ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 95 за 2014 г.

Зверяев Е.М., Олехова Л.В.

Сведение трехмерных уравнений НДС пластины из композиционного материала к двумерным на базе принципа сжатых отображений

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Зверяев Е.М., Олехова Л.В. Сведение трехмерных уравнений НДС пластины из композиционного материала к двумерным на базе принципа сжатых отображений // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2014. № 95. 29 с. URL: http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2014-95

О р д е н а   Л е н и н а
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М.В. Келдыша
Р о с с и й с к о й   а к а д е м и и   н а у к

Е.М. Зверяев, Л.В. Олехова

Сведение трехмерных уравнений НДС пластины из композиционного материала к двумерным на базе принципа сжатых отображений

Москва — 2014

Зверяев Е.М., Олехова Л.В.

Сведение трехмерных уравнений НДС пластины из композиционного материала к двумерным на базе принципа сжатых отображений

В качестве исходных общих уравнений взяты уравнения пространственной задачи теории упругости для плиты. Модуль упругости и коэффициент Пуассона считаются функциями высоты поперечного сечения. Интегрирование системы производится с помощью метода простых итераций, позволяющего установить вид асимптотических разложений по малому параметру и показатели весовых коэффициентов каждого искомого неизвестного. Если нагрузка является медленно меняющейся вдоль координат, решение задачи также сводится к определению медленно меняющихся неизвестных функций напряжений и перемещений. В этом случае задача существенно упрощается и сводится к решению последовательности классических задач таким образом, что выходные данные одной элементарной задачи являются входными для следующей.

Ключевые слова: принцип сжатых отображений, композиционный материал, теория пластин, малый параметр.

Evgeny Mikhailovich Zveriaev, Lubov Vladimirovna Olekhova

Reduction 3D equations of composite plate to 2D equations on base of mapping contraction principle

The spatial equations of the theory of elasticity for the plate are taken into consideration. The elasticity modulus and Poisson's ratio are considered as the functions of the cross-section height. The integration of the system is produced by the method of the simple iteration that allows establishing the form of the asymptotic expansions and determining the weight coefficients for each unknown. If the load is slowly varying along the coordinates, the solution also reduces to the determination of the slowly varying unknown functions of the stresses and displacements. In this case, the problem is significantly simplified and reduced to solving a sequence of classical problems so that the output data from one of the elementary problem are input ones for the next problem.

Key words: contraction mapping principle, composite material, plate theory, small parameter.

Введение

С научной точки зрения существенно, чтобы свойства конструируемых моделей и процессов формулировались отчетливо на рациональной основе. Во многих современных проблемах разумно избегать чрезмерных усложнений, т. к. соответствующие эксперименты и явления, как правило, связаны с разбросом экспериментальных данных, которые вносятся трудно контролируемыми различиями в самих объектах изучения. Тем не менее, вопрос о построении уточненных моделей новых материальных сред с учетом новых и дополнительных свойств и эффектов актуален.

Методы аналитического решения краевых задач теории упругости неоднородного тела во многом определяются видом функций, характеризующих зависимость упругих свойств от координат. Задачи такого рода составляют основу механики деформируемых тел из композиционных материалов, развивающейся интенсивно в настоящее время. Практически все работы используют тот или иной способ гомогенизации материала. Часть работ в области механики композитов, вышедших до 1989 года, проанализирована в работе Ю.М. Тарнопольского [1]. Большое количество частных задач для непрерывно неоднородных тел было рассмотрено В.А Ломакиным [2] и Г.Б. Колчиным [3], в том числе решенных с помощью итерационных методов.

И.Г. Альперин [4] рассмотрел плоскую деформацию полуплоскости, состоящей из n слоев, на границах которых отсутствует трение. Решение строится с помощью интегрального преобразования Фурье через бигармонические функции напряжений для каждого слоя. В итоге задача сводится к системе из n функциональных уравнений относительно n неизвестных функций. В работе Г.С. Шапиро [5] была рассмотрена осесимметричная задача для многослойной плиты, а также для многослойного цилиндра. Методом интегрального преобразования Ханкеля дается точное решение. Если плита имеет n слоев, задача сводится к решению системы из $4n$ функциональных уравнений.

Приближенные теории упругой многослойной среды, основой которых являются различные ограничения, накладываемые на геометрические и упругие характеристики всей среды в целом и отдельных ее слоев, развивались в работах В.В. Болотина [6], монографии В.В. Болотина, Ю.Н. Новичкова [7], в книге В.В. Васильева [8].

Метод тензоров Грина был предложен В.И. Горбачевым в 1991 году [9]. В этом методе рассматривается произвольно неоднородное упругое тело. В основе метода лежит возможность представления решения любой линейной краевой задачи с одними упругими характеристиками через решение такой же задачи для тела точно такой же формы, что и исходной, но с другими упругими характеристиками [10, 11].

В книге [12] на основе вариационного принципа получены уравнения равновесия, граничные условия и интегральные соотношения упругости для поперечных касательных напряжений. В случае осесимметричной деформации многослойных анизотропных оболочек вращения выведена нормальная система десяти обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка, которая решается численно. В работе [13] автор формулирует условия, которым должна удовлетворять непротиворечивая модель слоистой пластинки или оболочки:

- выполняются условия непрерывности перемещений и поперечных напряжений на поверхностях раздела слоев;
- удовлетворяются заданные граничные условия (статические или кинематические) на лицевых поверхностях оболочки;
- уравнения обобщенного закона Гука удовлетворяются поточечно в пределах каждого слоя —

и отмечает, что, несмотря на гигантское количество опубликованных работ, таких непротиворечивых моделей построено не было.

В настоящее время одним из распространенных методов решения одномерных задач механики композитов является метод малого геометрического параметра, предложенный Н.С. Бахваловым в 1974 [14]. В 1984 году вышла книга Н.С. Бахвалова и Г.П. Панасенко [15], в которой подробно рассмотрена методика осреднения различных материалов. Дальнейшее развитие и применение метода малого геометрического параметра к линейным и нелинейным задачам было дано в работах Б.Е. Победри и его учеников [16, 17, 18]. При использовании метода малого параметра решение исходной краевой задачи для периодически неоднородного тела ищется в виде формального асимптотического ряда по малому параметру, равному отношению размера ячейки периодичности к характерному размеру тела. В итоге задача сводится к двум рекуррентным последовательностям задач.

Известно, что использование хорошо угаданной формы асимптотического разложения неизвестных позволяет легко найти решение задачи [19]. Как считает М. Ван-Дайк, «…итерации иногда (но не всегда!) автоматически приводят к надлежащей последовательности. Обычно чувствуется, когда решение развивается правильно: все члены согласуются, запутанные выражения часто упрощаются. С приобретением опыта можно научиться распознавать, когда отсутствие таких успокаивающих признаков внушает мысль о перепроверке предположенной формы ряда. Однако единственным совершенно надежным процессом является такой, в котором асимптотическая последовательность не устанавливается заранее, а определяется — член за членом — в ходе решения». На взгляд авторов настоящей работы, метод простых итераций и принцип сжатых отображений позволяют построить необходимый механизм установления вида асимптотического разложения по малому параметру и, вполне возможно, по нескольким [20], удовлетворяя предложенному М. Ван-Дайком правилу.

Ряд вопросов, связанных с существованием и единственностью решений уравнений того или иного типа можно сформулировать в виде вопроса о существовании и единственности неподвижной точки при некотором отображении соответствующего метрического пространства в себя. Среди различных критериев существования и единственности неподвижной точки при такого рода отображениях простейшим и в то же время наиболее важным является так называемый принцип сжатых отображений.

Отображение $x = Ax$ метрического пространства M в себя называется сжимающим отображением (сжатием), если существует такое число $\alpha < 1$, что для любых двух точек $x, y \in M$ выполняется неравенство $\rho(Ax, Ay) \le \alpha\rho(x, y)$ [21]. Точка x называется неподвижной точкой отображения, если $x = Ax$. Иначе говоря, неподвижные точки – это решения уравнения $x = Ax$.

Итерационный процесс начинается исходя из некоторого начального приближения x_0. Если оператор A является сжимающим, процедура сходится к некоторому решению x независимо от выбора величины начального приближения. Последовательные приближения $x_1, x_2, x_3, ..., x_n, ...$ находятся с помощью формулы

$$x_{n+1} = Ax_n .$$

Существующие методы получения эффективных характеристик основных элементов конструкций основаны на том или ином осреднении физико-механических материалов с периодическими свойствами [15, 22]. При этом рассматриваются одномерные задачи. В случае двумерных или трехмерных задач с большим числом неизвестных стандартные методы малого параметра не работают, т.к. каждое искомое неизвестное имеет свой весовой множитель и свою изменяемость, определяющие его вклад в каждое отдельно взятое уравнение. В этом случае никакие идеи и приемы осреднения упругих характеристик материала не производятся. Определение весовых коэффициентов с помощью метода простых итераций дано в работе [23] для задач теории оболочек и в [24, 25] на примере длинной упругой полосы. В книге [3] автор близко подходит к идее осреднения, опираясь на полуобратный метод Сен-Венана, являющийся по своей сути, как это показано в [24, 25], первой итерацией метода простых итераций процесса построения медленно меняющегося решения.

При построении решения путем асимптотических разложений искомых неизвестных задача легко решается, и пространственные уравнения сводятся к двумерным, если угадан вид разложения. В этом случае все неизвестные задачи определяются из уравнений нулевого приближения, и ни одно неизвестное при этом не обращается в ноль. Тогда первое и следующие приближения служат только для численного уточнения полученной в нулевом приближении величины, но не могут изменить саму установленную видом разложения причинно-следственную функциональную связь. Для установления вида разложения в настоящей работе используется метод простых итераций. В работах [23-26] показано, что после установления вида разложения можно переходить к выполнению граничных условий, в результате чего получаются уравнения для быстро (типа пограничного слоя) и медленно меняющихся составляющих решения, совпадающие с уравнениями, полученными в результате использования асимптотических разложений. При этом не используются какие-либо специальные приемы и традиционные гипотезы осреднения [27]. Строится оператор последовательного вычисления неизвестных в нулевом и первом приближении. Первое приближение используется для оценки сходимости процесса с помощью малого параметра, играющего в методе простых итераций такую же роль, как и в методе асимптотического интегрирования.

Поскольку метод простых итераций обосновывается принципом сжатых отображений, решение сходится независимо от выбора величин начального приближения, но скорость сходимости, тем более что производится вычисление только одной итерации, зависит от них. Для построения решения используются предположения начального приближения:

- в нулевом приближении утонение (утолщение) пластины пренебрежимо мало;
- поперечные сдвиги в нулевом приближении распределены равномерно по толщине пластины, но учитывается поправка в первом приближении, дающая быстро меняющееся решение типа пограничного слоя.

1. Построение решения

Рассмотрим задачу определения напряженно-деформированного состояния упругой плиты, модуль упругости и коэффициент Пуассона которой меняются по высоте по произвольному закону $E=E(z), \nu=\nu(z)$. Будем исходить из уравнений пространственной теории упругости, отметив звездочкой размерные величины. Совместим срединную плоскость прямоугольной плиты с плоскостью x^*y^* декартовой системы координат $x^*y^*z^*$. Пусть a, b – размеры плиты вдоль осей x^* и y^* соответственно, $2h$ – толщина плиты и $0 \le x^* \le a, 0 \le y^* \le b$, $-h \le z^* \le h$. Классические уравнения теории упругости имеют вид:

$$\frac{\partial\sigma_z^*}{\partial z^*}+\frac{\partial\tau_{xz}^*}{\partial x^*}+\frac{\partial\tau_{yz}^*}{\partial y^*}=0, \quad \tau_{xy}^*=\frac{E^*}{2(1+\nu^*)}\gamma_{xy},$$

$$\frac{\partial\sigma_x^*}{\partial x^*}+\frac{\partial\tau_{xz}^*}{\partial z^*}+\frac{\partial\tau_{xy}^*}{\partial y^*}=0, \quad \tau_{xz}^*=\frac{E^*}{2(1+\nu^*)}\gamma_{xz},$$

$$\frac{\partial\sigma_y^*}{\partial y^*}+\frac{\partial\tau_{yz}^*}{\partial z^*}+\frac{\partial\tau_{xy}^*}{\partial x^*}=0, \quad \tau_{yz}^*=\frac{E^*}{2(1+\nu^*)}\gamma_{yz},$$

$$E^*\varepsilon_x = \sigma_x^* - \nu(\sigma_y^* + \sigma_z^*), \quad \varepsilon_x = \frac{\partial u^*}{\partial x^*}, \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u^*}{\partial y^*} + \frac{\partial v^*}{\partial x^*},$$

$$E^*\varepsilon_y = \sigma_y^* - \nu(\sigma_x^* + \sigma_z^*), \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v^*}{\partial y^*}, \quad \gamma_{xz} = \frac{\partial u^*}{\partial z^*} + \frac{\partial w^*}{\partial x^*},$$

$$E^*\varepsilon_z = \sigma_z^* - \nu(\sigma_x^* + \sigma_y^*), \quad \varepsilon_z = \frac{\partial w^*}{\partial z^*}, \quad \gamma_{yz} = \frac{\partial v^*}{\partial z^*} + \frac{\partial w^*}{\partial y^*}.$$

Введем безразмерные координаты $x = x^*/a,\ \ y = y^*/a,\ \ z = z^*/h,$ безразмерные перемещения $u = u^*/h,\ v = v^*/h,\ w = w^*/h$, безразмерные напряжения $\sigma_x = \sigma_x^*/E_h^*,\ \sigma_y = \sigma_y^*/E_h^*,\ \sigma_z = \sigma_z^*/E_h^*,\ \tau = \tau^*/E_h^*$, некоторую величину E_h^*, представляющую собой, например, среднее значение модуля упругости, и безразмерный модуль упругости $E = E^*\big/E_h^*$. Область, занятая плитой, в безразмерных координатах задается выражениями: $0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le b/a,\ -1 \le z \le 1.$

Безразмерные уравнения, описывающие напряженно-деформированное состояние плиты, запишем в следующей форме, удобной для решения методом простых итераций:

$$\frac{\partial u}{\partial z} = -\varepsilon\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{2(1+\nu)}{E}\tau_{xz},$$

$$\frac{\partial v}{\partial z} = -\varepsilon\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{2(1+\nu)}{E}\tau_{yz},$$

$$\frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = -\varepsilon\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} - \varepsilon\frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y},$$

$$\varepsilon_x = \varepsilon\frac{\partial u}{\partial x},\ \ \varepsilon_y = \varepsilon\frac{\partial v}{\partial y},\ \ \tau_{xy} = \frac{E}{2(1+\nu)}\left(\varepsilon\frac{\partial u}{\partial y} + \varepsilon\frac{\partial v}{\partial x}\right), \tag{1}$$

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_x + \nu\varepsilon_y) + \frac{\nu}{1-\nu}\sigma_z,$$

$$\sigma_y = \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_y + \nu\varepsilon_x) + \frac{\nu}{1-\nu}\sigma_z,$$

$$\varepsilon_z = \frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{E(1-\nu)}\sigma_z - \frac{\nu}{1-\nu}(\varepsilon_x + \varepsilon_y),$$

$$\frac{\partial w}{\partial z} = \varepsilon_z,\ \ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = -\varepsilon\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} - \varepsilon\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y},\ \ \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} = -\varepsilon\frac{\partial \sigma_y}{\partial y} - \varepsilon\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x}.$$

Здесь введен малый параметр $\varepsilon = h/a$.

Записанная система уравнений позволяет использовать метод последовательных приближений (метод простых итераций) для нахождения решения. Если в трех первых уравнениях перемещение $w = w_0$ и касательные напряжения $\tau_{xz} = \tau_{xz0}$, $\tau_{yz} = \tau_{yz0}$ рассматривать в качестве известных величин начального приближения, остальные неизвестные могут быть вычислены последовательно. Сначала из первых трех уравнений вычисляются u_0, v_0 и σ_{0z}, затем через них путем прямых действий, алгебраических и дифференцирования, из следующих шести уравнений выражаются $\varepsilon_{x0}, \varepsilon_{y0}, \tau_{xy0}, \sigma_{x0}, \sigma_{y0}, \varepsilon_{z0}$. Потом по известным ε_{z0}, τ_{xy0}, σ_{x0}, σ_{y0} вычисляются w_1 и τ_1 в первом приближении и т.д.

Величины начального приближения выберем такими:

$$w = w_0(x, y),\ \tau_{xz} = \tau_{0xz}(x, y),\ \tau_{yz} = \tau_{0yz}(x, y), \tag{2}$$

считая поперечное перемещение и касательные напряжения в нулевом приближении не зависящими от поперечной координаты. Для удобства процедуру вычислений разделим в силу линейности задачи на три элементарных: w, τ и 0-процессы. В w-процессе задаются величины начального приближения

$$w = w_0(x, y), \quad \tau_{xz} = \tau_{xz0} = 0, \quad \tau_{yz} = \tau_{yz0} = 0. \tag{3}$$

В τ-процессе, наоборот,

$$w = 0, \quad \tau_{xz} = \tau_{xz0}(x, y), \quad \tau_{yz} = \tau_{yz0}(x, y). \tag{4}$$

В 0-процессе

$$w = w_0 = 0, \quad \tau_{xz} = \tau_{xz0} = 0, \quad \tau_{yz} = \tau_{yz0} = 0. \tag{5}$$

0-процесс выделен для того, чтобы учесть появляющиеся в процессе вычисления произволы интегрирования, не учитываемые в w- и τ-процессах. Проводя теперь вычисления по описанной схеме, получаем следующие выражения для искомых неизвестных:

в w-процессе

$$w_0 = w_0(x, y),\ \tau_{xz0} = \tau_{yz0} = 0,\ u_0 = -\varepsilon \frac{\partial w_0}{\partial x} z,\ v_0 = -\varepsilon \frac{\partial w_0}{\partial y} z,$$

$$\sigma_{z0} = 0, \quad \varepsilon_{x0} = -\varepsilon^2 \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} z, \quad \varepsilon_{y0} = -\varepsilon^2 \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} z, \quad \tau_{xy0} = -\varepsilon^2 \frac{E}{1+\nu} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} z,$$

$$\sigma_{x0} = -\varepsilon^2 z \frac{E}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \right), \qquad \sigma_{y0} = -\varepsilon^2 z \frac{E}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \right),$$

$$\varepsilon_{z0}=\varepsilon^2 z\frac{\nu}{1-\nu}\left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2}\right),\qquad w_1=\varepsilon^2\left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2}\right)\int_0^z\frac{\nu}{1-\nu}zdz,$$

$$\tau_{xz1}=\varepsilon^3\left(\frac{\partial^3 w_0}{\partial x^3}+\frac{\partial^3 w_0}{\partial x\partial y^2}\right)\int_0^z\frac{E}{1-\nu^2}zdz,\qquad \tau_{yz1}=\varepsilon^3\left(\frac{\partial^3 w_0}{\partial y^3}+\frac{\partial^3 w_0}{\partial x^2\partial y}\right)\int_0^z\frac{E}{1-\nu^2}zdz,$$

$$\sigma_{z1}=-\varepsilon^4\left(\frac{\partial^4 w_0}{\partial x^4}+2\frac{\partial^4 w_0}{\partial x^2\partial y^2}+\frac{\partial^4 w_0}{\partial y^4}\right)\int_0^z\int_0^z\frac{E}{1-\nu^2}zdzdz\,;$$

в τ-процессе

$$w_0=0,\quad \tau_{xz0}=\tau_{xz0}(x,y),\quad \tau_{yz0}=\tau_{yz0}(x,y),\quad u_0=\tau_{xz0}\int_0^z\frac{2(1+\nu)}{E}dz,$$

$$v_0=\tau_{yz0}\int_0^z\frac{2(1+\nu)}{E}dz,\qquad \sigma_{z0}=-\varepsilon\left(\frac{\partial\tau_{xz0}}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{yz0}}{\partial y}\right)z,$$

$$\varepsilon_{x0}=\varepsilon\frac{\partial\tau_{xz0}}{\partial x}\int_0^z\frac{2(1+\nu)}{E}dz,\qquad \varepsilon_{y0}=\varepsilon\frac{\partial\tau_{yz0}}{\partial y}\int_0^z\frac{2(1+\nu)}{E}dz,$$

$$\tau_{xy0}=\frac{E}{1+\nu}\varepsilon\left(\frac{\partial\tau_{xz0}}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{yz0}}{\partial y}\right)\int_0^z\frac{1+\nu}{E}dz,$$

$$\sigma_{x0}=\frac{E}{1-\nu^2}\varepsilon\left(\frac{\partial\tau_{xz0}}{\partial x}+\nu\frac{\partial\tau_{yz0}}{\partial y}\right)\int_0^z\frac{2(1+\nu)}{E}dz-\frac{\nu}{1-\nu}\varepsilon z\left(\frac{\partial\tau_{xz0}}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{yz0}}{\partial y}\right),$$

$$\sigma_{y0}=\frac{E}{1-\nu^2}\varepsilon\left(\frac{\partial\tau_{yz0}}{\partial y}+\nu\frac{\partial\tau_{xz0}}{\partial x}\right)\int_0^z\frac{2(1+\nu)}{E}dz-\frac{\nu}{1-\nu}\varepsilon z\left(\frac{\partial\tau_{yz0}}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{xz0}}{\partial x}\right),$$

$$\varepsilon_{z0}=-\varepsilon\left(\frac{\partial\tau_{xz0}}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{yz0}}{\partial y}\right)\left[\frac{\nu}{1-\nu}\int_0^z\frac{2(1+\nu)}{E}dz+\frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{E(1-\nu)}z\right],$$

$$w_1=-\varepsilon\left(\frac{\partial\tau_{xz0}}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{yz0}}{\partial y}\right)\left[\int_0^z\frac{\nu}{1-\nu}\int_0^z\frac{2(1+\nu)}{E}dzdz+\int_0^z\frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{E(1-\nu)}zdz\right],$$

$$\tau_{xz1}=-\varepsilon^2\frac{\partial^2\tau_{xz0}}{\partial x^2}\left[\int_0^z\frac{E}{1-\nu^2}\int_0^z\frac{2(1+\nu)}{E}dzdz-\int_0^z\frac{\nu}{1-\nu}zdz\right]-$$
$$-\varepsilon^2\frac{\partial^2\tau_{yz0}}{\partial x\partial y}\left[\int_0^z\frac{\nu E}{1-\nu^2}\int_0^z\frac{2(1+\nu)}{E}dzdz-\int_0^z\frac{\nu}{1-\nu}zdz\right]-$$

$$-\varepsilon^2\left(\frac{\partial^2\tau_{xz0}}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2\tau_{yz0}}{\partial y^2}\right)\int_0^z\frac{E}{1+\nu}\int_0^z\frac{1+\nu}{E}dzdz,$$

$$\tau_{xz1}=-\varepsilon^2\frac{\partial^2\tau_{xz0}}{\partial x^2}\left[\int_0^z\frac{E}{1-\nu^2}\int_0^z\frac{2(1+\nu)}{E}dzdz-\int_0^z\frac{\nu}{1-\nu}zdz\right]-$$

$$-\varepsilon^2\frac{\partial^2\tau_{yz0}}{\partial x\partial y}\left[\int_0^z\frac{\nu E}{1-\nu^2}\int_0^z\frac{2(1+\nu)}{E}dzdz-\int_0^z\frac{\nu}{1-\nu}zdz\right]-$$

$$-\varepsilon^2\left(\frac{\partial^2\tau_{xz0}}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2\tau_{yz0}}{\partial y^2}\right)\int_0^z\frac{E}{1+\nu}\int_0^z\frac{1+\nu}{E}dzdz,$$

$$\tau_{yz1}=-\varepsilon^2\frac{\partial^2\tau_{yz0}}{\partial y^2}\left[\int_0^z\frac{E}{1-\nu^2}\int_0^z\frac{2(1+\nu)}{E}dzdz-\int_0^z\frac{\nu}{1-\nu}zdz\right]-$$

$$-\varepsilon^2\frac{\partial^2\tau_{xz0}}{\partial x\partial y}\left[\int_0^z\frac{\nu E}{1-\nu^2}\int_0^z\frac{2(1+\nu)}{E}dzdz-\int_0^z\frac{\nu}{1-\nu}zdz\right]-$$

$$-\varepsilon^2\left(\frac{\partial^2\tau_{yz0}}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2\tau_{xz0}}{\partial x^2}\right)\int_0^z\frac{E}{1+\nu}\int_0^z\frac{1+\nu}{E}dzdz,$$

$$\sigma_{z1}=\varepsilon^3\left(\frac{\partial^3\tau_{xz0}}{\partial x^3}+\frac{\partial^3\tau_{yz0}}{\partial y^3}\right)\left[\int_0^z\int_0^z\frac{E}{1-\nu^2}\int_0^z\frac{2(1+\nu)}{E}dzdzdz-\int_0^z\int_0^z\frac{\nu}{1-\nu}zdzdz\right]+$$

$$+\varepsilon^3\left(\frac{\partial^3\tau_{yz0}}{\partial x^2\partial y}+\frac{\partial^3\tau_{xz0}}{\partial x\partial y^2}\right)\left[\int_0^z\int_0^z\frac{\nu E}{1-\nu^2}\int_0^z\frac{2(1+\nu)}{E}dzdz-\int_0^z\int_0^z\frac{\nu}{1-\nu}zdz\right]+$$

$$+2\varepsilon^3\left(\frac{\partial^3\tau_{xz0}}{\partial x^2\partial y}+\frac{\partial^3\tau_{yz0}}{\partial y^2\partial x}\right)\int_0^z\int_0^z\frac{E}{1+\nu}\int_0^z\frac{1+\nu}{E}dzdzdz;$$

в 0-процессе

$$w_0=0,\quad \tau_{xz0}=\tau_{yz0}=0,\quad u_0=u_0(x,y),\quad v_0=v_0(x,y),\quad \sigma_{0z}=\sigma_{0z}(x,y),$$

$$\varepsilon_{0x}=\varepsilon\frac{\partial u_0}{\partial x},\quad \varepsilon_{0y}=\varepsilon\frac{\partial v_0}{\partial y},\quad \tau_{xy0}=\varepsilon\frac{E}{2(1+\nu)}\left(\frac{\partial u_0}{\partial y}+\frac{\partial v_0}{\partial x}\right),$$

$$\sigma_{x0}=\varepsilon\frac{E}{1-\nu^2}\left(\frac{\partial u_0}{\partial x}+\nu\frac{\partial v_0}{\partial y}\right)+\frac{\nu}{1-\nu}\sigma_{z0},\ \sigma_{y0}=\varepsilon\frac{E}{1-\nu^2}\left(\frac{\partial v_0}{\partial y}+\nu\frac{\partial u_0}{\partial x}\right)+\frac{\nu}{1-\nu}\sigma_{z0},$$

$$\varepsilon_{z0}=-\varepsilon\frac{\nu}{1-\nu}\left(\frac{\partial u_0}{\partial x}+\frac{\partial v_0}{\partial y}\right)+\frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{E(1-\nu)}\sigma_{z0},$$

$$w_1 = -\varepsilon\left(\frac{\partial u_0}{\partial x}+\frac{\partial v_0}{\partial y}\right)\int_0^z \frac{\nu}{1-\nu}dz + \sigma_{z0}\int_0^z \frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{E(1-\nu)}dz,$$

$$\tau_{xz1} = -\varepsilon^2\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2}\int_0^z \frac{E}{1-\nu^2}dz - \varepsilon^2\frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2}\int_0^z \frac{E}{2(1+\nu)}dz -$$

$$-\varepsilon^2\frac{\partial^2 v_0}{\partial x\partial y}\int_0^z \frac{E}{2(1-\nu)}dz - \varepsilon\frac{\partial \sigma_{z0}}{\partial x}\int_0^z \frac{\nu}{1-\nu}dz,$$

$$\tau_{yz1} = -\varepsilon^2\frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2}\int_0^z \frac{E}{1-\nu^2}dz - \varepsilon^2\frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2}\int_0^z \frac{E}{2(1+\nu)}dz -$$

$$-\varepsilon^2\frac{\partial^2 u_0}{\partial x\partial y}\int_0^z \frac{E}{2(1-\nu)}dz - \varepsilon\frac{\partial \sigma_{z0}}{\partial y}\int_0^z \frac{\nu}{1-\nu}dz,$$

$$u_1 = \varepsilon^2\left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v_0}{\partial x\partial y}\right)\int_0^z\int_0^z \frac{\nu}{1-\nu}dzdz - \varepsilon\frac{\partial \sigma_{z0}}{\partial x}\int_0^z\int_0^z \frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{E(1-\nu)}dzdz -$$

$$-\varepsilon^2\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2}\int_0^z \frac{2(1+\nu)}{E}\int_0^z \frac{E}{1-\nu^2}dzdz - \varepsilon^2\frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2}\int_0^z \frac{2(1+\nu)}{E}\int_0^z \frac{E}{2(1+\nu)}dzdz -$$

$$-\varepsilon^2\frac{\partial^2 v_0}{\partial x\partial y}\int_0^z \frac{2(1+\nu)}{E}\int_0^z \frac{E}{2(1-\nu)}dzdz - \varepsilon\frac{\partial \sigma_{z0}}{\partial x}\int_0^z \frac{2(1+\nu)}{E}\int_0^z \frac{\nu}{1-\nu}dzdz,$$

$$v_1 = \varepsilon^2\left(\frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u_0}{\partial x\partial y}\right)\int_0^z\int_0^z \frac{\nu}{1-\nu}dzdz - \varepsilon\frac{\partial \sigma_{z0}}{\partial y}\int_0^z\int_0^z \frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{E(1-\nu)}dzdz -$$

$$-\varepsilon^2\frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2}\int_0^z \frac{2(1+\nu)}{E}\int_0^z \frac{E}{1-\nu^2}dzdz - \varepsilon^2\frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2}\int_0^z \frac{2(1+\nu)}{E}\int_0^z \frac{E}{2(1+\nu)}dzdz -$$

$$-\varepsilon^2\frac{\partial^2 u_0}{\partial x\partial y}\int_0^z \frac{2(1+\nu)}{E}\int_0^z \frac{E}{2(1-\nu)}dzdz - \varepsilon\frac{\partial \sigma_{z0}}{\partial y}\int_0^z \frac{2(1+\nu)}{E}\int_0^z \frac{\nu}{1-\nu}dzdz,$$

$$\sigma_{z1} = \varepsilon^3\left(\frac{\partial^3 u_0}{\partial x^3}+\frac{\partial^3 v_0}{\partial y^3}+\frac{\partial^3 u_0}{\partial x\partial y^2}+\frac{\partial^3 v_0}{\partial x^2\partial y}\right)\int_0^z\int_0^z \frac{E}{1-\nu^2}dzdz +$$

$$+\varepsilon^2\left(\frac{\partial^2 \sigma_{z0}}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \sigma_{z0}}{\partial y^2}\right)\int_0^z\int_0^z \frac{\nu}{1-\nu}dzdz\,.$$

В итоге получаем следующую запись искомых неизвестных в первом приближении:

– нормальное перемещение

$$w = w_0 + \varepsilon^2 \left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \right) \int_0^z \frac{\nu}{1-\nu} z dz -$$

$$-\varepsilon \left(\frac{\partial \tau_{xz0}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz0}}{\partial y} \right) \left[\int_0^z \frac{\nu}{1-\nu} \int_0^z \frac{2(1+\nu)}{E} dz dz + \int_0^z \frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{E(1-\nu)} z dz \right] -$$

$$-\varepsilon \left(\frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial v_0}{\partial y} \right) \int_0^z \frac{\nu}{1-\nu} dz + \sigma_{z0} \int_0^z \frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{E(1-\nu)} dz,$$

– тангенциальные перемещения

$$u = -\varepsilon \frac{\partial w_0}{\partial x} z + \tau_{xz0} \int_0^z \frac{2(1+\nu)}{E} dz + u_0 + \varepsilon^2 \left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} \right) \int_0^z \int_0^z \frac{\nu}{1-\nu} dz dz -$$

$$-\varepsilon \frac{\partial \sigma_{z0}}{\partial x} \int_0^z \int_0^z \frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{E(1-\nu)} dz dz - \varepsilon^2 \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} \int_0^z \frac{2(1+\nu)}{E} \int_0^z \frac{E}{1-\nu^2} dz dz -$$

$$-\varepsilon^2 \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} \int_0^z \frac{2(1+\nu)}{E} \int_0^z \frac{E}{2(1+\nu)} dz dz - \varepsilon^2 \frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} \int_0^z \frac{2(1+\nu)}{E} \int_0^z \frac{E}{2(1-\nu)} dz dz -$$

$$-\varepsilon \frac{\partial \sigma_{z0}}{\partial x} \int_0^z \frac{2(1+\nu)}{E} \int_0^z \frac{\nu}{1-\nu} dz dz,$$

$$v = -\varepsilon \frac{\partial w_0}{\partial y} z + \tau_{yz0} \int_0^z \frac{2(1+\nu)}{E} dz + v_0 + \varepsilon^2 \left(\frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} \right) \int_0^z \int_0^z \frac{\nu}{1-\nu} dz dz -$$

$$-\varepsilon \frac{\partial \sigma_{z0}}{\partial y} \int_0^z \int_0^z \frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{E(1-\nu)} dz dz - \varepsilon^2 \frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} \int_0^z \frac{2(1+\nu)}{E} \int_0^z \frac{E}{1-\nu^2} dz dz -$$

$$-\varepsilon^2 \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} \int_0^z \frac{2(1+\nu)}{E} \int_0^z \frac{E}{2(1+\nu)} dz dz - \varepsilon^2 \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} \int_0^z \frac{2(1+\nu)}{E} \int_0^z \frac{E}{2(1-\nu)} dz dz -$$

$$-\varepsilon \frac{\partial \sigma_{z0}}{\partial y} \int_0^z \frac{2(1+\nu)}{E} \int_0^z \frac{\nu}{1-\nu} dz dz,$$

– касательные напряжения

$$\tau_{xz} = \tau_{xz0} + \varepsilon^3 \left(\frac{\partial^3 w_0}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 w_0}{\partial x \partial y^2} \right) \int_0^z \frac{E}{1-\nu^2} z dz -$$

$$-\varepsilon^2 \frac{\partial^2 \tau_{xz0}}{\partial x^2} \left[\int_0^z \frac{E}{1-\nu^2} \int_0^z \frac{2(1+\nu)}{E} dz dz - \int_0^z \frac{\nu}{1-\nu} z dz \right] -$$

$$-\varepsilon^2 \frac{\partial^2 \tau_{yz0}}{\partial x \partial y}\left[\int_0^z \frac{\nu E}{1-\nu^2}\int_0^z \frac{2(1+\nu)}{E}dzdz - \int_0^z \frac{\nu}{1-\nu}zdz\right] - \tag{6}$$

$$-\varepsilon^2\left(\frac{\partial^2 \tau_{xz0}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \tau_{yz0}}{\partial y^2}\right)\int_0^z \frac{E}{1+\nu}\int_0^z \frac{1+\nu}{E}dzdz - \varepsilon^2 \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2}\int_0^z \frac{E}{1-\nu^2}dz -$$

$$-\varepsilon^2 \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2}\int_0^z \frac{E}{2(1+\nu)}dz - \varepsilon^2 \frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y}\int_0^z \frac{E}{2(1-\nu)}dz - \varepsilon \frac{\partial \sigma_{z0}}{\partial x}\int_0^z \frac{\nu}{1-\nu}dz,$$

$$\tau_{yz} = \tau_{yz0} + \varepsilon^3\left(\frac{\partial^3 w_0}{\partial y^3} + \frac{\partial^3 w_0}{\partial x^2 \partial y}\right)\int_0^z \frac{E}{1-\nu^2}zdz -$$

$$-\varepsilon^2 \frac{\partial^2 \tau_{yz0}}{\partial y^2}\left[\int_0^z \frac{E}{1-\nu^2}\int_0^z \frac{2(1+\nu)}{E}dzdz - \int_0^z \frac{\nu}{1-\nu}zdz\right] -$$

$$-\varepsilon^2 \frac{\partial^2 \tau_{xz0}}{\partial x \partial y}\left[\int_0^z \frac{\nu E}{1-\nu^2}\int_0^z \frac{2(1+\nu)}{E}dzdz - \int_0^z \frac{\nu}{1-\nu}zdz\right] - \tag{7}$$

$$-\varepsilon^2\left(\frac{\partial^2 \tau_{yz0}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \tau_{xz0}}{\partial x^2}\right)\int_0^z \frac{E}{1+\nu}\int_0^z \frac{1+\nu}{E}dzdz - \varepsilon^2 \frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2}\int_0^z \frac{E}{1-\nu^2}dz -$$

$$-\varepsilon^2 \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2}\int_0^z \frac{E}{2(1+\nu)}dz - \varepsilon^2 \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y}\int_0^z \frac{E}{2(1-\nu)}dz - \varepsilon \frac{\partial \sigma_{z0}}{\partial y}\int_0^z \frac{\nu}{1-\nu}dz,$$

считающиеся в традиционных теориях постоянными по толщине, и

$$\tau_{xy} = -\varepsilon^2 \frac{E}{1+\nu}\frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y}z + \frac{E}{1+\nu}\varepsilon\left(\frac{\partial \tau_{0xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{0yz}}{\partial y}\right)\int_0^z \frac{1+\nu}{E}dz + \varepsilon \frac{E}{2(1+\nu)}\left(\frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x}\right), \tag{8}$$

– нормальное напряжение

$$\sigma_z = \sigma_{z0} - \varepsilon^4\left(\frac{\partial^4 w_0}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 w_0}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w_0}{\partial y^4}\right)\int_0^z\int_0^z \frac{E}{1-\nu^2}zdzdz - \varepsilon\left(\frac{\partial \tau_{xz0}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz0}}{\partial y}\right)z +$$

$$+\varepsilon^3\left(\frac{\partial^3 \tau_{xz0}}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 \tau_{yz0}}{\partial y^3}\right)\left[\int_0^z\int_0^z \frac{E}{1-\nu^2}\int_0^z \frac{2(1+\nu)}{E}dzdzdz - \int_0^z\int_0^z \frac{\nu}{1-\nu}zdzdz\right] +$$

$$+\varepsilon^3\left(\frac{\partial^3 \tau_{yz0}}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^3 \tau_{xz0}}{\partial x \partial y^2}\right)\left[\int_0^z\int_0^z \frac{\nu E}{1-\nu^2}\int_0^z \frac{2(1+\nu)}{E}dzdz - \int_0^z\int_0^z \frac{\nu}{1-\nu}zdz\right] - \tag{9}$$

$$-2\varepsilon^3\left(\frac{\partial^3\tau_{xz0}}{\partial x^2\partial y}+\frac{\partial^3\tau_{yz0}}{\partial x\partial y^2}\right)\int_0^z\int_0^z\frac{E}{1+\nu}\int_0^z\frac{1+\nu}{E}dzdzdz+$$

$$+\varepsilon^3\left(\frac{\partial^3 u_0}{\partial x^3}+\frac{\partial^3 v_0}{\partial y^3}+\frac{\partial^3 u_0}{\partial x\partial y^2}+\frac{\partial^3 v_0}{\partial x^2\partial y}\right)\int_0^z\int_0^z\frac{E}{1-\nu^2}dzdz+\varepsilon^2\left(\frac{\partial^2\sigma_{z0}}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\sigma_{z0}}{\partial y^2}\right)\int_0^z\int_0^z\frac{\nu}{1-\nu}dzdz,$$

также отсутствующее в традиционных теориях пластин;

– нормальные напряжения в плоскости пластины

$$\sigma_x=-\varepsilon^2\frac{E}{1-\nu^2}\left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}+\nu\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2}\right)z+\frac{E}{1-\nu^2}\varepsilon\left(\frac{\partial\tau_{xz0}}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{yz0}}{\partial y}\right)\int_0^z\frac{2(1+\nu)}{E}dz-$$

$$-\frac{\nu}{1-\nu}\varepsilon z\left(\frac{\partial\tau_{xz0}}{\partial x}+\nu\frac{\partial\tau_{yz0}}{\partial y}\right)+\varepsilon\frac{E}{1-\nu^2}\left(\frac{\partial u_0}{\partial x}+\nu\frac{\partial v_0}{\partial y}\right)+\frac{\nu}{1-\nu}\sigma_{z0},$$

$$\sigma_y=-\varepsilon^2\frac{E}{1-\nu^2}\left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2}+\nu\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}\right)z+\frac{E}{1-\nu^2}\varepsilon\left(\frac{\partial\tau_{yz0}}{\partial y}+\nu\frac{\partial\tau_{xz0}}{\partial x}\right)\int_0^z\frac{2(1+\nu)}{E}dz-$$

$$-\frac{\nu}{1-\nu}\varepsilon z\left(\frac{\partial\tau_{yz0}}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{xz0}}{\partial x}\right)+\varepsilon\frac{E}{1-\nu^2}\left(\frac{\partial v_0}{\partial y}+\nu\frac{\partial u_0}{\partial x}\right)+\frac{\nu}{1-\nu}\sigma_{z0},$$

– компоненты тангенциальной деформации

$$\varepsilon_x=-\varepsilon^2\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}z+\varepsilon\frac{\partial\tau_{xz0}}{\partial x}\int_0^z\frac{2(1+\nu)}{E}dz+\varepsilon\frac{\partial u_0}{\partial x},$$

$$\varepsilon_y=-\varepsilon^2\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2}z+\varepsilon\frac{\partial\tau_{yz0}}{\partial y}\int_0^z\frac{2(1+\nu)}{E}dz+\varepsilon\frac{\partial v_0}{\partial y},$$

– поперечную деформацию

$$\varepsilon_z=\frac{\nu}{1-\nu}\varepsilon^2\left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2}\right)z-\varepsilon\left(\frac{\partial\tau_{xz0}}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{yz0}}{\partial y}\right)\left[\frac{\nu}{1-\nu}\int_0^z\frac{2(1+\nu)}{E}dz+\frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{E(1-\nu)}z\right]-$$

$$-\varepsilon\frac{\nu}{1-\nu}\left(\frac{\partial u_0}{\partial x}+\frac{\partial v_0}{\partial y}\right)+\frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{E(1-\nu)}\sigma_{z0},$$

которая в традиционных теориях не определяется вследствие принятия гипотезы недеформируемой нормали.

2. Выполнение граничных условий на лицевых сторонах

Теперь надо выполнить граничные условия на верхней и нижней сторонах пластины. Примем, что нагрузки, приложенные к верхней и нижней поверхностям пластины, уравновешены возникающими в пластине нормальными и касательными напряжениями

$$\begin{gathered}
\tau_{xz}=\tau_{xz+} \text{ при } z=1,\ \tau_{xz}=\tau_{xz-} \text{ при } z=-1,\\
\tau_{yz}=\tau_{yz+} \text{ при } z=1,\ \tau_{yz}=\tau_{yz-} \text{ при } z=-1,\\
\sigma_z=q_+ \text{ при } z=1,\ \sigma_z=q_- \text{ при } z=-1.
\end{gathered} \tag{10}$$

Подставив выражения τ_{xz}, τ_{yz}, и σ_z из (2) в эти условия, получим шесть уравнений для определения $w_0, \tau_{0xz}, \tau_{0yz}, \sigma_{0z}, u_0, v_0$.

$$\begin{gathered}
\tau_{xz+}=\tau_{xz0}+\varepsilon^3\left(\frac{\partial^3 w_0}{\partial x^3}+\frac{\partial^3 w_0}{\partial x\partial y^2}\right)\int_0^1\frac{E}{1-\nu^2}zdz-\\
-\varepsilon^2\frac{\partial^2\tau_{xz0}}{\partial x^2}\left[\int_0^1\frac{E}{1-\nu^2}\int_0^z\frac{2(1+\nu)}{E}dzdz-\int_0^1\frac{\nu}{1-\nu}zdz\right]-\\
-\varepsilon^2\frac{\partial^2\tau_{yz0}}{\partial x\partial y}\left[\int_0^1\frac{\nu E}{1-\nu^2}\int_0^z\frac{2(1+\nu)}{E}dzdz-\int_0^1\frac{\nu}{1-\nu}zdz\right]-\\
-\varepsilon^2\left(\frac{\partial^2\tau_{xz0}}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2\tau_{yz0}}{\partial y^2}\right)\int_0^1\frac{E}{1+\nu}\int_0^z\frac{1+\nu}{E}dzdz-\varepsilon^2\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2}\int_0^1\frac{E}{1-\nu^2}dz-\\
-\varepsilon^2\frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2}\int_0^1\frac{E}{2(1+\nu)}dz-\varepsilon^2\frac{\partial^2 v_0}{\partial x\partial y}\int_0^1\frac{E}{2(1-\nu)}dz-\varepsilon\frac{\partial\sigma_{z0}}{\partial x}\int_0^1\frac{\nu}{1-\nu}dz,
\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}
\tau_{xz-}=\tau_{xz0}+\varepsilon^3\left(\frac{\partial^3 w_0}{\partial x^3}+\frac{\partial^3 w_0}{\partial x\partial y^2}\right)\int_0^{-1}\frac{E}{1-\nu^2}zdz-\\
-\varepsilon^2\frac{\partial^2\tau_{xz0}}{\partial x^2}\left[\int_0^{-1}\frac{E}{1-\nu^2}\int_0^z\frac{2(1+\nu)}{E}dzdz-\int_0^{-1}\frac{\nu}{1-\nu}zdz\right]-\\
-\varepsilon^2\frac{\partial^2\tau_{yz0}}{\partial x\partial y}\left[\int_0^{-1}\frac{\nu E}{1-\nu^2}\int_0^z\frac{2(1+\nu)}{E}dzdz-\int_0^{-1}\frac{\nu}{1-\nu}zdz\right]-\\
-\varepsilon^2\left(\frac{\partial^2\tau_{xz0}}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2\tau_{yz0}}{\partial y^2}\right)\int_0^{-1}\frac{E}{1+\nu}\int_0^z\frac{1+\nu}{E}dzdz-\varepsilon^2\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2}\int_0^{-1}\frac{E}{1-\nu^2}dz-\\
-\varepsilon^2\frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2}\int_0^{-1}\frac{E}{2(1+\nu)}dz-\varepsilon^2\frac{\partial^2 v_0}{\partial x\partial y}\int_0^{-1}\frac{E}{2(1-\nu)}dz-\varepsilon\frac{\partial\sigma_{x0}}{\partial x}\int_0^{-1}\frac{\nu}{1-\nu}dz.
\end{gathered}$$

Преобразуем эти два уравнения, складывая и вычитая их попарно:

$$\tau_{xz+}+\tau_{xz-}=2\tau_{xz0}+\varepsilon^3\left(\frac{\partial^3 w_0}{\partial x^3}+\frac{\partial^3 w_0}{\partial x\partial y^2}\right)\left[\int_0^1\frac{E}{1-\nu^2}zdz+\int_0^{-1}\frac{E}{1-\nu^2}zdz\right]-$$

$$-\varepsilon^2\frac{\partial^2\tau_{xz0}}{\partial x^2}\left[\int_0^1\frac{E}{1-\nu^2}\int_0^z\frac{2(1+\nu)}{E}dzdz+\int_0^{-1}\frac{E}{1-\nu^2}\int_0^z\frac{2(1+\nu)}{E}dzdz-\int_0^1\frac{\nu}{1-\nu}zdz-\int_0^{-1}\frac{\nu}{1-\nu}zdz\right]-$$

$$-\varepsilon^2\frac{\partial^2\tau_{yz0}}{\partial x\partial y}\left[\int_0^1\frac{\nu E}{1-\nu^2}\int_0^z\frac{2(1+\nu)}{E}dzdz+\int_0^{-1}\frac{\nu E}{1-\nu^2}\int_0^z\frac{2(1+\nu)}{E}dzdz-\int_0^1\frac{\nu}{1-\nu}zdz-\int_0^{-1}\frac{\nu}{1-\nu}zdz\right]-$$

$$-\varepsilon^2\left(\frac{\partial^2\tau_{xz0}}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2\tau_{yz0}}{\partial y^2}\right)\left[\int_0^1\frac{E}{1+\nu}\int_0^z\frac{1+\nu}{E}dzdz+\int_0^{-1}\frac{E}{1+\nu}\int_0^z\frac{1+\nu}{E}dzdz\right]-$$

$$-\varepsilon^2\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2}\left[\int_0^1\frac{E}{1-\nu^2}dz+\int_0^{-1}\frac{E}{1-\nu^2}dz\right]-\varepsilon^2\frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2}\left[\int_0^1\frac{E}{2(1+\nu)}dz+\int_0^{-1}\frac{E}{2(1+\nu)}dz\right]-$$

$$-\varepsilon^2\frac{\partial^2 v_0}{\partial x\partial y}\left[\int_0^1\frac{E}{2(1-\nu)}dz+\int_0^{-1}\frac{E}{2(1-\nu)}dz\right]-\varepsilon\frac{\partial\sigma_{z0}}{\partial x}\left[\int_0^1\frac{\nu}{1-\nu}dz+\int_0^{-1}\frac{\nu}{1-\nu}dz\right],$$

$$\tau_{xz+}-\tau_{xz-}=\varepsilon^3\left(\frac{\partial^3 w_0}{\partial x^3}+\frac{\partial^3 w_0}{\partial x\partial y^2}\right)\int_{-1}^1\frac{E}{1-\nu^2}zdz-$$

$$-\varepsilon^2\frac{\partial^2\tau_{xz0}}{\partial x^2}\left[\int_{-1}^1\frac{E}{1-\nu^2}\int_0^z\frac{2(1+\nu)}{E}dzdz-\int_{-1}^1\frac{\nu}{1-\nu}zdz\right]-$$

$$-\varepsilon^2\frac{\partial^2\tau_{yz0}}{\partial x\partial y}\left[\int_{-1}^1\frac{\nu E}{1-\nu^2}\int_0^z\frac{2(1+\nu)}{E}dzdz-\int_{-1}^1\frac{\nu}{1-\nu}zdz\right]-$$

$$-\varepsilon^2\left(\frac{\partial^2\tau_{xz0}}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2\tau_{yz0}}{\partial y^2}\right)\int_{-1}^1\frac{E}{1+\nu}\int_0^z\frac{1+\nu}{E}dzdz-\varepsilon^2\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2}\int_{-1}^1\frac{E}{1-\nu^2}dz-$$

$$-\varepsilon^2\frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2}\int_{-1}^1\frac{E}{2(1+\nu)}dz-\varepsilon^2\frac{\partial^2 v_0}{\partial x\partial y}\int_{-1}^1\frac{E}{2(1-\nu)}dz-\varepsilon\frac{\partial\sigma_{z0}}{\partial x}\int_{-1}^1\frac{\nu}{1-\nu}dz.$$

Аналогично все проделаем для τ_{yz}

$$\tau_{yz+}+\tau_{yz-}=2\tau_{yz0}+\varepsilon^3\left(\frac{\partial^3 w_0}{\partial y^3}+\frac{\partial^3 w_0}{\partial x^2\partial y}\right)\left[\int_0^1\frac{E}{1-\nu^2}zdz+\int_0^{-1}\frac{E}{1-\nu^2}zdz\right]-$$

$$-\varepsilon^2\frac{\partial^2\tau_{yz0}}{\partial y^2}\left[\int_0^1\frac{E}{1-\nu^2}\int_0^z\frac{2(1+\nu)}{E}dzdz+\int_0^{-1}\frac{E}{1-\nu^2}\int_0^z\frac{2(1+\nu)}{E}dzdz-\int_0^1\frac{\nu}{1-\nu}zdz-\int_0^{-1}\frac{\nu}{1-\nu}zdz\right]-$$

$$-\varepsilon^2\frac{\partial^2\tau_{xz0}}{\partial x\partial y}\left[\int_0^1\frac{\nu E}{1-\nu^2}\int_0^z\frac{2(1+\nu)}{E}dzdz+\int_0^{-1}\frac{\nu E}{1-\nu^2}\int_0^z\frac{2(1+\nu)}{E}dzdz-\int_0^1\frac{\nu}{1-\nu}zdz-\int_0^{-1}\frac{\nu}{1-\nu}zdz\right]-$$

$$-\varepsilon^2\left(\frac{\partial^2\tau_{yz0}}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2\tau_{xz0}}{\partial x^2}\right)\left[\int_0^1\frac{E}{1+\nu}\int_0^z\frac{1+\nu}{E}dzdz+\int_0^{-1}\frac{E}{1+\nu}\int_0^z\frac{1+\nu}{E}dzdz\right]-$$

$$-\varepsilon^2\frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2}\left[\int_0^1\frac{E}{1-\nu^2}dz+\int_0^{-1}\frac{E}{1-\nu^2}dz\right]-\varepsilon^2\frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2}\left[\int_0^1\frac{E}{2(1+\nu)}dz+\int_0^{-1}\frac{E}{2(1+\nu)}dz\right]-$$

$$-\varepsilon^2\frac{\partial^2 u_0}{\partial x\partial y}\left[\int_0^1\frac{E}{2(1-\nu)}dz+\int_0^{-1}\frac{E}{2(1-\nu)}dz\right]-\varepsilon\frac{\partial\sigma_{z0}}{\partial y}\left[\int_0^1\frac{\nu}{1-\nu}dz+\int_0^{-1}\frac{\nu}{1-\nu}dz\right],$$

$$\tau_{yz+}-\tau_{yz-}=\varepsilon^3\left(\frac{\partial^3 w_0}{\partial y^3}+\frac{\partial^3 w_0}{\partial x^2\partial y}\right)\int_{-1}^1\frac{E}{1-\nu^2}zdz-$$

$$-\varepsilon^2\frac{\partial^2\tau_{yz0}}{\partial y^2}\left[\int_{-1}^1\frac{E}{1-\nu^2}\int_0^z\frac{2(1+\nu)}{E}dzdz-\int_{-1}^1\frac{\nu}{1-\nu}zdz\right]-$$

$$-\varepsilon^2\frac{\partial^2\tau_{xz0}}{\partial x\partial y}\left[\int_{-1}^1\frac{\nu E}{1-\nu^2}\int_0^z\frac{2(1+\nu)}{E}dzdz-\int_{-1}^1\frac{\nu}{1-\nu}zdz\right]-$$

$$-\varepsilon^2\left(\frac{\partial^2\tau_{yz0}}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2\tau_{xz0}}{\partial x^2}\right)\int_{-1}^1\frac{E}{1+\nu}\int_0^z\frac{1+\nu}{E}dzdz-\varepsilon^2\frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2}\int_{-1}^1\frac{E}{1-\nu^2}dz-$$

$$-\varepsilon^2\frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2}\int_{-1}^1\frac{E}{2(1+\nu)}dz-\varepsilon^2\frac{\partial^2 u_0}{\partial x\partial y}\int_{-1}^1\frac{E}{2(1-\nu)}dz-\varepsilon\frac{\partial\sigma_{z0}}{\partial y}\int_{-1}^1\frac{\nu}{1-\nu}dz.$$

Теперь запишем граничные условия для σ_z

$$q_+=\sigma_{z0}-\varepsilon^4\left(\frac{\partial^4 w_0}{\partial x^4}+2\frac{\partial^4 w_0}{\partial x^2\partial y^2}+\frac{\partial^4 w_0}{\partial y^4}\right)\int_0^1\int_0^z\frac{E}{1-\nu^2}zdzdz-\varepsilon\left(\frac{\partial\tau_{xz0}}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{yz0}}{\partial y}\right)+$$

$$+\varepsilon^3\left(\frac{\partial^3\tau_{xz0}}{\partial x^3}+\frac{\partial^3\tau_{yz0}}{\partial y^3}\right)\left[\int_0^1\int_0^z\frac{E}{1-\nu^2}\int_0^z\frac{2(1+\nu)}{E}dzdzdz-\int_0^1\int_0^z\frac{\nu}{1-\nu}zdzdz\right]+$$

$$+\varepsilon^3\left(\frac{\partial^3\tau_{yz0}}{\partial x^2\partial y}+\frac{\partial^3\tau_{xz0}}{\partial x\partial y^2}\right)\left[\int_0^1\int_0^z\frac{\nu E}{1-\nu^2}\int_0^z\frac{2(1+\nu)}{E}dzdz-\int_0^1\int_0^z\frac{\nu}{1-\nu}zdz\right]-$$

$$-2\varepsilon^3\left(\frac{\partial^3\tau_{xz0}}{\partial x^2\partial y}+\frac{\partial^3\tau_{yz0}}{\partial x\partial y^2}\right)\int_0^1\int_0^z\frac{E}{1+\nu}\int_0^z\frac{1+\nu}{E}dzdzdz+$$

$$+\varepsilon^3\left(\frac{\partial^3 u_0}{\partial x^3}+\frac{\partial^3 v_0}{\partial y^3}+\frac{\partial^3 u_0}{\partial x\partial y^2}+\frac{\partial^3 v_0}{\partial x^2\partial y}\right)\int_0^1\int_0^z\frac{E}{1-\nu^2}dzdz+\varepsilon^2\left(\frac{\partial^2\sigma_{z0}}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\sigma_{z0}}{\partial y^2}\right)\int_0^1\int_0^z\frac{\nu}{1-\nu}dzdz,$$

$$q_- = \sigma_{z0} - \varepsilon^4\left(\frac{\partial^4 w_0}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 w_0}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w_0}{\partial y^4}\right)\int_0^{-1}\int_0^z \frac{E}{1-\nu^2} zdzdz + \varepsilon\left(\frac{\partial \tau_{xz0}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz0}}{\partial y}\right) +$$

$$+\varepsilon^3\left(\frac{\partial^3 \tau_{xz0}}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 \tau_{yz0}}{\partial y^3}\right)\left[\int_0^{-1}\int_0^z \frac{E}{1-\nu^2}\int_0^z \frac{2(1+\nu)}{E} dzdzdz - \int_0^{-1}\int_0^z \frac{\nu}{1-\nu} zdzdz\right] +$$

$$+\varepsilon^3\left(\frac{\partial^3 \tau_{yz0}}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^3 \tau_{xz0}}{\partial x \partial y^2}\right)\left[\int_0^{-1}\int_0^z \frac{\nu E}{1-\nu^2}\int_0^z \frac{2(1+\nu)}{E} dzdz - \int_0^{-1}\int_0^z \frac{\nu}{1-\nu} zdz\right] -$$

$$-2\varepsilon^3\left(\frac{\partial^3 \tau_{xz0}}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^3 \tau_{yz0}}{\partial x \partial y^2}\right)\int_0^{-1}\int_0^z \frac{E}{1+\nu}\int_0^z \frac{1+\nu}{E} dzdzdz +$$

$$+\varepsilon^3\left(\frac{\partial^3 u_0}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 v_0}{\partial y^3} + \frac{\partial^3 u_0}{\partial x \partial y^2} + \frac{\partial^3 v_0}{\partial x^2 \partial y}\right)\int_0^{-1}\int_0^z \frac{E}{1-\nu^2} dzdz + \varepsilon^2\left(\frac{\partial^2 \sigma_{z0}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_{z0}}{\partial y^2}\right)\int_0^{-1}\int_0^z \frac{\nu}{1-\nu} dzdz.$$

Попарно сложим и вычтем эти уравнения

$$q_+ + q_- = 2\sigma_{z0} - \varepsilon^4\left(\frac{\partial^4 w_0}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 w_0}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w_0}{\partial y^4}\right)\left[\int_0^{1}\int_0^z \frac{E}{1-\nu^2} zdzdz + \int_0^{-1}\int_0^z \frac{E}{1-\nu^2} zdzdz\right] +$$

$$+\varepsilon^3\left(\frac{\partial^3 \tau_{xz0}}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 \tau_{yz0}}{\partial y^3}\right)\left[\int_0^{1}\int_0^z \frac{E}{1-\nu^2}\int_0^z \frac{2(1+\nu)}{E} dzdzdz + \int_0^{-1}\int_0^z \frac{E}{1-\nu^2}\int_0^z \frac{2(1+\nu)}{E} dzdzdz - \right.$$

$$\left. - \int_0^{1}\int_0^z \frac{\nu}{1-\nu} zdzdz - \int_0^{-1}\int_0^z \frac{\nu}{1-\nu} zdzdz\right] +$$

$$+\varepsilon^3\left(\frac{\partial^3 \tau_{yz0}}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^3 \tau_{xz0}}{\partial x \partial y^2}\right)\left[\int_0^{1}\int_0^z \frac{\nu E}{1-\nu^2}\int_0^z \frac{2(1+\nu)}{E} dzdz + \int_0^{-1}\int_0^z \frac{\nu E}{1-\nu^2}\int_0^z \frac{2(1+\nu)}{E} dzdz - \right.$$

$$\left. - \int_0^{1}\int_0^z \frac{\nu}{1-\nu} zdz - \int_0^{-1}\int_0^z \frac{\nu}{1-\nu} zdz\right] -$$

$$-2\varepsilon^3\left(\frac{\partial^3 \tau_{xz0}}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^3 \tau_{yz0}}{\partial x \partial y^2}\right)\left[\int_0^{1}\int_0^z \frac{E}{1+\nu}\int_0^z \frac{1+\nu}{E} dzdzdz + \int_0^{-1}\int_0^z \frac{E}{1+\nu}\int_0^z \frac{1+\nu}{E} dzdzdz\right] +$$

$$+\varepsilon^3\left(\frac{\partial^3 u_0}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 v_0}{\partial y^3} + \frac{\partial^3 u_0}{\partial x \partial y^2} + \frac{\partial^3 v_0}{\partial x^2 \partial y}\right)\left[\int_0^{1}\int_0^z \frac{E}{1-\nu^2} dzdz + \int_0^{-1}\int_0^z \frac{E}{1-\nu^2} dzdz\right] +$$

$$+\varepsilon^2\left(\frac{\partial^2 \sigma_{z0}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_{z0}}{\partial y^2}\right)\left[\int_0^{1}\int_0^z \frac{\nu}{1-\nu} dzdz + \int_0^{-1}\int_0^z \frac{\nu}{1-\nu} dzdz\right],$$

$$q_+ - q_- = -\varepsilon^4\left(\frac{\partial^4 w_0}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 w_0}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w_0}{\partial y^4}\right)\int_{-1}^{1}\int_{0}^{z}\frac{E}{1-\nu^2}zdzdz - 2\varepsilon\left(\frac{\partial \tau_{xz0}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz0}}{\partial y}\right) +$$

$$+\varepsilon^3\left(\frac{\partial^3 \tau_{xz0}}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 \tau_{yz0}}{\partial y^3}\right)\left[\int_{-1}^{1}\int_{0}^{z}\frac{E}{1-\nu^2}\int_{0}^{z}\frac{2(1+\nu)}{E}dzdzdz - \int_{-1}^{1}\int_{0}^{z}\frac{\nu}{1-\nu}zdzdz\right] +$$

$$+\varepsilon^3\left(\frac{\partial^3 \tau_{yz0}}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^3 \tau_{xz0}}{\partial x \partial y^2}\right)\left[\int_{-1}^{1}\int_{0}^{z}\frac{\nu E}{1-\nu^2}\int_{0}^{z}\frac{2(1+\nu)}{E}dzdz - \int_{-1}^{1}\int_{0}^{z}\frac{\nu}{1-\nu}zdz\right] -$$

$$-2\varepsilon^3\left(\frac{\partial^3 \tau_{xz0}}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^3 \tau_{yz0}}{\partial x \partial y^2}\right)\int_{-1}^{1}\int_{0}^{z}\frac{E}{1+\nu}\int_{0}^{z}\frac{1+\nu}{E}dzdzdz +$$

$$+\varepsilon^3\left(\frac{\partial^3 u_0}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 v_0}{\partial y^3} + \frac{\partial^3 u_0}{\partial x \partial y^2} + \frac{\partial^3 v_0}{\partial x^2 \partial y}\right)\int_{-1}^{1}\int_{0}^{z}\frac{E}{1-\nu^2}dzdz + \varepsilon^2\left(\frac{\partial^2 \sigma_{z0}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_{z0}}{\partial y^2}\right)\int_{-1}^{1}\int_{0}^{z}\frac{\nu}{1-\nu}dzdz.$$

Таким образом, исходная задача сведена к решению системы 6 уравнений с 6 неизвестными $w_0, \tau_{0xz}, \tau_{0yz}, \sigma_{0z}, u_0, v_0$:

$$\tau_{xz+} + \tau_{xz-} = 2\tau_{xz0} + \varepsilon^3\left(\frac{\partial^3 w_0}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 w_0}{\partial x \partial y^2}\right)e_{11} - \varepsilon^2\frac{\partial^2 \tau_{xz0}}{\partial x^2}e_{12} - \varepsilon^2\frac{\partial^2 \tau_{yz0}}{\partial x \partial y}e_{13} -$$

$$-\varepsilon^2\left(\frac{\partial^2 \tau_{xz0}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \tau_{yz0}}{\partial y^2}\right)e_{14} - \varepsilon^2\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2}e_{15} - \varepsilon^2\frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2}e_{16} - \varepsilon^2\frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y}e_{17} - \varepsilon\frac{\partial \sigma_{z0}}{\partial x}e_{18},$$

$$\tau_{xz+} - \tau_{xz-} = \varepsilon^3\left(\frac{\partial^3 w_0}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 w_0}{\partial x \partial y^2}\right)e_{21} - \varepsilon^2\frac{\partial^2 \tau_{xz0}}{\partial x^2}e_{22} - \varepsilon^2\frac{\partial^2 \tau_{yz0}}{\partial x \partial y}e_{23} -$$

$$-\varepsilon^2\left(\frac{\partial^2 \tau_{xz0}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \tau_{yz0}}{\partial y^2}\right)e_{24} - \varepsilon^2\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2}e_{25} - \varepsilon^2\frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2}e_{26} - \varepsilon^2\frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y}e_{27} - \varepsilon\frac{\partial \sigma_{z0}}{\partial x}e_{28},$$

$$\tau_{xz+} + \tau_{xz-} = 2\tau_{yz0} + \varepsilon^3\left(\frac{\partial^3 w_0}{\partial y^3} + \frac{\partial^3 w_0}{\partial x^2 \partial y}\right)e_{31} - \varepsilon^2\frac{\partial^2 \tau_{yz0}}{\partial y^2}e_{32} - \varepsilon^2\frac{\partial^2 \tau_{xz0}}{\partial x \partial y}e_{33} -$$

$$-\varepsilon^2\left(\frac{\partial^2 \tau_{yz0}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \tau_{xz0}}{\partial x^2}\right)e_{34} - \varepsilon^2\frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2}e_{35} - \varepsilon^2\frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2}e_{36} - \varepsilon^2\frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y}e_{37} - \varepsilon\frac{\partial \sigma_{z0}}{\partial y}e_{38},$$

$$\tau_{yz+} - \tau_{yz-} = \varepsilon^3\left(\frac{\partial^3 w_0}{\partial y^3} + \frac{\partial^3 w_0}{\partial x^2 \partial y}\right)e_{41} - \varepsilon^2\frac{\partial^2 \tau_{yz0}}{\partial y^2}e_{42} - \varepsilon^2\frac{\partial^2 \tau_{xz0}}{\partial x \partial y}e_{43} -$$

$$-\varepsilon^2\left(\frac{\partial^2 \tau_{yz0}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \tau_{xz0}}{\partial x^2}\right)e_{44} - \varepsilon^2\frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2}e_{45} - \varepsilon^2\frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2}e_{46} - \varepsilon^2\frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y}e_{47} - \varepsilon\frac{\partial \sigma_{z0}}{\partial y}e_{48}, \qquad (11)$$

$$q_+ + q_- = 2\sigma_{z0} - \varepsilon^4\left(\frac{\partial^4 w_0}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 w_0}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w_0}{\partial y^4}\right)e_{51} + \varepsilon^3\left(\frac{\partial^3 \tau_{xz0}}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 \tau_{yz0}}{\partial y^3}\right)e_{52} +$$

$$+\varepsilon^3\left(\frac{\partial^3 \tau_{yz0}}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^3 \tau_{xz0}}{\partial x \partial y^2}\right)e_{53} - 2\varepsilon^2\left(\frac{\partial^3 \tau_{xz0}}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^3 \tau_{yz0}}{\partial x \partial y^2}\right)e_{54} +$$

$$+\varepsilon^3\left(\frac{\partial^3 u_0}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 v_0}{\partial y^3} + \frac{\partial^3 u_0}{\partial x \partial y^2} + \frac{\partial^3 v_0}{\partial x^2 \partial y}\right)e_{55} + \varepsilon^2\left(\frac{\partial^2 \sigma_{z0}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_{z0}}{\partial y^2}\right)e_{56},$$

$$q_+ - q_- = -\varepsilon^4\left(\frac{\partial^4 w_0}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 w_0}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w_0}{\partial y^4}\right)e_{61} - 2\varepsilon\left(\frac{\partial \tau_{xz0}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz0}}{\partial y}\right) +$$

$$+\varepsilon^3\left(\frac{\partial^3 \tau_{xz0}}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 \tau_{yz0}}{\partial y^3}\right)e_{62} + \varepsilon^3\left(\frac{\partial^3 \tau_{yz0}}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^3 \tau_{xz0}}{\partial x \partial y^2}\right)e_{63} - 2\varepsilon^3\left(\frac{\partial^3 \tau_{xz0}}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^3 \tau_{yz0}}{\partial x \partial y^2}\right)e_{64} +$$

$$+\varepsilon^3\left(\frac{\partial^3 u_0}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 v_0}{\partial y^3} + \frac{\partial^3 u_0}{\partial x \partial y^2} + \frac{\partial^3 v_0}{\partial x^2 \partial y}\right)e_{65} + \varepsilon^2\left(\frac{\partial^2 \sigma_{z0}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_{z0}}{\partial y^2}\right)e_{66},$$

в которых осредненные (эффективные) коэффициенты определяются следующими выражениями:

$$e_{11} = e_{31} = \int_0^1 \frac{E}{1-\nu^2} z dz + \int_0^{-1} \frac{E}{1-\nu^2} z dz,$$

$$e_{12} = e_{32} = \int_0^1 \frac{E}{1-\nu^2} \int_0^z \frac{2(1+\nu)}{E} dz dz + \int_0^z \frac{2(1+\nu)}{E} dz dz - \int_0^1 \frac{\nu}{1-\nu} z dz - \int_0^{-1} \frac{\nu}{1-\nu} z dz,$$

$$e_{13} = e_{33} = \int_0^1 \frac{\nu E}{1-\nu^2} \int_0^z \frac{2(1+\nu)}{E} dz dz + \int_0^{-1} \frac{\nu E}{1-\nu^2} \int_0^z \frac{2(1+\nu)}{E} dz dz - \int_0^1 \frac{\nu}{1-\nu} z dz - \int_0^{-1} \frac{\nu}{1-\nu} z dz,$$

$$e_{14} = e_{34} = \int_0^1 \frac{E}{1+\nu} \int_0^z \frac{1+\nu}{E} dz dz + \int_0^{-1} \frac{E}{1+\nu} \int_0^z \frac{1+\nu}{E} dz dz,$$

$$e_{15} = e_{35} = \int_0^1 \frac{E}{1-\nu^2} dz + \int_0^{-1} \frac{E}{1-\nu^2} dz, \quad e_{16} = e_{36} = \int_0^1 \frac{E}{2(1+\nu)} dz + \int_0^{-1} \frac{E}{2(1+\nu)} dz,$$

$$e_{17} = e_{37} = \int_0^1 \frac{E}{2(1-\nu)} dz + \int_0^{-1} \frac{E}{2(1-\nu)} dz, \quad e_{18} = e_{38} = \int_0^1 \frac{\nu}{1-\nu} dz + \int_0^{-1} \frac{\nu}{1-\nu} dz,$$

$$e_{21} = e_{41} = \int_{-1}^1 \frac{E}{1-\nu^2} z dz, \quad e_{22} = e_{42} = \int_{-1}^1 \frac{E}{1-\nu^2} \int_0^z \frac{2(1+\nu)}{E} dz dz - \int_{-1}^1 \frac{\nu}{1-\nu} z dz,$$

$$e_{23}=e_{43}=\int_{-1}^{1}\frac{\nu E}{1-\nu^2}\int_0^z\frac{2(1+\nu)}{E}dzdz-\int_{-1}^{1}\frac{\nu}{1-\nu}zdz,$$

$$e_{24}=e_{44}=\int_{-1}^{1}\frac{E}{1+\nu}\int_0^z\frac{1+\nu}{E}dzdz,\quad e_{25}=e_{45}=\int_{-1}^{1}\frac{E}{1-\nu^2}dz,$$

$$e_{26}=e_{46}=\int_{-1}^{1}\frac{E}{2(1+\nu)}dz,\quad e_{27}=e_{47}=\int_{-1}^{1}\frac{E}{2(1-\nu)}dz,\quad e_{28}=e_{48}=\int_{-1}^{1}\frac{\nu}{1-\nu}dz,\tag{12}$$

$$e_{51}=\int_0^1\int_0^z\frac{E}{1-\nu^2}zdzdz+\int_0^{-1}\int_0^z\frac{E}{1-\nu^2}zdzdz,$$

$$e_{52}=\int_0^1\int_0^z\frac{E}{1-\nu^2}\int_0^z\frac{2(1+\nu)}{E}dzdzdz+\int_0^{-1}\int_0^z\frac{E}{1-\nu^2}\int_0^z\frac{2(1+\nu)}{E}dzdzdz-$$

$$-\int_0^1\int_0^z\frac{\nu}{1-\nu}zdzdz-\int_0^{-1}\int_0^z\frac{\nu}{1-\nu}zdzdz,$$

$$e_{53}=\int_0^1\int_0^z\frac{\nu E}{1-\nu^2}\int_0^z\frac{2(1+\nu)}{E}dzdz+\int_0^{-1}\int_0^z\frac{\nu E}{1-\nu^2}\int_0^z\frac{2(1+\nu)}{E}dzdz-\int_0^1\int_0^z\frac{\nu}{1-\nu}zdz-\int_0^{-1}\int_0^z\frac{\nu}{1-\nu}zdz,$$

$$e_{54}=\int_0^1\int_0^z\frac{E}{1+\nu}\int_0^z\frac{1+\nu}{E}dzdzdz+\int_0^{-1}\int_0^z\frac{E}{1+\nu}\int_0^z\frac{1+\nu}{E}dzdzdz,$$

$$e_{55}=\int_0^1\int_0^z\frac{E}{1-\nu^2}dzdz+\int_0^{-1}\int_0^z\frac{E}{1-\nu^2}dzdz,\quad e_{56}=\int_0^1\int_0^z\frac{\nu}{1-\nu}dzdz+\int_0^{-1}\int_0^z\frac{\nu}{1-\nu}dzdz,$$

$$e_{61}=e_{65}=\int_{-1}^{1}\int_0^z\frac{E}{1-\nu^2}zdzdz,\quad e_{62}=\int_{-1}^{1}\int_0^z\frac{E}{1-\nu^2}\int_0^z\frac{2(1+\nu)}{E}dzdzdz-\int_{-1}^{1}\int_0^z\frac{\nu}{1-\nu}zdzdz,$$

$$e_{63}=\int_{-1}^{1}\int_0^z\frac{\nu E}{1-\nu^2}\int_0^z\frac{2(1+\nu)}{E}dzdz-\int_{-1}^{1}\int_0^z\frac{\nu}{1-\nu}zdz,$$

$$e_{64}=\int_{-1}^{1}\int_0^z\frac{E}{1+\nu}\int_0^z\frac{1+\nu}{E}dzdzdz,\quad e_{66}=\int_{-1}^{1}\int_0^z\frac{\nu}{1-\nu}dzdz.$$

3. Медленно меняющиеся нагрузки

В частности, для прикладных задач, ограничивающихся моделями, аналогичными классической теории балок, и имеющих дело с медленно меняющимися по длине нагрузками, систему (4) можно упростить, воспользовавшись свойством малой изменяемости, отбросив производные с малыми множителями по сравнению с самой функцией, поскольку производные при дифференцировании не меняют свой асимптотический порядок. При этом будем считать асимптотические порядки величин τ_{xz0} и τ_{yz0} одинаковыми, а изменяемости нулевыми. Свойство нулевой изменяемости означает, что асимптотический порядок по ε искомой величины при дифференцировании по x или y не меняется, т.е.

$$\left(\tau_{xz}, \tau_{yz}\right) \sim \left(\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x}, \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial y}, \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial x}, \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} \right).$$

После упрощения вместо системы (11) получим следующую систему уравнений:

$$\tau_{xz+} + \tau_{xz-} = \varepsilon^3 \frac{\partial}{\partial x} \Delta w_0 e_{11} + 2\tau_{xz0} - \varepsilon^2 \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} e_{15} -$$

$$-\varepsilon^2 \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} e_{16} - \varepsilon^2 \frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} e_{17} - \varepsilon \frac{\partial \sigma_{z0}}{\partial x} e_{18},$$

$$\tau_{xz+} - \tau_{xz-} = \varepsilon^3 \frac{\partial}{\partial x} \Delta w_0 e_{21} - \varepsilon^2 \frac{\partial^2 \tau_{xz0}}{\partial x^2} e_{22} - \varepsilon^2 \frac{\partial^2 \tau_{yz0}}{\partial x \partial y} e_{23} -$$

$$-\varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial y} \mathrm{T} e_{24} - \varepsilon^2 \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} e_{25} - \varepsilon^2 \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} e_{26} - \varepsilon^2 \frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} e_{27} - \varepsilon \frac{\partial \sigma_{z0}}{\partial x} e_{28},$$

$$\tau_{yz+} + \tau_{yz-} = \varepsilon^3 \frac{\partial}{\partial y} \Delta w_0 e_{31} + 2\tau_{yz0} - \varepsilon^2 \frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} e_{35} -$$

$$-\varepsilon^2 \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} e_{36} - \varepsilon^2 \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} e_{37} - \varepsilon \frac{\partial \sigma_{z0}}{\partial y} e_{38},$$

$$\tau_{yz+} - \tau_{yz-} = \varepsilon^3 \frac{\partial}{\partial y} \Delta w_0 e_{41} - \varepsilon^2 \frac{\partial^2 \tau_{yz0}}{\partial y^2} e_{42} - \varepsilon^2 \frac{\partial^2 \tau_{xz0}}{\partial x \partial y} e_{43} - \qquad (13)$$

$$-\varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial x} \mathrm{T} e_{44} - \varepsilon^2 \frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} e_{45} - \varepsilon^2 \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} e_{46} - \varepsilon^2 \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} e_{47} - \varepsilon \frac{\partial \sigma_{z0}}{\partial y} e_{48},$$

$$q_+ + q_- = -\varepsilon^4 \Delta^2 w_0 e_{51} + \varepsilon^3 \left(\frac{\partial^3 \tau_{xz0}}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 \tau_{yz0}}{\partial y^3} \right) e_{52} +$$

$$+\varepsilon^3\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\left(\frac{\partial\tau_{yz0}}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{xz0}}{\partial y}\right)e_{53}-2\varepsilon^3\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\mathrm{T}e_{54}+\varepsilon^3\Delta Ue_{55}+2\sigma_{z0},$$

$$q_+-q_-=-\varepsilon^4\Delta^2w_0e_{61}-2\varepsilon\mathrm{T}+\varepsilon^3\left(\frac{\partial^3\tau_{xz0}}{\partial x^3}+\frac{\partial^3\tau_{yz0}}{\partial y^3}\right)e_{62}+$$

$$+\varepsilon^3\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\left(\frac{\partial\tau_{yz0}}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{xz0}}{\partial y}\right)e_{63}-2\varepsilon^3\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\mathrm{T}e_{64}+\varepsilon^3\Delta Ue_{65}+\varepsilon^2\Delta\sigma_{z0}e_{66}.$$

Здесь введены обозначения

$$\mathrm{T}=\frac{\partial\tau_{xz0}}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{yz0}}{\partial y},\quad U=\frac{\partial u_0}{\partial x}+\frac{\partial v_0}{\partial y}.$$

Решение системы будем искать в виде разложений неизвестных в ряды по степеням малого параметра ε. Показатели весовых коэффициентов, под которыми понимаем множители перед находящимися в скобках рядами по малому параметру ε, выберем такими же, как в работе [7], предполагая, что они для напряжений τ_{xz0} и τ_{yz0} и перемещений u_0 и v_0 попарно одинаковы

$$w_0=\varepsilon^{-4}\left(w_{00}+\varepsilon^2w_{01}+...\right),\quad \tau_{xz0}=\varepsilon^{-1}\left(\tau_{xz00}+\varepsilon^2\tau_{xz01}+...\right),$$
$$\tau_{yz0}=\varepsilon^{-1}\left(\tau_{xz00}+\varepsilon^2\tau_{xz01}+...\right),\quad u_0=\varepsilon^{-3}\left(u_{00}+\varepsilon^2u_{01}+...\right),$$
$$v_0=\varepsilon^{-3}\left(v_{00}+\varepsilon^2v_{01}+...\right),\quad \sigma_{z0}=\sigma_{z00}+\varepsilon^2\sigma_{z01}+....$$

При этом все величины в скобках считаются имеющими одинаковый порядок ε^0. Соответственно, имеем оценки

$$\mathrm{T}_0=\frac{\partial\tau_{xz00}}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{yz00}}{\partial y}\sim\varepsilon^{-1},\quad U_0=\frac{\partial u_{00}}{\partial x}+\frac{\partial v_{00}}{\partial y}\sim\varepsilon^{-3}.\tag{14}$$

Естественно принять, что функции $w_0, u_0, v_0, \sigma_{z0}$ также имеют нулевую изменяемость.

Отбрасывая на основании оценок малые второго порядка по сравнению с главными в системе (12), получим упрощенные уравнения:

$$\left(\tau_{xz+}+\tau_{xz-}\right)_0=\varepsilon^{-1}\left(\varepsilon^3\frac{\partial}{\partial x}\Delta w_{00}e_{11}+2\tau_{xz00}-\varepsilon^2\frac{\partial^2u_{00}}{\partial x^2}e_{15}-\varepsilon^2\frac{\partial^2u_{00}}{\partial y^2}e_{16}-\varepsilon^2\frac{\partial^2v_{00}}{\partial x\partial y}e_{17}\right),$$

$$\left(\tau_{yz+}+\tau_{yz-}\right)_0=\varepsilon^{-1}\left(\varepsilon^3\frac{\partial}{\partial y}\Delta w_{00}e_{31}+2\tau_{yz00}-\varepsilon^2\frac{\partial^2 v_{00}}{\partial y^2}e_{35}-\varepsilon^2\frac{\partial^2 v_{00}}{\partial x^2}e_{36}-\varepsilon^2\frac{\partial^2 u_{00}}{\partial x\partial y}e_{37}\right),$$

$$\left(\tau_{xz+}-\tau_{xz-}\right)_0=\varepsilon^{-1}\left(\varepsilon^3\frac{\partial}{\partial x}\Delta w_{00}e_{21}-\varepsilon^2\frac{\partial^2 u_{00}}{\partial x^2}e_{25}-\varepsilon^2\frac{\partial^2 u_{00}}{\partial y^2}e_{26}-\varepsilon^2\frac{\partial^2 v_{00}}{\partial x\partial y}e_{27}\right), \tag{15}$$

$$\left(\tau_{yz+}-\tau_{yz-}\right)_0=\varepsilon^{-1}\left(\varepsilon^3\frac{\partial}{\partial y}\Delta w_{00}e_{41}-\varepsilon^2\frac{\partial^2 v_{00}}{\partial y^2}e_{45}-\varepsilon^2\frac{\partial^2 v_{00}}{\partial x^2}e_{46}-\varepsilon^2\frac{\partial^2 u_{00}}{\partial x\partial y}e_{47}\right),$$

$$\left(q_+-q_-\right)_0=-\varepsilon^4\Delta^2 w_{00}e_{61}-2\varepsilon\mathrm{T}_0+\varepsilon^3\Delta U_0 e_{65},$$
$$\left(q_++q_-\right)_0=-\varepsilon^4\Delta^2 w_{00}e_{51}+\varepsilon^3\Delta U_0 e_{55}+2\sigma_{z00}.$$

Первые четыре уравнения путем дифференцирования и попарного сложения и вычитания приведем к следующему виду:

$$\varepsilon\frac{\partial}{\partial x}\left(\tau_{xz+}+\tau_{xz-}\right)+\varepsilon\frac{\partial}{\partial y}\left(\tau_{yz+}+\tau_{yz-}\right)=\varepsilon^3\Delta^2 w_{00}e_{11}+2\varepsilon\mathrm{T}_0-\varepsilon^2\Delta U_0 e_{15},$$

$$\varepsilon\frac{\partial}{\partial x}\left(\tau_{xz+}-\tau_{xz-}\right)+\varepsilon\frac{\partial}{\partial y}\left(\tau_{yz+}-\tau_{yz-}\right)=\varepsilon^3\Delta^2 w_0 e_{21}-\varepsilon^2\Delta U e_{25},$$

$$\varepsilon\frac{\partial}{\partial x}\left(\tau_{xz+}+\tau_{xz-}\right)-\varepsilon\frac{\partial}{\partial y}\left(\tau_{yz+}+\tau_{yz-}\right)=\varepsilon^2\left[-\frac{\partial^3 u_0}{\partial y^3}+\frac{\partial^3 v_0}{\partial x^3}+\frac{\partial}{\partial x\partial y}\left(\frac{\partial u_0}{\partial y}-\frac{\partial v_0}{\partial x}\right)\right]e_{15}, \tag{16}$$

$$\varepsilon\frac{\partial}{\partial x}\left(\tau_{xz+}-\tau_{xz-}\right)-\varepsilon\frac{\partial}{\partial y}\left(\tau_{yz+}-\tau_{yz-}\right)=\varepsilon^2\left[-\frac{\partial^3 u_0}{\partial y^3}+\frac{\partial^3 v_0}{\partial x^3}+\frac{\partial}{\partial x\partial y}\left(\frac{\partial u_0}{\partial x}-\frac{\partial v_0}{\partial y}\right)\right]e_{26}.$$

В дальнейшем для упрощения изложения примем

$$\tau_{xz+}=\tau_{xz-}=\tau_{yz+}=\tau_{yz-}=q_-=0,\quad q_+=q.$$

Первые два уравнения и уравнения (13) образуют систему уравнений с четырьмя неизвестными $\Delta^2 w_{00},\mathrm{T}_0,\Delta U_0,\sigma_{z00}$:

$$\begin{aligned}
&\varepsilon^3\Delta^2 w_{00}e_{11}+2\mathrm{T}_0-\varepsilon^2\Delta U_0 e_{15}=0,\\
&-\varepsilon^4\Delta^2 w_{00}e_{61}-2\varepsilon\mathrm{T}_0+\varepsilon^3\Delta U_0 e_{65}=q_0,\\
&\varepsilon^3\Delta^2 w_{00}e_{21}-\varepsilon^2\Delta U_0 e_{25}=0,\\
&-\varepsilon^4\Delta^2 w_{00}e_{51}+\varepsilon^3\Delta U_0 e_{55}+2\sigma_{z00}=q_0.
\end{aligned} \tag{17}$$

Все неизвестные системы легко определяются. Из третьего уравнения получаем

$$\Delta U = \varepsilon \Delta^2 w_{00} \frac{e_{21}}{e_{25}}. \tag{18}$$

Два первых в сумме дают

$$\varepsilon^4 \Delta^2 w_{00} \left(e_{11} - e_{61} \right) - \varepsilon^3 \Delta U_{00} \left(e_{15} - e_{65} \right) = q_0.$$

Заменив ΔU_0, получим уравнение, совпадающее с классическим уравнением изгиба пластин

$$\varepsilon^4 \Delta^2 w_{00} C = q_0, \tag{19}$$

в котором изгибная жесткость C определена формулой

$$C = e_{11} - e_{61} + \frac{e_{21}}{e_{25}} \left(e_{65} - e_{15} \right) =$$

$$= \int_0^1 E^{PS} z dz + \int_0^{-1} E^{PS} z dz - \int_{-1}^{1} \int_0^z E^{PS} z dz dz + \frac{\int_{-1}^{1} E^{PS} z dz}{\int_{-1}^{1} E^{PS} dz} \left(\int_{-1}^{1} \int_0^z E^{PS} z dz dz - \int_0^1 E^{PS} dz - \int_0^{-1} E^{PS} dz \right),$$

где введено обозначение $E^{PS} = \dfrac{E}{1 - \nu^2}$.

Зная $\Delta^2 w_{00}$, можно вычислить ΔU_0:

$$\Delta U_0 = \varepsilon^{-3} \frac{q_0}{C} \frac{e_{21}}{e_{25}} = \varepsilon^{-3} \frac{q_0}{C} \frac{\int_{-1}^{1} \frac{E}{1-\nu^2} z dz}{\int_{-1}^{1} \frac{E}{1-\nu^2} dz}. \tag{20}$$

Четвертое уравнение из системы (16) дает

$$\sigma_{z00} = \frac{q_0}{2} \left(1 + \frac{e_{51}}{C} - \frac{e_{21} e_{55}}{C e_{25}} \right) = \frac{q_0}{2} \left[1 + \frac{\int_0^1 \int_0^z \frac{E}{1-\nu^2} z dz dz + \int_0^{-1} \int_0^z \frac{E}{1-\nu^2} z dz dz,}{C} - \right.$$

$$\left. - \frac{\left(\int_{-1}^{1} \frac{E}{1-\nu^2} z dz \right) \left(\int_0^1 \int_0^z \frac{E}{1-\nu^2} dz dz + \int_0^{-1} \int_0^z \frac{E}{1-\nu^2} dz dz \right)}{C \int_{-1}^{1} \frac{E}{1-\nu^2} dz} \right]. \tag{21}$$

Из первого уравнения системы (16) получаем последнее неизвестное

$$\mathrm{T}_0=\varepsilon^{-1}\frac{q_0}{C}\left(\frac{e_{21}e_{15}}{e_{25}}-e_{11}\right)=\varepsilon^{-1}\frac{q_0}{C}\left[\frac{\left(\int\limits_{-1}^{1}\frac{E}{1-\nu^2}zdz\right)\left(\int\limits_{0}^{1}\frac{E}{1-\nu^2}dz+\int\limits_{0}^{-1}\frac{E}{1-\nu^2}dz,\right)}{\left(\int\limits_{-1}^{1}\frac{E}{1-\nu^2}dz\right)}-\right.$$
$$\left.-\left(\int\limits_{0}^{1}\frac{E}{1-\nu^2}zdz+\int\limits_{0}^{-1}\frac{E}{1-\nu^2}zdz\right)\right]. \tag{22}$$

Уравнения (19) и (21) содержат по два неизвестных. Для определения тангенциальных перемещений уравнение (19) образует систему с однородными уравнениями (15). Уравнение (21) интегрируется совместно с первыми двумя однородными уравнениями из системы (14).

Заключение

В качестве исходных общих уравнений взяты уравнения пространственной задачи теории упругости для пластины из композиционного материала. Модуль упругости и коэффициент Пуассона считаются функциями высоты поперечного сечения. Уравнения приводятся к безразмерному виду, и в них выделяется малый параметр, равный отношению высоты плиты к ее длине. Интегрирование системы из 12 уравнений с 12 неизвестными производится с помощью метода простых итераций, позволяющего установить вид асимптотических разложений по малому параметру и показатели весовых коэффициентов каждого искомого неизвестного. В качестве величин нулевого приближения выбираются функции поперечного перемещения и напряжения сдвига, и через них определяются последовательно остальные неизвестные в нулевом приближении и, наконец, они же как величины первого приближения. Если функции нулевого приближения выбраны зависящими только от координат в плоскости, решение записывается в квадратурах. При этом появляются в качестве произволов интегрирования функции продольных перемещений и поперечного напряжения и соответствующие им элементарные напряженно-деформированные состояния (НДС).

Легко видеть, что основные трудности возникают при приложении локальной нагрузки. Этого никак нельзя избежать, т.к. в этом случае возникает быстроменяющееся напряженное состояние, которое в рамках рассмотренного метода приводит к нахождению решений типа пограничного слоя. Для однородной пластины задачи изгиба и растяжения-сжатия отделяются, и поэтому для быстро меняющихся компонент решения можно написать относительно простые уравнения типа пограничного слоя. В случае композиционного материала эти уравнения имеют сложный вид (11) с коэффициентами (12). Они пригодны для вычисления быстро затухающих локальных решений в области приложения сосредоточенной силы (локальной нагрузки) и вычисления краевого эффекта на торцевых поверхностях пластины. Можно показать, что в силу большой изменяемости этих решений точность их невелика. Вне таких малых областей решение описывается медленно меняющимися функциями. Оценить его погрешность можно аналогично тому, как это сделано в работах [20, 24, 25], подставив установленные разложения в исходные уравнения теории и воспользовавшись процедурой асимптотического интегрирования.

Полученные в работе уравнения хорошо согласуются с классическим уравнениями изгиба пластин для медленно меняющихся НДС и с уточненными теориями [28], выведенными интуитивным путем с помощью так называемого метода гипотез.

В то же время изложенная здесь теория удовлетворяет сформулированным, например, в [13] условиям непротиворечивости теории слоистых пластин, т.к.

– все компоненты вектора перемещений и тензора напряжений являются непрерывными функциями поперечной координаты всюду в теле пластины, в том числе на поверхностях раздела слоев;

– на лицевых поверхностях оболочки выполняются заданные граничные условия.

– выполняются все уравнения обобщенного закона Гука в каждой точке в пределах каждого слоя.

Литература

1. Тарнопольский Ю.М. Инженерная механика композитов. Обзор. Прикладная механика композитов. М.: Мир. 1989. Серия «Новое в зарубежной механике». Вып 44. С. 342-357.
2. Ломакин В.А. Теория упругости неоднородных тел. М.: МГУ. 1976. 368 с.
3. Колчин Г.Б. Расчет элементов упругих конструкций из неоднородных материалов. Кишинев: «Картя молдовенясеэ». 1971. 172 с.
4. Альперин И.Г. Задача о бесконечно длинной балке на упругой полуплоскости. // ПММ. 1939. Т.2. №3. С. 287-315.
5. Шапиро Г.С. Напряженное состояние бесконечной цилиндрической оболочки и неограниченной толстой плиты. // ДАН СССР. 1942. Т. 37. №9. С. 290-299.
6. Болотин В.В. Прочность, устойчивость и колебания многослойных пластин. // В сб. Расчеты на прочность. Вып.11. М.: Машиностроение. 1965. С.31-63.
7. Болотин В.В, Новичков Ю.Н. Механика многослойных конструкций. М.: Машиностроение. 1980. 376 с.
8. Васильев В.В. Механика конструкций из композиционных материалов. М.: Машиностроение. 1988. 264 с.
9. Горбачев В.И. Метод тензоров Грина для решения краевых задач теории упругости неоднородных тел. // Вычислительная механика деформируемого твердого тела. 1991. №2. С. 61-76.

10. Горбачев В.И., Олехова Л.В. Эффективные свойства неоднородного стержня при кручении // Вестник МГУ. 2007. №5. С. 41-48.
11. Олехова Л.В. Эффективные свойства при кручении стрежня из композиционного материала. // Вестник МГУ. 2010. №.2. С 30-35.
12. Григолюк Э.И., Куликов Г.Н. Многослойные армированные оболочки. Расчет пневматических шин. М.: Машиностроение. 1988. 289 с.
13. Куликов Г.М. Пути развития теории упругих многослойных пластин и оболочек // Вестник ТГТУ. 2005. Т. 11. № 2А. С. 439-447.
14. Бахвалов Н.С. Осредненные характеристики тел с периодической структурой. // ДАН СССР. 1974. Т.218. №5. С. 1040-1048.
15. Бахвалов Н.С., Панасенко Г.П. Осреднение процессов в периодических средах. М.: Наука. 1984. 352 с.
16. Победря Б.Е. Механика композиционных материалов. М.: МГУ. 1984. 243 с.
17. Победря Б.Е., Горбачев В.И. О статических задачах упругих композитов. // Вестник МГУ. 1975. №5. С. 101-111.
18. Шешенин С.В. Осредненные модули одного композита. // Вестник МГУ. 1980. №6. С. 79-83.
19. Ван-Дайк. М. Методы возмущений в механике жидкости. М.: Мир. 1967. 311 с.
20. Зверяев Е.М., Макаров Г.И. Оценка погрешности уравнений теории пологих оболочек // Строительная механика и расчет сооружений. 2013. № 4. С. 38-42.
21. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука. 1976. 543 с.
22. Санчес-Паленсия Э. Неоднородные среды и теория колебаний. М.: Мир. 1984. 472 с.
23. Зверяев Е.М. Декомпозиционные свойства принципа сжатых отображений // Механика композиционных материалов и конструкций. 1997. Т. 3, №2. С. 3-19.
24. Зверяев Е.М. Анализ гипотез, используемых при построении теории балок и плит // ПММ. 2003. Т. 67. Вып. 3. С. 472–481.
25. Зверяев Е.М., Макаров Г.И. Общий метод построения теорий типа Тимошенко // ПММ. 2008. Т. 72. Вып. 2. С. 308-321.
26. Зверяев Е.М. Построение математической модели полосы и балки из композиционного материала на основе принципа сжатых отображений // «Механика композиционных материалов и конструкций». Сб. трудов IV-го Всероссийского симпозиума в 2-х томах. Т. 2. Москва 4-6 декабря 2012 г. М.: ИПРИМ РАН, 2012. С. 226-234.

27. Milton Gr. W. The theory of composites. Cambridge University Press. 2004. 719p.
28. Reissner E. Selected work in applied mechanics and mathematics. Jons&Bartlett Publishers. 1996. 600 p.

Оглавление

Введение.. 3
1. Построение решения.. 6
2. Выполнение граничных условий на лицевых сторонах........................... 14
3. Медленно меняющиеся нагрузки 21
Заключение 26
Литература 27