



Меньшов И.С., Павлухин П.В.

Численное решение задач газовой динамики на декартовых сетках с применением гибридных вычислительных систем

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Меньшов И.С., Павлухин П.В. Численное решение задач газовой динамики на декартовых сетках с применением гибридных вычислительных систем // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2014. № 92. 24 с. URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2014-92>

**Ордена Ленина
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М.В.Келдыша
Российской академии наук**

И.С. Меньшов, П.В. Павлухин

**Численное решение задач газовой
динамики на декартовых сетках
с применением гибридных
вычислительных систем**

Москва — 2014

Меньшов И.С., Павлухин П.В.

Численное решение задач газовой динамики на декартовых сетках с применением гибридных вычислительных систем

Работа посвящена численному методу решения трехмерных нестационарных уравнений Эйлера в задачах со сложной геометрией на декартовых несвязных сетках с использованием гибридных вычислительных систем. Описывается базовая расчетная схема, метод реализации внутренних граничных условий на не связанных с геометрией сетках и итерационный безматричный LU-SGS метод решения системы дискретных уравнений. Рассматривается эффективная программная реализация численного алгоритма на многопроцессорной гибридной CPU/GPU вычислительной системе. Приводятся результаты тестовых верификационных расчетов.

Ключевые слова: вычислительная газовая динамика, декартовые сетки, метод свободной границы, параллельные вычисления, гибридные вычислительные системы

Igor Stanislavovich Menshov, Pavel Viktorovich Pavlukhin

Numerical solution of gas dynamics problems on Cartesian grids with the use of hybrid computing systems

The paper addresses a numerical method for solving 3D unsteady Euler equations in problems with complex geometries using hybrid computing systems. Basic numerical scheme, implementation of inner boundary conditions on body non-fitted grids, and iterative matrix free LU-SGS method for solving discrete equations are considered. An effective approach to code the numerical algorithm for multiprocessor hybrid CPU/GPU computing system is described. Numerical verification results for several test problems are presented.

Key words: computational gas dynamics, Cartesian grid, free boundary method, parallel algorithms, hybrid computing systems

Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда, проект 14-11-00872.

1. Введение

Решение задач газовой динамики на вычислительных системах с новыми архитектурами сопряжено с рядом возникающих при этом трудностей. Первая связана с дискретизацией расчетной области. В случае, если она является геометрически сложной, используемое сеточное разбиение в подавляющем большинстве случаев является неструктурированным. Построение сетки при этом требует значительных вычислительных ресурсов и нередко «ручного» вмешательства оператора для ее коррекции, что приводит к немалым временным затратам. Неструктурированные сеточные разбиения порождают нерегулярный доступ к памяти, в результате производительность программных реализаций методов для сеток данного типа оказывается ограничена не числом выполняемых в единицу времени арифметических операций (compute-bound), а пропускной способностью памяти (memory-bound), причем это касается не только «классических» процессорных архитектур, но и в большей степени критично для массивно-параллельных вычислителей, поскольку эффективность их работы в первую очередь зависит от упорядоченности обращений в память. Таким образом, наиболее предпочтительно использовать структурированные сеточные разбиения, для которых характерен регулярный шаблон обращений в память. Но построение таких сеток, согласованных с границей расчетной области, является трудновыполнимой или вовсе неразрешимой задачей.

Другая сложность обусловлена взаимосвязным развитием численных методов и архитектуры процессоров. Для решения задач на системах с ограниченными вычислительными ресурсами использовались сетки низкого разрешения, и, чтобы получить на них более точное решение, численные методы все более структурно усложнялись. С другой стороны, вычислительные ядра процессоров также становились все более «тяжелыми»: внеочередное исполнение команд, преднакачка данных, прогнозирование ветвлений, векторные инструкции позволяли эффективно реализовывать сложные методы. Но масштабируемость вычислительных систем на таких «тяжелых» ядрах весьма ограничена, а их дальнейшее усложнение все более трудозатратно, что и привело к появлению систем на новых массивно-параллельных архитектурах с большим числом простых ядер. Вот здесь и проявилась проблема: накопленный за десятилетия «багаж» численных методов оказался плохо подходящим для реализации на новых вычислителях, поскольку высокая производительность в них достигается не за счет эффективного исполнения каждого из небольшого (порядка 10) числа «тяжелых» потоков, а за счет одновременной обработки значительно большего (порядка 1000) числа «легких». Иными словами, с одной стороны, простое устройство ядра массивно-параллельных вычислителей влечет требование вычислительного примитивизма для численного метода, с другой — требование по масштабируемости и параллелизуемости, на порядки превышающее таковое для «классических» вычислительных систем. Явные методы хорошо подходят

для реализации на новых архитектурах, но их применение сильно ограничено из-за условия устойчивости: в задачах со сложной геометрией, где неизбежно в сеточном разбиении будут присутствовать разномасштабные ячейки, глобальный шаг интегрирования по времени будет определяться размерами наименьшей из них, что приведет к неоправданно высокому росту вычислительной сложности. Неявные методы позволяют обойти это ограничение, но они значительно сложнее с точки зрения указанных выше требований, особенно в части возможного их распараллеливания. Таким образом, проблема выбора и создания методов и эффективных параллельных алгоритмов под них для решения широкого класса задач газовой динамики носит актуальный характер.

Предлагаемые методы и подходы направлены на решение описанных выше проблем; на их основе был разработан программный комплекс под кластерные системы с графическими ускорителями для решения задач со сложной геометрией на несвязной декартовой сетке без жесткого ограничения на шаг интегрирования по времени, характерного для явных схем.

Реализация неявных схем для графических ускорителей является непростой задачей, поскольку имеющаяся, как правило, в них зависимость по данным значительно затрудняет написание эффективного решателя, особенно в отсутствие средств глобальной синхронизации на GPU. В частности, в [1] метод LU-SGS [2], использующийся для решения СЛАУ, порожденной неявными схемами, рассматривается как один из хороших методов для расчетов на графических ускорителях, но из-за возникающей в нем зависимости по данным, сильно усложняющей распараллеливание, был выбран другой — DP-LUR, в котором отсутствует зависимость по данным, но при этом и выше вычислительная сложность. В нашей же работе предлагается оригинальный параллельный алгоритм для метода LU-SGS, в точности соблюдающий работу своего последовательного прототипа и масштабирующийся на несколько сотен графических ускорителей.

Помимо собственно численного метода, важную роль, как уже было сказано, играет тип сеточного разбиения — GPU значительно эффективнее работают с регулярными структурами данных, в которых представляются структурированные сеточные разбиения, чем с нерегулярными, характерными для неструктурированных сеток. Но использование наиболее распространенного подтипа структурированных — связанных — сеток накладывает весьма значительные ограничения на сложность геометрии расчетной области. Предлагаемый в статье метод декартовых сеток позволяет проводить расчеты в областях с достаточно сложной геометрией на простых несвязных сетках, что делает его подходящим кандидатом для реализации на GPU. Он сводится к альтернативной постановке, в которой внутренние граничные условия моделируются компенсационным потоком — специальной поправкой в правой части определяющей системы уравнений, что дает возможность вести сквозной расчет по всем ячейкам расчетной области в единообразной манере. Иными

словами, данный метод обладает алгоритмической однородностью, весьма важной для массивно-параллельных архитектур.

2. Базовый численный метод

Рассматривается численное решение системы уравнений Эйлера, описывающей движение идеальной сжимаемой жидкости. Система определяющих уравнений в декартовых координатах записывается в консервативной форме

$$\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{f}_k}{\partial x_k} = 0, \quad (1)$$

где подразумевается суммирование по индексу координатного направления k ,

$$\mathbf{q} = (\rho, \rho u_m, \rho E)^T \text{ – вектор консервативных переменных,}$$

$$\mathbf{f}_k = (\rho u_k, \rho u_k u_m + \delta_{km} p, \rho u_k H)^T \text{ – векторы потоков,}$$

$m=1,2,3$, δ_{km} – символ Кронекера, ρ , u_k , p – плотность, компоненты вектора скорости и давление соответственно, $E = e + 0.5 u_k u_k$, $H = e + p/\rho$ – удельные полная энергия и энтальпия. Система уравнений (1) замыкается уравнением состояния, связывающим термодинамические параметры среды, которое в настоящей работе берется в форме уравнения состояния идеального совершенного с показателем адиабаты γ : $p = (\gamma - 1)\rho e$. В расчетах, которые будут представлены ниже, показатель адиабаты берется для случая воздуха, $\gamma = 1.4$.

Дискретизация по пространству выполняется декартовой сеткой, ориентированной вдоль координатных направлений, с шагами h_k , которые, вообще говоря, могут быть переменными. Применяя метод конечного объема к уравнениям (1), приходим к следующей системе полудискретных уравнений:

$$\frac{d\mathbf{q}_i}{dt} = - \left(\frac{\Delta \mathbf{F}_k}{h_k} \right)_i, \quad (2)$$

где i является обобщенным индексом ячейки, зависящим от индекса координатного направления k и принимающим значение порядкового номера ячейки в этом направлении.

Разность потоков в правой части (2)

$$\Delta \mathbf{F}_k = \mathbf{F}_{k,i+1/2} - \mathbf{F}_{k,i-1/2}, \quad (3)$$

где $\mathbf{F}_{k,i+1/2}$ – численный поток, аппроксимирующий дифференциальный поток \mathbf{f}_k на грани между ячейками i и $i+1$. Этот численный поток берется в виде функции двух векторных аргументов

$$\mathbf{F}_{k,i+1/2} = \mathbf{F}_k(\mathbf{z}_i^+, \mathbf{z}_{i+1}^-), \quad (4)$$

удовлетворяющей условию аппроксимации $\mathbf{F}_k(\mathbf{z}, \mathbf{z}) = \mathbf{f}_k(\mathbf{z})$. Здесь через \mathbf{z} мы обозначаем вектор примитивных переменных $\mathbf{z} = (\rho, u_k, p)$.

Верхние индексы «+» и «-» в правой части уравнений (3) указывают, что соответствующие величины берутся в центре грани $i+1/2$. Выбор этих величин определяется точностью схемы. Например, схема первого порядка точности по пространству получается при простом выборе

$$\mathbf{z}_i^+ = \mathbf{z}_i, \quad \mathbf{z}_{i+1}^- = \mathbf{z}_{i+1}. \quad (5)$$

Для увеличения порядка аппроксимации схемы необходимо применять подсеточную реконструкцию параметров более высокого порядка точности. В настоящей работе мы используем кусочно-линейное подсеточное восполнение, обобщающее на неравномерные сетки известную в литературе схему MUSCL (Monotone Upstream-Centered Scheme for Conservation Laws) [3]:

$$\mathbf{z}^\pm = \mathbf{z} \pm 0.5\delta^\pm \left[(1 - k^\pm)\Delta^\mp + (1 + k^\pm)\Delta^\pm \right] \quad (6)$$

с конечными разностями $\Delta^+ = \mathbf{z}_{i+1} - \mathbf{z}_i$, $\Delta^- = \mathbf{z}_i - \mathbf{z}_{i-1}$. В этом уравнении опущен индекс ячейки i , $\delta^+ = h_i / (h_i + h_{i+1})$, $\delta^- = h_i / (h_i + h_{i-1})$ – параметры неравномерности сетки, $k^\pm = k(\delta^\pm)$ – функция, определяющая порядок аппроксимации интерполяционной схемы. При выборе $k(\delta) = -1$ получается стандартная MUSCL схема второго порядка точности [4], $k(\delta) = 1$ дает неустойчивую центрально-разностную схему второго порядка, $k(\delta) = 0$ отвечает схеме Фромма [5], $k(\delta) = (12\delta^2 - 1) / (12\delta)$ приводит к MUSCL схеме третьего порядка аппроксимации по пространству. Ниже мы используем этот (последний) вариант схемы.

Схемы порядка точности по пространству второго и выше являются немонотонными и приводят к нефизичным осцилляциям в численных решениях вблизи поверхностей сильных разрывов [6]. Для подавления этих осцилляций используют ограничители производных, т.н. лимитеры [7, 4]. Действие лимитеров сводится к модификации разностей Δ^\pm таким образом, чтобы интерполяция (6) не приводила к образованию локальных экстремумов.

Наиболее распространенными являются minmod лимитер [3, 7]:

$$\Delta^+ = \mathit{minmod}(\Delta^+, \varphi\Delta^-), \quad \Delta^- = \mathit{minmod}(\Delta^-, \varphi\Delta^+)$$

$$\varphi = \frac{3-k}{1-k}, \quad \mathit{minmod}(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{если } xy < 0 \\ \mathit{sign}(x)\mathit{min}(|x|, |y|), & \text{если } xy \geq 0 \end{cases}$$

(7)

и лимитер Ван Альбада [8]:

$$\mathbf{z}^\pm = \mathbf{z} \pm 0.5s\delta^\pm \left[(1 - sk^\pm)\Delta^\mp + (1 + sk^\pm)\Delta^\pm \right]$$

$$s = \mathit{max} \left(0, \frac{2\Delta^+\Delta^-}{\Delta^+\Delta^+ + \Delta^-\Delta^- + \varepsilon} \right)$$

(8)

где ε – малое число, служащее для предотвращения деления на ноль ($\varepsilon \sim 10^{-12}$ для операций с двойной арифметикой, $\varepsilon \sim 10^{-6}$ – для одинарной). Первый лимитер не является непрерывно-дифференцируемой функцией и может приводить к заикливанью невязки в процессе сходимости решения. Мы используем второй лимитер, определяющийся гладкой функцией, который во многих задачах решает проблему заикливания невязки.

Мы применяем метод С.К. Годунова [9] для аппроксимации функции численного потока. В этом подходе поток вычисляется на решении автомодельной задачи Римана для системы локально-одномерных уравнений:

$$\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{f}_k}{\partial x} = 0$$

(9)

с начальными данными $\mathbf{z}(0, x) = \begin{cases} \mathbf{z}_i^+, & x < 0 \\ \mathbf{z}_{i+1}^-, & x \geq 0 \end{cases}$.

Решение этой задачи подробно описывается в монографии [10]. Оно фактически сводится к решению одного линейного уравнения относительно давления контактной зоны, что может быть реализовано ньютоновскими итерациями. Остальные параметры решения имеют точные аналитические выражения. Обозначим это решение как $\mathbf{z}(t, x) = \mathbf{Z}^{R,k}(\lambda, \mathbf{z}_i^+, \mathbf{z}_{i+1}^-)$, где $\lambda = x/t$ – автомодельная переменная. Тогда стандартный годуновский численный поток будет иметь вид

$$\mathbf{F}_k(\mathbf{z}_i^+, \mathbf{z}_{i+1}^-) = \mathbf{f}_k \left[\mathbf{Z}^{R,k}(0, \mathbf{z}_i^+, \mathbf{z}_{i+1}^-) \right].$$

(10)

Расчет численного потока выполняется на каждом ребре счетной ячейки и является по сути основной (в смысле временных затрат) операцией расчетного цикла. Поэтому в целях повышения эффективности схемы С.К. Годунова были разработаны различные безытерационные приближенные решения задачи

Римана [11]. Одно из таких приближений приводит к численному потоку, предложенному В.В. Русановым [12]. Ниже мы будем использовать его в линейризации численного потока. Он имеет следующий вид:

$$\mathbf{F}_k(\mathbf{z}_i^+, \mathbf{z}_{i+1}^-) = \frac{I}{2} \left\{ \mathbf{f}_k(\mathbf{z}_i^+) + \mathbf{f}_k(\mathbf{z}_{i+1}^-) - (|u_k| + c)_{i+1/2} \left[\mathbf{q}(\mathbf{z}_{i+1}^-) - \mathbf{q}(\mathbf{z}_i^+) \right] \right\}, \quad (11)$$

где индекс $i+1/2$ означает осреднение, например, $(*)_{i+1/2} = 0.5 \left[(*)_i^+ + (*)_{i+1}^- \right]$.

Интегрирование по времени системы полудискретных уравнений (2)-(4) с численным потоком в форме (10) проводится с использованием явно-неявной схемы [13], которая обеспечивает минимальное вовлечение диссипативной неявной компоненты, гарантируя при этом свойство невозрастания тах нормы (НВМН) для случая линейных уравнений. При надлежащем выборе шага по времени эта схема автоматически переходит в базовую явную схему второго порядка точности по времени и пространству, удовлетворяющую свойству НВМН.

Построение гибридной явно-неявной схемы начинается с выбора базовой явной схемы. В качестве такой схемы мы берем двухшаговую схему типа предиктор-корректор, хотя и другой выбор тоже возможен. В этой схеме на первом шаге вычисляются значения предиктора на полушаге по времени по явной эйлеровой схеме:

$$\tilde{\mathbf{q}}_i = \mathbf{q}_i^n - \frac{\Delta t}{2} \left(\frac{\Delta \mathbf{F}_k(\mathbf{z}^n)}{h_k} \right)_i \quad (12)$$

с потоком $\mathbf{F}_{k,i+1/2}$, определяемым по интерполированным на грани ячейки значениям,

$$\Delta \mathbf{F}_k(\mathbf{z}^n) = \mathbf{f}_k(\mathbf{z}_i^+) - \mathbf{f}_k(\mathbf{z}_i^-). \quad (13)$$

Здесь верхний индекс n обозначает дискретный уровень по временной переменной. Решение на новом временном слое $n+1$ получается по явной схеме второго порядка точности на шаге Δt с потоками, вычисляемыми по значениям предиктора:

$$\mathbf{q}_i^{n+1} = \mathbf{q}_i^n - \Delta t \left(\frac{\Delta \mathbf{F}_k(\tilde{\mathbf{z}})}{h_k} \right)_i; \quad (14)$$

$$\mathbf{F}_{k,i+1/2} = \mathbf{F}_k(\tilde{\mathbf{z}}_i^+, \tilde{\mathbf{z}}_{i+1}^-).$$

Описанная выше схема типа предиктор-корректор гарантирует (в линейном случае) свойство НВМН при выполнении условия Куранта-Фридрихса-Леви на шаг интегрирования по времени,

$$\Delta t \leq \lambda_i(\mathbf{z}^n) \text{ для всех } i, \quad (15)$$

где функция в правой части определяется локальной скоростью течения и скоростью звука:

$$\lambda_i(\mathbf{z}^n) = K_s \left(\frac{|u_k| + C}{h_k} \right)^{-1}. \quad (16)$$

Здесь K_s – коэффициент запаса ($0 < K_s \leq 1$).

Запишем базовую явную схему в операторном виде:

$$\mathbf{q}_i^{n+1} = \mathbf{q}_i^n + \Delta t L_2(\Delta t, \mathbf{q}^n), \quad (17)$$

где $L_2(\cdot)$ обозначает дискретный двухшаговой оператор перехода (12)-(14). Введем для каждой счетной ячейки параметр промежуточного слоя – скалярный параметр ω_i , $0 \leq \omega_i \leq 1$. Определим также вектор решения на промежуточном слое $\mathbf{q}^\omega = \omega \mathbf{q}^n + (1 - \omega) \mathbf{q}^{n+1}$. Тогда гибридная явно- неявная схема записывается в следующем виде:

$$\mathbf{q}_i^{n+1} = \mathbf{q}_i^n + \Delta t L_2(\omega_i \Delta t, \mathbf{q}^\omega). \quad (18)$$

Очевидно, что при выборе $\omega_i = 1$ во всех счетных ячейках, гибридная схема переходит в точности в ее явный аналог. В другом предельном случае $\omega_i = 0$ она становится чисто неявной эйлеровской схемой с пространственной аппроксимацией второго порядка точности.

Неявная составляющая гибридной схемы привносит излишнюю диссипацию, которая стабилизирует численное решение, но при этом занижает его точность. Поэтому оптимальным решением в конструировании гибридной схемы будет выбор наибольших значений параметра промежуточного слоя ω_i в счетных ячейках, обеспечивающий максимальное участие явной компоненты, при условии выполнения свойства НВМН.

Оказывается, что такой выбор можно сделать. Заметим, что гибридная схема может быть переписана в эквивалентной форме как

$$\mathbf{q}_i^{n+1} = \mathbf{q}_i^\omega + \omega_i \Delta t L_2(\omega_i \Delta t, \mathbf{q}^\omega). \quad (19)$$

Нетрудно увидеть, что уравнение (19) в точности представляет явную двухшаговую схему перехода с переменного промежуточного слоя $t^\omega = \omega t^n + (1 - \omega)t^{n+1}$ на верхний слой t^{n+1} . Поэтому невозрастание \max нормы

$$\|\mathbf{q}^{n+1}\|_\infty \leq \|\mathbf{q}^\omega\|_\infty \quad (20)$$

будет выполняться при условии

$$\omega_i \Delta t \leq \lambda_i(\mathbf{z}^\omega). \quad (21)$$

Следствием неравенства (20) является неравенство $\|\mathbf{q}^{n+1}\|_\infty \leq \|\mathbf{q}^n\|_\infty$ [13]. Поэтому неравенство (21) является также необходимым условием выполнения свойства НВМН численных решений гибридной схемы.

Неравенство (21) будет выполняться, если положить

$$\omega_i = \min \left[1, \frac{\lambda_i(\mathbf{z}^\omega)}{\Delta t} \right] \quad (22)$$

или с учетом уравнения (16)

$$\omega_i = \min \left[1, \frac{K_s}{\Delta t} \left(\frac{|u_k^\omega| + C^\omega}{h_k} \right)_i^{-1} \right]. \quad (23)$$

Как видно, параметр промежуточного слоя в каждой счетной ячейке зависит от решения на верхнем временном слое. Таким образом, гибридная схема является фактически неявной, требующей решения нелинейной системы уравнений на каждом временном шаге. Отметим также, что выбором величины шага Δt можно уменьшить число решаемых в системе уравнений, переведя в части счетных ячеек гибридную схему в чисто явную. Более подробно решение системы нелинейных уравнений обсуждается ниже в разделе 4.

3. Внутренние граничные условия на декартовой сетке

Для реализации внутренних граничных условий на декартовой сетке, не связанной с геометрией области решения, используется метод свободной границы (МСГ) [14]. Кратко опишем основные положения этого метода.

Пусть Ω является областью, занятой твердым телом, $\Gamma = \partial\Omega$ – его граница. Тогда уравнения Эйлера (1) описывают течение газа в области $\mathbb{R}^3 \setminus \Omega$, и граничным условием для этих уравнений служит соотношение

$$u_k n_k = 0, \mathbf{x} \in \Gamma \quad (24)$$

где $\mathbf{n} = (n_k)$ – вектор единичной внешней к Ω нормали на поверхности Γ .

Суть метода свободной границы сводится к замене решения краевой задачи для однородной системы уравнений Эйлера в ограниченном пространстве решением неоднородной системы во всем пространстве. Исходная система уравнений модифицируется путем добавления в правую часть некоторого вектора \mathbf{F}_w , который далее называется компенсационным потоком:

$$\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{f}_k}{\partial x_k} = -\mathbf{F}_w. \quad (25)$$

Мы хотим решать эту систему уравнений во всем пространстве \mathfrak{R}^3 , а компенсационный поток \mathbf{F}_w подобрать таким образом, чтобы сужение решения уравнения (25) в \mathfrak{R}^3 на область $\mathfrak{R}^3 \setminus \Omega$ в точности совпадало с решением исходной краевой задачи. В работе [14] предлагается выражение для компенсационного потока \mathbf{F}_w , которое обеспечивает выполнение этого условия:

$$\mathbf{F}_w = \begin{pmatrix} \rho u_k n_k \\ \rho u_k u_m n_k + (p - p_w) n_m \\ \rho u_k n_k H \end{pmatrix} \delta(\mathbf{x}, \Gamma), \quad (26)$$

где $\delta(\mathbf{x}, \Gamma)$ обозначает обобщенную функцию Дирака поверхности Γ , определяемую соотношением

$$\int_V \delta(\mathbf{x}, S) \varphi(\mathbf{x}) dV = \int_{V \cap \Gamma} \varphi(\mathbf{x}) dS, \quad \forall V \in \mathfrak{R}^3. \quad (27)$$

Величина p_w в уравнениях (26) представляет собой мгновенную реакцию жесткой стенки на воздействие со стороны потока жидкости. Для случая идеального газа с показателем адиабаты γ эта реакция определяется в зависимости от знака нормальной компоненты относительной скорости следующим образом.

Если $u_k n_k < 0$, то давление стенки p_w соответствует давлению за фронтом формирующейся ударной волны и определяется по формуле [15]:

$$p_w = p \left[1 + \frac{\gamma(\gamma+1)}{4} M^2 + \sqrt{\gamma^2 M^2 + \frac{\gamma^2(\gamma+1)^2}{16} M^4} \right]. \quad (28)$$

В противном случае $u_k n_k > 0$ формируется волна разрежения, и давление стенки имеет вид

$$p_w = p \left[1 - \frac{\gamma-1}{2} M \right]^{\frac{2\gamma}{\gamma-1}}. \quad (29)$$

Здесь M обозначает относительное число Маха, $M = u_k n_k / a$, где a – скорость звука.

Отметим, что выбор компенсационного потока в форме соотношений (27)-(29) не является единственным с математической точки зрения. Наверное, можно указать другие формы правой части, при которых краевое условие (24) будет также выполняться. Предлагая формулу (27), в качестве основного аргумента мы рассматриваем механику гидродинамического процесса вблизи поверхности твердого тела. Поток \mathbf{F}_w моделируется двумя составляющими. Первая компенсирует протекающие через поверхность Γ массу, импульс и энергию, а вторая определяет реакцию стенки и соответствующую ей работу.

Что касается численного решения задачи, альтернативная постановка в этом плане имеет преимущество по сравнению с ее прототипом, так как состоит в нахождении расширенного решения во всем пространстве. В силу этого обстоятельства нетривиальная и к тому же затратная операция, связанная с генерацией расчетной сетки в областях сложной геометрии, снимается. Расчетная область может быть выбрана простейшего вида, например, в виде куба, генерация сетки в котором не представляет труда.

В численной реализации МСГ предполагается, что поверхность Γ , задающая геометрию тела, представляется набором дискретных элементов

$\Gamma = \bigcup_j \Gamma_j$. В большинстве случаев это плоские многогранники или треугольные

пространственные элементы. Ячейки декартовой сетки разбиваются границей тела на три типа: жидкостные – те, которые полностью находятся вне Γ , твердые, лежащие целиком внутри Γ и, соответственно, пересекаемые. Пересекаемые ячейки наряду с расчетным вектором определяются также подсеточной структурой геометрии тела. В настоящей работе мы используем линейное восполнение, которое задается объемной долей, занимаемой жидкостью в пересекаемой ячейке, ω_f , и вектором внешней нормали (направленной в сторону жидкости) \mathbf{n}_f , $|\mathbf{n}_f| = s_f$, где s_f – площадь плоского элемента, аппроксимирующего пересечение счетной ячейки с поверхностью Γ .

Эти параметры вычисляются при анализе пересечения счетной ячейки с элементами поверхности Γ_j . Вектор нормали вычисляется осреднением единичных нормалей элементов с весовыми коэффициентами, равными площадям пересечения: $\mathbf{n}_f = \mathbf{n}_j s_j$, $s_j = \text{area}(\Gamma_j \cap C)$, где C обозначает область ячейки сетки. Объемную долю ω_f в пересекаемой ячейке можно приближенно вычислить через средние расстояния от жидких вершин ячейки, d^+ , и, соответственно, от твердых вершин, d^- , до плоскости, нормальной к \mathbf{n}_f и проходящей через опорную точку \mathbf{x}_0 :

$$\omega_f = d^+ / (d^+ + d^-). \quad (30)$$

Опорная точка определяется по центрам элементов поверхности \mathbf{x}_j

$$\mathbf{x}^j = \frac{|\mathbf{n}^{j-1}| \mathbf{x}^{j-1} + \mathbf{x}_j s_j}{|\mathbf{n}^{j-1}| + s_j}, \quad \mathbf{n}^j = \sum_{k=1}^j \mathbf{n}_k s_k, \quad \mathbf{x}_0 = \mathbf{x}^M, \quad (31)$$

где M – число элементов поверхности Γ .

Дискретизация системы уравнений (25) проводится в два этапа с применением метода разделения по физическим процессам. На первом этапе выполняется интегрирование однородной системы на множестве жидких и пересекаемых ячеек по численной схеме, рассмотренной в предыдущем разделе:

$$\mathbf{q}_i^* = \mathbf{q}_i^n - \Delta t \left(\frac{\Delta \mathbf{F}_k(\tilde{\mathbf{z}})}{h_k} \right)_i; \quad (32)$$

$$\mathbf{F}_{k,i+1/2} = \mathbf{F}_k(\tilde{\mathbf{z}}_i^+, \tilde{\mathbf{z}}_{i+1}^-).$$

Таким образом, решение на этом этапе, \mathbf{q}_i^* , описывает изменение газодинамических параметров на временном шаге в соответствии с моделью Эйлера, но без учета влияния стенки на параметры течения.

На втором этапе полученное решение корректируется компенсационным потоком правой части. Вывод соответствующих дискретных уравнений мы получим из других соображений, не используя компенсационный поток.

Беря решение \mathbf{q}_i^* в качестве начальных данных, проинтегрируем однородную систему уравнений Эйлера по жидкостной части счетной ячейки:

$$\omega_f V_i \frac{d\mathbf{q}_i}{dt} = - \sum_{\sigma \in f} \mathbf{F}_\sigma s_\sigma + \mathbf{F}_p s_f, \quad (33)$$

где $\mathbf{F}_p = (0, p_w n_m, 0)^T$ – численный поток на стенке, суммирование в правой части ведется по граням ячейки, полностью или частично находящимся в жидкости, s_σ – площадь жидкостной части грани. Поскольку на этом этапе учитывается только влияние стенки, потоки на гранях \mathbf{F}_σ вычисляются по значениям \mathbf{q}_i^* из ячейки.

Используя свойство консервативности потока, уравнение (33) можно переписать в виде

$$\omega_f V_i \frac{d\mathbf{q}_i}{dt} = -\mathbf{F}_c s_f + \mathbf{F}_p s_f \quad (34)$$

с потоком $\mathbf{F}_c = (\rho u_k n_k, \rho u_k u_m n_k + p n_m, \rho u_k n_k H)^T$ и $V_i = h_1 h_2 h_3$. Сумма потоков в правой части в точности дает компенсационный поток, $\mathbf{F}_w = \mathbf{F}_c - \mathbf{F}_p$.

Для интегрирования по времени уравнения (34) мы берем неявную схему, чтобы не накладывать жесткие ограничения на шаг по времени из-за объемной доли ω_f , которая в некоторых пересекаемых ячейках может быть, вообще говоря, сколь угодно малой величиной. Это приводит к следующей системе дискретных уравнений:

$$\mathbf{q}_i^{n+1} = \mathbf{q}_i^* - \frac{\Delta t s_f}{\omega_f V_i} \mathbf{F}_w(\mathbf{q}_i^{n+1}). \quad (35)$$

Объединяя (32) и (35), приходим к следующей численной схеме:

$$\mathbf{q}_i^{n+1} = \mathbf{q}_i^n - \Delta t \left(\frac{\Delta \mathbf{F}_k(\mathbf{z})}{h_k} \right)_i - \frac{\Delta t s_f}{\omega_f V_i} \mathbf{F}_w(\mathbf{q}_i^{n+1}), \quad (36)$$

$$\mathbf{F}_{k,i+1/2} = \mathbf{F}_k(\mathbf{z}_i^+, \mathbf{z}_{i+1}^-),$$

которая является абсолютно устойчивой при вычислении параметра промежуточного слоя по формуле (23) и обеспечивает третий порядок точности по пространству и второй порядок по времени.

Решение нелинейной системы уравнений (36) находится безматричным методом приближенной факторизации LU-SGS [2, 16]. Этот метод экономичен и сводится к прямому и обратному циклам по счетным ячейкам, которые фактически реализуют явную схему. Детали метода решения описываются в следующем разделе.

4. Решение систем дискретных уравнений

Для решения уравнений (36) используем итерационный метод Ньютона, который приводит к линейной системе относительно итерационных вариаций $\delta^s(\cdot) = (\cdot)^{n+1,s+1} - (\cdot)^{n+1,s}$, где s – итерационный индекс:

$$\left(I + \frac{\Delta t s_f}{\omega_f V_i} A_w^s \right) \delta^s \mathbf{q}_i = -\Delta^s \mathbf{q}_i - \Delta t \left(\frac{\Delta^s \mathbf{F}_k}{h_k} \right)_i - \frac{\Delta t s_f}{\omega_f V_i} \mathbf{F}_w(\mathbf{q}_i^{n+1,s}) - \Delta t \frac{\delta^s \mathbf{F}_{k,i+1/2} - \delta^s \mathbf{F}_{k,i-1/2}}{h_k}. \quad (37)$$

В этом уравнении $\Delta^s = (\cdot)^{n+1,s} - (\cdot)^n$ обозначает итерационное приращение на временном шаге, $A_w = \partial \mathbf{F}_w / \partial \mathbf{q}$ – якобиан компенсационного потока по вектору консервативных переменных.

Линеаризация численного потока $\delta^s \mathbf{F}_{k,i+1/2}$ выполняется приближенно, используя следующие упрощения. Во-первых, несмотря на то, что параметр ω

зависит от итерационных значений, при линеаризации он предполагается замороженным. Во-вторых, при линеаризации не учитываются подсеточные интерполяции расчетного вектора и считается, что численный поток зависит от значений параметров в счетной ячейке, как в стандартной схеме первого порядка точности. И в-третьих, в качестве функции численного потока берется не точно годуновский поток, а его приближение в форме В.В. Русанова, которое определяется соотношением (11). При этих допущениях линеаризация численного потока сводится к простому выражению

$$\begin{aligned} \delta^s \mathbf{F}_{k,i+1/2} = & (1 - \omega_i) \frac{A_{k,i}^{\omega,s} + (|u_k| + c)_{i+1/2}^{\omega,s}}{2} \delta^s \mathbf{q}_i + \\ & + (1 - \omega_{i+1}) \frac{A_{k,i+1}^{\omega,s} - (|u_k| + c)_{i+1/2}^{\omega,s}}{2} \delta^s \mathbf{q}_{i+1}, \end{aligned} \quad (38)$$

где $A_{k,i}^{\omega,s} = A_k(\mathbf{z}_i^{\omega,s}) = \partial \mathbf{f}_k / \partial \mathbf{q}$ – якобиан потока в k -ом направлении по вектору консервативных переменных и верхний индекс ω указывает на то, что значение параметра в счетной ячейке берется с промежуточного слоя.

С учетом уравнения (38) система уравнений (37) сводится к линейной системе относительно итерационных невязок $\delta^s \mathbf{q}$:

$$\begin{aligned} D_i^s \delta^s \mathbf{q}_i = & \mathbf{R}_i^s - \frac{\Delta t (1 - \omega_{i+1})}{h_k} \left[\frac{A_{k,i+1}^{\omega,s} - (|u_k| + c)_{i+1/2}^{\omega,s}}{2} \right] \delta^s \mathbf{q}_{i+1} + \\ & + \frac{\Delta t (1 - \omega_{i-1})}{h_k} \left[\frac{A_{k,i-1}^{\omega,s} + (|u_k| + c)_{i-1/2}^{\omega,s}}{2} \right] \delta^s \mathbf{q}_{i-1}, \end{aligned} \quad (39)$$

где

$$\begin{aligned} D_i^s = & I + \frac{\Delta t s_f}{\omega_f V_i} A_w^s + \frac{\Delta t (1 - \omega_i)}{2 h_k} \left[(|u_k| + c)_{i-1/2}^{\omega,s} + (|u_k| + c)_{i+1/2}^{\omega,s} \right] \\ \mathbf{R}_i^s = & -\Delta^s \mathbf{q}_i - \Delta t \left(\frac{\Delta^s \mathbf{F}_k}{h_k} \right)_i - \frac{\Delta t s_f}{\omega_f V_i} \mathbf{F}_w(\mathbf{q}_i^{n+1,s}). \end{aligned} \quad (40)$$

Для дальнейшего рассмотрения будет удобно в правой части уравнения (39) сделать обратную линеаризацию, перейдя от произведения якобиана и итерационного приращения консервативного вектора к приращению соответствующего потокового вектора. Обозначая спектральный радиус якобиана через $r_k = |u_k| + c$, результирующую систему уравнений можно привести к следующему виду:

$$D_i^s \delta^s \mathbf{q}_i = \mathbf{R}_i^s - \frac{\Delta t(1-\omega_{i+1})}{2h_k} (\delta^s \mathbf{f}_{k,i+1}^\omega - r_{k,i+1/2}^{\omega,s} \delta^s \mathbf{q}_{i+1}) + \frac{\Delta t(1-\omega_{i-1})}{2h_k} (\delta^s \mathbf{f}_{k,i-1}^\omega - r_{k,i-1/2}^{\omega,s} \delta^s \mathbf{q}_{i-1}). \quad (41)$$

Решение этой системы ищется безматричным итерационным методом LU-SGS [16]. Матрица системы является семидиагональной. Запишем ее в расщепленном операторном виде:

$$D\delta\mathbf{q} + L(\delta\mathbf{q}) + U(\delta\mathbf{q}) = \mathbf{R}, \quad (42)$$

введя верхне-треугольный матричный оператор

$$L(\delta\mathbf{q}) = \frac{\Delta t(1-\omega_{i+1})}{2h_k} (\delta^s \mathbf{f}_{k,i+1}^\omega - r_{k,i+1/2}^{\omega,s} \delta^s \mathbf{q}_{i+1})$$

и нижне-треугольный матричный оператор

$$U(\delta\mathbf{q}) = -\frac{\Delta t(1-\omega_{i-1})}{2h_k} (\delta^s \mathbf{f}_{k,i-1}^\omega - r_{k,i-1/2}^{\omega,s} \delta^s \mathbf{q}_{i-1}).$$

Перепишывая систему уравнений (42) в виде

$$(D+L)D^{-1}(D+U)\delta\mathbf{q} = \mathbf{R} + LD^{-1}U, \quad (43)$$

для нахождения решения мы затем используем ее приближенную факторизацию, которая состоит в отбрасывании последнего слагаемого в правой части уравнения (43). В результате получается упрощенная система

$$(D+L)D^{-1}(D+U)\delta\mathbf{q} = \mathbf{R}, \quad (44)$$

которая эффективно решается двумя расчетными циклами по ячейкам в прямом и обратном направлениях (по индексу ячейки) соответственно:

$$\begin{aligned} \delta\mathbf{q}^* &= D^{-1}[\mathbf{R} - L(\delta\mathbf{q}^*)], \\ \delta\mathbf{q}^s &= \delta\mathbf{q}^* - D^{-1}U(\delta\mathbf{q}^s). \end{aligned} \quad (45)$$

Отметим, что отбрасываемые в описанной выше приближенной факторизации члены оказываются по порядку малости величинами $O(\Delta t^2)$. Поэтому, если при решении задачи используется малый шаг по времени, внесенная факторизацией ошибка будет небольшой.

5. Адаптация к гибридным вычислительным системам

Введение компенсационного потока не изменяет структуру результирующей СЛАУ (37), полученной в результате линеаризации дискретной системы уравнений, поскольку данный поток представляет собой локальную добавку. Данное свойство позволяет строить параллельный алгоритм для метода LU-SGS таким же образом, как и в случае использования связанных сеток. Решение системы с факторизованной матрицей может быть представлено как обход всех ячеек сеточного разбиения в прямом и обратном направлении, причем возникающая при этом зависимость по данным носит локальный характер и определяется только порядком обхода всех геометрически соседних ячеек относительно каждой из них. Иными словами, в зависимости от того, «до» или «после» относительно текущей ячейки в порядке обхода располагается соседняя, выполняются те или иные вычисления. Сам порядок обхода можно выбирать произвольным образом, основываясь не только на геометрическом соседстве ячеек. Этим и воспользуемся при построении параллельного алгоритма. Одновременный счет в ячейках возможен только в том случае, если они не являются геометрически соседними. Выбор обхода ячеек в этом случае сводится к задаче о раскраске графа, две соседние вершины в котором всегда должны быть разного цвета. В случае структурированных, а именно, используемых в методе свободной границы, декартовых сеток достаточно двух цветов, что порождает «шахматный» порядок обхода ячеек, когда вычисления проводятся сначала над «черными», а затем над «белыми» ячейками. Подмножество каждого цвета можно считать одновременно, что приводит к параллельному алгоритму для одного GPU: сначала считаются только «черные», затем — только «белые» ячейки. Однако в случае использования нескольких GPU этот алгоритм приводит к неизбежным простоям во время обмена соседними ячейками между ускорителями. Это в конечном итоге ограничивает масштабируемость алгоритма, поскольку пересылки данных между GPU выполняются фактически в 3 этапа: из памяти ускорителя в память CPU, затем пересылка по сети в другой узел и копирование из памяти CPU на этом узле в память GPU. Для обхода этого ограничения был изменен порядок обхода ячеек. Расчетная область разбивается на блоки с примерно равным числом ячеек с топологией, аналогичной сеточному разбиению: прямоугольники, расположенные «стык в стык». Блоки также разбиваются в «шахматном» порядке, в каждом из них выделяется внутренняя и граничная части. Глобальный обход строится следующим образом: сначала выполняется обход всех внутренних частей «черных» блоков; затем в каждом «белом» блоке обходится сначала первая половина внутренних ячеек, а потом граничная часть; далее, во всех черных блоках обходятся граничные части и, наконец, в белых блоках обходятся оставшиеся половины внутренних ячеек (рис. 1). Данная схема позволяет совмещать во времени расчет внутренних частей блоков с обменом граничными ячейками между соседними блоками на разных GPU. Расчет каждой части блоков выполняется в

соответствии с указанной выше «шахматной» раскраской ячеек. На этом построение параллельного алгоритма метода LU-SGS для систем с распределенными GPU закончено, подробности можно найти в [17].

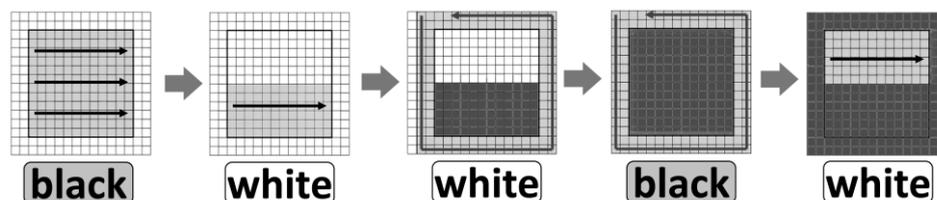


Рис. 1. Схема обхода ячеек для параллельного алгоритма LU-SGS

Программная реализация была выполнена на CUDA C с использованием Stream API и неблокирующих вызовов MPI, что позволило добиться совмещения счета и многофазной передачи данных между графическими ускорителями. Все вычислительные операции выполняются при этом на GPU, CPU используются лишь для межузловых обменов.

6. Результаты численных экспериментов

Детальное исследование корректности предлагаемого метода было проведено на задаче обтекания профиля NASA 0012. Угол атаки $\alpha=1.25^\circ$, число Маха набегающего потока $M=0.8$. Использовались сетки 2 типов.

1. Связная с поверхностью профиля C-сетка с разрешением 400 ячеек вдоль границы профиля и общим разрешением 400x200.

2. Несвязная декартова сетка с разрешением внутри описанного вокруг профиля прямоугольника 200x24 и общим разрешением 650x324.

Расчет проводился по гибридной явно-неявной схеме с числом Куранта $C=10$. Распределение C_p для полученных на 2 сетках стационарных решений представлено на рис. 2, где для сравнения также приведены результаты, полученные в [18] решателем ITA на связной сетке. Как видно, результаты на разных сетках оказались очень близки, скачок значения в ячейке на остром конце профиля для метода декартовых сеток связан с погрешностью линейного приближения этой негладкой части NASA 0012 на декартовой сетке. Еще одна из особенностей — характерный локальный минимум на слабой ударной волне в нижней части профиля, полученный методом декартовых сеток; на связной сетке он отсутствует и проявляется только с увеличением ее разрешения. Это связано с тем, что свойство ортогональности, естественно присущее декартовой сетке и приводящее к более точному решению, для C-сетки в данном тесте не выполнялось.

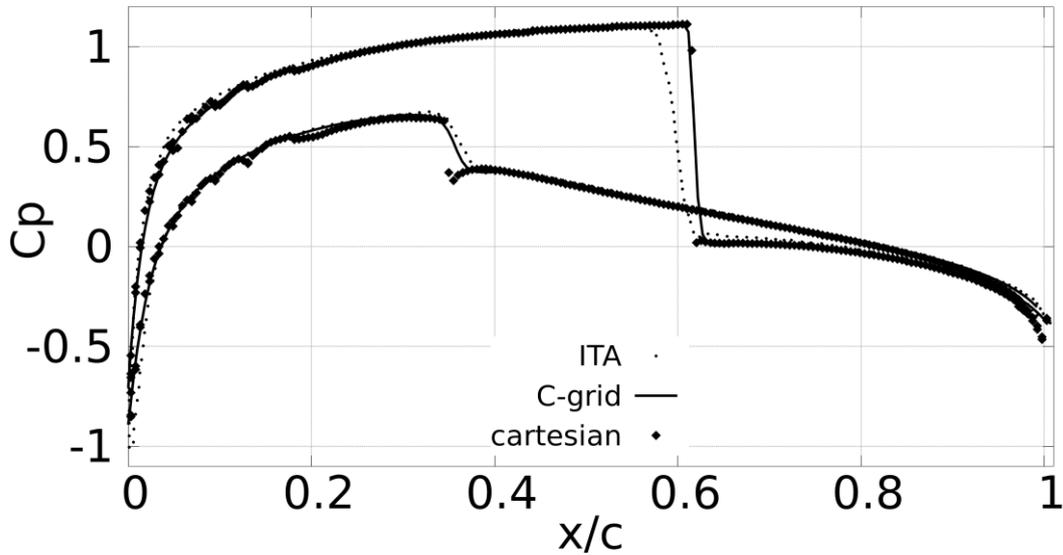


Рис. 2. Распределение C_p , NACA0012, $M=0.8$, $\alpha=1.25^\circ$, сплошной линией отмечено решение на связной сетке, ромбами — на декартовой и пунктиром — решение ИТА

Полученные значения C_l и C_d приведены в табл. 1, где для сравнения представлены данные, полученные с помощью CFL3D [19]. Разница значений для обоих коэффициентов на связной и несвязной сетках составила менее 1%.

Таблица 1. Аэродинамические коэффициенты профиля NACA0012. NACA0012, $M=0.8$, $\alpha=1.25^\circ$

Коэффициент	Декартова сетка	С-сетка	CFL3D (С-сетка)
C_l	0,3012	0,3036	0,3546
C_d	0,02184	0,02199	0,02261

В задаче о взаимодействии сверхзвукового течения ($M=3$) с клином с углом раствора 10° исследовалась корректность вычисления компенсационного потока в двух режимах с образованием центрированной волны разрежения и ударной волны соответственно. Решение на декартовой сетке 1200×480 с числом Куранта $S=4$ получено для набегающего потока с углом в 10° от (рис. 3, слева) и внутрь (рис. 3, справа) поверхности клина. Сравнение угла β между поверхностью клина и ударной волной, угла γ , внутри которого формируются волны разрежения, с соответствующими значениями для аналитического решения (Табл. 2) показывает корректность проведенных расчетов.

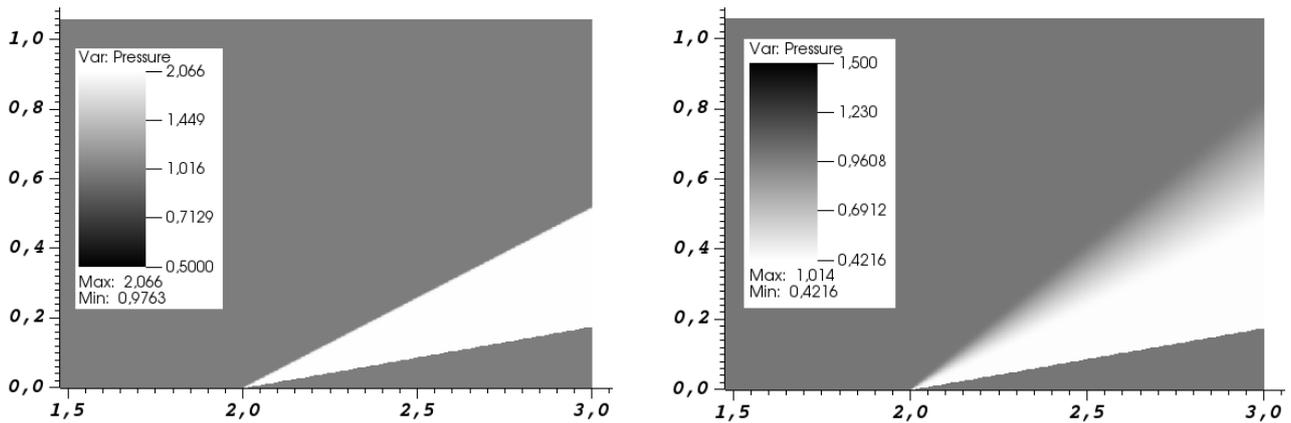


Рис. 3. Образование ударной волны (слева) и центрированной волны разрежения (справа) при взаимодействии сверхзвукового потока с клином

Таблица 2. Значения параметров течения в задаче обтекания клина.
Клин 10° , $M=3$

Численное решение, β°	Аналитическое решение, β°	Численное решение, γ°	Аналитическое решение, γ°
17.4	17.383	13.2	13.24

В качестве еще одного из результатов расчетов на рис. 4 (слева) представлена численная шпирен-визуализация потока, обтекающего несколько цилиндров (слева). Расчет проводился на сетке 1024×1024 с использованием 32 GPU. Для сравнения представлен аналогичный расчет, выполненный с помощью одного из методов штрафных функций [20] (рис.4, справа). Решения оказались очень близки, но при этом метод декартовых сеток не дает нефизичных возмущений вблизи поверхностей цилиндров. Связано это с тем, что их поверхности имеют подсеточное разрешение, в то время как в методе штрафных функций используется более грубое разрешение с точностью только до ячейки сеточного разбиения.

Наконец, был проведен валидационный расчет обтекания модели DLR F6 [21]. Число Маха набегающего потока $M=0.75$, угол атаки $\alpha=1^\circ$, разрешение расчетной сетки — $408 \times 520 \times 1256$. Расчет проводился с использованием 162 GPU СК «Лобачевский» по гибридной явно-неявной схеме с числом Куранта $C=4$ (рис. 5). Следует отметить, что полученное значение коэффициента подъемной силы оказалось выше экспериментального ($C_{l_{exp}}=0.5$), однако подобное превышение (в районе 0.5 — 0.6) наблюдается и в решениях, полученных другими программами [21].

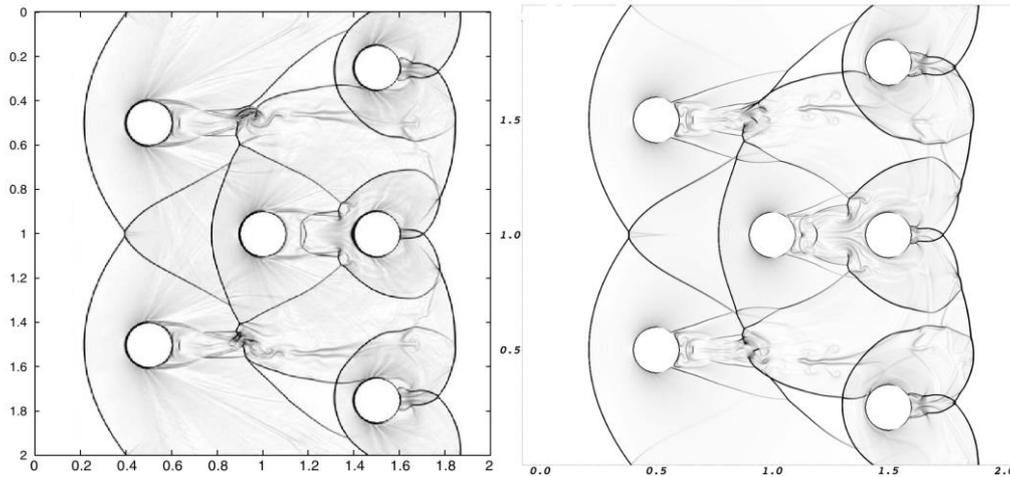


Рис. 4. Численный шпирен для системы цилиндров, $M=3$; слева – метод декартовых сеток, справа – метод штрафных функций

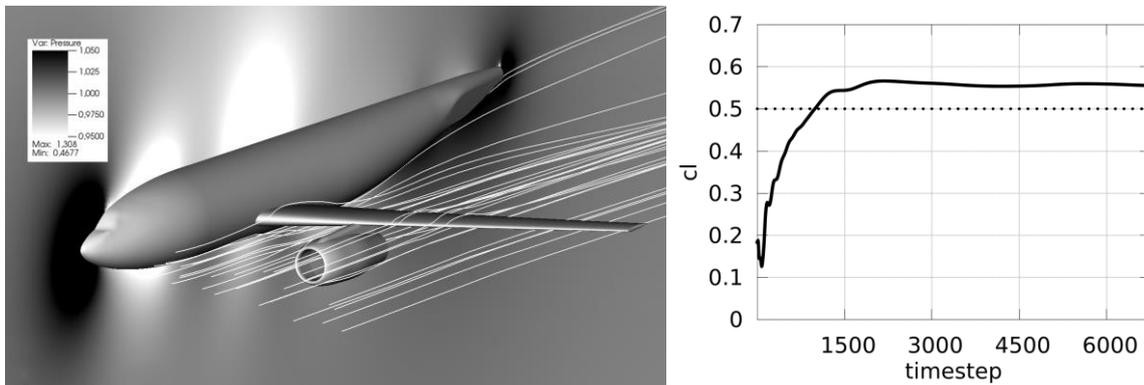


Рис. 5. DLR F6, $M=0.75$, $\alpha=1^\circ$; слева – поле давления в плоскости симметрии и линии тока, справа – зависимость C_l по времени

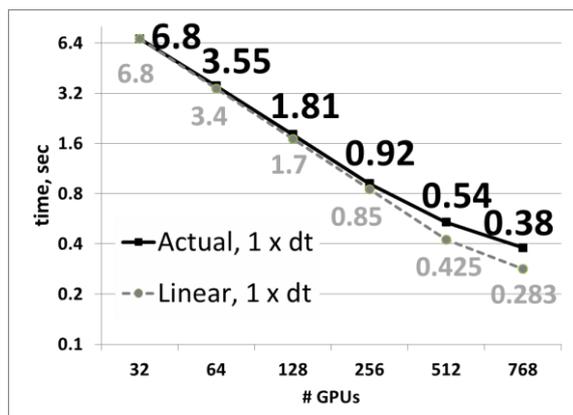


Рис. 6. Время счета в зависимости от числа GPU, пунктиром показан график линейной масштабируемости с использованием асинхронных функций CUDA и MPI.

Исследование эффективности работы с большим числом GPU проводилось на задаче с фиксированной сеткой в 150 млн ячеек на СК «Ломоносов». Программный комплекс показал хорошую масштабируемость на несколько сотен ускорителей — эффективность счета составила 75% на 768 GPU (рис. 6). Ее удалось добиться благодаря оригинальной схеме обхода ячеек расчетной области, допускающей совмещение обменов между GPU со счетом, и ее программной реализации

7. Заключение

В работе предложен эффективный численный метод, позволяющий рассчитывать сложные трехмерные нестационарные газодинамические течения на простейших декартовых сетках, не связанных с геометрией расчетной области. В основе метода лежит гибридная явно-неявная схема С.К. Годунова, обеспечивающая минимальное вовлечение неявной компоненты при сохранении свойства НВМН. Предложен способ реализации граничных условий на декартовой сетке посредством введения в правую часть исходных уравнений специальных компенсационных потоков. Это позволяет уйти от решения краевой задачи в части пространства к решению уравнений с компенсационным потоком во всем пространстве, т.е. фактически заменить краевую задачу задачей Коши. Решение дискретных уравнений выполняется методом приближенной LU-SGS факторизации, что существенно упрощает алгоритмическую часть метода. Это свойство (вычислительный примитивизм) позволило авторам разработать эффективный алгоритм параллельных вычислений на гибридных CPU/GPU вычислительных системах. Приведенные в работе результаты тестовых расчетов и сравнение с альтернативными расчетами на связанных с геометрией сетках убедительно показывают достоверность и работоспособность предложенного метода, а также его высокую масштабируемость и эффективность.

Часть работы, касающаяся адаптации алгоритма к гибридным вычислительным системам и разработки основных положений метода свободной границы, поддерживалась также грантами РФФИ 12-01-00915 и 14-01-31480

Список литературы

1. Lin Fu, Zhenghong Gao, Kan Xu, Fang Xu, A multi-block viscous flow solver based on GPU parallel methodology // *Computers & Fluids* 95 (2014) p. 19–39.
2. A. Jameson, E. Turkel, Implicit schemes and LU decomposition // *Math.of Comp.*, v.37, № 156 (1981), p. 385-397.
3. W. K. Anderson, J. L. Thomas, B. Van Leer, Comparison of finite volume flux vector splitting for the Euler equations // *AIAA J.*, **24**:9 (1986), p. 1453-1460.
4. B. Van Leer, Towards the ultimate conservative difference scheme V: A second-order sequel to Godunov's method // *J. Comp. Phys.*, **32** (1979), p. 101-136.
5. J.E.Fromm, A method for reducing dispersion in convective difference schemes // *J. Comp. Phys.*, **3** (1968), p. 176-187.

6. С.К. Годунов, В.С. Рябенский, Разностные схемы // М.: Наука. 1977. 440 с.
7. В.П. Колган, Применение принципа минимальных значений производной к построению конечно-разностных схем для расчета разрывных решений газовой динамики // *Ученые записки ЦАГИ*, **3:6** (1972), с. 68–77.
8. G.D. van Albada, B. van Leer, W. Roberts, A comparative study of computational methods in cosmic gas dynamics // *Astron. Astrophys.*, **108** (1982), p. 76-84.
9. С.К. Годунов, Разностный метод численного расчета разрывных решений уравнений гидродинамики // *Мат. сборник*, **47:3** (1957), с. 271–306.
10. С.К. Годунов, А.В. Забродин, М.Я. Иванов, А.Н. Крайко, Г.П. Прокопов, Численное решение многомерных задач газовой динамики // М.: Наука. 1976. 400 с.
11. E. Toro, Riemann solvers and numerical methods for fluid dynamics // Springer. 2009. p. 719.
12. В.В. Русанов, Разностные схемы третьего порядка точности для сквозного счета разрывных решений // *Докл. АН СССР*, **180:6** (1968), с. 1303–1305.
13. I. Menshov, Y. Nakamura, Hybrid explicit-implicit, unconditionally stable scheme for unsteady compressible flows // *AIAA J.*, **42:3** (2004), p. 551-559.
14. И.С. Меньшов, М.А. Корнев, Метод свободной границы для численного решения уравнений газовой динамики в областях с изменяющейся геометрией // *Матем. моделирование*, **26:5** (2014), с. 99–112.
15. Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц, Гидродинамика. 3-е изд. М.: Наука. 1986. 736 с.
16. I. Menshov, Y. Nakamura, An implicit advection upwind splitting scheme for hypersonic air flows in thermochemical nonequilibrium // Collection of technical papers of 6th Int. Symp. on CFD, Lake Tahoe, Nevada. 1995. p. 815-821.
17. П.В. Павлухин, Реализация параллельного метода LU-SGS для задач газовой динамики на кластерных системах с графическими ускорителями // *Вестник ННГУ*, Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского, Нижний Новгород. 2013. № 1, с. 213-218
18. O. Arias, O. Falcinelli, N. Fico Jr., S. Elaskar, Finite volume simulation of a flow over a Naca 0012 using Jameson, Maccormack, Shu And Tvd esquemes // *Mecanica Computational* Vol XXVI (2007), p. 3097-3116.
19. J. C. Vassberg, A. Jameson, In Pursuit of Grid Convergence, Part I: Two-Dimensional Euler Solutions // AIAA Paper 2009-4114 (2009), 34 p.

20. O. Boiron, G. Chiavassa, R. Donat A high-resolution penalization method for large Mach number flows in the presence of obstacles // *Computers & Fluids*, 38 (2009), p. 703 – 714.
21. K. R. Laflin, S. M. Klausmeyer, T. Zickuhr, *et al*, Data Summary from Second AIAA Computational Fluid Dynamics Drag Prediction Workshop // *JOURNAL OF AIRCRAFT*, 42:5 (2005), p. 1165 – 1178.

Оглавление

1. Введение.....	3
2. Базовый численный метод	5
3. Внутренние граничные условия на декартовой сетке.....	10
4. Решение систем дискретных уравнений.....	14
5. Адаптация к гибридным вычислительным системам	17
6. Результаты численных экспериментов.....	18
7. Заключение	22
Список литературы.....	22