



Давыдов А.А., Луцкий А.Е.

Численное моделирование
сверхзвукового течения в
следе за крылом и его
взаимодействия с
пересекающимися
ударными волнами

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Давыдов А.А., Луцкий А.Е. Численное моделирование сверхзвукового течения в следе за крылом и его взаимодействия с пересекающимися ударными волнами // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2014. № 98. 16 с.
URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2014-98>

**Ордена Ленина
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М.В. Келдыша
Российской академии наук**

А. А. Давыдов, А. Е. Луцкий

**Численное моделирование
сверхзвукового течения в следе
за крылом и его взаимодействия
с пересекающимися ударными волнами**

Москва — 2014

А. А. Давыдов, А. Е. Луцкий

Численное моделирование сверхзвукового течения в следе за крылом и его взаимодействия с пересекающимися ударными волнами

Выполнено численное моделирование течения при взаимодействии вихревого следа за крылом с системой ударных волн, генерируемых встречными клиньями с острой передней кромкой. Проведено исследование режимов при регулярном и маховском взаимодействии ударных волн. Расчеты проведены на многопроцессорной вычислительной системе К-100 в ИПМ им. М.В. Келдыша РАН. Проведено сравнение с экспериментальными данными, полученными в аэродинамической трубе Т-325 (ИТПМ им. С.А. Христиановича СО РАН) при числе Маха 3.

Ключевые слова: концевые вихри, ударные волны, модели турбулентности, RANS, DES, WENO.

Alexander A. Davydov, Alexander E. Lutsky

Numerical simulation of supersonic flows in the wing wake and its interaction with crossing shock waves.

The results of numerical simulation of supersonic flow in the wing wake and its interaction with shock waves investigation are presented. The system of couple counter wedges with a sharp edge has been used for the formation of shock waves of varying intensity. Investigation of regular and Mach interaction of shock waves has been performed. Calculations have been performed on a multiprocessor computer system K-100 in KIAM RAS. Experiments were carried out in a supersonic wind tunnel T-325 (ITAM SB RAS) at the Mach number 3.

Key words: wingtip vortices, shock waves, turbulent models, RANS, DES, WENO

Выполнено при поддержке Российского Научного Фонда (РНФ № 14-11-00872). В работе использованы материалы доклада, сделанного на международной конференции по методам аэрофизических исследований ISMAR-2014.

Оглавление

Введение	3
Схема эксперимента	4
Структура течения	5
Численный алгоритм	7
Результаты расчетов. Сравнение с экспериментом	12
Выводы	15
Список литературы	15

Введение

Изучение концевых вихрей, их характеристик, распространения и диссипации в спутном потоке на сегодняшний день является одной из важнейших задач аэрогазодинамики. Наиболее полно эта проблема исследована для дозвуковых летательных аппаратов, т.к. она представляет большой интерес для гражданской авиации, в частности, с точки зрения пропускной способности аэропортов. Действительно, летящий самолет может встретить на своем пути вихревой след, оставленный предыдущим самолетом [1, 2], что особенно важно при взлете/посадке летательного аппарата. С другой стороны, большой интерес представляет изучение концевых вихрей в сверхзвуковых течениях. Особенно это видно на фоне возросшего интереса к созданию высокоскоростных транспортных систем. Однако экспериментальной информации такого рода, полученной для сверхзвуковых скоростей, крайне мало [3–6]. Многие численные исследования базируются на упрощенных моделях ядра вихря, например, модель вихря Бюргерса [7, 8]. В связи с этим встает вопрос о соответствии модельных задач реальным течениям.

Помимо изучения изолированных вихрей, представляет значительный интерес исследование их взаимодействия с различными скачками уплотнения, возникающими при обтекании летательных аппаратов сверхзвуковым потоком газа. В работах [9, 10] проведено численное и экспериментальное исследование взаимодействия концевого вихря с головным скачком уплотнения, образованным цилиндром.

Настоящая работа дополняет большой цикл численных и экспериментальных исследований взаимодействия аэродинамических следов и струй с ударными волнами при сверх- и гиперзвуковых скоростях потока, проводимых совместно с ИТПМ им. С. А. Христиановича СО РАН (Новосибирск) [9–12].

В работе проводится численное исследование взаимодействия концевого вихря с системой ударных волн, образованных двумя встречными крыльями с острыми кромками.

Схема эксперимента

Эксперименты выполнены в сверхзвуковой аэродинамической трубе Т–325 (ИТПМ им. С. А. Христиановича СО РАН, А.М. Харитонов, А.М. Шевченко, А.С. Шмаков) при числе Маха 3. Для генерации вихревого следа используется тонкое прямое полукрыло с острыми кромками. Для формирования системы ударных волн разной интенсивности используется модель из двух встречных клиньев с острой кромкой. Схема эксперимента и фотография модели в аэродинамической трубе Т–325 приведены на рисунках 1 и 2 соответственно. Для визуализации применялся теневой метод с использованием адаптивных визуализирующих транспарантов (М.П. Голубев, Ал.А. Павлов, ИТПМ).

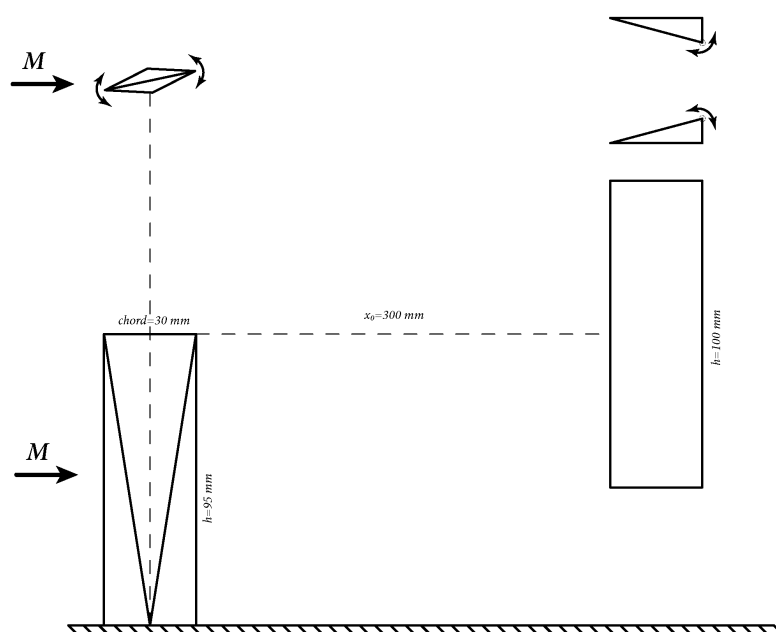


Рис. 1: Схема эксперимента.

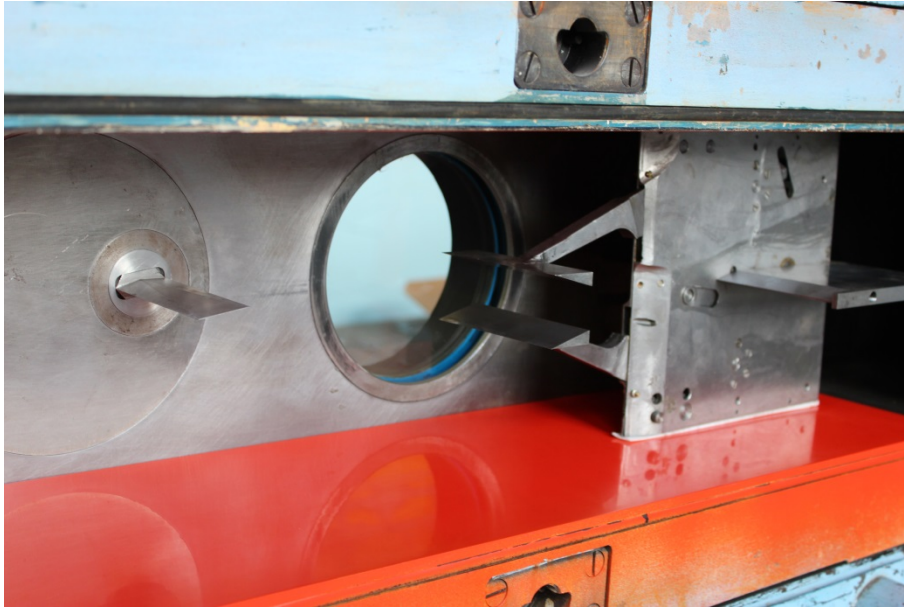


Рис. 2: Модель в аэродинамической трубе Т-325.

Структура течения

На боковой кромке крыла, расположенного под углом атаки, образуется концевой вихрь. Ядро концевой вихря представляет собой зону пониженной плотности, давления и осевой составляющей скорости. Структура изолированного вихря была изучена в работах [9, 10]. На рисунках 3а, 3б, 3в, 3г показаны уровни плотности в различных сечениях, $x = const$. Эволюция вихря вниз по потоку хорошо видна на рисунках 3а, 3б. С удалением от крыла интенсивность ядра падает, диаметр ядра увеличивается.

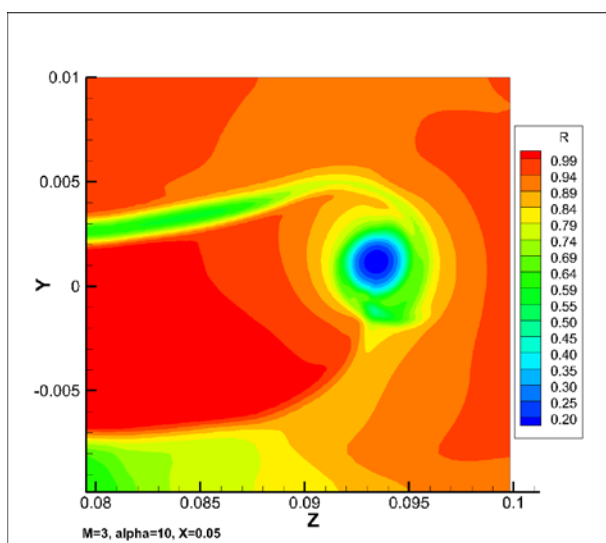


Рис. 3а: Распределение плотности в ядре вихря, $x = 0.05$.

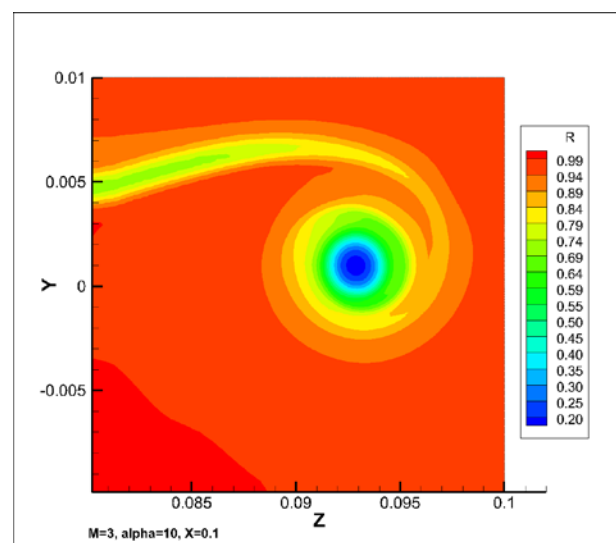


Рис. 3б: Распределение плотности в ядре вихря, $x = 0.1$.

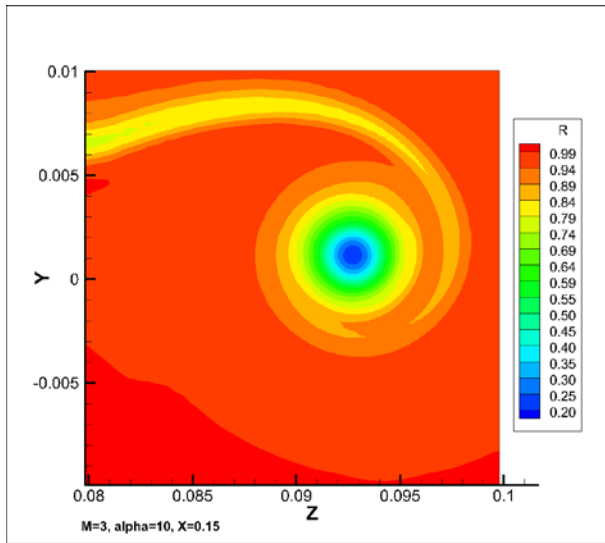


Рис. 3б: Распределение плотности в ядре вихря, $x = 0.15$.

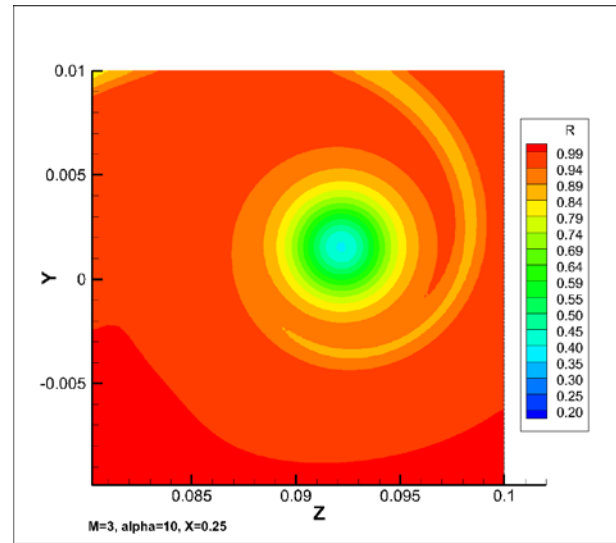


Рис. 3г: Распределение плотности в ядре вихря, $x = 0.25$.

На рисунке 3а хорошо видно, что в непосредственной близости от крыла (сечение $x=0.05$ — 1,16 хорды) вихрь еще не сформировался, не имеет выраженной осесимметричной структуры, для этой области существенно влияние ударных волн и зон разрежения за генератором вихря. Напротив, в сечении $x=0.25$ (7,8 хорд) наблюдается четкая осесимметричная картина. Заметных возмущений в ядре вихря не наблюдается.

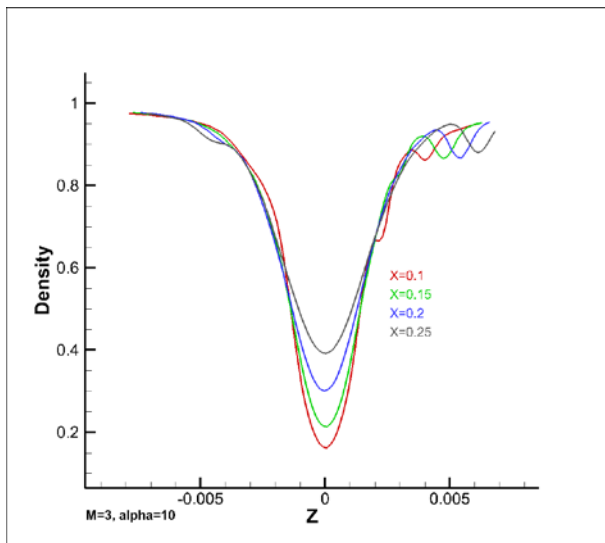


Рис. 4а: Распределение плотности в ядре вихря для различных $x = const$.

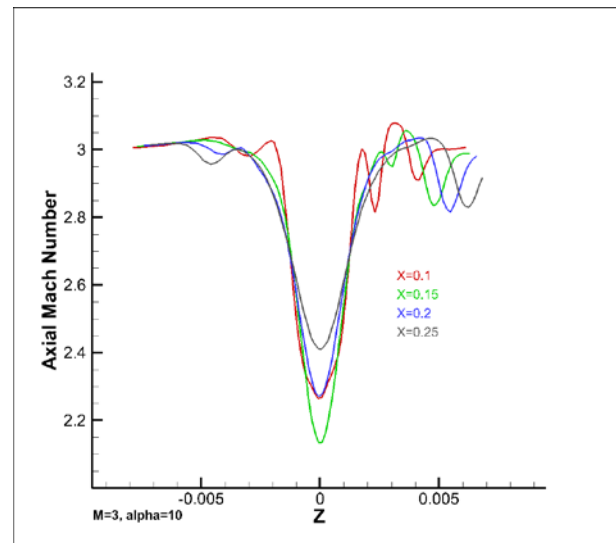


Рис. 4б: Распределение продольного числа Маха в ядре вихря для различных $x = const$.

Ниже по потоку вихрь встречается с системой скачков уплотнения, образованных двумя клиньями.

Как показано в результате многих экспериментальных и численных исследований [13, 14], в зависимости от угла раствора клиньев возможны три различные конфигурации скачков уплотнения. При достаточно малых углах реализуется регулярный режим взаимодействия. При увеличении угла раствора клиньев происходит переход от регулярного взаимодействия к маховскому. А при дальнейшем увеличении угла происходит запираение потока между клиньями и образование отошедшего головного скачка, выходящего вверх по потоку от системы клиньев. Рисунок 5 иллюстрирует структуру течения при регулярном взаимодействии ударных волн.

Для оценки топологии течения и размеров ножки Маха использовались результаты [15].

В следующих разделах описываются результаты численного моделирования вихря с системой ударных волн.

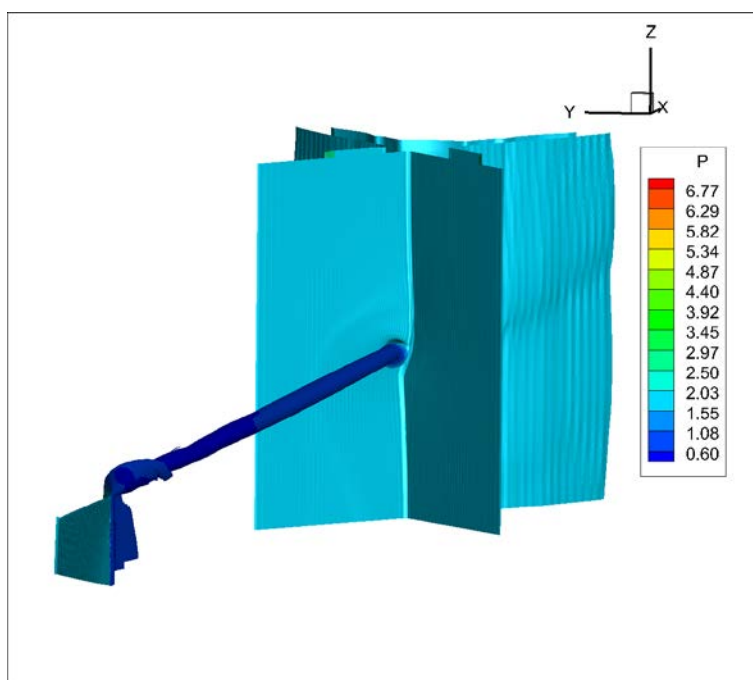


Рис. 5: Структура течения при регулярном взаимодействии ударных волн.

Численный алгоритм

Нестационарные уравнения Рейнольдса при использовании для их замыкания гипотезы Буссинеска могут быть записаны в форме, аналогичной уравнениям Навье–Стокса, с заменой молекулярной вязкости μ_1 на «эффективную» вязкость $\mu_e = \mu_1 + \mu_T$. В настоящей работе используется один из вариантов метода RANS с моделью турбулентности Спаларта–Аллмараса [16, 17].

Система уравнений в векторной форме имеет вид:

$$U_t + E_x + F_y + G_z = 0, \quad (1)$$

где

$$E = E^i + E^v, \quad F = F^i + F^v, \quad G = G^i + G^v,$$

$$E^i = (\rho u, \rho u^2 + p, \rho uv, \rho uw, (e + p)u)^T,$$

$$F^i = (\rho v, \rho uv, \rho v^2 + p, \rho vw, (e + p)v)^T,$$

$$G^i = (\rho w, \rho uw, \rho vw, \rho w^2 + p, (e + p)w)^T,$$

$$E^v = (0, -\tau_{xx}, -\tau_{xy}, -\tau_{xz}, -u\tau_{xx} - v\tau_{xy} - w\tau_{xz} - q_x)^T,$$

$$F^v = (0, -\tau_{xy}, -\tau_{yy}, -\tau_{yz}, -u\tau_{xy} - v\tau_{yy} - w\tau_{yz} - q_y)^T,$$

$$G^v = (0, -\tau_{xz}, -\tau_{yz}, -\tau_{zz}, -u\tau_{xz} - v\tau_{yz} - w\tau_{zz} - q_z)^T.$$

Поле скоростей представлено декартовыми составляющими u, v, w . С индексом i представлены потоки с невязками (конвективными) членами, с индексом v — потоки с вязкими (диффузионными) членами.

Компоненты тензора вязких напряжений задаются соотношениями

$$\tau_{xx} = \frac{2}{3}(\mu + \mu_t)(2u_x - v_y - w_z),$$

$$\tau_{yy} = \frac{2}{3}(\mu + \mu_t)(2v_y - u_x - w_z),$$

$$\tau_{zz} = \frac{2}{3}(\mu + \mu_t)(2w_z - u_x - v_y),$$

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = (\mu + \mu_t)(u_y + v_x),$$

$$\tau_{yz} = \tau_{zy} = (\mu + \mu_t)(v_x + w_y),$$

$$\tau_{xz} = \tau_{zx} = (\mu + \mu_t)(u_z + w_x).$$

Тепловые потоки задаются соотношениями (закон Ньютона–Фурье):

$$q_x = -\frac{c_p \mu}{\text{Pr}} \frac{\partial T}{\partial x}, \quad q_y = -\frac{c_p \mu}{\text{Pr}} \frac{\partial T}{\partial y}, \quad q_z = -\frac{c_p \mu}{\text{Pr}} \frac{\partial T}{\partial z}.$$

Динамический коэффициент вязкости μ выражается через абсолютную температуру по формуле Сазерленда $\frac{\mu}{\mu_0} = \sqrt[3]{\left(\frac{T}{T_0}\right)^2 \left(\frac{T_0 + T_s}{T + T_s}\right)}$, где T_s — постоянная, имеющая для воздуха значение, близкое к 122 K, а T_0 и μ_0 — абсолютная температура и коэффициент вязкости, соответствующие состоянию газа при $T = T_0$.

Используется модель совершенного газа $p = \varepsilon \rho (\gamma - 1) = \rho R T$. Для воздуха $\gamma = 1.4$, газовая постоянная $R = 287.0$, число Прандтля $\text{Pr} = 0.72$ и турбулентное число Прандтля $\text{Pr}_t = 0.9$. Полная энергия, отнесенная к единице объема

$$e = \rho \varepsilon + \rho \frac{u^2 + v^2 + w^2}{2} = \frac{p}{\gamma - 1} + \rho \frac{u^2 + v^2 + w^2}{2}.$$

В модели Спаларта-Аллмараса для определения турбулентной вязкости μ_t используется модель [17]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(\rho \tilde{v}) + \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho \tilde{v} u_i) = \\ = C_{b1} \rho \tilde{S} \tilde{v} + \frac{1}{\sigma_{\tilde{v}}} \frac{\partial}{\partial x_j} \left[(\mu + \rho \tilde{v}) \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x_j} \right] + \frac{C_{b2} \rho}{\sigma_{\tilde{v}}} \left(\frac{\partial \tilde{v}}{\partial x_j} \right)^2 - C_{w1} \rho f_w \frac{\tilde{v}^2}{d^2} \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь ρ — плотность, \tilde{v} — модельная переменная, связанная с турбулентной вязкостью, u_i — составляющие вектора скорости газа, C_{b1} , C_{b2} , C_{w1} , $\sigma_{\tilde{v}}$ — константы, μ — молекулярная динамическая вязкость, d — расстояние до ближайшей точки поверхности тела. Величины \tilde{S} и f_w определяются следующими соотношениями:

$$\tilde{S} = S + \frac{\tilde{v}}{\kappa^2 d^2} f_{v2}, \quad f_{v2} = 1 - \frac{\chi}{1 + \chi f_{v1}}, \quad f_{v1} = \frac{\chi^3}{\chi^3 + C_{v1}^3}, \quad \chi = \frac{\tilde{v}}{\nu},$$

где: κ и C_{v1} — константы, ν — молекулярная кинематическая вязкость, S — завихренность.

$$S = \sqrt{2 \Omega_{ij} \Omega_{ij}}, \quad \Omega_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right), \quad (3)$$

$$f_w = g \left[\frac{1 + C_{w3}^6}{g^6 + C_{w3}^6} \right]^{1/6}, \quad g = r + C_{w2} (r^6 - r), \quad r = \frac{\tilde{v}}{\tilde{S} \kappa^2 d^2}.$$

Значения констант взяты стандартными:

$$C_{b1}=0.1355, C_{b2}=0.622, \sigma_{\tilde{v}} = 2/3, C_{v1}=7.1, C_{w2}=0.3, C_{w3}=2., \kappa=0.41$$

$$C_{w1} = \frac{C_{b1}}{\kappa^2} + \frac{1 + C_{b2}}{\sigma_{\tilde{v}}}.$$

Турбулентная вязкость из модельной переменной получается по формуле:

$$\mu_t = \rho \tilde{v} f_{v1}. \quad (4)$$

Уравнение (2) для турбулентной вязкости может быть записано в форме, аналогичной уравнениям системы (1), поэтому расчет производится единообразно для всех уравнений.

При моделировании с использованием RANS невозможно достичь приемлемой точности при моделировании нестационарных течений. Методика LES обеспечивает хорошую точность, но с очень большими вычислительными затратами, особенно при расчетах пристеночных течений, где шаг сетки должен быть порядка малых диссипирующих погранслоевых вихрей, что характерно при использовании DNS.

Трудности, возникающие при моделировании пристеночных течений с помощью LES, можно преодолеть, если рассматривать гибридные модели, такие как метод отсоединенных вихрей (DES). Анализ возможностей и ограничений двух традиционных подходов к моделированию турбулентности, таких как RANS и LES, показал, что проблема расчета турбулентных отрывных течений может быть успешно решена путем создания «гибридного» подхода. Этот подход сочетает в себе сильные стороны этих двух методов — высокую точность существующих полуэмпирических RANS-моделей в областях присоединенного пограничного слоя и универсальность и приемлемые вычислительные затраты LES в отрывных областях потока. Все вышеперечисленные особенности метода DES нашли отражение в сборнике [18].

Метод моделирования отсоединенных вихрей представляет собой гибридную модель RANS/LES, что является разумным компромиссом между RANS и LES методиками. Моделирование крупных вихрей (LES) включается только в областях течения, где размер (шаг) сетки Δ достаточен для разрешения турбулентности с масштабом L_{turb} ($\Delta \ll L_{turb}$). RANS работает в остальной области течения ($\Delta > L_{turb}$). Например, для течений с обширной отрывной зоной это означает следующее:

- область присоединенного пограничного слоя считается по RANS-подходу, который обеспечивает хорошую точность в подобной ситуации;
- отрывная область с относительно крупными вихрями рассчитывается в LES-модели.

Основная идея DES состоит в использовании одной и той же RANS-модели в RANS- и LES-модах. LES-мода представляет собой подсеточную версию модели Спаларта-Аллмараса и получается заменой линейного масштаба турбулентности d_w из RANS на масштаб турбулентности $C_{DES}\Delta$ из модели LES в (3). В результате получаем подсеточную модель из одного уравнения: версия модели SA с моделированием вихрей подсеточного масштаба (SGS — SubGrid Scale). В «равновесии», когда генерация равна диссипации, эта модель эквивалентна модели Смагоринского [19] — $\mu_t = \rho(C_s\Delta)^2 \sqrt{2S_{ij}S_{ij}}$, где $C_s = C_{DES}$ [20]. Сшивку RANS- и LES-мод состоит во введении масштаба

$$l_{DES} = \min(d_w, C_{DES}\Delta), \quad C_{DES} = O(1), \quad (5)$$

где Δ — максимальный диаметр расчетной пристеночной ячейки. Величина l_{DES} заменит масштаб турбулентности d_w в уравнениях (2)–(4), определяющих величину вихревой (турбулентной) вязкости.

На рисунке 6 изображены три типа приграничных сеток. В сетке I, с тонким пограничным слоем, типичной для RANS, шаг сетки в продольном направлении $\Delta_{||}$, определенным в (5) через Δ , превышает толщину погранслоя δ . Тогда масштаб DES выделяет область RANS ($l_{DES} = d_w$) по всей длине пограничного слоя, исключая работу LES-модели внутри пограничного слоя.

С другой стороны, шаги сетки III, типичной для LES, намного меньше толщины пограничного слоя δ . Тогда модель DES ведет себя, как модель SGS (то есть, $l_{DES} = C_{DES}\Delta$) на большей части пограничного слоя и как модель RANS ($l_{DES} = d_w$) очень близко со стенкой.

В настоящей работе расчеты проводились только с использованием RANS-подхода. Реализация и применение подхода DES планируется в ближайшее время.

Для расчетов использовалась конечно-объемная WENO схема третьего порядка [21], записываемая для произвольной многогранной ячейки.

Численный алгоритм позволяет проводить расчет на неструктурированных сетках с произвольными многогранными ячейками. Однако в расчетах использовалась сетка только с шестигранными ячейками. Сетка имела соответствующие сгущения к поверхностям генераторов вихря и скачков, а также к оси вихря. Общее количество ячеек — 18667500.

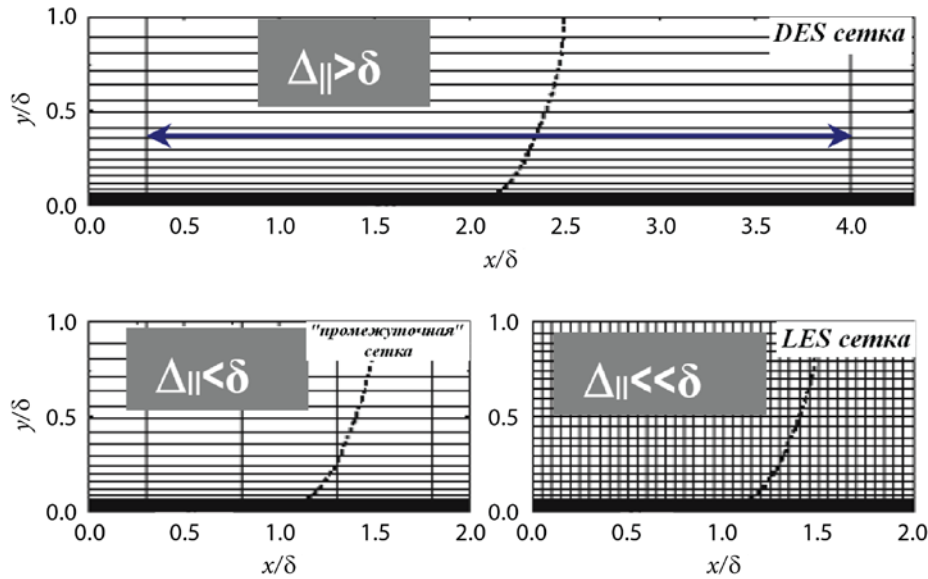


Рис. 6 (из книги [18]): Сетки пограничного слоя. Вверху — сетка типа I (DES), слева — сетка типа II ("промежуточная"), справа — сетка типа III (LES).

Штриховая линия — профиль средней скорости.

Величина δ — толщина пограничного слоя. Предполагается, что $\Delta x \sim \Delta z$.

Результаты расчетов. Сравнение с экспериментом

Геометрия модели и расстояние от генератора вихря до клиньев таковы, что формирование устойчивой конфигурации ударных волн как в случае регулярного, так и в случае маховского взаимодействия происходило раньше, чем возмущение от генератора вихря доходило до области взаимодействия. Кроме того, это позволило получить характеристики изолированного вихря на достаточном удалении от генератора, где вихрь уже полностью сформировался и при этом почти отсутствуют возмущения, вносимые генератором.

Все расчеты проводились при числе Маха набегающего потока $M = 3.0$, числе Рейнольдса $Re = 10^6$ и угле атаки генератора вихря $\alpha = 10^\circ$.

На рисунках 7а, 7б показано сравнение генерируемого вихря с вихрем Бюргерса. Пунктиром на рисунке 7а показана аналитически заданная продольная скорость, соответствующая вихрю Бюргерса:

$$V_{axial} = V_\infty + V_\infty (\Phi - 1) \left(e^{-(z/r_c)^2} \right),$$

где V_∞ — скорость набегающего потока, Φ — отношение скорости на оси вихря к скорости набегающего потока.

Тангенциальная скорость, соответствующая вихрю Бюргерса, приведена на рис 7б и аналитически выражается как

$$V_{tau} = \Gamma_0 \left(e^{-(z/r_c)^2} \right) / z,$$

где Γ_0 — циркуляция на бесконечности.

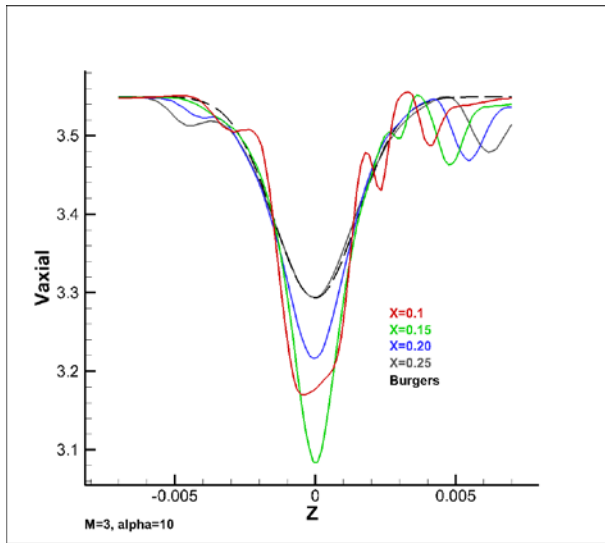


Рис 7а: Распределение продольной скорости в ядре вихря для различных $x = const$ и сравнение с вихрем Бюргерса.

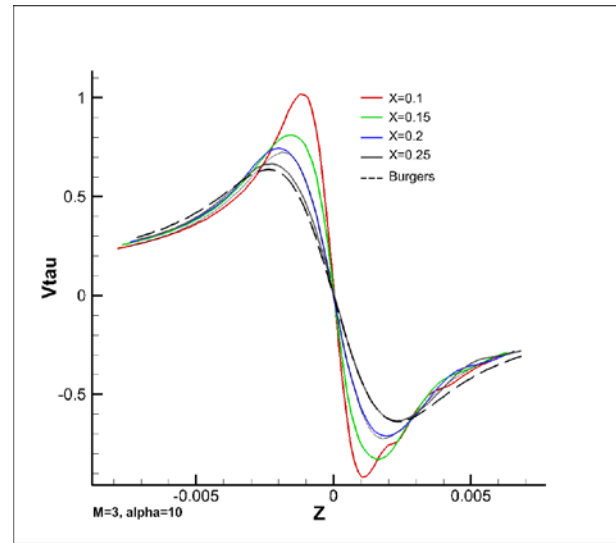


Рис.7б: Распределение тангенциальной скорости ядре вихря для различных $x = const$ и сравнение с вихрем Бюргерса.

На основе рисунков 7а, 7б можно утверждать, что исследуемый вихрь на достаточном удалении от генератора (7–8 хорд крыла генератора вихря) соответствует вихрю Бюргерса.

На рис 8а и 8б проводится сравнение численного моделирования и эксперимента в случае регулярного взаимодействия ударных волн (угол полураствора клиньев $\beta = 15^\circ$).

Несмотря на некоторое несовпадение положения оси вихря относительно косоугольной ударной волны в расчете и эксперименте, можно отметить общий для обоих случаев характер взаимодействия. А именно, что вихрь, проходя через ударную волну, почти не искажается. При этом форма ударной волны существенно не меняется. Угол наклона ударной волны также практически не меняется. Такой режим взаимодействия можно назвать, следуя [8], слабым режимом взаимодействия.

Напротив, при реализации маховского режима взаимодействия ударных волн и, как следствие, интерференции вихревого следа с системой косоугольного прямого скачков уплотнения характер течения существенно меняется (рисунки 9а, 9б). Происходит образование рециркуляционной зоны, которая представляет собой почти изобарическую область с низким значением полного давления и числа Маха. Внутри нее формируется низкоскоростной тороидальный вихрь.

Более наглядно картину течения в обоих случаях можно увидеть на рисунках 10а, 10б, где изображены изоповерхности модуля ротора и давления, а также цветом выделены уровни давления.

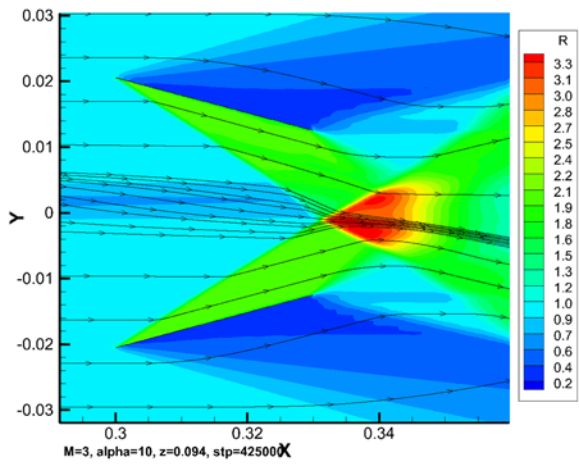


Рис. 8а: Уровни плотности при регулярном взаимодействии.

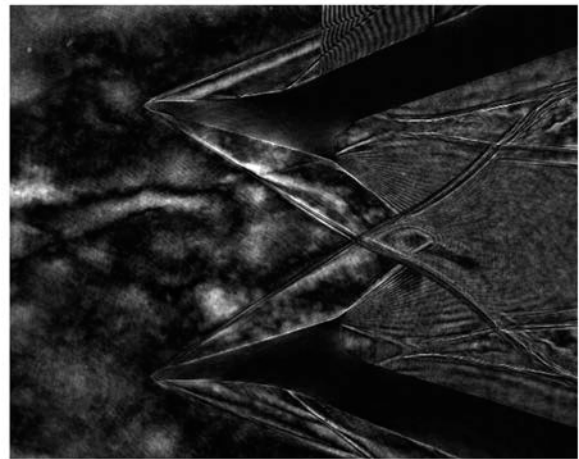


Рис. 8б: Уровни плотности при регулярном взаимодействии.

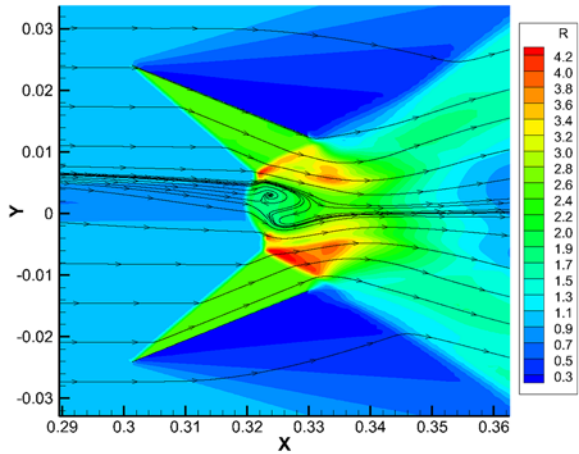


Рис. 9а: Уровни плотности при регулярном взаимодействии.

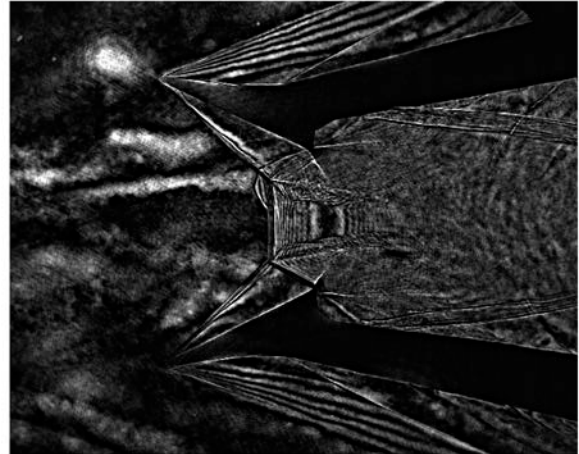


Рис. 9б: Уровни плотности при регулярном взаимодействии.

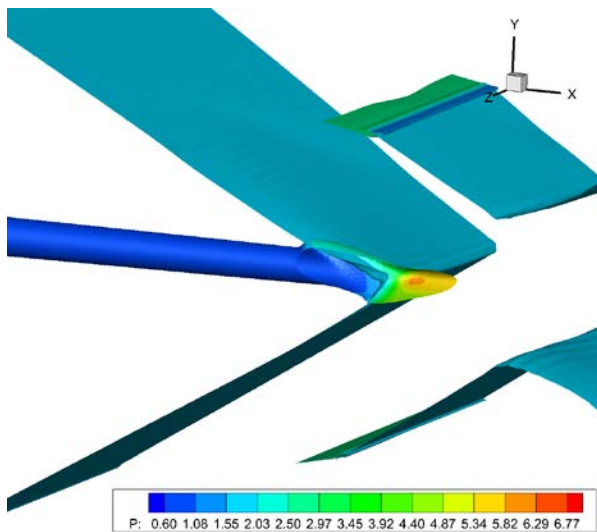


Рис. 10а: Исоповерхности модуля ротора и давления при регулярном взаимодействии.

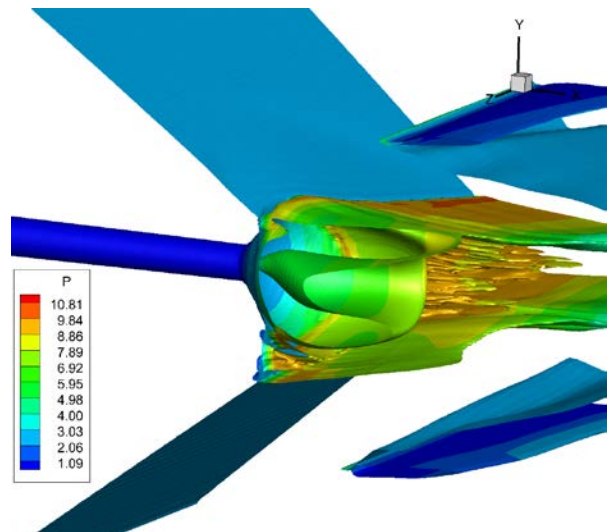


Рис. 10б: Исоповерхности модуля ротора и давления при маховском взаимодействии.

Выводы

1. В рамках подхода RANS с моделью турбулентности Спаларта-Аллармаса выполнено численное моделирование взаимодействия вихревого следа за крылом с системой ударных волн.
2. Получено качественное совпадение результатов численного и экспериментального исследований.
3. При реализации регулярного режима взаимодействие вихря с косым скачком происходит без видимого разрушения вихря.
4. При реализации маховского режима происходит взаимодействие вихря с системой прямого и косого скачков. При этом наблюдается разрушение ядра вихря с образованием рециркуляционной зоны взаимодействия.

Список литературы

1. Ghias R., Mittal R., Dong H., Lund T.S. 43th Fluid Dynamics Conference and Exhibit. Reno, NV, 10-13 January, 2005.
2. Babie B.M., Nelson R.C. 11th International Symposium On Flow Visualization. Notre Dame, Indiana, USA, 9-12 August, 2004.
3. Smart M.K., Kalkhoran I.M., Bentson J. Measurements of supersonic wing tip vortices // AIAA Journal, Vol. 33, No. 10, pp. 1761-1768, 1995.
4. Kalkhoran I.M., Smart M.K. Aspects of shock wave-induced vortex breakdown // Progress in Aerospace Sciences, 2000, vol.30, pp. 63-95.
5. Боровой В.Я. Течение и теплообмен в областях взаимодействия пограничного слоя со скачками уплотнения. М: Машиностроение, 1986.
6. Боровой В.Я., Кубышина В.Я., Скуратов А.С., Яковлева Л.С.. Вихрь в сверхзвуковом потоке и его влияние течение и теплообмен на затупленном теле // Механика жидкости и газа, № 5, С. 66-76, 2000.
7. Желтоводов А.А., Пимонов Е.А. Исследование воздействия локализованного энергоподвода на взаимодействие продольного вихря с косым скачком уплотнения. // Теплофизика и аэромеханика, 2005, Т. 12, № 4.
8. Зудов В. Н., Пимонов Е. А. Взаимодействие продольного вихря с наклонной ударной волной. // Прикладная механика и техническая физика. 2003. Т. 44, № 4.
9. Shevchenko M., Lutsky A.E., Chernoguzov A.S., Polkova K. Yu. Techniques and results for investigations of supersonic wing-tip vortices. Proc. of XIII International Conference on the Methods of Aerophysical Research, Novosibirsk, 5-10 February, 2007, Part 3, pp. 215-220.
10. Kharitonov A.M., Lutsky A.E., Shevchenko A.M. Investigations of supersonic vortex cores above and behind of a wing. Proc. of 2nd European Conference for Aerospace Sciences, Brussels, 1-6 July, 2007, Paper No. 2.01.02., 8 p.
11. Shevchenko A.M., Kavun I.N., Pavlov A.A., Pavlov Al.A., Shmakov A.S., Zapryagaev V.I. Unsteady effects in wing wake / shock interactions. Proc of

2nd European Conference for Aerospace Sciences, Brussels, 1-6 July, 2007, Paper No. 2.01.03., 8 p.

12. Давыдов А.А., Константиновская Т.В., Луцкий А.Е., Харитонов А.М., Шевченко А.М., Шмаков А.С. Моделирование сверхзвукового течения в ядре концевой вихря при числе Маха 6. // Математическое моделирование. № 6, 2012. С. 67–82.

13. Ivanov M.S., Markelov G.N., Kudryavtsev A.N. and Gimelshein S.F. Numerical Analysis of Shock Wave Reflection Transition in Steady Flows // AIAA Journal, Vol. 36, No. 11, November 1998.

14. Иванов М.С., Кудрявцев А.Н., Никифоров С.Б., Хотяновский Д.В. Переход между регулярным и маховским отражением ударных волн: новые численные и экспериментальные результаты // Аэромеханика и газовая динамика, 2002, №3, С. 3-12.

15. Azevedo D.J. and Ching Shi Liut. Engineering Approach to the Prediction of Shock Patterns in Bounded High-Speed Flows // AIAA Journal, Vol. 31, No. 1, January 1993.

16. Белов И.А., Исаев С.А. Моделирование турбулентных течений: Учебное пособие. Балт. Гос. техн. Ун-т. СПб., 2001. 108 с.

17. Spalart P.R., Allmaras S.R. A one-equation turbulence model for aerodynamic flows // La Recherche Aerospaciale. 1994; 1: 5-21.

18. Haase, W., Braza, M., and Revell, A. (Editors). DESider — A European Effort on Hybrid RANS-LES Modelling, Springer, 2009.

19. Волков К.Н., Емельянов В.Н. Моделирование крупных вихрей в расчетах турбулентных течений. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2008.

20. Spalart, P.R., Jou, W.H., Strelets, M., Allmaras, S. R. Comments on the feasibility of LES for wings, and on a hybrid RANS/LES approach, Proc. of the First AFOSR Int. Conf. on DNS/LES, Ruston, USA, 137-148 (1997).

21. Chou C.-S. and Shu C.-W. High order residual distribution conservative finite difference WENO schemes for steady state problems on non-smooth meshes, Journal of Computational Physics, 214 (2006), 698-724.