ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 21 за 2015 г.

Сасоров П.В., Боброва Н.А.,
Ольховская О. Г.

Уравнения двухтемпературной магнитной гидродинамики плазмы с учетом ее замагниченности

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Сасоров П.В., Боброва Н.А., Ольховская О. Г. Уравнения двухтемпературной магнитной гидродинамики плазмы с учетом ее замагниченности // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2015. № 21. 18 с. URL: http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2015-21

О р д е н а   Л е н и н а
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М.В. Келдыша
Р о с с и й с к о й   а к а д е м и и   н а у к

П. В. Сасоров, Н. А. Боброва, О. Г. Ольховская

Уравнения двухтемпературной магнитной гидродинамики плазмы с учетом ее замагниченности

Москва — 2015

Сасоров П. В., Боброва Н. А., Ольховская О. Г.

Уравнения двухтемпературной магнитной гидродинамики плазмы с учетом ее замагниченности

Приведена система уравнений двухтемпературной магнитной гидродинамики с учетом ее замагниченности. Приведены явные формулы для вычисления всех 23 кинетических коэффициентов, определяющих выражения для диссипативных потоков, входящих в эти уравнения. Эти 2T-МГД уравнения включают в себя обобщенный закон Ома, учитывающий магнито-термо-электрические явления (в том числе эффекты Холла и Нернста-Эттингхаузена) и анизотропию проводимости. Аналогично представлено и выражение для диссипативного потока тепла. Рассмотрен вопрос о качественном учете неполной ионизации плазмы. Приведенная система уравнений адаптирована к использованию ее для численного моделирования 3D динамики плазмы в различных электрофизических и лазерных установках.

Ключевые слова: МГД уравнения, кинетические коэффициенты, частичная ионизация, неизотермическая плазма, анизотропная плазма, эффект Холла, эффект Нернста-Эттингхаузена, обобщенный закон Ома, термоэлектрические эффекты.

Pavel Vasilievich Sasorov, Nadejda Alexandrovna Bobrova, Olga Gourgenovna Olkhovskaya

The two-temperature equations of magnetic hydrodynamics of the plasma

System of two-temperature MHD equations is presented in this paper. The system takes into account magnetization of both its components (electron and ions). Explicit expressions for calculation of all 23 kinetic coefficients entering expressions for dissipative fluxes are presented also. These 2T-MHD equations apply generalized Ohm’s law that takes into account magneto-thermo-electric effects (including Hall and Nernst-Ettingshausen effects) and anisotropy of electric conduction. Electron thermal conduction is treated analogously. Partial ionization is also considered. This system of 2T-MHD equations is adapted to use it for 3D simulations of plasma dynamics in different pulsed power and laser facilities.

Key words: MHD equations, kinetic coefficients, partial ionization, two-temperature plasma, anisotropic plasma, Hall effect, Nernst-Ettingshausen effect, generalized Ohm’s law, thermoelectric effects.

Введение

В связи с проблемами развития энергетики [1] и микро- и наномасштабных технологий актуальными являются исследования нестационарных и неравновесных процессов в плотной импульсной плазме, создаваемой при воздействии на конденсированное вещество высокоинтенсивных потоков энергии. В настоящее время потоки энергии мультитераваттного уровня мощности создаются, например, генераторами электроимпульсов [2-5], а также короткоимпульсными лазерными установками [6, 7]. Математические модели воздействий такого рода описывают большую совокупность нелинейных и, вообще говоря, неравновесных радиационных и газодинамических процессов, для исследования которых необходимо развивать алгоритмы и программное обеспечение, ориентированные на современную многопроцессорную вычислительную технику. В данной области исследований имеется необходимость создания новых математических и компьютерных моделей для описания динамики плотной плазмы при наличии сильноточных разрядов и потоков лазерного и рентгеновского излучений. Потоки мягкого рентгеновского излучения могут генерироваться в плотной плазме. Это важно для приложений, ориентированных на использование интенсивных источников рентгеновского излучения, применяемых в исследованиях по инерционному термоядерному синтезу, рентгеновской диагностике и фотолитографии и т.д.

Часть важных физических процессов, играющих роль в процессе генерации и использовании плотной плазмы, имеют микроскопический и мезоскопический характер. Однако наиболее трудоемким является математическое описание макроскопической динамики плотной плазмы. Оно должно включать описание общей газодинамики таких объектов под воздействием внешних и собственных радиационных потоков и внешних потоков заряженных частиц с учетом воздействия токов и магнитных полей, в том числе и спонтанно генерируемых. Наиболее общей физической моделью, которая может использоваться для описания таких явлений, является радиационная магнитная гидродинамика (РМГД).

В основе РМГД лежит двухтемпературная магнитная гидродинамика (2Т - МГД), развитая в работах Брагинского [8] и обобщенная позднее на случай плазмы, состоящей из смеси элементов [10]. Эта физическая модель описывает газодинамику плазмы с учетом пондеромоторной силы Ампера и Джоулева нагрева. В ней учитываются возможность отрыва электронной температуры от ионной и замагниченность, как электронов, так и ионов. Уравнения (РМГД) должны быть дополнены материальными уравнениями, определяющими

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 15-01-06195-а.

давления и удельные энергии отдельных компонент плазмы, а также средний заряд ионов. Средний заряд ионов входит в выражения для довольно большого числа кинетических коэффициентов, присутствующих в РМГД. Задание уравнения состояния, включающего средний заряд ионов, полностью определяет 2Т-МГД модель. В настоящее время наиболее продвинутой с теоретической точки зрения моделью для уравнения состояния является квантово-статистическая модель, описанная в книге [11].

Для учета мощных потоков излучения в рассматриваемую физическую модель вводят соответствующие источники-стоки энергии в уравнение для удельной энергии электронной компоненты плазмы, а также вводят дополнительное уравнение переноса, определяющее мгновенное распределение плотности радиационной энергии как функции энергии фотонов, пространственных координат и локального направления движения фотонов. Такая модель динамики энергии излучения является классической, и она описана в книге [12]. После такого дополнения 2Т-МГД модель превращается в РМГД модель. Для ее полного определения недостает, однако, знания выражений для коэффициентов поглощения и излучения, как функций энергии кванта и температуры и плотности плазмы. Это может восполняться с помощью полного использования модели квантово-статистического равновесия плазмы [11], которая определяет и пробеги фотонов. Эти пробеги, как функции энергии квантов и температуры и плотности плазмы, определяют в ЛТР все оставшиеся материальные свойства плазмы.

Надо сказать, что описанная выше полная РМГД еще никогда не была реализована полностью в виде комплекса прикладных программ. Тем не менее мировым сообществом была проведена к данному времени огромная работа по реализации отдельных блоков РМГД. Одним из слабых мест современного развития в этой области прикладной математики является нереализованность к настоящему времени анизотропной 2Т-МГД (учитывающей в целом эффект Холла и термомагнитные процессы в замагниченной плазме) в трехмерном случае. Хотя имеется большое число работ, теоретически исследующих 2Т-МГД в различных предельных случаях, по-видимому, только в коде NPINCH [13] учтены все эффекты замагниченности плазмы. Однако этот код моделирует только одномерную цилиндрически симметричную геометрию плазменных течений с замкнутыми магнитными силовыми линиями. Трехмерная изотропная МГД модель без надлежащего учета замагниченности плазмы была реализована в данном контексте в серии программных продуктов. Мы упомянем тут следующие коды: ALEGRA [14,15], Gorgon [16], MARPLE-3D [17]. Все эти коды содержат учет переноса излучения (многогрупповая диффузионная модель, содержащая часто довольно большое число групп по энергии квантов – MARPLE-3D; многогрупповая квазидиффузионная модель и неявный метод Монте-Карло – ALEGRA; одногрупповая диффузионная модель – Gorgon). Эти коды с успехом использовались в целой серии расчетов для моделирования магнитного разгона и торможения флайеров, процесса сжатия плотных Z-пинчей и для других приложений. Существующий код MARPLE-3D разработан в ИПМ РАН и используется для расчетно-теоретического сопровождения экспериментов на установке АНГАРА-5-1 (ГНЦ РФ ТРИНИТИ) [18]. Известный двумерный код LASNEX долгие годы использовался для моделирования лазерных мишеней инерциального термоядерного синтеза. Он содержит весьма полный блок для переноса излучения, но в него не включена МГД модель, важная для многих приложений. В настоящее время развиваются сильно усовершенствованные версии кода LASNEX: ICF3D [19] и HYDRA [20]. Основной областью их приложений будет по-прежнему лазерный термоядерный синтез, и в них планируется создание МГД блока.

В настоящей работе будет сформулирована двухтемпературная магнитная гидродинамическая (2Т-МГД) модель для описания замагниченной плазмы с учетом возможного сильного отрыва электронной температуры от ионной, которая может быть положена в основу РМГД модели и программного комплекса для макроскопического описания динамики плазмы.

Основные уравнения движения плазмы

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathrm{div}\left(\rho \vec{V}_i\right) = 0 \tag{1}$$

$$\rho\left(\frac{\partial}{\partial t} + \left(\vec{V}_i \cdot \nabla\right)\right) V_{i\alpha} = -\frac{\partial\left(p_i + p_e\right)}{\partial x_\alpha} - \frac{\partial\left(\Pi_{i\alpha\beta} + \Pi_{e\alpha\beta}\right)}{\partial x_\beta} + \frac{1}{c}\left(\vec{j} \times \vec{B}\right)_\alpha \tag{2}$$

$$\rho\left(\frac{\partial}{\partial t} + \left(\vec{V}_e \cdot \nabla\right)\right)\varepsilon_e + p_e \mathrm{div}\vec{V}_e = -\mathrm{div}\,\vec{q}_e - \Pi_{e\alpha\beta}\frac{\partial V_{e\alpha}}{\partial x_\beta} + \vec{j}\cdot\vec{E}^* - Q_{ie} \tag{3}$$

$$\rho\left(\frac{\partial}{\partial t} + \left(\vec{V}_i \cdot \nabla\right)\right)\varepsilon_i + p_i \mathrm{div}\vec{V}_i = -\mathrm{div}\,\vec{q}_i - \Pi_{i\alpha\beta}\frac{\partial V_{i\alpha}}{\partial x_\beta} + Q_{ie} \tag{4}$$

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -c\,\mathrm{rot}\,\vec{E} \tag{5}$$

$$E_\alpha = -\frac{1}{en_e}\frac{\partial p_e}{\partial x_\alpha} - \frac{1}{en_e}\frac{\partial \Pi_{e\alpha\beta}}{\partial x_\beta} - \frac{1}{c}\left(\vec{V}_e \times \vec{B}\right)_\alpha + E^*_\alpha \tag{6}$$

$$\vec{V}_e = \vec{V}_i - \frac{\vec{j}}{en_e}; \qquad n_e = \frac{\rho}{m_i} Z\left(\rho, T_e\right) \tag{7}$$

$$\vec{j} = \frac{c}{4\pi} \operatorname{rot} \vec{B} \tag{8}$$

Независимыми переменными в этой системе уравнений в частных производных являются декартовые координаты (x,y,z) и время t. Основными зависимыми переменными, через которые выражаются все остальные, являются: плотность ρ, скорость плазмы $\vec{V}_i$, электронная и ионная температуры T_e и T_i и напряженность (индукция) магнитного поля $\vec{B}$. В эти уравнения входят также вспомогательные величины, которые выражаются через основные зависимые переменные:

- концентрация электронов: $n_e(\rho, T_e)$, определяемая уравнением (7), где Z – средний заряд ионов, определяемый (здесь) по ЛТР;
- давление ионов: $p_i(\rho, T_i)$ (для газа $p_i = \rho T_i / m_i$);
- давление электронов: $p_e(\rho, T_e) = n_e T_e$;
- удельная внутренняя энергия ионов: $\varepsilon_i(\rho, T_i)$ (для газа $\varepsilon_i = 3T_i / 2m_i$);
- удельная внутренняя энергия электронов: $\varepsilon_e(\rho, T_e)$ (в нее, кроме члена, аналогичного тому, что входит ε_i, входит и энергия ионизации);
- плотность электрического тока: $\vec{j}$, определяемая уравнением (8);
- «массовая» скорость электронов: $\vec{V}_e$, определяемая уравнением (7) (первой его частью);
- электрическое поле: $\vec{E}$.

Эта система уравнений записана в системе единиц СГС с постоянной Больцмана, равной 1. Мировые константы $e > 0$, c и т. п. будут выписаны ниже.

Диссипативные потоки: $\vec{\Pi}_e$, $\vec{\Pi}_i$, $\vec{E}^*$, $\vec{q}_e$, $\vec{q}_i$ и Q_{ie} будут определены ниже.

К этой системе уравнений надо дать пояснения. Уравнение (1) – это уравнение непрерывности для плотности плазмы (ионов в данном случае). Уравнение (2) – уравнение Эйлера, являющееся следствием локального сохранения импульса плазмы. Уравнения (3) и (4) – уравнения баланса тепла для ионов и электронов соответственно. Уравнение (6) – это уравнение Эйлера для электронной компоненты в пренебрежении инерцией электронного газа. Оно является также обобщенным законом Ома и служит для выражения электрического поля $\vec{E}$ через основные зависимые переменные. Уравнение (5) – уравнение индукции, одно из четырех уравнений Максвелла в его точной формулировке. Уравнение (8) – 1-е уравнение Максвелла в пренебрежении током смещения, что оправданно, когда движение плазмы нерелятивистское. Второе уравнение (7) – это следствие уравнения Максвелла $\operatorname{div} \vec{E} = 4\pi e (Zn_i - n_e)$ в пренебрежении его левой частью по сравнению с отдельными слагаемыми в его правой части. Это так называемое условие квазинейтральности, оправданное в пренебрежении массовой плотностью электронного газа и, соответственно, такими явлениями, как плазменные колебания и циклотронные волны.

Четвертое уравнение Максвелла $\mathrm{div}\,\vec{B} = 0$ формально ограничивает только возможные начальные условия.

Выражения для диссипативных потоков

Выражения для диссипативных потоков, как и кинетических коэффициентов, брались из наших работ [9,10]. Фактически они совпадают с теми, которые были получены Брагинским [8], за исключением коэффициентов для электронной вязкости. Кроме того, вместо таблиц для численных коэффициентов, зависящих от заряда ионов, в этих работах получены явные формулы (в так называемом двухполиномиальном приближении), которые совпадают в табличных точках с коэффициентами Брагинского, поскольку получены в том же приближении. Заметим также, что ионные коэффициентные функции выражены через электронные.

Электронный поток тепла

$$\vec{q}_e = -\kappa_\parallel^{(e)} \nabla_\parallel T_e - \kappa_\perp^{(e)} \nabla_\perp T_e - \kappa_\wedge^{(e)} \left(\vec{B} \times \nabla T_e\right) - \alpha_\parallel T_e \vec{j}_\parallel - \alpha_\perp T_e \vec{j}_\perp - \alpha_\wedge T_e \left(\vec{B} \times \vec{j}\right) \quad (9)$$

Омическая часть электрического поля

$$\vec{E}^* = -\alpha_\parallel \nabla_\parallel T_e - \alpha_\perp \nabla_\perp T_e - \alpha_\wedge \left(\vec{B} \times \nabla T_e\right) + \lambda_\parallel \vec{j}_\parallel + \lambda_\perp \vec{j}_\perp + \lambda_\wedge \left(\vec{B} \times \vec{j}\right) \quad (10)$$

Тензор электронной вязкости

$$\begin{aligned}
\Pi_{e\,\lambda\mu} = &-\eta_0^{(e)} \left(3 b_\lambda b_\mu - \delta_{\lambda\mu}\right)\left(b_\nu b_\sigma W_{\nu\sigma} - \frac{1}{3}\mathrm{div}\vec{V}_i\right) - \\
&-\eta_1^{(e)} \left(2W_{\lambda\mu} - \delta_{\lambda\mu}\,\mathrm{div}\vec{V}_i + \delta_{\lambda\mu} W_{\nu\sigma} b_\nu b_\sigma - 2W_{\lambda\nu} b_\nu b_\mu - 2W_{\mu\nu} b_\nu b_\lambda + b_\lambda b_\mu\,\mathrm{div}\vec{V}_i + b_\lambda b_\mu W_{\nu\sigma} b_\nu b_\sigma\right) - \\
&-2\eta_2^{(e)} \left(W_{\lambda\nu} b_\nu b_\mu + W_{\mu\nu} b_\nu b_\lambda - 2 b_\lambda b_\mu W_{\nu\sigma} b_\nu b_\sigma\right) - \\
&-\eta_3^{(e)} \left(W_{\lambda\nu} b_\nu b_\mu + W_{\mu\nu} b_\nu b_\lambda - W_{\nu\sigma} b_{\lambda\nu} b_\mu b_\sigma - W_{\nu\sigma} b_{\mu\nu} b_\lambda b_\sigma\right) - \\
&-2\eta_4^{(e)} \left(W_{\nu\sigma} b_{\lambda\nu} b_\mu b_\sigma + W_{\nu\sigma} b_{\mu\nu} b_\lambda b_\sigma\right)
\end{aligned} \quad (11)$$

Здесь:

$$W_{\lambda\mu} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial V_{i\lambda}}{\partial x_\mu} + \frac{\partial V_{i\mu}}{\partial x_\lambda}\right) - \frac{1}{3}\delta_{\lambda\mu}\frac{\partial V_{i\nu}}{\partial x_\nu}; \qquad \vec{b} = \frac{\vec{B}}{B}; \qquad b_{\lambda\mu} = e_{\lambda\mu\sigma} b_\sigma; \quad (12)$$

где $e_{\lambda\mu\nu}$ – полностью антисимметричный тензор, причем $e_{xyz} = 1$. Учет в выражении (11) отличия $\vec{V}_e$ от $\vec{V}_i$ есть превышение точности.

Ионный поток тепла

$$\vec{q}_i = -\kappa_{\parallel}^{(i)} \nabla_{\parallel} T_i - \kappa_{\perp}^{(i)} \nabla_{\perp} T_i - \kappa_{\wedge}^{(i)} \left(\vec{B} \times \nabla T_i \right) \tag{13}$$

Ионный тензор вязкости

$$\begin{aligned}
\Pi_{i\,\lambda\mu} = &-\eta_0^{(i)} \left(3 b_\lambda b_\mu - \delta_{\lambda\mu} \right) \left(b_\nu b_\sigma W_{\nu\sigma} - \frac{1}{3} \operatorname{div} \vec{V}_i \right) - \\
&-\eta_1^{(i)} \left(2W_{\lambda\mu} - \delta_{\lambda\mu} \operatorname{div} \vec{V}_i + \delta_{\lambda\mu} W_{\nu\sigma} b_\nu b_\sigma - 2W_{\lambda\nu} b_\nu b_\mu - 2W_{\mu\nu} b_\nu b_\lambda + b_\lambda b_\mu \operatorname{div} \vec{V}_i + b_\lambda b_\mu W_{\nu\sigma} b_\nu b_\sigma \right) - \\
&-2\eta_2^{(i)} \left(W_{\lambda\nu} b_\nu b_\mu + W_{\mu\nu} b_\nu b_\lambda - 2 b_\lambda b_\mu W_{\nu\sigma} b_\nu b_\sigma \right) - \\
&-\eta_3^{(i)} \left(W_{\lambda\nu} b_\nu b_\mu + W_{\mu\nu} b_\nu b_\lambda - W_{\nu\sigma} b_{\lambda\nu} b_\mu b_\sigma - W_{\nu\sigma} b_{\mu\nu} b_\lambda b_\sigma \right) - \\
&-2\eta_4^{(i)} \left(W_{\nu\sigma} b_{\lambda\nu} b_\mu b_\sigma + W_{\nu\sigma} b_{\mu\nu} b_\lambda b_\sigma \right)
\end{aligned} \tag{14}$$

Фактически выражения для ионной и электронной вязкостей в этом приближении отличаются только выражениями для коэффициентов.

Кинетические коэффициенты

Определения вспомогательных величин

Эффективная частота столкновений электронов:

$$\nu_e = \frac{4\sqrt{2\pi}}{3} \frac{e^4 Z^2 n_i \Lambda_{ei}}{\sqrt{m_e}\, T_e^{3/2}} \quad . \tag{15}$$

Здесь $m_e = 9{,}1094 \cdot 10^{-28}$ г – масса электрона, $e = 4{,}8032 \cdot 10^{-10}$ СГС – заряд электрона, а Λ_{ei} – кулоновский логарифм в электрон-ионном интеграле столкновений в форме Ландау. Все определения кулоновских логарифмов собраны в отдельном разделе ниже.

Гирочастота электронов:

$$\omega_{Be} = \frac{eB}{m_e c} \quad . \tag{16}$$

Здесь $c = 2{,}9979 \cdot 10^{10}$ см/с – скорость света.

Эффективный параметр замагниченности электронов:

$$x_e = \frac{\omega_{Be}}{\nu_e} \quad . \tag{17}$$

Эффективное отношение частот столкновений электронов с электронами и с ионами – обратный параметр лоренцевости электронной компоненты плазмы.

$$w = \frac{\Lambda_{ee}\, n_e}{\sqrt{2}\, z^2\, \Lambda_{ei}\, n_i} \quad . \tag{18}$$

Здесь Λ_{ee} – кулоновский логарифм в электрон-электронном интеграле столкновений в форме Ландау.

Эффективная частота столкновений ионов:

$$\nu_i = \frac{4\sqrt{\pi}}{3} \frac{e^4 Z^4 n_i \Lambda_{ii}}{\sqrt{m_i}\, T_i^{3/2}} , \tag{19}$$

где Λ_{ii} – кулоновский логарифм в ион-ионном интеграле столкновений в форме Ландау, а $m_i = A m_A$ – масса ионов. A – атомный вес химического элемента, из которого образована плазма. $m_A = 1{,}6605 \cdot 10^{-24}$ г – атомная единица массы.

Ионная гирочастота:

$$\omega_{Bi} = \frac{ZeB}{m_i c} \quad . \tag{20}$$

Параметр замагниченности ионной компоненты плазмы:

$$x_i = \frac{\omega_{Bi}}{\nu_i} \quad . \tag{21}$$

Кинетические коэффициенты для электронов

Коэффициенты электронной теплопроводности:

$$\begin{aligned} \kappa_{\parallel}^{(e)} &= \frac{n_e T_e}{m_e \nu_e} \Gamma_1(0, w) \\ \kappa_{\perp}^{(e)} &= \frac{n_e T_e}{m_e \nu_e} \Gamma_1(x_e, w) \\ \kappa_{\wedge}^{(e)} &= \frac{n_e T_e}{m_e \nu_e} \frac{e}{m_e c \nu_e} \Gamma_2(x_e, w) \end{aligned} \tag{22}$$

Коэффициентные функции вида $\Gamma_i(\chi, \varsigma)$ (i = 1,2,…) будут определены ниже.

Коэффициенты в термосиле:

$$\alpha_{\parallel} = \frac{1}{e}\Gamma_3\left(0, w\right)$$
$$\alpha_{\perp} = \frac{1}{e}\Gamma_3\left(x_e, w\right) \tag{23}$$
$$\alpha_{\wedge} = \frac{1}{m_e c \nu_e}\Gamma_4\left(x_e, w\right)$$

Коэффициенты удельного сопротивления:

$$\lambda_{\parallel} = \frac{m_e \nu_e}{e^2 n_e}\left(1 - \Gamma_5\left(0, w\right)\right)$$
$$\lambda_{\perp} = \frac{m_e \nu_e}{e^2 n_e}\left(1 - \Gamma_5\left(x_e, w\right)\right) \tag{24}$$
$$\lambda_{\wedge} = \frac{1}{ecn_e}\Gamma_6\left(x_e, w\right)$$

Коэффициенты электронной вязкости:

$$\eta_0^{(e)} = \frac{n_e T_e}{\nu_e}\Gamma_8\left(0, w\right)$$
$$\eta_1^{(e)} = \frac{n_e T_e}{\nu_e}\Gamma_8\left(2x_e, w\right) \tag{25}$$
$$\eta_2^{(e)} = \frac{n_e T_e}{\nu_e}\Gamma_8\left(x_e, w\right)$$

$$\eta_3^{(e)} = 2x_e \frac{n_e T_e}{\nu_e}\Gamma_9\left(2x_e, w\right)$$
$$\eta_4^{(e)} = x_e \frac{n_e T_e}{\nu_e}\Gamma_9\left(x_e, w\right) \tag{26}$$

Кинетические коэффициенты для ионов

Коэффициенты ионной теплопроводности:

$$\begin{aligned} \kappa_{\parallel}^{(i)} &= \frac{n_i T_i}{m_i \nu_i} \hat{\Gamma}_1(0) \\ \kappa_{\perp}^{(i)} &= \frac{n_i T_i}{m_i \nu_i} \hat{\Gamma}_1(x_i) \\ \kappa_{\wedge}^{(i)} &= -\frac{n_i T_i}{m_i \nu_i} \frac{Ze}{m_i c \nu_i} \hat{\Gamma}_2(x_i) \end{aligned} \tag{27}$$

Коэффициентные функции вида $\hat{\Gamma}_i(\chi)$ (i = 1,2,…) будут определены ниже.

Коэффициенты ионной вязкости:

$$\begin{aligned} \eta_0^{(i)} &= \frac{n_i T_i}{\nu_i} \hat{\Gamma}_8(0) \\ \eta_1^{(i)} &= \frac{n_i T_i}{\nu_i} \hat{\Gamma}_8(2x_i) \\ \eta_2^{(i)} &= \frac{n_i T_i}{\nu_i} \hat{\Gamma}_8(x_i) \end{aligned} \tag{28}$$

$$\begin{aligned} \eta_3^{(i)} &= -2x_i \frac{n_i T_i}{\nu_i} \hat{\Gamma}_9(2x_i) \\ \eta_4^{(i)} &= -x_i \frac{n_i T_i}{\nu_i} \hat{\Gamma}_9(x_i) \end{aligned} \tag{29}$$

Определения коэффициентных Г-функций

Входящие в определения кинетических коэффициентов для ионов и электронов функции Γ и $\hat{\Gamma}$ вычислены в работах [9] и [10] в так называемом двухполиномиальном приближении. В таком же приближении часть этих функций для некоторого тощего дискретного множества значений второго аргумента вычислялась ранее в работе Брагинского [8]. В этом приближении эти функции, зависящие в общем виде от параметра замагниченности χ и параметра лоренцевости ζ, являются рациональными функциями от этих аргументов. Они являются отношениями двух полиномов от χ и ζ.

Коэффициенты этих полиномов – это просто числа, которые определены ниже. Важно, что функции $\hat{\Gamma}$ определяются через функции Г.

Итак:

$$\Gamma_i(\chi,\varsigma)=\frac{\Gamma_{i,1}(\varsigma)\chi^2+\Gamma_{i,2}(\varsigma)}{\chi^4+\Gamma_{J(i),1}(\varsigma)\chi^2+\left(\Gamma_{J(i),2}(\varsigma)\right)^2}\quad, \tag{30}$$

где

$$J(i)=\begin{cases}7 & \text{при}\quad i=1,2,...,6\\ 10 & \text{при}\quad i=8,9\end{cases} \tag{31}$$

и

$$\Gamma_{i,j}(\varsigma)=\Gamma_{i,j}^3\,\varsigma^3+\Gamma_{i,j}^2\,\varsigma^2+\Gamma_{i,j}^1\,\varsigma+\Gamma_{i,j}^0\,. \tag{32}$$

Числа $\Gamma_{i,j}^k$ приведены в таблице с тремя значащими цифрами. Их точные значения (в двухполиномиальном приближении) приведены в работе [9]. Данная таблица взята из работы [10].

$\hat{\Gamma}$-функции, входящие в ионные кинетические коэффициенты, помечаемые шляпками, определяются следующим образом через соответствующие электронные функции:

$$\hat{\Gamma}_i(\chi)=\begin{cases}\lim\limits_{W\to\infty}W\,\Gamma_i(W\chi,W)=\dfrac{\Gamma_{i,1}^1\,\chi^2+\Gamma_{i,2}^3}{\chi^4+\Gamma_{J(i),1}^2\,\chi^2+\left(\Gamma_{J(i),2}^2\right)^2} & \text{при } i=1,8\\ \lim\limits_{W\to\infty}W^2\,\Gamma_i(W\chi,W)=\dfrac{\Gamma_{i,1}^1\,\chi^2+\Gamma_{i,2}^3}{\chi^4+\Gamma_{J(i),1}^2\,\chi^2+\left(\Gamma_{J(i),2}^2\right)^2} & \text{при } i=2,9\end{cases} \tag{33}$$

Они зависят только от одного аргумента, который определяет степень замагниченности.

Таблица 1

Значения численных коэффициентов $\Gamma_{i,j}^{k}$, входящих в определение (32)

i	*j = 1*				*j = 2*			
	$k = 0$	$k = 1$	$k = 2$	$k = 3$	$k = 0$	$k = 1$	$k = 2$	$k = 3$
1	3,25	2	0	0	1,20	7,67	8,73	2,64
2	2,50	0	0	0	10,2	12,9	4,65	0
3	3,80	1,84	0	0	0,146	1,21	2,61	1,06
4	1,50	0	0	0	0,877	2,05	1,45	0
5	4,63	2,52	0	0	0,0678	0, 696	1,95	0,846
6	1,70	0	0	0	0,0940	0,444	0,744	0
7	7,48	8,42	2,70	0	0,31	1,73	0,823	0
8	1,20	1,20	0	0	1,20	4,96	6,00	2,23
9	1	0	0	0	3,05	5,19	2,38	0
10	5,41	9,0	4,05	0	0,823	2,58	1,53	0

Теплообмен между ионами и электронами

Темп передачи энергии от электронов к ионам Q_{ie} (и наоборот) входит в оба уравнения тепла, (3) и (4), правда, с разными знаками. Для него используется следующее выражение:

$$Q_{ie} = 3\frac{m_e}{Am_A} n_e \nu_e \left(T_e - T_i\right). \tag{34}$$

Кулоновские логарифмы

Надо выписать выражения для электрон-электронных, электрон-ионных и ион-ионных кулоновских логарифмов.

$$z_1 = \begin{cases} Z & \text{при} \quad z \geq 1 \\ 1 & \text{при} \quad z \leq 1 \end{cases} \tag{35}$$

$$\Lambda_{ei} = \begin{cases} \Lambda_{ei}^{*} & \text{при} \quad \Lambda_{ei}^{*} \geq 1 \\ 1 & \text{при} \quad \Lambda_{ei}^{*} \leq 1 \end{cases} \tag{36}$$

$$\Lambda_{ei}^{*} = \frac{1}{2}\ln\frac{9}{4\pi}\frac{e^{-6}Am_A T_e^3}{\rho z\left(1+z_1 T_e/T_i\right)\left(z_1^2+3T_e/\left(8\,\mathrm{Ry}\right)\right)} \tag{37}$$

$$\Lambda_{ee} = \begin{cases} \Lambda_{ee}^{*} & \text{при} \quad \Lambda_{ee}^{*} \ge 1 \\ 1 & \text{при} \quad \Lambda_{ee}^{*} \le 1 \end{cases} \tag{38}$$

$$\Lambda_{ee}^{*} = \frac{1}{2}\ln\frac{9}{16\pi}\frac{e^{-6}Am_A T_e^3}{\rho Z\left(1+3T_e/\left(8\,\mathrm{Ry}\right)\right)} \tag{39}$$

$$\Lambda_{ii} = \begin{cases} \Lambda_{ii}^{*} & \text{при} \quad \Lambda_{ii}^{*} \ge 1 \\ 1 & \text{при} \quad \Lambda_{ii}^{*} \le 1 \end{cases} \tag{40}$$

$$\Lambda_{ii}^{*} = \frac{1}{2}\ln\frac{9}{16\pi}\frac{e^{-6}A^2 m_A T_i^2 T_e}{\rho Z\left(1+z_1 T_e/T_i\right)\left(Az_1^4+3m_e T_i/\left(8m_A\,\mathrm{Ry}\right)\right)} \tag{41}$$

$\mathrm{Ry} = 2{,}1796\cdot 10^{-11}$ эрг.

Учет частичной ионизации плазмы в кинетических коэффициентах

При частичной ионизации плазмы, когда средний заряд ионов z становится меньшим 1, формулы для кинетических коэффициентов, использующие понятие среднего иона, должны быть изменены, так как реальный заряд ионов не становится меньшим 1. Кроме того, при достаточно малой степени ионизации в игру вступают столкновения с нейтральными атомами. Приближенный учет нейтралов, качественно верно описывающий переход к нейтральному газу, разработан в рамках предложенной выше схемы в работах [13, 21]. Он использовался в коде PICA [21] и в NPINCH [22].

Кинетические коэффициенты электронной компоненты

Кроме средней степени ионизации Z вводятся величины z_1 (определение см. выше), характеризующая реальный заряд ионов, и z_2

$$z_2 = Z + \frac{\left(1-Z\right)\theta\left(1-Z\right)}{4\Lambda_{ei}}\frac{T_e^2}{T_e^2+\left(8\,\mathrm{Ry}/3\right)^2} \quad , \tag{42}$$

описывающая вклад столкновений электронов с нейтралами в полную частоту столкновений электронов с тяжелыми частицами.

Параметр w и частота столкновений ν_e переопределяются тогда так:

$$w = \frac{\Lambda_{ee} Z}{\sqrt{2}\Lambda_{ei} z_1 z_2} \quad , \tag{43}$$

$$\nu_e = \frac{4\sqrt{2\pi}}{3} \frac{e^4 z_1 z_2 \rho \Lambda_{ei}}{m_i \sqrt{m_e} T_e^{3/2}} . \tag{44}$$

Кулоновские логарифмы не зависят от частот столкновений, а форма записи их в разделе *«Кулоновские логарифмы»* уже учитывает то, что заряд ионов не может быть меньше 1. Поэтому эти выражения для кулоновских могут быть использованы и в настоящем случае.

Выражения для x_e, всех кинетических коэффициентов, Г-факторов остаются теми же самыми с учетом замены выражений для ν_e и w на их значения, определяемые выражениями (43) и (44). Укажем только для определенности, что n_e должно быть заменено на $z\rho/m_i$, как и раньше.

Кинетические коэффициенты ионной компоненты

До сих пор нам не встречались задачи, где существенны диссипативные процессы в ионной компоненте плазмы при наличии частичной ионизации. Поэтому мы приведем здесь простейший способ учета неполной ионизации в диссипативных свойствах тяжелой компоненты плазмы. Мы будем считать, что нейтралы при столкновении друг с другом и с ионами ведут себя точно так же, как и однократно ионизованные ионы. Тогда учет неполной ионизации сведется к тому, что Z в формулах (19), (20), (27) заменяется на z_1, а плотность n_i, заменяется во всех формулах, куда она входит, на $z_1\rho/m_i$.

Заключение

В настоящей работе сформулирована двухтемпературная магнитная гидродинамическая (2Т-МГД) модель для описания динамики плазмы. Эта модель подразумевает описание замагниченной плазмы с учетом возможного сильного отрыва электронной температуры от ионной. Замагниченность означает, что все кинетические коэффициенты анизотропны и учтены все существенные эффекты двужидкостности плазмы, такие, например, как эффекты Холла, Нернста, Эттингхаузена и другие. Так определенная 2Т-МГД модель для трехмерных конфигураций плазмы до сих пор еще не была реализована в виде комплекса прикладных программ. Авторы настоящей работы предполагают внедрить обсуждаемую модель в существующий и уже достаточно хорошо апробированный код трехмерного плазмодинамического моделирования MARPLE. К настоящему времени в этом коде частично реализована модель с обобщенным законом Ома, включая влияние эффекта Холла и термо-эдс [23]. Эффективная реализация расчетного алгоритма выполнена путем обобщения полуявной аппроксимации уравнения закона Ома, обсуждавшейся ранее в работах [24-26]. Для замыкания всей РМГД модели будут использоваться параметры уравнения состояния плазмы (удельная энергия, давление и средний заряд ионов) и спектральные пробеги фотонов как функции их энергии и плотности и температуры плазмы. Эти же параметры через средний заряд ионов будут определять все 23 кинетических коэффициента плазмы. Кроме того, спектральные пробеги фотонов определяют дополнительные локальные источники-стоки в уравнении (3) для баланса энергии электронов дополнительно к слагаемому, определяемому омическим нагревом, в то время как для спектральной плотности энергии фотонов имеется та или иная модель переноса [12].

Литература

1. Ядерный синтез с инерционным удержанием. Современное состояние и перспективы для энергетики / Под ред. Б.Ю. Шаркова. – М. : ФИЗМАТЛИТ, 2005. – 264 с. – ISBN 5-9221-0619-8.
2. Cuneo M.E. Zero-dimensional energetics scaling models for z-pinch-driven hohlraums / M.E. Cuneo [et al.] // Laser and Particle Beams. – 2001. – Vol. 19. – P. 481.
3. Olson C. Development Path for Z-pinch Inertial Fusion Energy / C. Olson [et al.] // Fusion Science and Technology. – 2005. – Vol. 47. – P. 633.
4. Haines M. G. A review of the dense Z-pinch // Plasma Physics and Controlled Fusion. – 2011. – Vol. 53. – P. 093001.
5. Slutz S. A. High-Gain Magnetized Inertial Fusion / S. A. Slutz [et al.] // Physical Review Letters. – 2012. – Vol. 108. – P. 025003.
6. Lindl J. D. Development of the indirect-drive approach to inertial confinement fusion and the target physics basis for ignition and gain // Physics of Plasmas. – 1995. – Vol. 2. – P. 3933.
7. Lindl J. Review of the National Ignition Campaign 2009-2012 / J. Lindl [et al.] // Physics of Plasmas. – 2014. – Vol. 21. – P. 020501.
8. Брагинский С.И. Явление переноса в плазме // Вопросы теории плазмы / Под ред. М.А. Леонтовича – М. : Госатомиздат, 1963. Вып. 1. С. 183-272.
9. Боброва Н.А. МГД уравнения для полностью ионизованной плазмы сложного состава / Н.А. Боброва [и др.] // Физика плазмы. – 1993. – Т. 19, – с. 789.
10. Bobrova N.A. Magnetohydrodynamic two-temperature equations for multicomponent plasma / N.A. Bobrova [et al.] // Physics of Plasmas. – 2005. Vol. 12. – 022105.
11. Никифоров А.Ф., Новиков В.Г., Уваров В.Б. Квантово-статистические модели высокотемпературной плазмы. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2000.
12. Mihalas D., Mihalas B. W. Foundations of radiation hydrodynamics. –NY.: Oxford University Press, 1984.
13. Bobrova N.A. MHD simulations of plasma dynamics in pinch discharges in capillary plasmas / N.A. Bobrova [et al.] // Laser and particle beams. – 2005. – Vol. 18. – 623.

14. Lemke R.W. Self-consistent, two-dimensional, magnetohydrodynamic simulations of magnetically driven plates / R.W. Lemke [et al.] // Physics of Plasmas. – 2003. – Vol. 10. – 1867.
15. Yu E. P. Three-dimensional effects in trailing mass in the wire-array Z pinch / E. P. Yu [et al.] // Physics of Plasmas. – 2008. – Vol. 15. – 056301.
16. Chittenden J. P. Equilibrium flow structures and scaling of implosion trajectories in wire array Z pinches / J. P. Chittenden [et al.] // Physics of Plasmas. – 2004. – Vol. 11. – 1118.
17. Гасилов В. А. Пакет прикладных программ MARPLE3D для моделирования на высокопроизводительных ЭВМ импульсной магнитоускоренной плазмы / В. А. Гасилов [и др.] // Математическое моделирование. – 2004. – Т. 24, №1. – С. 55–87.
18. Троицкий институт инновационных и термоядерных исследований: Об институте. Режим доступа: http://www.triniti.ru/About_Institute.html
19. Shestakov A. I. The radiation-hydrodynamic ICF3D code / A. I. Shestakov [et al.] // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. – 2000. Vol. 187. – P. 181–200.
20. Bulletin of the American Physical Society. http://meetings.aps.org/Meeting/DPP13/Session/TP8.77
21. Esaulov A. MHD simulations of fast hollow cathode capillary discharge / A. Esaulov [et al.] // Plasma Phys. Control. Fusion – 2000 – V. 43 – p. 571.
22. Bobrova N.A. Laser-heater assisted plasma channel formation in capillary discharge waveguides / N.A. Bobrova [et al.] // Phys. of Plasmas – 2013. –V. 20. – 020703.
23. Багдасаров Г. А. Экспериментальные и численные исследования динамики плазмы в плазменном прерывателе тока на основе взрыва проволочки / Г. А. Багдасаров [и др.] // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. 2012. № 56. 16 с. URL: http://keldysh.ru/papers/2012/prep2012_56.pdf
24. Harned D. S. and Mikic Z. J. Semi-implicit hall mhd. // J. Comput. Phys., 83(1):1–15, 1989.
25. Harned D. S. and Schnack D. D. Semi-implicit method for long time scale magnetohydrodynamic computations in three dimensions. // J. Comput. Phys., 65(1):57–70, 1986.
26. Shumlak U., Jones O. S. and Eberhardt D. S. An implicit scheme for nonideal magnetohydrodynamics. // J. Comput. Phys., 130(1):231–242, 1997.

Оглавление