^+ и g_3^- соответственно.

Нули второго из идеалов $\mathcal{J}_1^{(2)} = \{2s_1 - 1, s_2 - 2s_3\}$ задают прямую в плоскости $s_1 = A_3 = 1/2$. Эта прямая пересекает дискриминантную поверхность $\mathcal{D}(\chi)$ в точке $(1/2, 0, 0)$ и проходит через точку $(-1/2, -1/4, -1/8)$. В переменных \mathbf{a} или \mathbf{A} этим точкам соответствуют особые точки второго порядка $P_{1,2,3}^{(2)}$ и $P_{3,4,5}^{(3)}$ соответственно, а лучу — три взаимно симметричные попарно пересекающиеся в точках $P_{3,4,5}^{(3)}$ прямые. Эти прямые показаны красным цветом на рис. 13. Еще три взаимно симметричные прямые, пересекающиеся попарно в особых точках второго порядка $P_{1,2,3}^{(2)}$, показаны на рис. 13 синим цветом. Заметим, что сечение множества Ω плоскостью $\mathcal{L}_{1/2}$ представляет собой шесть прямых, разбитых на две тройки.

Наконец, нули третьего из найденных идеалов $\mathcal{J}_1^{(3)}$ задают в пространстве переменных \mathbf{s} некоторую кривую рода 1. Для исследования этой кривой авторы применили следующий прием. Идеал $\mathcal{J}_1^{(3)}$ был пересчитан в переменных \mathbf{a} , и для него был вычислен базис Грёбнера с лексикографическим порядком. Это позволило первый элемент базиса представить в виде многочлена от двух переменных a_2 и a_3 . Как указано выше, нули этого многочлена задают алгебраическую кривую рода 1, для которой можно построить каноническую форму Вейерштрасса и, следовательно, получить параметрическое представление кривой через эллиптическую функцию Вейерштрасса и ее производную. На самом деле, этого не потребовалось, ибо при вычислении особых точек алгебраической кривой были отобраны только те, которые являются нулями всего идеала $\mathcal{J}_1^{(3)}$. Исследование кривой в каждой из этих точек показало, что

- 1) они являются изолированными;
- 2) они совпадают с ранее вычисленными особыми точками третьего и второго порядков.

Таким образом, третий из найденных идеалов не дал в вещественном случае никакой новой информации об особых точках первого порядка.

Также были исследованы все нульмерные примарные идеалы, которые не дали новых особых точек.

Итак, имея информацию обо всех особых точках множества Ω , теперь можно дать описание его глобальной структуры.

3. Глобальная структура множества Ω

Авторы не ставили перед собой цель в этой работе дать исчерпывающий локальный анализ множества Ω вблизи всех особенностей так, как это было сделано в работах [6; 7]. Это планируется сделать в ближайшем будущем. Здесь дано глобальное описание множества Ω с точки зрения его перестроек при изменении координаты A_3 , т. е. при следовании вдоль оси симметрии.

Условимся о следующей нотации. Каждая двумерная компонента множества Ω обозначается буквой F или G с соответствующим нижним индексом в зависимости от наличия особых точек первого порядка: $F \cap \mathcal{M}_i = f$, $G \cap \mathcal{M}_i = g$. Одномерные множества особых точек обозначаются символом \mathcal{F} с соответствующим нижним индексом. Авторы считают, что самая существенная перестройка множества Ω происходит при переходе через значение $s_1 = A_3 = 1/2$. Поэтому те компоненты множества, которые пересекают плоскость $\mathcal{L}_{1/2}$ или касаются ее, делятся на две части, обозначаемые верхним индексом $+$ или $-$. Те компоненты, которые не пересекаются (не касаются) с плоскостью $\mathcal{L}_{1/2}$, не имеют в своем обозначении указанных выше индексов ($+$ или $-$). На сечении множества Ω исключительной плоскостью \mathcal{M}_1 соответствующие множества обозначаются строчным буквами.

Дадим описание структуры множества Ω , двигаясь вдоль оси симметрии A_3 начиная с отрицательных значений $A_3 \leq -2$ до значения $A_3 < 1/2$, затем начиная с положительных значений $A_3 \geq 1$ до значения $A_3 > 1/2$ и, наконец, при $A_3 = 1/2$.

На рисунках 2—13 изображены сечения множества Ω в координатах A_1, A_2 при

$$A_3 = -2, -3/2, -5/4, \rho^*, -1, 0, 0.45, 1/2, 0.505, 5/8, 3/4, 1.$$

Из них на плоскостях

$$A_3 = -3/2, \rho, 1/2, 3/4$$

имеются особые точки порядков 2 и 3 или происходит сращивание отдельных фрагментов семейств. На остальных плоскостях \mathcal{L}_c показано строение этих семейств между бифуркациями. На рисунках 2—13 пунктирными прямыми разделены фундаментальные области. Все объекты, приведенные в одной из фундаментальных областей, повторяются в других областях в силу симметрии

*Значение величины ρ см. ниже в (11)

преобразования (3). Чтобы не загромождать рисунки, все обозначения приводятся по возможности в одной их фундаментальных областей.

Структура множества Ω при $A_3 < 1/2$. Рассмотрим, что происходит с множеством Ω при увеличении A_3 от больших отрицательных значений до $A_3 < 1/2$.

При $A_3 < -3/2$ множество Ω состоит из четырех компонент F_1^-, F_2, G_1, G_2^- (см. рис. 2). Компонента G_1 , состоящая из двух частей, не пересекается с другими компонентами множества, не имеет особых точек и при $A_3 \rightarrow -\infty$ асимптотически приближается в плоскости \mathcal{M}_i к компоненте F_2 . Объединение $G_2^- \cup F_2$ образует одно семейство (рис. 2).

При $A_3 = -3/2$ (рис. 3) компонента G_1 касается плоскости $\mathcal{L}_{-3/2}$ вдоль рациональной кривой с параметризацией, задаваемой формулой (10) для $k = 9/2$. Объединение $G_2^- \cup F_2$ стягивается в одну точку $P_2^{(3)}$. Компонента F_1^- при указанных значениях A_3 также ведет себя изолированно и содержит ветвь f_1^- особых точек первого порядка.

Наконец, компонента G_2^- содержит однопараметрическое семейство f_2 особых точек первого порядка, которое достигает максимума по переменной A_3 при значении

$$A_3 = \rho \stackrel{\text{def}}{=} -\frac{3(\zeta^2 + 2)}{8\zeta} \approx -1.10676, \text{ где } \zeta = \sqrt[3]{4 + 2\sqrt{2}}. \quad (11)$$

Сечения множества Ω плоскостями \mathcal{L}_c при $c \in \left\{-2, -\frac{3}{2}, -\frac{5}{4}, \rho, -1, 0\right\}$ показаны на рисунках 2, 3, 4, 5, 6 и 7 соответственно.

При $A_3 = -5/4$ (рис. 4) имеются семейства F_1^-, F_2, G_2^- . При этом $F_2 \cup G_2^-$ вблизи оси симметрии образуют одно семейство, а F_1^- и другая часть F_2 — два независимых семейства.

При $A_3 = \rho$ (рис. 5) две части семейства F_2 встречаются, и вместе с семейством G_2^- они образуют одно семейство. Семейство F_1^- остается изолированным.

При $A_3 = -1$ (рис. 6) имеются только два семейства F_1^- и G_2^- , каждое состоит из трех компонент.

То же самое при $A_3 = 0$ (рис. 7).

При $A_3 = 0.45$ (рис. 8) расположение семейств аналогично $A_3 = 0$ (рис. 7) с той лишь разницей, что семейства F_1^- и G_2^- подходят близко друг к другу.

Структура множества Ω при $A_3 > 1/2$. Рассмотрим, что происходит с множеством Ω при уменьшении A_3 от больших положительных значений до $A_3 > 1/2$.

При $A_3 = 1$ (рис. 9) имеются три семейства F_3^-, F_3^+, F_1^+ и три семейства G_2^+, G_3^-, G_3^+ . Объединение $F_3^+ \cup G_3^+$ образует одно семейство, а остальные — изолированные.

При $A_3 = 3/4$ (рис. 10) объединение $F_3^+ \cup G_3^+$ стягивается в особую точку $P_1^{(3)}$, а семейства G_2^+ и G_3^- совпадают. Кроме того имеются изолированные семейства F_3^- и F_1^+ .

При $A_3 = 5/8$ (рис. 11) объединение $F_3^+ \cup G_3^+$ образует одно семейство и имеются изолированные семейства F_3^- , F_1^+ , G_2^+ и G_3^- .

При $A_3 = 0.505$ (рис. 12) объединение $F_3^+ \cup G_3^+$ образует одно семейство вблизи оси симметрии, семейства F_1^+ и G_2^+ расположены очень близко и на рисунке сливаются. Остальные семейства F_3^- и G_3^- изолированы.

Отметим, что в работах [1—3] был правильно описан фрагмент части G_3^+ , который содержится в кубе $0 \leq a_i \leq 1/2$, $i = 1, 2, 3$.

Структура множества Ω вблизи значения $A_3 = 1/2$. При $A_3 = 1/2$ (рис. 13) семейства F_3^- , F_3^+ , G_3^- , G_3^+ объединяются в одно семейство, которое показано синим цветом. Семейства F_1^+ и G_2^+ также сливаются в одно семейство, которое показано красным цветом. Кроме того, имеются отрезки прямых между особыми точками третьего порядка $P_3^{(3)}$, $P_4^{(3)}$, $P_5^{(3)}$, включающие особые точки $P_1^{(2)}$, $P_2^{(2)}$, $P_3^{(2)}$. Эти отрезки показаны черным цветом. Они не принадлежат ни одному из семейств.

Заключение

Итак, вещественное алгебраическое многообразие Ω состоит из нескольких двумерных поверхностей и шести открытых изолированных отрезков, расположенных при $A_3 = 1/2$ между особыми точками второго и третьего порядков.

Список литературы

1. *Abiev N. A., Arvanitoyeorgos A., Nikonorov Y. G., Siasos P.* The dynamics of the Ricci flow on generalized Wallach spaces // *Differential Geometry and its Applications*. — 2014. — Vol. 35. — Pp. 26–43.
2. *Abiev N. A., Arvanitoyeorgos A., Nikonorov Y. G., Siasos P.* The Ricci Flow on Some Generalized Wallach Spaces // *Geometry and its Applications*. Vol. 72 / ed. by V. Rovenski, P. Walczak. — Springer, 2014. — Pp. 3–37. — (Springer Proceedings in Mathematics & Statistics).
3. *Абиев Н. А., Арванитойоргос А., Никоноров Ю. Г., Сиасос П.* Нормализованный поток Риччи на обобщенных пространствах Уоллаха // *Математический форум*. Т. 8, ч. 1. Исследования по математическому анализу. — Владикавказ: ЮМИ ВНЦ РАН и РСО-А, 2014. — С. 25—42.
4. *Фиников С. П.* Теория поверхностей. — М.: ГТТИ, 1934. — 203 с.
5. *Кокс Д., Литтл Д., О’Ши Д.* Идеалы, многообразия и алгоритмы. Введение в вычислительные аспекты алгебраической геометрии и коммутативной алгебры: Пер. с англ. — М.: Мир, 2000. — 687 с.
6. *Брюно А. Д., Батхин А. Б.* Разрешение алгебраической сингулярности алгоритмами степенной геометрии // *Программирование*. — 2012. — № 2. — С. 12—30.
7. *Батхин А. Б., Брюно А. Д., Варин В. П.* Множества устойчивости многопараметрических гамильтоновых систем // *ПММ*. — 2012. — Т. 76, № 1. — С. 80—133.

Рисунки

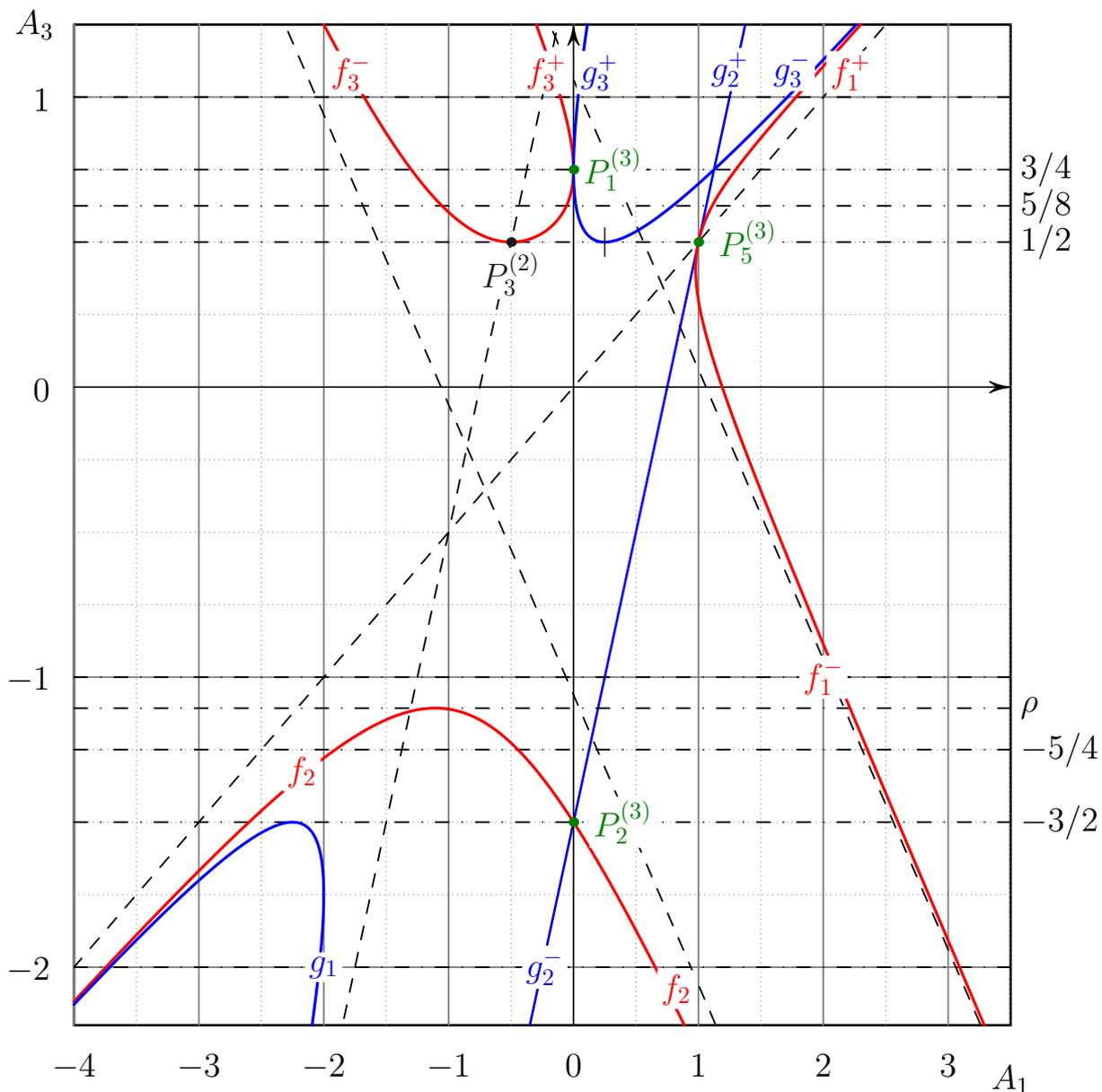


Рис. 1. Сечение множества Ω исключительной плоскостью \mathcal{M}_1 . Показаны особые точки третьего порядка $P_1^{(3)}$, $P_2^{(3)}$, $P_5^{(3)}$ (темно-зеленым), второго порядка $P_3^{(2)}$ (темно-серым), компоненты f_1^\pm , f_2 и f_3^\pm семейства f особых точек первого порядка (красным), а также кривые g_1 , g_2^\pm , g_3^\pm (синим) пересечения плоскости \mathcal{M}_1 с неособыми компонентами множества Ω . Штрих-пунктирными линиями показаны уровни, по которым строятся сечения множества Ω , а пунктирными — асимптоты кривых f и g . Горизонтали $A_3 = 0.45, 0.505$ опущены, ибо они на рисунке сливаются с $A_3 = 1/2$.

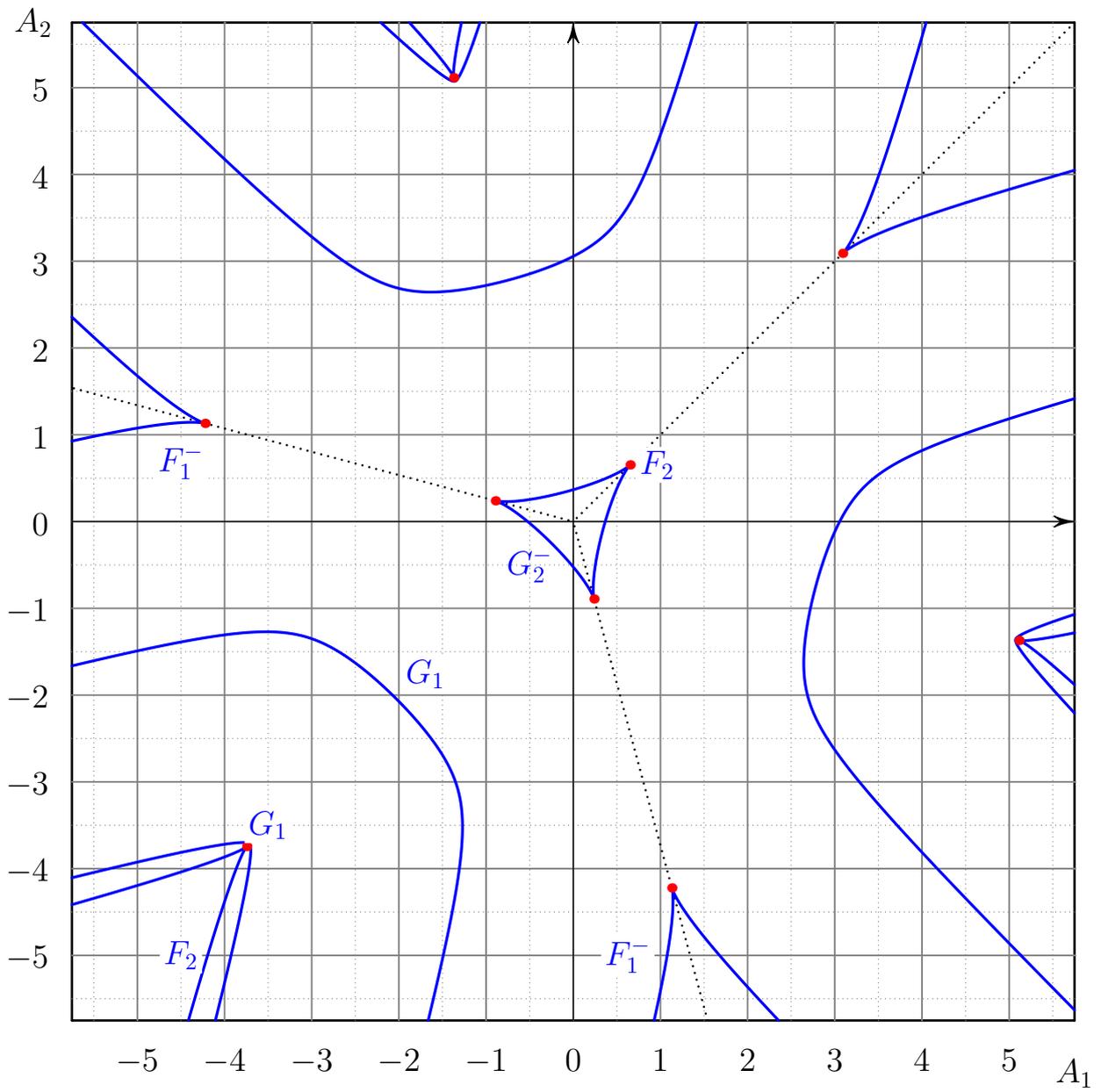


Рис. 2. Сечение множества Ω плоскостью \mathcal{L}_{-2} .

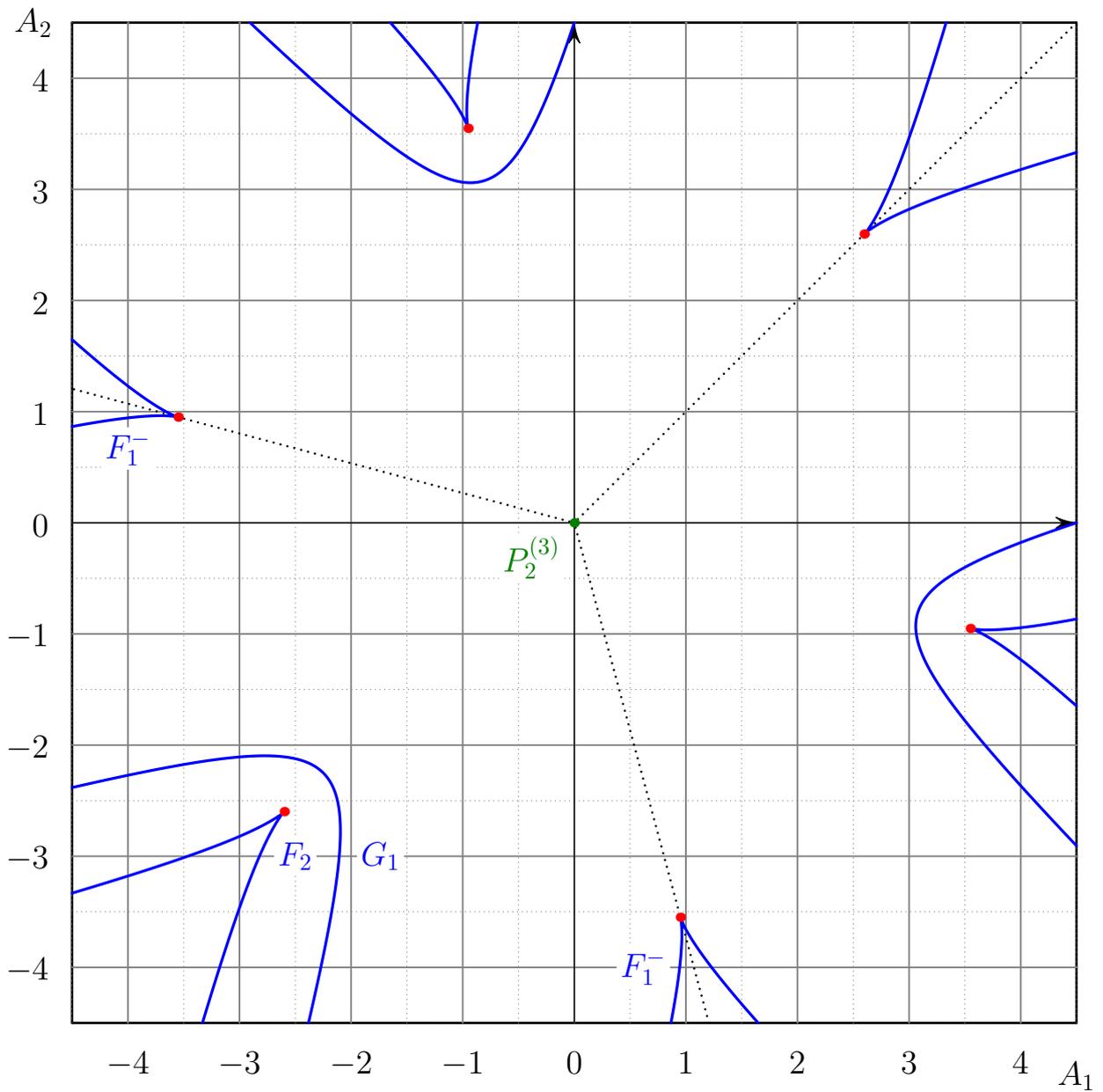


Рис. 3. Сечение множества Ω плоскостью $\mathcal{L}_{-3/2}$. Показана особая точка третьего порядка $P_2^{(3)}$ (темно-зеленым).

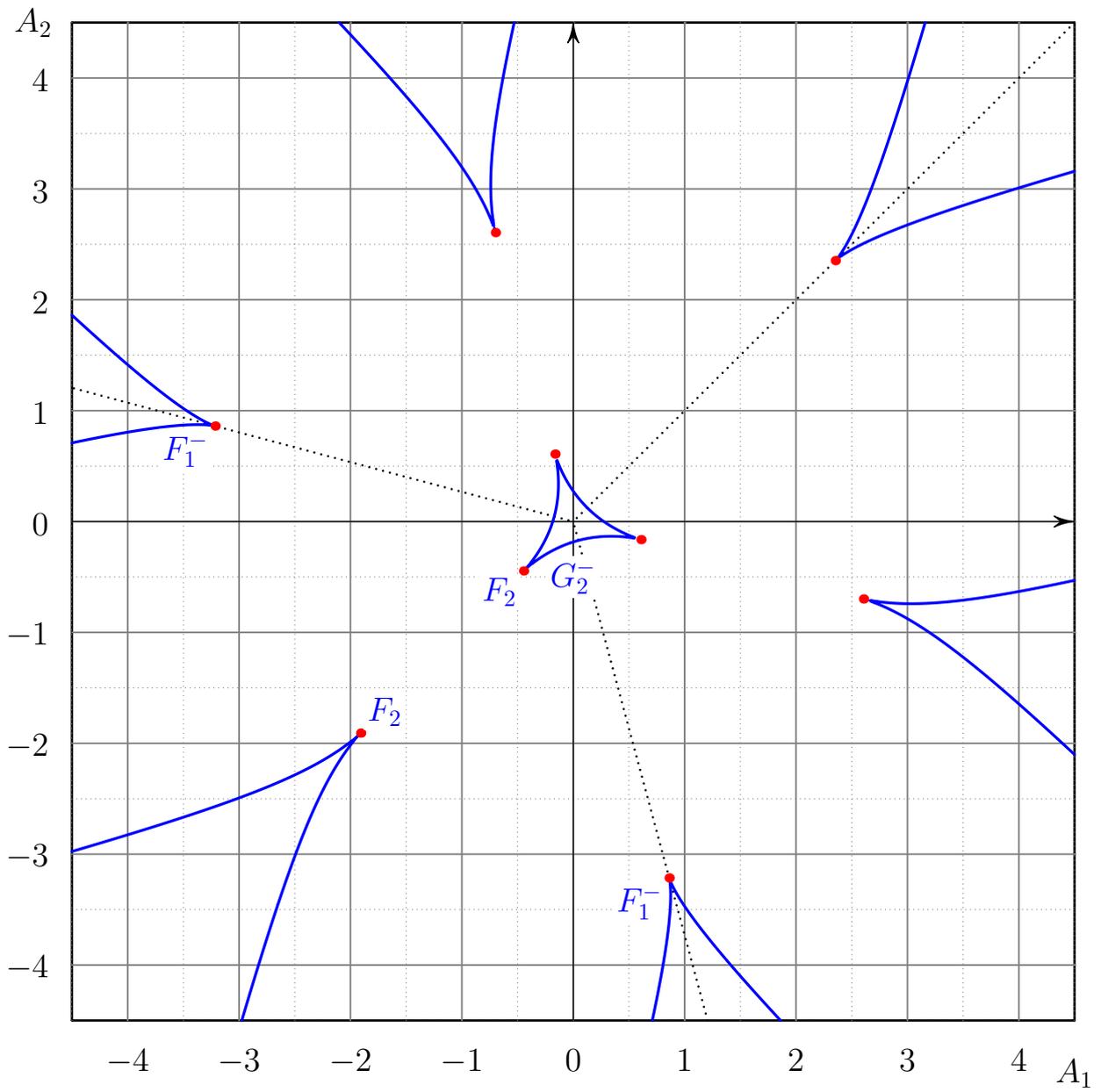


Рис. 4. Сечение множества Ω плоскостью $\mathcal{L}_{-5/4}$.

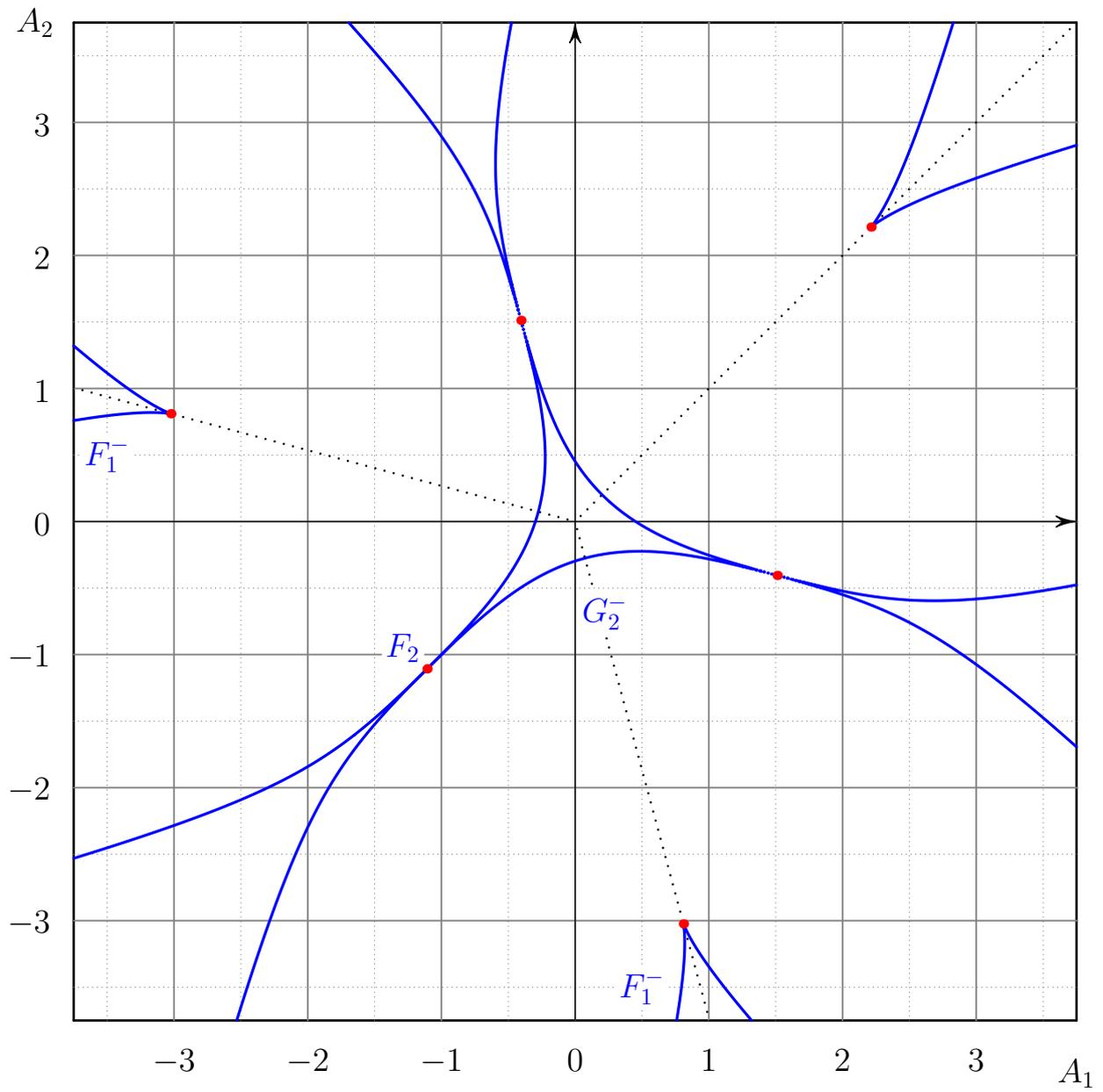


Рис. 5. Сечение множества Ω плоскостью \mathcal{L}_ρ (см. (11)).

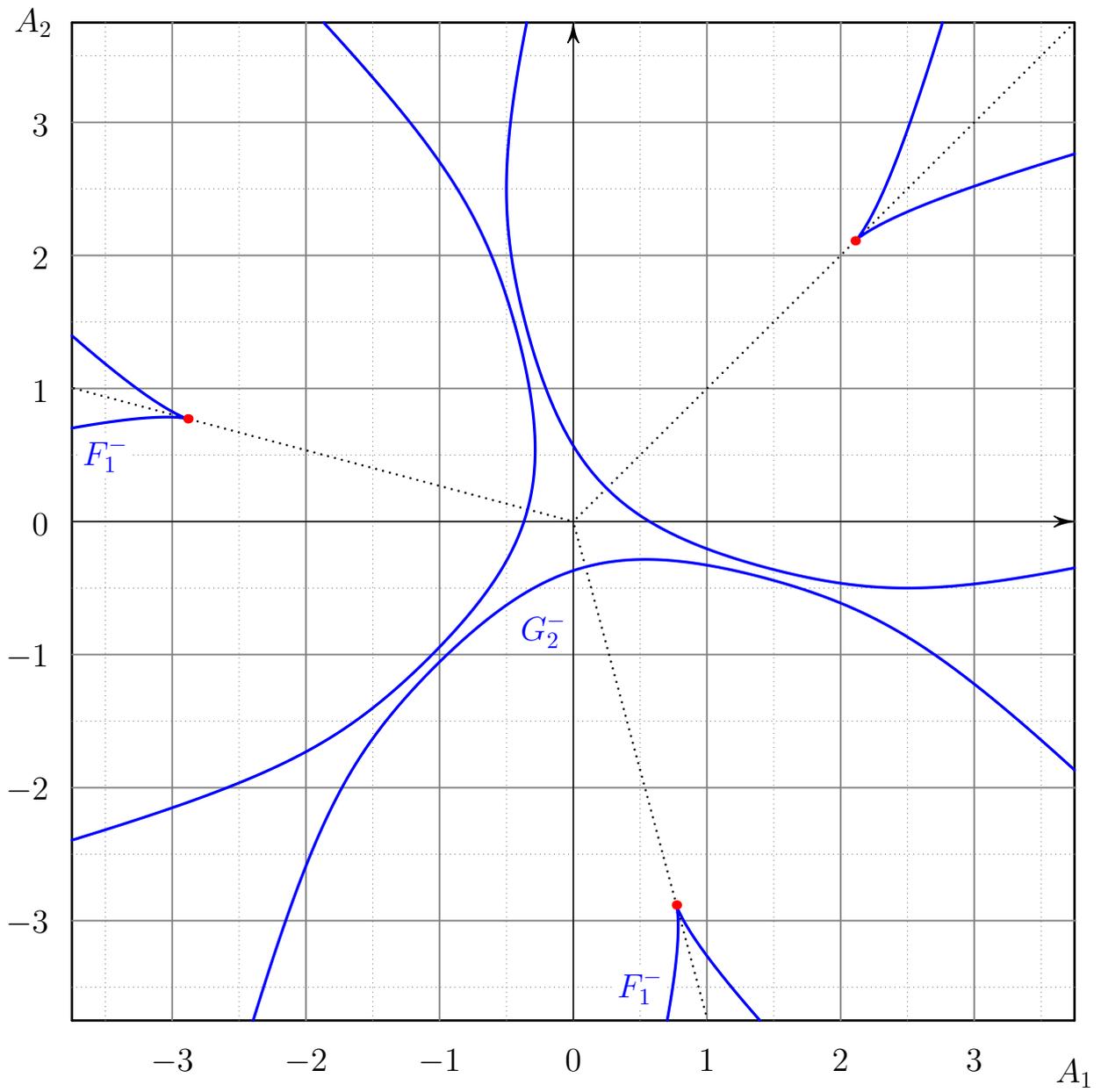


Рис. 6. Сечение множества Ω плоскостью \mathcal{L}_{-1} .

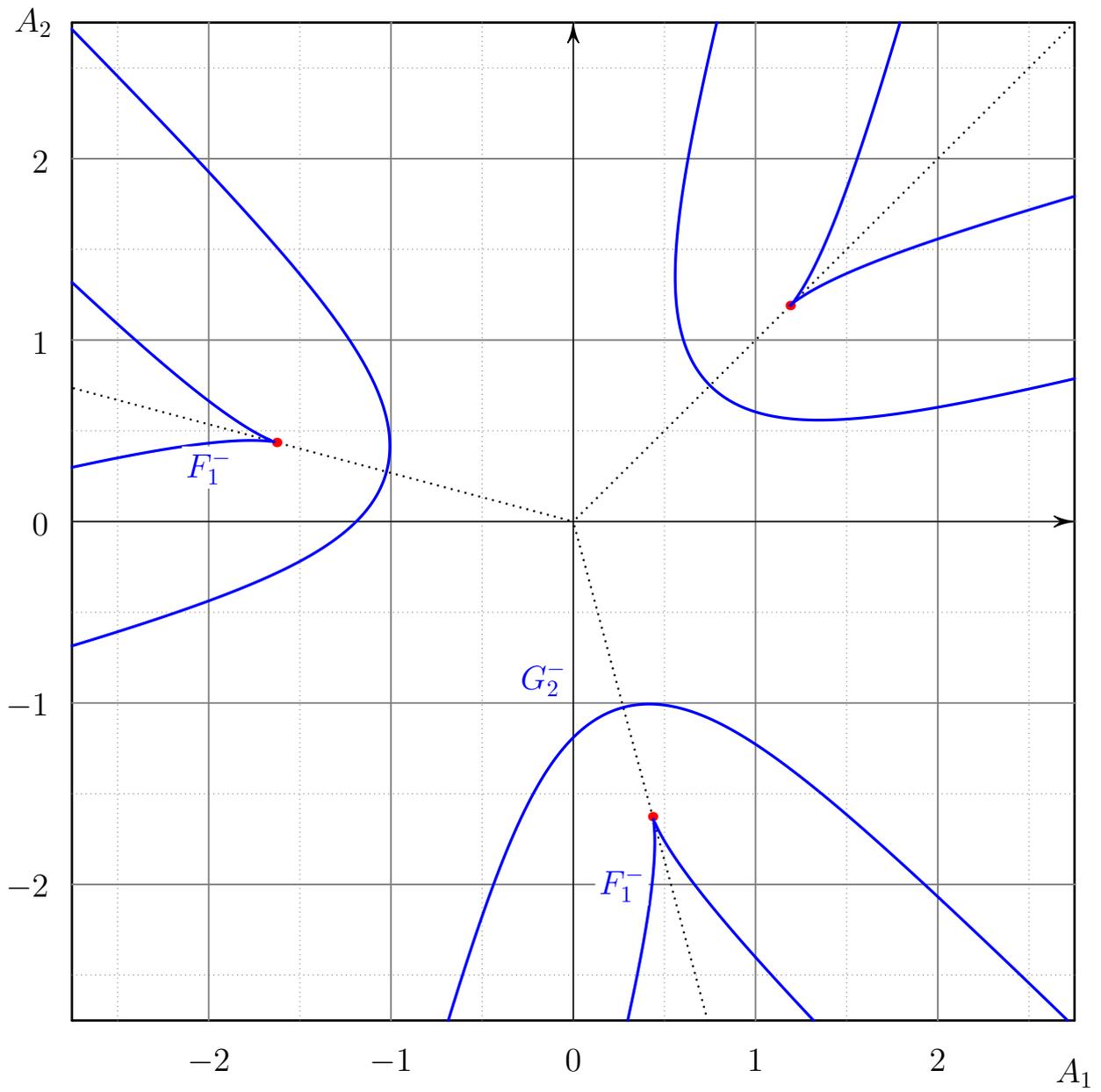


Рис. 7. Сечение множества Ω плоскостью \mathcal{L}_0 .

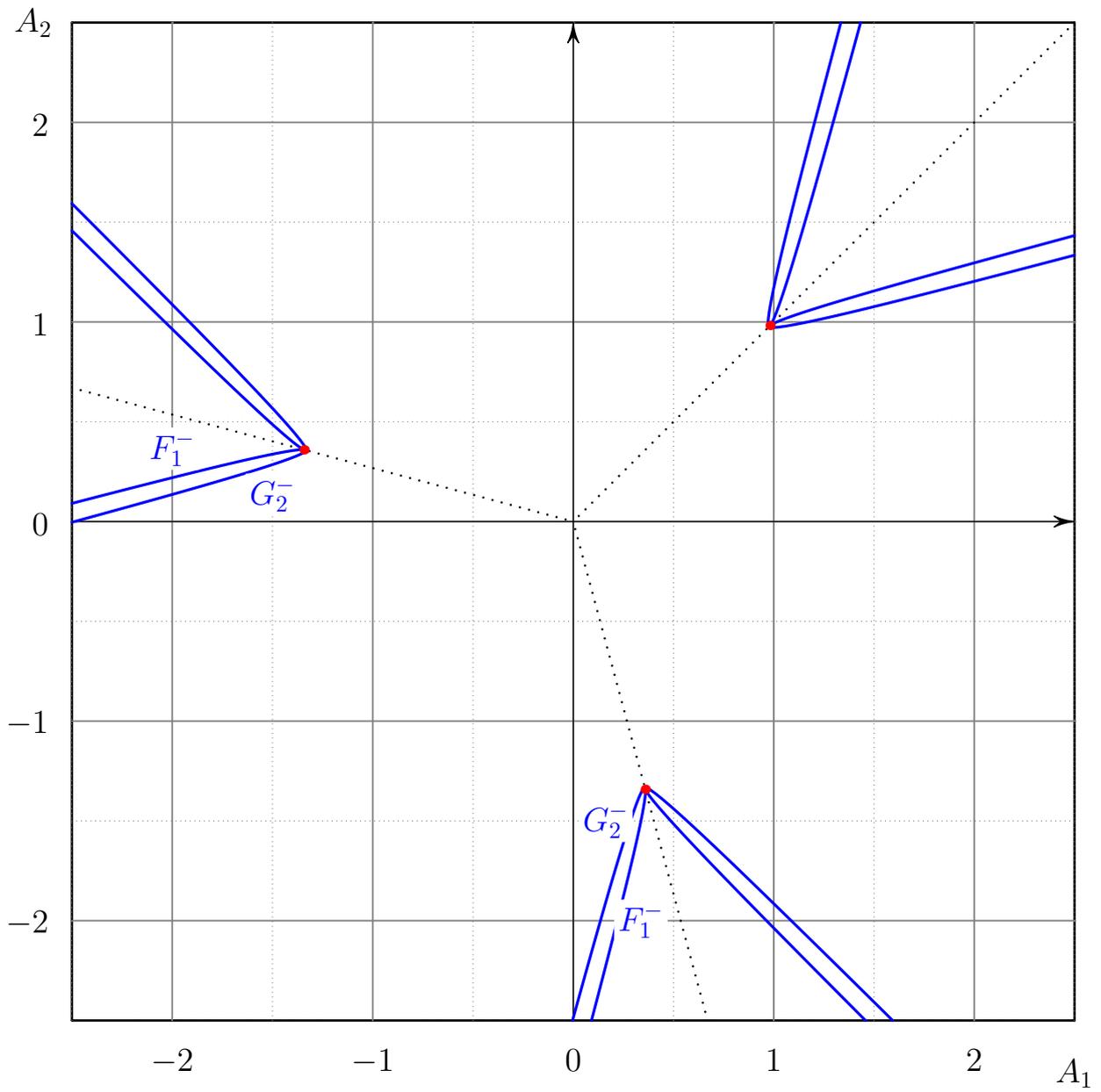


Рис. 8. Сечение множества Ω плоскостью $\mathcal{L}_{0.45}$.

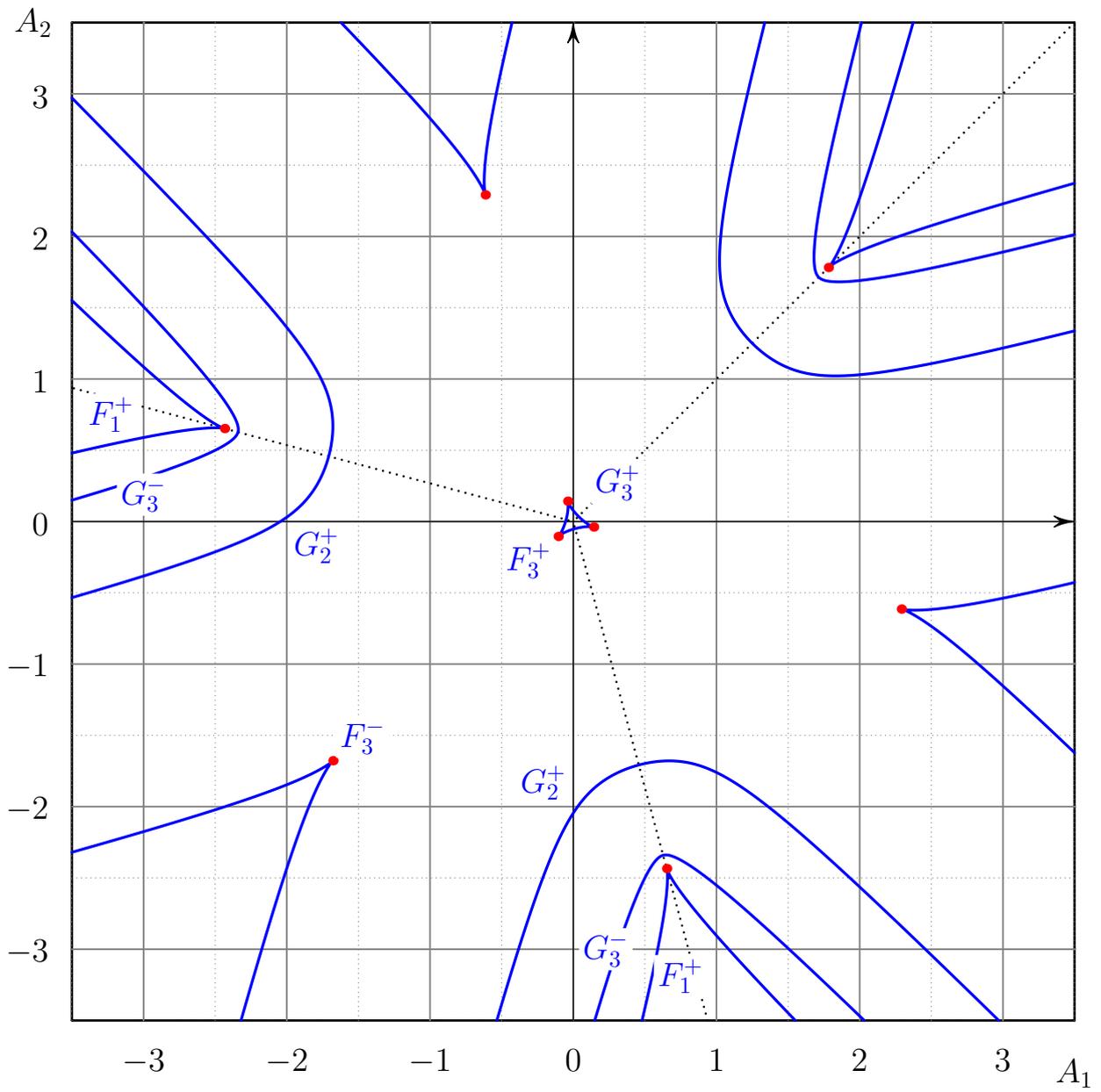


Рис. 9. Сечение множества Ω плоскостью \mathcal{L}_1 .

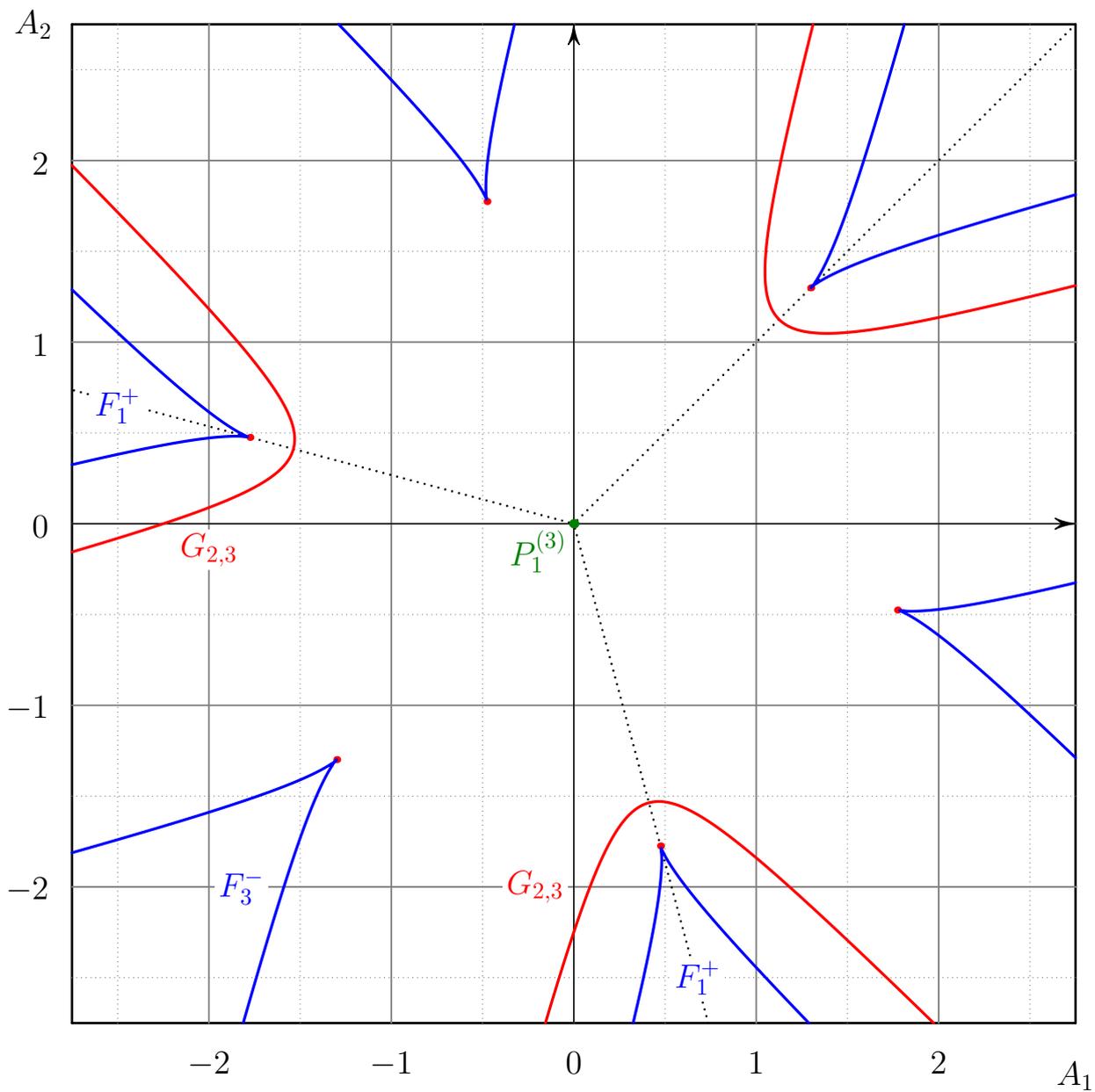


Рис. 10. Сечение множества Ω плоскостью $\mathcal{L}_{3/4}$. Показана особая точка третьего порядка $P_1^{(3)}$ (темно-зеленым).

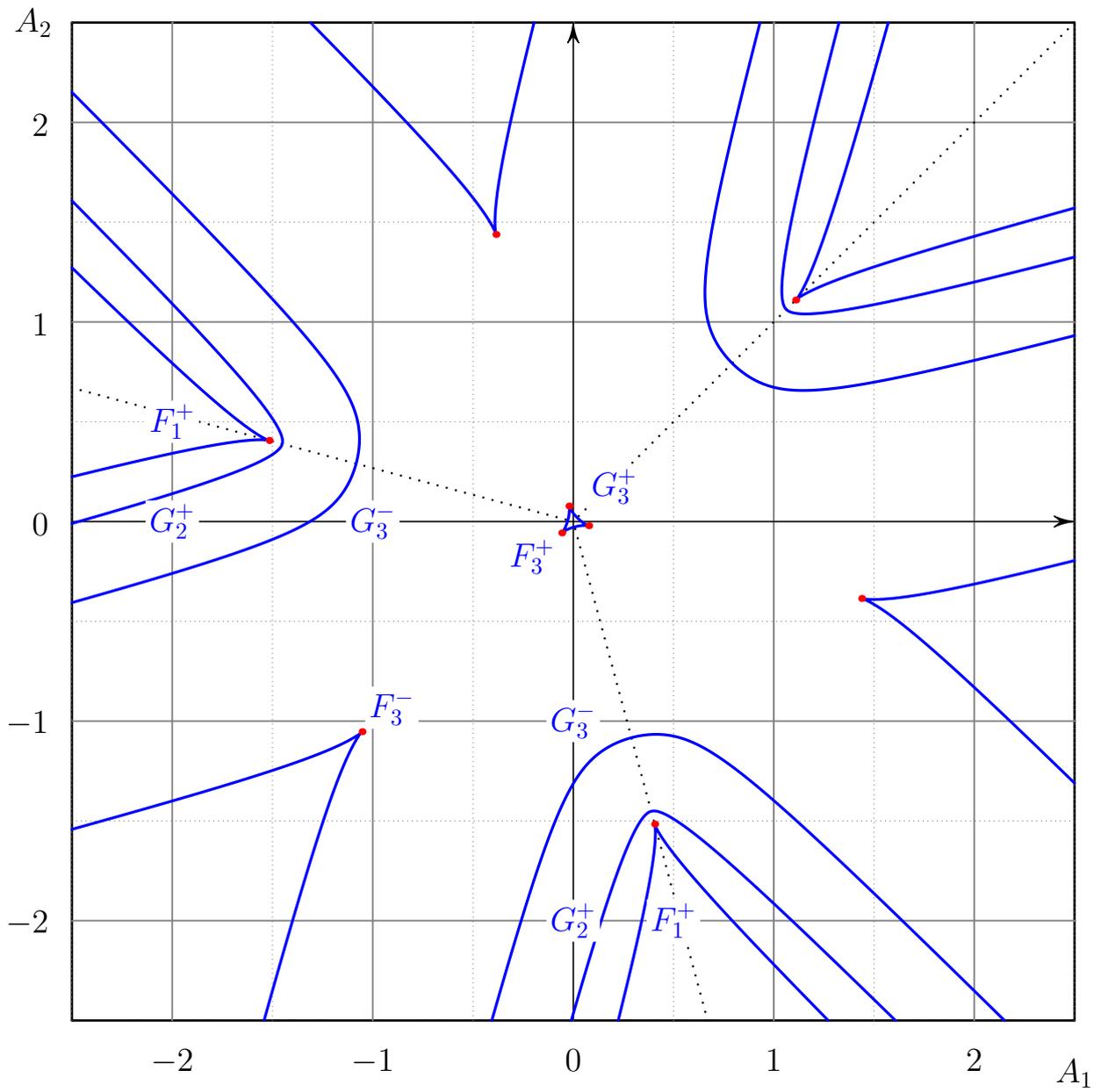


Рис. 11. Сечение множества Ω плоскостью $\mathcal{L}_{5/8}$.

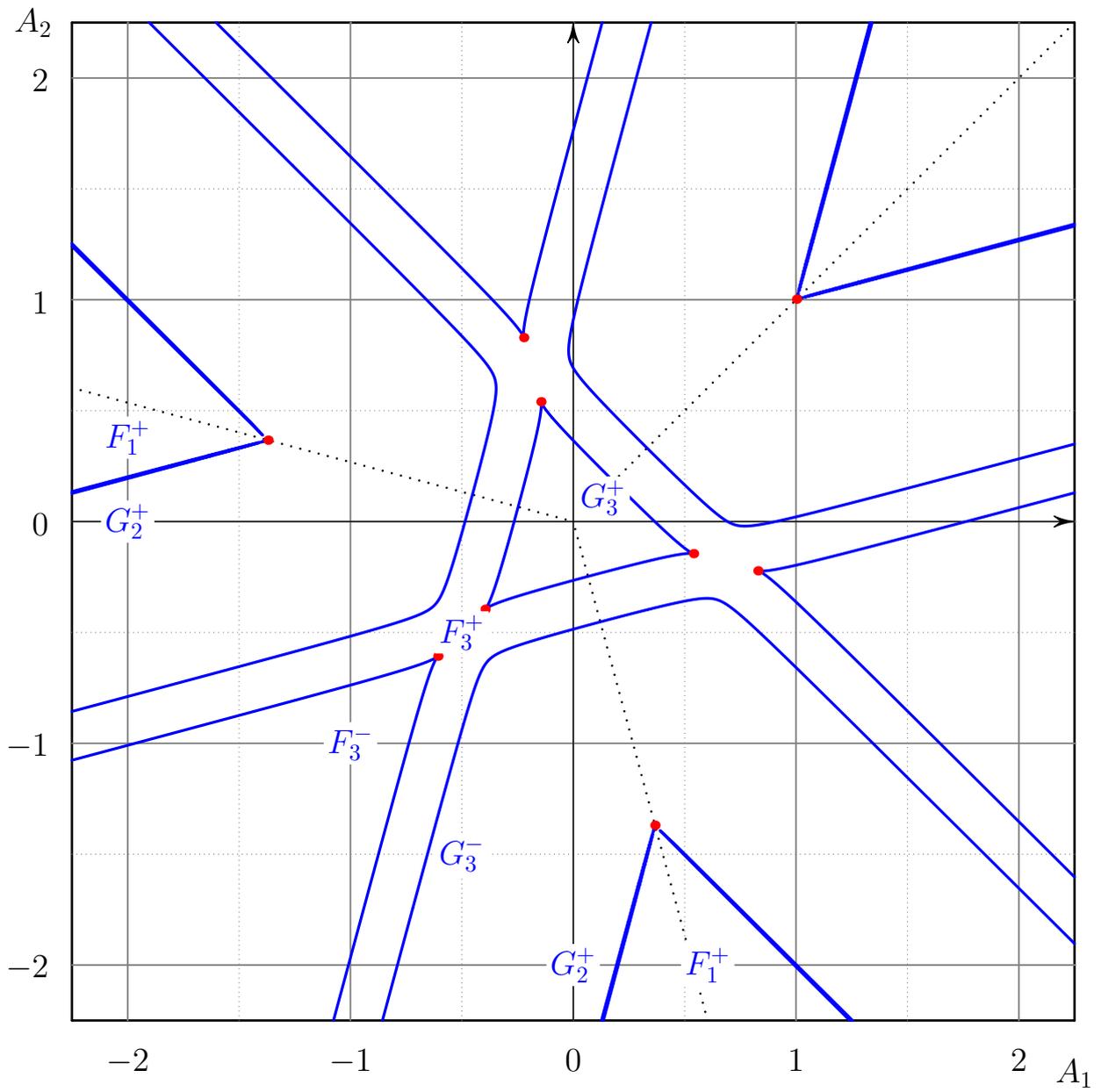


Рис. 12. Сечение множества Ω плоскостью $\mathcal{L}_{0.505}$.

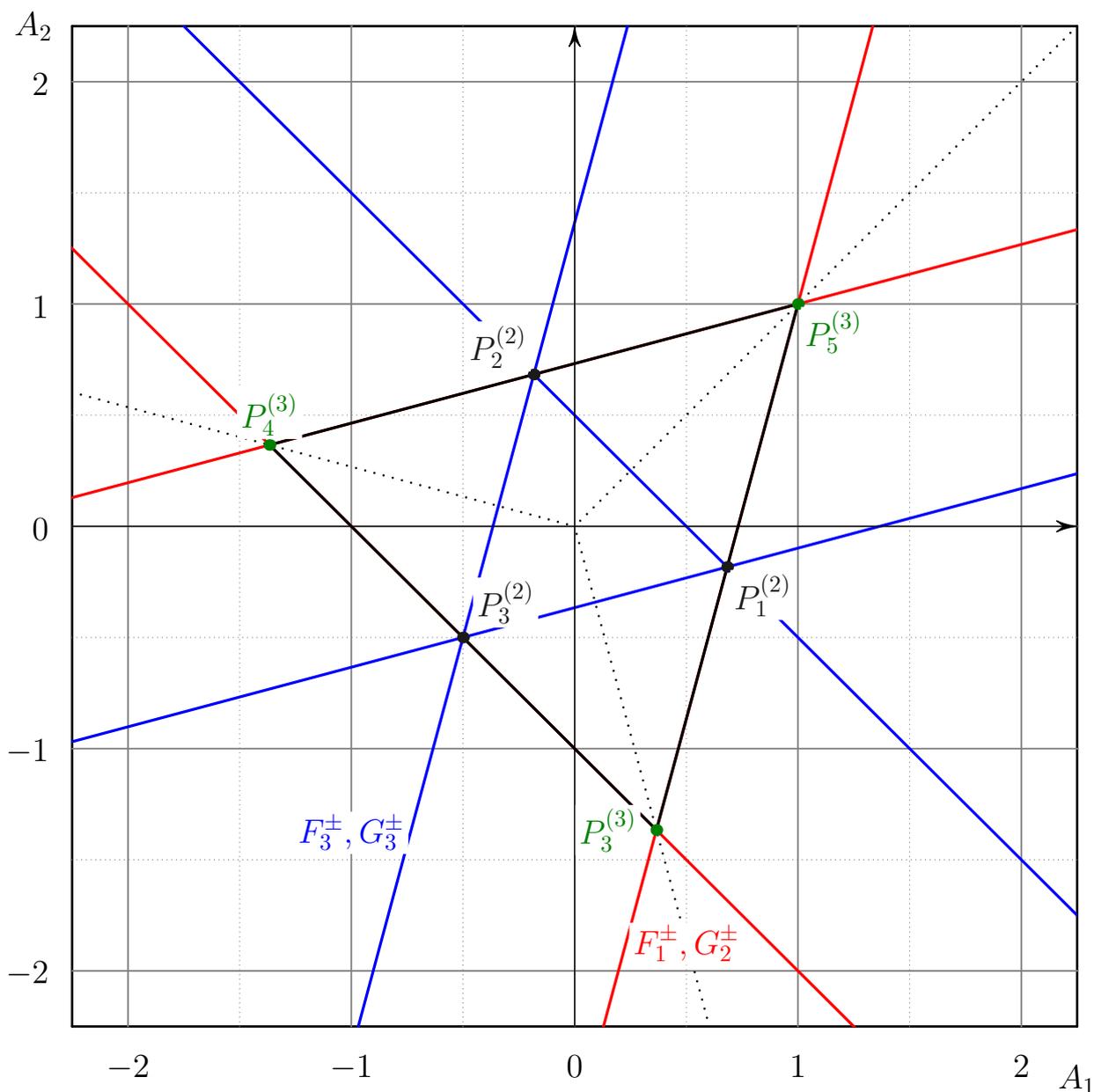


Рис. 13. Сечение множества Ω плоскостью $\mathcal{L}_{1/2}$. Показаны особые точки третьего порядка $SP_3^{(3)}$, $SP_4^{(3)}$, $SP_5^{(3)}$ (темно-зеленым), второго порядка $SP_1^{(2)}$, $SP_2^{(2)}$, $SP_3^{(2)}$ (темно-серым), совпавшие семейства F_1^\pm, G_2^\pm (красным), F_3^\pm, G_3^\pm (синим). Отрезки, соединяющие особые точки третьего порядка, показаны черным цветом.