ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 106 за 2015 г.

ISSN 2071-2898 (Print)
ISSN 2071-2901 (Online)

Батищева Я.Г.

Динамика шара с неоднородной поверхностью в разреженном газе

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Батищева Я.Г. Динамика шара с неоднородной поверхностью в разреженном газе // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2015. № 106. 22 с.
URL: http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2015-106

О р д е н а   Л е н и н а
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М.В.Келдыша
Р о с с и й с к о й   а к а д е м и и   н а у к

Я. Г. Батищева

Динамика шара с неоднородной поверхностью в разреженном газе

Москва — 2015

Я. Г. Батищева
Динамика шара с неоднородной поверхностью в разреженном газе

Построена модель движения шарообразной частицы с неоднородной активной поверхностью в разреженном газе. Исследованы свойства построенной динамической системы. Доказана лемма о свойствах асимптотически устойчивых инвариантных множеств для автономных систем ОДУ высокой размерности, с помощью которой найдены решения, соответствующие различным типам асимптотик в движении частиц.

Ключевые слова: динамика твердой частицы, разреженный газ, активная неоднородная поверхность, обыкновенные дифференциальные уравнения, инвариантные множества, асимптотические свойства, асимптотически устойчивые траектории.

J. G. Batisheva
The dynamics of ball-shaped particle with nonuniform surface in the rarefied gas

The model of ball-shaped particle with nonuniform active surface in the rarefied gas is constructed. The features of appropriate dynamical system are established. The lemma on the properties of high-dimension ODE is proved. This lemma is an important step, providing an opportunity to find solution corresponding to various types of asymptotic of the particle motion.

***Key words*:** solid paticle dynamics, rarefied gas, nonuniform active surface, ODE, invariant sets, asymptotic properties, asymptotically stable trajectory.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ, проект № 15-08-02575-а.

Содержание

Введение 3

Построение модели 4

Исследование динамической системы 8

Движение частиц 15

Дополнение. Лемма 1 17

Литература 21

Введение

В различных технических системах не редкость ситуации, когда мелкие капли вещества, например нагретого металла, движутся в атмосфере окислителя или иных газов, способных вступать во взаимодействие с поверхностью капель. Будет ли движение таких капель определяться только инерцией, внешними силами и сопротивлением среды? На основании работ [3-6, 9] можно предположить, что помимо перечисленных факторов есть еще один, способный существенно влиять на характер движения, — это взаимодействие молекул газа с поверхностью капель или частиц. Важной особенностью поверхностных процессов является их очаговый характер, акты поглощения или испускания молекул поверхностью не происходят всюду равновероятно, но можно выделить так называемые активные зоны, в которых эта вероятность существенно выше, чем на прочей поверхности [16, 17]. Основываясь на этих физических соображениях, построим модель движения шарообразной частицы с единственной активной зоной. И проанализируем, насколько это окажется возможным, как взаимодействие между поверхностью и газом влияет на движение частицы.

Как известно, система Лоренца [10, 13], изначально полученная из уравнений гидродинамики для описания нестационарных процессов в атмосфере [10], является также одним из примеров уравнений, описывающих движение твердого тела в сопротивляющейся среде [2, 8]. И применительно к твердому телу она оказывается частным случаем динамических уравнений Эйлера для тела с одной осью (динамической) симметрии, в которых момент сил линеен по кинетическому моменту и представляет собой сумму диссипативного и гироскопического моментов. При этом переменными являются проекции кинетического момента на главные оси инерции.

Как будет показано ниже, к системе уравнений точно такой же структуры, правда в несколько иных переменных, можно свести уравнения движения полностью динамически симметричного тела – шара с неоднородной поверхностью.

Построение модели

Итак, рассмотрим шарообразную частицу в газе, движение которой происходит только под действием сил, возникающих из-за взаимодействия молекул газа с поверхностью шара. Предположим, что взаимодействие газа с поверхностью можно считать комбинацией зеркально-диффузного рассеяния [6, 7, 15, 18] и сорбции. Свойства поверхности (коэффициент аккомодации [7, 11] и распределение температур) будем считать заданными и аксиально-симметричными. Также, будем предполагать, что поступательная и угловая скорости шара невелики, так что локальная скорость каждой точки поверхности оказывается малой по сравнению со средней тепловой скоростью движения молекул газа.

Пусть для некоторого выпуклого тела R – радиус вектор центра масс, Q – импульс, K – кинетический момент, заданные в неподвижной системе координат, M и $\hat{J}$ - масса и тензор инерции соответственно. Также будем использовать некоторый ортонормированный базис $\{S, S', S''\}$, связанный с шаром, причем вектор S будем считать направленным вдоль оси симметрии поверхности. В этом случае уравнения движения тела в газе могут быть записаны в виде[3, 5, 6]:

$$(1)\qquad \begin{cases} \dfrac{dR}{dt} = M^{-1}Q, \\ \dfrac{dQ}{dt} = \mathsf{F}^{0} + \hat{D}M^{-1}Q + \hat{C}\hat{J}^{-1}K, \\ \dfrac{dK}{dt} = \mathsf{M}^{0} + \hat{G}M^{-1}Q + \hat{W}\hat{J}^{-1}K, \\ \dfrac{dS_i}{dt} = \left[\hat{J}^{-1}K, S_i\right] \end{cases}$$

Здесь сила и момент сил представлены в виде разложения по степеням поступательной и угловой скоростей и отброшены члены второго и более высоких порядков по числу Маха и Струхаля[4, 6, 14] ввиду их малости. А также учтено предположение о том, что для молекул газа справедлива максвелловская функция распределения [12, 14, 18]

Члены нулевого порядка:

$$(2)\qquad \begin{aligned} \mathsf{F}^{0} &= \frac{n_0 kT}{2}\int\left(\frac{2\alpha}{m}\beta_e + \left(1+\sqrt{T_W/T}\right)\beta_d + \beta_s\right)\cdot n\cdot\sigma(r)dr \\ \mathsf{M}^{0} &= \frac{n_0 kT}{2}\int\left(\frac{2\alpha}{m}\beta_e + \left(1+\sqrt{T_W/T}\right)\beta_d + \frac{M}{M+m}\beta_s\right)\cdot[r,n]\cdot\sigma(r)dr \end{aligned}$$

где $\alpha^{-1} = M^{-1} + m^{-1} + \left([r,n],\hat{J}^{-1}[r,n]\right);$

матрицы коэффициентов в членах первого порядка:

$$(3)\qquad \begin{aligned} \hat{D} &= -n_0\sqrt{\frac{mkT}{2\pi}}\int\left\{\kappa(r)\cdot n\otimes n^{\mathsf{T}} + \beta_d\hat{I}\right\}\sigma(r)dr, \\ \hat{C} &= -n_0\sqrt{\frac{mkT}{2\pi}}\int\left\{\kappa(r)\cdot n\otimes[r,n]^{\mathsf{T}} - \beta_d\hat{r}\right\}\sigma(r)dr, \\ \hat{G} &= -n_0\sqrt{\frac{mkT}{2\pi}}\int\left\{\left(\kappa(r) - \frac{m}{M+m}\beta_s\right)\cdot[r,n]\otimes n^{\mathsf{T}} + \left(\beta_d + \frac{M}{M+m}\beta_s\right)\cdot\hat{r}\right\}\sigma(r)dr, \\ \hat{W} &= -n_0\sqrt{\frac{mkT}{2\pi}}\int\left\{\left(\kappa(r) - \frac{m}{M+m}\beta_s\right)\cdot[r,n]\otimes[r,n]^{\mathsf{T}} + \beta_d\left(r^2\hat{I} - r\otimes r^{\mathsf{T}}\right)\right\}\sigma(r)dr, \end{aligned}$$

где $\kappa(r) = \dfrac{4\alpha}{m}\beta_e + \left(1 + \frac{\pi}{2}\sqrt{T_W/T}\right)\cdot\beta_d + \beta_s$.

Здесь m и n_0 – масса и числовая плотность молекул газа, T и T_W – температура газа и поверхности соответственно, k – постоянная Больцмана.

Безразмерные коэффициенты взаимодействия $\beta_i = \beta_i(r)$, $i = e, d, s$ (e (elastic) – зеркальный тип, d (diffuse) – диффузный тип, s (sorption) – сорбция) описывают неоднородность поверхности и считаются равными вероятностям реализации соответствующего типа соударения.

Переменная интегрирования r есть радиус-вектор точки поверхности в собственной системе координат (т.е. начало которой совпадает с центром масс, а базис есть $\{S, S', S''\}$). Функция $\sigma(r)$ есть геометрическое сечение столкновений. Она связана с уравнениями поверхности $\varphi(r)=0$ в собственной системе координат соотношением $\sigma(r)=|\nabla\varphi|\,\delta(\varphi(r))$ [3, 5, 6].

Здесь также использованы следующие обозначения. Обозначим кронекеровское произведение двух векторов как:

$$X \otimes Y^T = \begin{pmatrix} x_1y_1 & x_1y_2 & x_1y_3 \\ x_2y_1 & x_2y_2 & x_1y_3 \\ x_3y_1 & x_3y_2 & x_3y_3 \end{pmatrix}.$$

Если $X = (x_1, x_2, x_3)$ – трехмерный вектор, поставим ему в соответствие объект

$$\hat{X} = \begin{pmatrix} 0 & x_3 & -x_2 \\ -x_3 & 0 & x_1 \\ x_2 & -x_1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Тогда обычное векторное произведение можно будет представить в виде $[X, Y] = \hat{X}Y$, где слева – векторное произведение двух векторов, а справа – действие оператора $\hat{X}$ на вектор Y.

Для шара $\sigma(r) = \delta(|r| - \rho)$, где ρ – радиус шара.

Будем считать, что центр масс и геометрический центр шара совпадают. Также шар будем считать совершенно динамически симметричным, т.е. $\hat{J} = J \cdot \hat{I}$. Заметим, что нормаль к поверхности шара всегда параллельна вектору r. Тогда будем иметь:

$$\mathsf{F}^{0} = \frac{\rho^2 n_0 kT}{2}\int\left(\frac{2M}{M+m}\beta_e + \left(1+\sqrt{T_W/T}\right)\beta_d + \beta_s\right) n dn,$$

$$\mathsf{M}^{0} \equiv 0,$$

(4) $$\hat{D} = -\rho^2 n_0 \sqrt{\frac{mkT}{2\pi}}\int\left\{\kappa\cdot n\otimes n^{\mathsf{T}} + \beta_d \hat{I}\right\} dn,$$

$$\hat{C} = -\rho^3 n_0 \sqrt{\frac{mkT}{2\pi}}\int\left\{-\beta_d \hat{n}\right\} dn,$$

$$\hat{G} = -\rho^3 n_0 \sqrt{\frac{mkT}{2\pi}}\int\left\{\left(\beta_d + \frac{M}{M+m}\beta_s\right)\cdot\hat{n}\right\} dn,$$

$$\hat{W} = -\rho^4 n_0 \sqrt{\frac{mkT}{2\pi}}\int\left\{\beta_d\left(\hat{I} - n\otimes n^{\mathsf{T}}\right)\right\} dn.$$

Здесь переменная интегрирования – единичный вектор, интегрирование ведется по сфере, вложенной в трехмерное пространство. Коэффициент κ примет вид

$$\kappa(r) = \frac{4M}{M+m}\beta_e + \left(1+\tfrac{\pi}{2}\sqrt{T_W/T}\right)\cdot\beta_d + \beta_s.$$

Будем считать, что третий орт собственной системы координат направлен вдоль оси симметрии поверхности S, тогда все функции, определяющие свойства поверхности, будут зависеть только от одного аргумента – косинуса угла между вектором внешней нормали и вектором S. Обозначим эту переменную ξ. Тогда получим:

$$\mathsf{F}^{0} = \chi_0 S,$$

$$\mathsf{M}^{0} \equiv 0,$$

(5) $$M^{-1}\hat{D} = -\lambda\hat{I} + \chi_1 S\otimes S^T,$$

$$J^{-1}\,\hat{C} = \delta\,\hat{S},$$

$$M^{-1}\hat{G} = -\gamma\,\hat{S},$$

$$J^{-1}\quad\hat{W} = -\mu\,\hat{I} + \nu\,S\otimes S^T,$$

где постоянные коэффициенты:

$$\chi_0 = -\pi\rho^2 n_0 kT \int \left(\frac{2M}{M+m} \beta_e(\xi) + \left(1 + \sqrt{T_W(\xi)/T}\right)\beta_d(\xi) + \beta_s(\xi) \right) \xi d\xi ,$$

$$\chi_1 = -\pi\rho^2 M^{-1} n_0 \sqrt{\frac{mkT}{2\pi}} \int \kappa(\xi)\left(3\xi^2 - 1\right) d\xi ,$$

$$\lambda = \pi\rho^2 M^{-1} n_0 \sqrt{\frac{mkT}{2\pi}} \int \left(\kappa(\xi)\left(1-\xi^2\right) + 2\beta_d(\xi)\right) d\xi ,$$

$$\delta = -2\pi\rho^3 J^{-1} n_0 \sqrt{\frac{mkT}{2\pi}} \int \beta_d(\xi)\xi d\xi , \tag{6}$$

$$\gamma = -2\pi\rho^3 M^{-1} n_0 \sqrt{\frac{mkT}{2\pi}} \int \left(\beta_d(\xi) + \frac{M}{M+m}\beta_s(\xi) \right) \xi d\xi ,$$

$$\mu = \pi\rho^4 J^{-1} n_0 \sqrt{\frac{mkT}{2\pi}} \int \beta_d(\xi)\left(1+\xi^2\right) d\xi ,$$

$$\nu = \pi\rho^4 J^{-1} n_0 \sqrt{\frac{mkT}{2\pi}} \int \beta_d(\xi)\left(3\xi^2 - 1\right) d\xi .$$

Исследование динамической системы

Из полученных выражений для коэффициентов легко видеть, что $\lambda > 0$ и $\mu \ge 0$. Однако имеют место более сильные неравенства: $\lambda > \chi_1$, $\mu \ge \nu$. Равенство $\mu = \nu = 0$ достигается только если $\beta_d \equiv 0$, при этом также $\delta = 0$.

Итак, получим динамическую систему:

$$\begin{cases} \dfrac{dR}{dt} = M^{-1}Q, \\ \dfrac{dQ}{dt} = -\lambda Q + \left(\chi_0 + \chi_1(Q,S)\right)S - \delta[K,S], \\ \dfrac{dK}{dt} = -\mu K + \nu(K,S)S + \gamma[Q,S], \\ \dfrac{dS}{dt} = J^{-1}\left[K,S\right]. \end{cases} \tag{7}$$

Три из четырех уравнений этой системы отделяются:

$$(8)\quad \begin{cases} \dfrac{dQ}{dt} = -\lambda Q + (\chi_0 + \chi_1(Q,S))S - \delta[K,S], \\ \dfrac{dK}{dt} = -\mu K + \nu(K,S)S + \gamma[Q,S], \\ \dfrac{dS}{dt} = J^{-1}[K,S]. \end{cases}$$

Фазовое пространство: $\Omega_0 = \{Q,K,S\} = \mathrm{R}^3 \times \mathrm{R}^3 \times \mathrm{S}^2$, имеет размерность $\dim\Omega_0 = 8$.

Замечание. В случае когда коэффициент диффузного отражения равен нулю $\delta = \mu = \nu = 0$, получим систему, совпадающую с полученной в работе [9].

Рассмотрим функцию: $I_1 = (K,S)\cdot e^{(\mu-\nu)t}$ – неавтономный интеграл. $\Omega_1 = \{Q,K,S \in \Omega_0 \mid (K,S) = 0\}$ – глобально асимптотически устойчивое инвариантное множество, $\dim\Omega_1 = 7$.

Рассмотрим систему (8) на множестве Ω_1. Рассмотрим функцию: $I_2 = (K,Q)\cdot e^{(\lambda+\mu)t}$ – неавтономный интеграл. $\Omega_2 = \{Q,K,S \in \Omega_1 \mid (K,Q) = 0\}$ – глобально асимптотически устойчивое инвариантное множество, являющееся подмножеством Ω_1, $\dim\Omega_2 = 6$.

Покажем, что Ω_2 также глобально асимптотически устойчивое инвариантное множество исходной системы. Действительно, проверим, удовлетворяют ли условиям следующей леммы функции $I_1 = (K,S)\cdot e^{(\mu-\nu)t}$ и $I_2 = (K,Q)\cdot e^{(\lambda+\mu)t}$.

Лемма 1: *Если для автономной системы* $\dot{x} = f(x)$ $x \in \Re^n$ $f \in \boldsymbol{C}^1$ *обыкновенных дифференциальных уравнений с гладкой правой частью, имеющей первый интеграл* $I_1(x,t) = g_1(x)e^{\lambda_1 t}$, $\lambda_1 > 0$, $g_1 \in \boldsymbol{C}^1$ *, а также подчиненный ему интеграл* $I_2(x,t) = g_2(x)e^{\lambda_2 t}$, $\lambda_2 > 0$, $g_2 \in \boldsymbol{C}^2$ *, найдется действительное число* $\alpha > 0$ *, такое, что функция*

$$\Phi_\alpha(x)=g_1^{-\alpha}(x)\left(\lambda_2 g_2(x)+\sum f_i(x)\frac{\partial g_2(x)}{x_i}\right)$$

является ограниченной на всяком решении системы при $t\to+\infty$ *, то множество* $\Omega_2=\{x\in\Re^n \,|\, I_1(x,t)=0,\ I_2(x,t)=0\}$ *является асимптотически устойчивым инвариантным множеством для системы.*

Положив $g_1=(K,S)$, $g_2=(K,Q)$, $\alpha=1$, получим функцию $\Phi_1=\chi_0+(\chi_1+\nu)(Q,S)$. Поскольку $|S|=1$, для ограниченности Φ_1 достаточно доказать ограниченность $|Q|$.

Утверждение 1. Значение $|Q|$ ограниченно на любой траектории системы (8).

Доказательство. Рассмотрим функцию $H=\frac{1}{2}|Q+J\,\delta\,S|^2$, отметим что

(9) $$\frac{1}{2}\left(|Q|-J\,|\delta|\right)^2\le H\le\frac{1}{2}\left(|Q|+J\,|\delta|\right)^2 .$$

Оценим значение производной функции H в силу системы (8):

$$\frac{dH}{dt}=-\lambda|Q|^2+\chi_1(Q,S)^2+\left(\chi_0-J\,\delta(\lambda-\chi_1)\right)(Q,S)+J\,\delta\,\chi_0,$$

отсюда получим:

(10) $$\frac{dH}{dt}\le-\tilde{\lambda}|Q|^2+\left|\chi_0-J\,\delta(\lambda-\chi_1)\right||Q|+J\,|\delta\,\chi_0|$$

где $\tilde{\lambda}=max(\lambda,\lambda-\chi_1)>0$.

Квадратичная функция $|Q|$ в правой части неравенства (10) неограниченно убывает при $|Q|\to\infty$, следовательно найдется Q_0, такое, что при всех Q, превосходящих Q_0 по модулю, функция H будет убывать. В то же время мы можем определить значение $\tilde{H}=\frac{1}{2}\left(|\tilde{Q}|+J\,|\delta|\right)^2$. Тогда из $H>\tilde{H}$ и неравенств (9) будет следовать, что $|Q|>|\tilde{Q}|$, а следовательно, $\frac{dH}{dt}<0$.

Получим, что функция H ограничена на траекториях системы (8) при $t \to +\infty$, и, снова используя неравенства (9), найдем, что $|Q|$ также ограничено, что завершает доказательство.

Итак, основываясь на лемме 1 и утверждении 1, мы можем утверждать, что множество Ω_2 является инвариантным и асимптотически устойчивым для системы (8). Продолжим исследование множества Ω_2.

Утверждение 2: Множество Ω_2 расслаивается на двумерный континуум инвариантных множеств:

(11) $\Omega_2 = \underset{n \in S^2}{U} \Omega_n$, где $\Omega_n = \{Q, K, S \mid (n, S) = 0,\ (n, Q) = 0,\ [n, K] = 0\}$.

Заметим, что $\dim \Omega_n = 4$.

Доказательство утверждения 2. Во-первых, покажем, что $\Omega_2 = \underset{n \in S^2}{U} \Omega_n$. Пусть точка фазового пространства $\{Q, K, S\}$ содержится в каком-нибудь множестве Ω_n, тогда выполнение условия $(K, Q) = 0$ очевидно. Обратно, если K, ненулевой вектор, то легко убедиться, что $\{Q, K, S\}$ будет принадлежать множеству Ω_n, где n – единичный вектор коллинеарный с K. Если K - нулевой вектор, то достаточно выбрать любой единичный n , такой, что $(n, Q) = 0$ и $(n, S) = 0$, что, очевидно, возможно при любых допустимых Q и S.

Во-вторых, докажем инвариантность Ω_n. Рассмотрим произвольный вектор $n \in S^2$. Пусть в некоторый момент времени t траектория $\{Q(t), K(t), S(t)\}$ имеет точку на множестве Ω_n, дифференцируя равенства, определяющие принадлежность точки множеству, для каждого получим тождественный нуль, а следовательно, сохранение их значений вдоль траектории, и, как следствие, принадлежность последней множеству Ω_n. Что и следовало доказать.

Замечание. Для всяких неколлинеарных n' и n' пересечение двух множеств $\Omega_{n'} \bigcap \Omega_{n''} = \{Q, K, S \mid [S[n', n'']] = 0,\ [Q[n', n'']] = 0,\ K = 0\}$, $\dim \Omega_{n'} \bigcap \Omega_{n''} = 1$.

Утверждение 3. Любые два множества $\Omega_{n'}$ и $\Omega_{n''}$, $n' \neq n''$ являются изоморфными в том смысле, что существует невырожденное линейное преобразование $\hat{D} : \Omega_{n'} \to \Omega_{n''}$, переводящее траекторию в траекторию, т.е. коммутирующее с фазовым потоком системы. Этот изоморфизм представляет собой преобразование поворота в Ω_2: $\hat{D} = \exp \hat{T}$, где $\hat{T}^{\mathsf{T}} = -\hat{T}$.

Таким образом, оказывается, что инвариантное множество, к которому сходятся все траектории системы, распадается на набор инвариантных подмножеств Ω_n, причем, к какому из них будет сходиться произвольная траектория решения, скажем, задачи Коши системы (8), будет зависеть только от начальных данных.

Рассмотрим сужение системы (8) на инвариантном множестве Ω_n для некоторого $n \in \mathrm{S}^2$. Можно выполнить замену переменных: $\{Q, K, S\} \to \{X, S\}$.

$$
\begin{aligned}
&x_1 = (K, n),\\
&x_2 = (Q, S, n),\\
&x_3 = (Q, S).
\end{aligned}
\tag{12}
$$

Тогда получим более простую систему:

$$
\begin{cases}
\dfrac{dX}{dt} = M + \hat{B} X + [X, \hat{A} X],\\
\dfrac{dS}{dt} = J^{-1} x_1 [n, S].
\end{cases}
\tag{13}
$$

Где:

$$
\begin{aligned}
&M = (0,\ 0,\ \chi_0),\\
&\hat{A} = diag(C + J^{-1},\ C,\ C), \quad \forall C > 0.
\end{aligned}
$$

$$\hat{B} = \begin{pmatrix} -\mu & \gamma & 0 \\ \delta & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & \chi_1 - \lambda \end{pmatrix}.$$

Первое уравнение отделяется от системы и может быть исследовано независимо:

(14) $$\frac{dX}{dt} = M + \hat{B}X + [X, \hat{A}X].$$

Следует отметить следующую аналогию: уравнения такого вида известны в механике как уравнения движение твердого тела в сопротивляющейся среде под действием постоянного момента сил. Они представляют собой известную систему Эйлера-Пуансо с добавлением постоянного момента и линейного трения [1, 2, 8]. При этом вектору X соответствует вектор кинетического момента, заданный в собственных осях, а диагональная матрица A – тензору инерции тела.

Примечательно, что из уравнений, выведенных для динамически симметричного тела – шара, замена (12) привела к системе аналогичной динамики твердого тела, эллипсоид инерции которого имеет только одну ось симметрии.

Перепишем последнее уравнение в компонентах:

(15) $$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = -\mu x_1 + \gamma x_2; \\ \dfrac{dx_2}{dt} = \delta x_1 - \lambda x_2 - J^{-1} x_1 x_3; \\ \dfrac{dx_3}{dt} = \chi_0 - (\lambda - \chi_1) x_3 + J^{-1} x_1 x_2. \end{cases}$$

У него всегда существует стационарное решение:

(16) $$X^0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \chi_0 (\lambda - \chi_1)^{-1} \end{pmatrix},$$

которое является единственным и глобально устойчивым, если

(17) $\Delta = \delta'\gamma - \lambda\mu \le 0$ где $\delta' = \delta - J^{-1}\chi_0(\lambda - \chi_1)^{-1}$.

Если в результате изменения какого-либо из параметров системы величина Δ меняет знак и становится положительной, то основной стационар теряет устойчивость и от него отщепляется пара стационарных решений; найдем условие, при котором они сохраняют устойчивость. Для этого удобно перейти в систему координат, в которой основное стационарное решение совпадает с началом координат. Итак, выполним замену переменных $Y = X - X^0$, тогда:

$$(18)\quad \begin{cases} \dfrac{dy_1}{dt} = -\mu y_1 + \gamma y_2; \\ \dfrac{dy_2}{dt} = \delta' y_1 - \lambda y_2 - J^{-1} y_1 y_3; \\ \dfrac{dy_3}{dt} = -(\lambda - \chi_1) y_3 + J^{-1} y_1 y_2. \end{cases}$$

Отметим, что сдвигом начала координат в неподвижную точку мы получили систему, которая отличается от известной системы Лоренца только значениями коэффициентов. Итак, основной стационар здесь $Y^0 = 0$, другая пара стационаров, отщепляющихся от него при $\Delta > 0$, может быть записана в виде:

$$(19)\quad Y^{1,2} = \begin{pmatrix} \pm \dfrac{J}{\mu}\sqrt{\mu(\lambda - \chi_1)(\delta'\gamma - \lambda\mu)} \\ \pm \dfrac{J}{\gamma}\sqrt{\mu(\lambda - \chi_1)(\delta'\gamma - \lambda\mu)} \\ \dfrac{J}{\gamma}(\delta'\gamma - \lambda\mu) \end{pmatrix}.$$

Чтобы найти условие устойчивости этих решений, рассмотрим матрицу Якоби:

$$(20)\quad \begin{pmatrix} -\mu & \gamma & 0 \\ \delta' - J^{-1} y_3 & -\lambda & -J^{-1} y_1 \\ J^{-1} y_2 & J^{-1} y_1 & -\lambda + \chi_1 \end{pmatrix}.$$

Характеристический многочлен для якобиевой матрицы в обеих точках $Y^{1,2}$ один и тот же:

$$-z^3 - (\mu + 2\lambda - \chi_1)z^2 - (\lambda - \chi_1)(\mu + \delta'\gamma/\mu)z - (\lambda - \chi_1)(\delta'\gamma - \lambda\mu).$$

Согласно критерию Гурвица найдем условие, при котором стационарные точки $Y^{1,2}$ устойчивы:

(21) $\mu^2(\mu+3\lambda-\chi_1)-\delta'\gamma(2\lambda-\chi_1)>0$.

Движение частиц

Какие типы траекторий изначально взятой шарообразной частицы соответствуют найденным решениям?

Если выполнено условие (17), имеет единственное асимптотически устойчивое стационарное решение X^0, то есть:

(22) $$\begin{pmatrix}(K,n)\\(Q,S,n)\\(Q,S)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\\chi_0(\lambda-\chi_1)^{-1}\end{pmatrix}.$$

Если при изменении параметров нарушается неравенство (17), но выполнено условие (21), неподвижная точка X^0 теряет устойчивость, и от нее отщепляется пара асимптотически устойчивых стационарных решений $X^{1,2}=Y^{1,2}+X^0$, то есть:

(23) $$\begin{pmatrix}(K,n)\\(Q,S,n)\\(Q,S)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\pm\frac{J}{\mu}\sqrt{\mu(\lambda-\chi_1)(\delta'\gamma-\lambda\mu)}\\\pm\frac{J}{\gamma}\sqrt{\mu(\lambda-\chi_1)(\delta'\gamma-\lambda\mu)}\\\frac{J}{\gamma}(\delta\gamma-\lambda\mu)\end{pmatrix}.$$

Мы также должны учесть то, что эти точки лежат на множестве $\Omega_n=\{Q,K,S\,|\,(n,S)=0,\ (n,Q)=0,\ [n,K]=0\}$. Получим, что решению X^0 соответствует траектория частицы, у которой кинетический момент $K=0$, вектор импульса Q параллелен вектору ориентации S оси симметрии частицы, то есть $Q=\left(\chi_0(\lambda-\chi_1)^{-1}\right)S$. Следовательно, эта асимптотика есть равномерное прямолинейное движение направление которого совпадает с направлением оси симметрии.

В случае общего положения в решениях $X^{1,2}$ все три компоненты отличны от нуля. С учетом равенств, справедливых на множестве Ω_n, получим, что этим двум стационарным решениям соответствует движение частицы с постоянным ненулевым кинетическим моментом $K=\left(\pm\frac{J}{\mu}\sqrt{\mu(\lambda-\chi_1)(\delta'\gamma-\lambda\mu)}\right)n$, векторы Q и S равномерно вращаются в ортогональной плоскости к вектору K, угловая скорость, соответственно, есть $J^{-1}|K|$, при этом угол между векторами Q и S сохраняется, его тангенс есть

$$\mathrm{tg}\ \varphi = \frac{\left(\sqrt{\mu(\lambda-\chi_1)(\delta'\gamma-\lambda\mu)}\right)}{(\delta\gamma-\lambda\mu)} ,$$

также постоянна абсолютная величина Q:

$$|Q|=\frac{J}{|\gamma|}\sqrt{\mu(\lambda-\chi_1)(\delta'\gamma-\lambda\mu)+(\delta\gamma-\lambda\mu)^2} .$$

Итак, можно установить вид еще двух асимптотик: стационарным решениям $X^{1,2}$ соответствует равномерное движение по круговым орбитам. Из найденных выше стационарных значений импульса и кинетического момента легко найти радиус этих орбит

$$|R|=\frac{2\pi J}{M}|\mu|\sqrt{1+\frac{(\delta\gamma-\lambda\mu)^2}{\mu(\lambda-\chi_1)(\delta'\gamma-\lambda\mu)}} .$$

Дополнение. Лемма 1.

Пусть система обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt} = f(x,t),\ x \in \Re^n$$

имеет неавтономный первый интеграл $I_1(x,t)$, т.е. для любого решения исходной системы $x(t)$ справедливо $I_1(x(t),t) \equiv const$.

Определение. *Пусть на некоторой поверхности уровня интеграла* $I_1(x,t) = I_{10}$ *верно, что некоторая другая функция* $I_2(x(t),t) \equiv const$, *при этом на других поверхностях уровня первого интеграла величина* $I_2(x(t),t)$, *вообще говоря, не обязана быть сохраняющейся величиной вдоль траекторий системы. Тогда* $I_2(x,t)$ *– интеграл системы, указанной выше, подчиненный интегралу* $I_1(x,t)$ *на уровне* I_{10}.

Замечание: в случае рассмотрения одного подчиненного интеграла без ограничения общности можно принять $I_{10}=0$.

Рассмотрим автономную систему обыкновенных дифференциальных уравнений:

(D1) $$\frac{dx}{dt} = f(x),\ x \in \Re^n$$

с непрерывно-дифференцируемой функцией в правой части. Пусть у нее имеется интеграл $I_1(x,t) = g_1(x)e^{\lambda_1 t}$, $\lambda_1 > 0$, и подчиненный ему интеграл $I_2(x,t) = g_2(x)e^{\lambda_2 t}$, $\lambda_2 > 0$, на уровне $I_1(x,t) = 0$, обозначим это множество $\Omega_1 = \{x \in \Re^n | I_1(x,t) = 0\}$. Предположим, $g_1(x)$ и $g_2(x)$ – независимые гладкие функции в $\Re^n$. Найдем, при каком условии пересечение нулевых уровней основного I_1 и подчиненного I_2 интегралов — множество $\Omega_2 = \{x \in \Re^n | I_1(x,t) = 0,\ I_2(x,t) = 0\}$, будет являться глобально асимптотически устойчивым инвариантным множеством системы (1) на всем пространстве $\Re^n$.

То, что это будет иметь место далеко не всегда, легко показать на следующем примере.

Пример 1. Рассмотрим систему обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\text{(D2)}\quad \begin{cases} \dot{x}_1 = -\lambda_1 x_1 \\ \dot{x}_2 = -\lambda_2 x_2 + x_1 x_3, \\ \dot{x}_3 = \lambda_3 x_3 \end{cases} \qquad \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 > 0 .$$

Функция $I_1(x,t) = x_1 e^{\lambda_1 t}$ является неавтономным первым интегралом этой системы, на нулевом уровне которого имеется подчиненный интеграл $I_2(x,t) = x_2 e^{\lambda_1 t}$. В силу положительности коэффициентов λ_1 и λ_2 множество $\Omega_1 = \{x \in \Re^n \mid x_1 = 0\}$ является устойчивым инвариантным многообразием системы (D2) в $\Re^n$, а $\Omega_2 = \{x \in \Re^n | I_1(x,t) = 0,\ I_2(x,t) = 0\}$ $\Omega_2 = \{x \in \Re^n \mid x_1 = x_2 = 0\}$ – устойчивым инвариантным многообразием сужения системы (2) на Ω_1. Однако, если рассмотрим общее решение системы при отсутствии резонанса $\lambda_1 \neq \lambda_2 + \lambda_3$:

$$\text{(D3)}\quad \begin{aligned} x_1 &= C_1 e^{-\lambda_1 t} \\ x_2 &= C_2 e^{-\lambda_2 t} + \frac{C_1 C_3}{-\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3} e^{(\lambda_3 - \lambda_1) t} \\ x_3 &= C_3 e^{\lambda_3 t} \end{aligned} .$$

Лемма 1. *Если для системы (D1), имеющей первый интеграл* $I_1(x,t) = g_1(x) e^{\lambda_1 t}$, $\lambda_1 > 0$, $g_1 \in \boldsymbol{C}^1$ *, а также подчиненный ему интеграл* $I_2(x,t) = g_2(x) e^{\lambda_2 t}$, $\lambda_2 > 0$, $g_2 \in \boldsymbol{C}^2$ *, найдется действительное число* $\alpha > 0$ *, такое, что функция*

$$\text{(D4)}\qquad \Phi_\alpha(x) = g_1^{-\alpha}(x)\left(\lambda_2 g_2(x) + \sum f_i(x) \frac{\partial g_2(x)}{x_i}\right)$$

является ограниченной на всяком решении системы при $t \to +\infty$*, то множество* $\Omega_2 = \{x \in \Re^n | I_1(x,t) = 0,\ I_2(x,t) = 0\}$ *является глобально асимптотически устойчивым инвариантным множеством для системы (D1).*

Отметим, что условие леммы является достаточным, но не необходимым. Это легко показать с помощью следующего примера:

Пример 2. Рассмотрим систему обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$
(\mathrm{D5})\quad \begin{cases} \dot{x}_1 = -x_{1,} \\ \dot{x}_2 = -x_2 + x_1 x_3 x_4^{\;2}, \\ \dot{x}_3 = x_{3,} \\ \dot{x}_4 = -x_4^{\;3}. \end{cases}
$$

Тогда $\Omega_1 = \{x \in \Re^4 \,|\, x_1 = 0\}$, $\Omega_2 = \{x \in \Re^4 \,|\, x_1 = x_2 = 0\}$, причем любая траектория системы (D5), в чем легко убедиться, непосредственно интегрируя систему, стремится к множеству $\Omega_2 = \{x \in \Re^4 \,|\, x_1 = x_2 = 0\}$. Однако функция $\Phi_\alpha(x)$ на произвольном решении системы (D5) имеет вид:

$$\Phi_\alpha(x) = \frac{C\,e^{\alpha t}}{C' + t}$$, где C и C' константы интегрирования,

и, соответственно, не является ограниченной ни при каких $\alpha > 0$.

Доказательство леммы. Покажем, что вдоль любой траектории системы (D1) функция $g_2(x(t)) \to 0$ при $t \to +\infty$. Рассмотрим производную этой функции по времени в силу системы (D1):

$$\frac{dg_2(x)}{dt} = \sum f_i(x) \frac{\partial g_2(x)}{\partial x_i} .$$

Используя определение функции $\Phi_\alpha(x)$, это выражение можно представить в виде:

$$\frac{dg_2(x)}{dt} = -\lambda_2 g_2(x) + g_1(x)^\alpha \Phi_\alpha(x) ,$$

Отсюда получим, что справедливо равенство:

$$\frac{d}{dt}\left(\mathrm{e}^{\lambda_2 t} g_2(x)\right) = \mathrm{e}^{\lambda_2 t} g_1(x)^\alpha \Phi_\alpha(x) ,$$

И удобное для проведения оценки представление для $g_2(x)$:

$$g_2(x) = A\,\mathrm{e}^{-\lambda_2 t} + \mathrm{e}^{-\lambda_2 t} \int_0^t \mathrm{e}^{\lambda_2 t'} g_1(x(t'))^\alpha \Phi_\alpha(x(t'))\,dt' .$$

Из условия ограниченности функции $\Phi_\alpha(x)$, то есть существования положительной константы M для любой траектории системы, такой что $|\Phi_\alpha(x)| \le M$, следует:

$$\left|g_2(x)\right| \le |A| \mathrm{e}^{-\lambda_2 t} + \mathrm{e}^{-\lambda_2 t} \int_0^t \mathrm{e}^{\lambda_2 t'} |B| \mathrm{e}^{-\alpha \lambda_1 t'} \left|\Phi_\alpha(x(t'))\right| dt' = |A| \mathrm{e}^{-\lambda_2 t} + M |B| \mathrm{e}^{-\lambda_2 t} \int_0^t \mathrm{e}^{(\lambda_2 - \alpha \lambda_1) t'} dt'$$

Где A и B – константы интегрирования. Отсюда как в случае $\lambda_2 \neq \alpha \lambda_1$

$$\left|g_2(x)\right| \le |A| \mathrm{e}^{-\lambda_2 t} + M |B| \left(\mathrm{e}^{-\alpha \lambda_1 t} - \mathrm{e}^{-\lambda_2 t}\right) \to 0 ,$$

так и в случае $\lambda_2 = \alpha \lambda_1$ получим

$$\left|g_2(x)\right| \le |A| \mathrm{e}^{-\lambda_2 t} + M |B| t\, \mathrm{e}^{-\lambda_2 t} \to 0 .$$

при $t \to +\infty$. Что доказывает утверждение леммы.

Замечание: для траекторий, лежащих внутри ограниченной области, возможна равномерная оценка экспоненциальной сходимости $g_2(x(t)) \to 0$ при $t \to +\infty$.

Литература

1. Арнольд В. И., Козлов В. В., Нейштадт А. И. Математические аспекты классической и небесной механики. – М: Едиториал УРСС, 2002. — 404с.
2. Арнольд В. И. Математические методы классической механики. – М: Едиториал УРСС, 2000. — 416с.
3. Батищева Я. Г. К выводу уравнений динамики твердого тела в газе, реагирующем с ним неоднородно по поверхности // ДАН, 2003, т.392, №5, с. 631-633.
4. Батищева Я. Г. О движении твердого тела в газе, реагирующем с его поверхностью. Вывод уравнений динамики // Препринты ИПМ им.М.В.Келдыша. 2003. № 18. С. 1-21.
5. Батищева Я. Г. Динамика твердого тела в газе, сорбирующемся на его поверхности // Препринты ИПМ им.М.В.Келдыша. 2003. № 69. С. 1-25.
6. Батищева Я. Г., Веденяпин В. В. Хемореактивное движение // Энциклопедия низкотемпературной плазмы (Серия Б). Том VII. Математическое моделирование в низкотемпературной плазме. - М., 2008.
7. Белецкий В. В., Яншин А. М., Влияние аэродинамических сил на вращательное движение спутников. – Киев: Наукова думка, 1984. — 188с.
8. Борисов А. В., Мамаев И. С. Динамика твердого тела. – Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2001. — 384с.
9. Веденяпин В. В., Батищева Я. Г., Мелихов И. В., Горбачевский А. Я., О движении твердого тела в химически активной среде // ДАН, 2003, т.392, №6, с. 758-760.
10. Гольдштейн Р. В., Городцов В. А. Механика сплошных сред Часть 1. – М.: Наука, Физматлит, 2000. — 256 с.
11. Гудман Ф., Вахман Г. Динамика рассеяния газа поверхностью. — М.: Мир, 1980. — 423 с.

12. Ландау Л.Д., Лифшиц Е. М. Теоретическая физика. В 10 т. Т VI Физическая кинетика. – М. ФИЗМАТЛИТ, 2001. — 736с.
13. Лихтенберг А., Либерман М. Регулярная и стохастическая динамика: Пер. с англ.– М.: Мир, 1984. — 528с.
14. Коган М. Н. Динамика разреженных газов. — М: «Наука», 1967.
15. Maxwell J. C. On Stresses in Rarified Gases arising from Inequalities of Temperature. // Philosophical transactions. 1879. Vol. 170. P. 231-256.
16. Мелихов И. В., Симонов Е. Ф., Ведерников А. А., Бердоносов С. С., Божевольнов В. Е., Хемореактивное движение твердых тел // Рус. Хим . Журнал, 1997, т 41, №3, с. 5 — 16.
17. Мелихов И. В., Симонов Е. Ф., Божевольнов В. Е. Закономерности движения твердых тел при топохимических реакциях. // Ж. Физ. Химии. 1998 т. 72, № 12, с. 2307 – 2314.
18. Черчиньяни К. Теория и приложение уравнения Больцмана. – М: "Мир", 1978. — 496 с.