



ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 22 за 2015 г.



ISSN 2071-2898 (Print)  
ISSN 2071-2901 (Online)

Овчинников М. Ю., Ролдугин Д. С.

Движение спутника с  
двойным вращением в  
магнитном и  
гравитационном полях

**Рекомендуемая форма библиографической ссылки:** Овчинников М. Ю., Ролдугин Д. С. Движение спутника с двойным вращением в магнитном и гравитационном полях // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2015. № 22. 23 с.

URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2015-22>

**Ордена Ленина  
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ  
имени М.В. Келдыша  
Российской академии наук**

**М.Ю. Овчинников, Д.С. Ролдугин**

**Движение спутника с двойным вращением  
в магнитном и гравитационном полях**

**Москва — 2015**

**Овчинников М.Ю., Ролдугин Д.С.**

Движение спутника с двойным вращением в магнитном и гравитационном полях

Рассматривается спутник, оснащенный магнитной системой ориентации и тангажным маховиком. Исследуется быстродействие системы в переходном режиме. Находятся приближенные значения характеристических показателей Ляпунова. В установившемся режиме гравитационной ориентации рассматриваются малые движения в окрестности положения равновесия. Исследуется точность ориентации. Исследуется алгоритм произвольной, но заданной ориентации спутника в плоскости орбиты. Проводится численное моделирование.

**Ключевые слова:** магнитная система ориентации, тангажный маховик

**Mikhail Ovchinnikov, Dmitry Roldugin**

Dual-spin satellite angular motion in magnetic and gravitational fields

Attitude motion of a satellite equipped with single flywheel and active magnetic attitude control system is considered. Time-response of the system in transient mode is studied. Characteristic exponent approximations values are obtained. Small steady-state motion near the gravitational attitude is considered. Accuracy and time-response is studied. An algorithm of arbitrary but given attitude in the orbital plane is proposed and studied. Numerical analysis is carried out.

**Key words:** magnetic attitude control system, flywheel, dual spin

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ № 14-11-00621.

## Содержание

Введение .....	3
1. Постановка задачи .....	4
2. Переходные процессы .....	5
3. Номинальный режим гравитационной ориентации .....	13
4. Номинальный режим произвольной ориентации .....	19
Заключение .....	22
Библиография .....	23

## Введение

Магнитные системы активно применяются для ориентации и стабилизации малых спутников. Основной проблемой, возникающей при их использовании, является принципиальная невозможность создания любого заданного по направлению механического момента (возникает неуправляемость). В настоящей работе рассматривается спутник, оснащенный дополнительно тангажным маховиком (спутник с двойным вращением). Такой маховик может иметь большую скорость вращения и/или большую массу, а значит, большой кинетический момент, который в ходе его функционирования предполагается неизменными. Наличие тангажного маховика с большим кинетическим моментом позволяет использовать тот же принцип, что и для спутника, стабилизируемого вращением. В этом случае в инерциальном пространстве в отсутствие внешних моментов сохраняется ориентация оси вращения маховика. При движении в гравитационном поле оказывается устойчивым положение, при котором ось маховика перпендикулярна плоскости орбиты. Детально вопрос устойчивости спутника, оснащенного тангажным маховиком, рассмотрен, например, в [1] и [2]. Вводя в систему диссипацию энергии, можно добиться асимптотически устойчивой ориентации оси вращения маховика перпендикулярно плоскости орбиты. В качестве механизма диссипации энергии могут быть применены пассивные демпфирующие устройства [3]. Однако, возникает проблема ориентации спутника в плоскости орбиты. Для этого может быть использован гравитационный момент, что обеспечит при правильном выборе параметров спутника его устойчивость в режиме гравитационной ориентации. Но гравитационный момент в случае спутника с соизмеримыми между собой главными моментами инерции может оказаться слабее возмущающих моментов. Кроме того, может потребоваться ориентация какой-либо оси спутника произвольным образом в плоскости орбиты. Например, для проведения орбитальных маневров может оказаться необходимым выставить ось расположения двигательной установки определенным образом в плоскости орбиты, или же может потребоваться съемка определенной части поверхности Земли. Для обеспечения произвольной ориентации в этой плоскости, равно как и ориентации оси расположения маховика по нормали к плоскости орбиты, может быть использована магнитная система.

В настоящей работе сначала исследуется переходный режим, при котором система ориентации обеспечивает демпфирование начальной угловой скорости. Тангажный маховик при этом считается уже раскрученным до номинальной

угловой скорости. Заметим, что начальная скорость может возникнуть как при отделении от ракеты-носителя, так и при раскрутке маховика. В работе найдены приближенные значения характеристических показателей Ляпунова линеаризованных уравнений движения, что позволяет оценить быстродействие системы ориентации. В номинальном режиме исследуется точность гравитационной ориентации. Рассматривается алгоритм разворота спутника в плоскости орбиты в произвольном направлении, используемый совместно с алгоритмом демпфирования угловой скорости спутника. Работа призвана заменить [4], в которой авторами был допущен ряд ошибок.

## 1. Постановка задачи

Рассматривается движение спутника – твердого тела вокруг центра масс по круговой околоземной орбите в дипольном магнитном поле. Спутник оснащен тангажным маховиком (маховик с постоянной скоростью вращения) и тремя взаимно перпендикулярными магнитными катушками в качестве исполнительных элементов. Катушки создают любой по направлению, но ограниченный по величине момент. Текущая ориентация предполагается известной.

В работе используются две системы координат:

- орбитальная система  $OX_1X_2X_3$ , где  $O$  – центр масс спутника, ось  $OX_3$  направлена по радиус-вектору,  $OX_2$  по нормали к плоскости орбиты,  $OX_1$  дополняет систему до правой (в случае круговой орбиты направлена вдоль вектора скорости поступательного движения спутника);

- связанная система  $Ox_1x_2x_3$ , ее оси совпадают с главными центральными осями инерции спутника.

Ориентация спутника описывается с помощью самолетных углов  $\alpha, \beta, \gamma$  (последовательность поворотов 2-3-1) и компонент абсолютной  $(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$  или относительной  $(\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3)$  угловой скорости. В случае проведения численного моделирования вместо углов ориентации используется кватернион. Для выбранной последовательности поворотов матрица перехода от орбитальной системы к связанной имеет вид

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \cos \alpha \cos \beta & \sin \beta & -\sin \alpha \cos \beta \\ -\cos \alpha \sin \beta \cos \gamma + \sin \alpha \sin \gamma & \cos \beta \cos \gamma & \sin \alpha \sin \beta \cos \gamma + \cos \alpha \sin \gamma \\ \sin \alpha \cos \gamma + \cos \alpha \sin \beta \sin \gamma & -\cos \beta \sin \gamma & -\sin \alpha \sin \beta \sin \gamma + \cos \alpha \cos \gamma \end{pmatrix}. \quad (1.1)$$

Динамические уравнения движения спутника с тензором инерции  $\mathbf{J} = \text{diag}(A, B, C)$  в связанных осях представлены в виде

$$\mathbf{J} \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{J}\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{h} = \mathbf{M}_{ep} + \mathbf{M}_{ynp}, \quad (1.2)$$

где  $\mathbf{h} = (0, h, 0)$  – кинетический момент тангажного маховика,  $\mathbf{M}_{ep}, \mathbf{M}_{ynp}$  – гравитационный и управляющий магнитный моменты. Абсолютная угловая скорость аппарата  $\boldsymbol{\omega}$  связана с относительной  $\boldsymbol{\Omega}$  соотношением

$$\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\Omega} + \mathbf{A}\boldsymbol{\omega}_{orb},$$

где  $\boldsymbol{\omega}_{orb} = (0, \omega_0, 0)$  – угловая скорость вращения орбитальной системы координат при движении спутника по круговой орбите. Динамические уравнения для относительной угловой скорости записываются в виде

$$\mathbf{J} \frac{d\boldsymbol{\Omega}}{dt} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{J}\boldsymbol{\Omega} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{h} = -\mathbf{A}\boldsymbol{\omega}_{orb} \times \mathbf{h} + \mathbf{M}_{omn} + \mathbf{M}_{ep} + \mathbf{M}_{ynp}, \quad (1.3)$$

где  $\mathbf{M}_{omn} = -\mathbf{J}\mathbf{W}\mathbf{A}\boldsymbol{\omega}_{orb} - \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{J}\mathbf{A}\boldsymbol{\omega}_{orb} - \mathbf{A}\boldsymbol{\omega}_{orb} \times \mathbf{J}(\boldsymbol{\Omega} + \mathbf{A}\boldsymbol{\omega}_{orb})$ ,

$$\mathbf{W} = \begin{pmatrix} 0 & \Omega_3 & -\Omega_2 \\ -\Omega_3 & 0 & \Omega_1 \\ \Omega_2 & -\Omega_1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Динамические уравнения дополняются кинематическими соотношениями

$$\begin{aligned} \frac{d\alpha}{dt} &= \frac{1}{\cos \beta} (\Omega_2 \cos \gamma - \Omega_3 \sin \gamma), \\ \frac{d\beta}{dt} &= \Omega_2 \sin \gamma + \Omega_3 \cos \gamma, \\ \frac{d\gamma}{dt} &= \Omega_1 - \operatorname{tg} \beta (\Omega_2 \cos \gamma - \Omega_3 \sin \gamma). \end{aligned} \quad (1.4)$$

Для представления геомагнитного поля используется широко распространенная модель прямого диполя. В этом случае вектор индукции в орбитальной системе координат имеет вид

$$\mathbf{B} = B_0 (\cos u \sin i, \cos i, -2 \sin u \sin i)^T = B_0 (B_1, B_2, B_3)^T,$$

где  $i$  – наклонение орбиты спутника,  $u$  – аргумент широты.

## 2. Переходные процессы

Перейдем к исследованию переходных процессов с целью выяснить быстрдействие системы ориентации. При этом будем предполагать, что для спутника, движущегося только под действием гравитационного момента, выполнены условия

$$A - C > 0, \quad B - A + h/\omega_0 > 0, \quad 4(B - C) + h/\omega_0 > 0, \quad (2.1)$$

обеспечивающие устойчивость орбитальной ориентации, при которой одноименные оси орбитальной и связанной систем совпадают. В случае установки массивного и/или быстро вращающегося тангажного маховика второе и третье условия выполняются независимо от величин моментов инерции. Фактически, кинетический момент маховика обеспечивает совпадение оси его установки (в рассматриваемом случае оси  $Ox_2$ ) с нормалью к плоскости орбиты (ось  $Ox_2$ ). Первое условие означает совпадение одноименных осей в плоскости орбиты. На движение в плоскости орбиты тангажный маховик не оказывает влияния, устойчивость обеспечивается действием гравитационного момента.

При исследовании переходных процессов нас будет особенно интересовать время, затрачиваемое на приведение оси вращения маховика к нормали к плоскости орбиты, после чего с помощью гравитационного или управляющего магнитного моментов можно обеспечить требуемую ориентацию в плоскости. В качестве меры быстродействия системы ориентации будем использовать характеристические показатели линеаризованной системы уравнений движения (1.3)-(1.4), имеющей безразмерный вид

$$\begin{aligned} \ddot{\gamma} + \dot{\beta} - (\lambda_A + h_A)(\dot{\beta} - \gamma) &= \frac{1}{A\omega_0^2} M_1, \\ \ddot{\alpha} &= \frac{1}{B\omega_0^2} M_2, \end{aligned} \quad (2.2)$$

$$\ddot{\beta} - \dot{\gamma} + (\lambda_C + h_C)(\dot{\gamma} + \beta) = \frac{1}{C\omega_0^2} M_3,$$

где  $\lambda_A = \frac{B-C}{A}$ ,  $\lambda_C = \frac{B-A}{C}$ ,  $h_A = \frac{h}{A\omega_0}$ ,  $h_C = \frac{h}{C\omega_0}$ . Точкой обозначено

дифференцирование по аргументу широты. Далее необходимо принять во внимание гравитационный момент

$$\mathbf{M}_{gp} = 3\omega_0^2 \mathbf{e}_3 \times \mathbf{J} \mathbf{e}_3 = 3\omega_0^2 \begin{pmatrix} -(B-C)\gamma \\ (A-C)\alpha \\ 0 \end{pmatrix}$$

и управляющий магнитный момент. В переходных процессах будем использовать алгоритм гашения угловой скорости

$$\mathbf{M}_{ymp} = \mathbf{m} \times \mathbf{B} = k(\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} = k\omega_0 B_0^2 \begin{pmatrix} \dot{\beta} B_1 B_3 - \dot{\gamma} (B_2^2 + B_3^2) + \dot{\alpha} B_1 B_2 \\ \dot{\gamma} B_1 B_2 - \dot{\alpha} (B_1^2 + B_3^2) + \dot{\beta} B_2 B_3 \\ \dot{\alpha} B_2 B_3 - \dot{\beta} (B_2^2 + B_1^2) + \dot{\gamma} B_1 B_3 \end{pmatrix}. \quad (2.3)$$

Линеаризованные уравнения движения окончательно имеют вид

$$\ddot{\gamma} + \dot{\beta} - (\lambda_A + h_A)(\dot{\beta} - \gamma) + 3\lambda_A \gamma = \varepsilon \xi \left( \dot{\beta} B_1 B_3 - \dot{\gamma} (B_2^2 + B_3^2) + \dot{\alpha} B_1 B_2 \right),$$

$$\ddot{\alpha} = \varepsilon \frac{C}{B} \left( \dot{\gamma} B_1 B_2 - \dot{\alpha} (B_1^2 + B_3^2) + \dot{\beta} B_2 B_3 \right), \quad (2.4)$$

$$\ddot{\beta} - \dot{\gamma} + (\lambda_C + h_C)(\dot{\gamma} + \beta) = \varepsilon \left( \dot{\alpha} B_2 B_3 - \dot{\beta} (B_2^2 + B_1^2) + \dot{\gamma} B_1 B_3 \right),$$

где  $\xi = \frac{C}{A}$ ,  $\varepsilon = \frac{kB_0^2}{C\omega_0}$ .

Как было замечено ранее, особый интерес в переходных процессах представляет приведение оси вращения маховика к нормали к плоскости орбиты, то есть поведение углов  $\beta$  и  $\gamma$ . Поэтому логично упростить систему (2.4), отделив движение в плоскости орбиты. Для этого в первом и третьем уравнениях системы (2.4) необходимо избавиться от слагаемых, содержащих  $\dot{\alpha}$ . Этого можно добиться, положив  $B_2 = 0$ , что имеет место при  $i = 90^\circ$ . Таким образом, далее будем рассматривать спутник на полярной орбите. При этом рассмотрение приполярной орбиты не приведет к изменению получаемых результатов. Фактически это будет означать введение дополнительного малого параметра и дополнительных слагаемых более высокого порядка малости в (2.4), не влияющих на характер получаемого решения. За счет этого существенно расширяется класс орбит, для которых верно последующие рассуждения. В частности, оказываются затронуты практически важные солнечно-синхронные орбиты. Уравнения движения аппарата вне плоскости орбиты принимают вид

$$\ddot{\beta} + \varepsilon \cos^2 u \dot{\beta} + (2\varepsilon \sin u \cos u - 1 + \theta_C) \dot{\gamma} + \theta_C \beta = 0, \quad (2.5)$$

$$\ddot{\gamma} + (2\varepsilon \xi \sin u \cos u + 1 - \theta_A) \dot{\beta} + 4\varepsilon \xi \sin^2 u \dot{\gamma} + (3\lambda_A + \theta_A) \gamma = 0,$$

где  $\theta_A = h_A + \lambda_A$ ,  $\theta_C = h_C + \lambda_C$ . Введем обозначение  $\mathbf{x} = (\dot{\beta}, \dot{\gamma}, \beta, \gamma)$ . Тогда систему (2.5) можно записать в виде

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}_0 \mathbf{x} + \varepsilon \mathbf{A}_1(u) \mathbf{x}, \quad (2.6)$$

где



$$\mathbf{A}_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 - \theta_C & -\theta_C & 0 \\ \theta_A - 1 & 0 & 0 & -3\lambda_A - \theta_A \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}_1 = \begin{pmatrix} -\cos^2 u & -2\sin u \cos u & 0 & 0 \\ -2\xi \sin u \cos u & -4\xi \sin^2 u & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим систему

$$\dot{\mathbf{x}}_0 = \mathbf{A}_0 \mathbf{x}_0,$$

соответствующую движению спутника, оснащенного тангажным маховиком в гравитационном поле, без учета действия демпфирующего управляющего момента. Ее характеристические показатели  $\lambda_i$  определяются из уравнения

$$\lambda^4 + (3\lambda_A + 1 + \theta_A \theta_C) \lambda^2 + (3\lambda_A + \theta_A) \theta_C = 0 \quad (2.7)$$

и равны

$$\lambda_{1,2} = \pm i \sqrt{\frac{1}{2} \left( 3\lambda_A + 1 + \theta_A \theta_C + \sqrt{(3\lambda_A + 1 + \theta_A \theta_C)^2 + 12\lambda_A \theta_C (\theta_A - 1)} \right)},$$

$$\lambda_{3,4} = \pm i \sqrt{\frac{1}{2} \left( -3\lambda_A - 1 - \theta_A \theta_C + \sqrt{(3\lambda_A + 1 + \theta_A \theta_C)^2 + 12\lambda_A \theta_C (\theta_A - 1)} \right)},$$

где  $i$  – мнимая единица. Собственные векторы, соответствующие числам  $\lambda_k$ , суть

$$\boldsymbol{\varphi}_k = A_k \begin{pmatrix} \lambda_k & \frac{\theta_C + \lambda_k^2}{1 - \theta_C} & 1 & \frac{\theta_C + \lambda_k^2}{\lambda_k (1 - \theta_C)} \end{pmatrix}^T,$$

где  $A_k$  – произвольные постоянные. Запишем решение системы (2.5) при  $\varepsilon = 0$  в виде

$$\beta_0 = A_1 \exp(\lambda_1 u) + A_2 \exp(-\lambda_1 u) + A_3 \exp(\lambda_3 u) + A_4 \exp(-\lambda_3 u), \quad (2.8)$$

$$\gamma_0 = B_1 \exp(\lambda_1 u) + B_2 \exp(-\lambda_1 u) + B_3 \exp(\lambda_3 u) + B_4 \exp(-\lambda_3 u),$$

где  $B_j = \chi A_j$ ,  $\chi = \frac{\theta_C + \lambda_k^2}{\lambda_k (1 - \theta_C)}$ . Чтобы уточнить (2.8) с учетом действия

демпфирующего момента, представим решение уравнения (2.6) в виде

$$\mathbf{x} = \sum_{k=1}^4 \left( \boldsymbol{\varphi}_k + \sum_{j=1}^n \varepsilon^j \boldsymbol{\psi}_{kj}(u) + O(\varepsilon^{n+1}) \right) \exp \left( \lambda_k + \sum_{j=1}^n \varepsilon^j \mu_{kj} + O(\varepsilon^{n+1}) \right) u = \quad (2.9)$$

$$= \sum_{k=1}^4 \left( \boldsymbol{\varphi}_k + \sum_{j=1}^n \varepsilon^j \boldsymbol{\psi}_{kj}(u) \right) \exp \left( \lambda_k + \sum_{j=1}^n \varepsilon^j \mu_{kj} \right) u + O(\varepsilon^{n+1}).$$

Подставляя это выражение в (2.6) и группируя члены при одинаковых степенях  $\varepsilon$ , получаем

$$\begin{aligned}
\varepsilon = 0 & \quad \dot{\boldsymbol{\phi}}_k + (\lambda_k \mathbf{E} - \mathbf{A}_0) \boldsymbol{\phi}_k = 0, \\
\varepsilon = 1 & \quad \dot{\boldsymbol{\psi}}_{k1} + (\lambda_k \mathbf{E} - \mathbf{A}_0) \boldsymbol{\psi}_{k1} = -\mu_{k1} \boldsymbol{\phi}_k + \mathbf{A}_1 \boldsymbol{\phi}_k, \\
\varepsilon = 2 & \quad \dot{\boldsymbol{\psi}}_{k2} + (\lambda_k \mathbf{E} - \mathbf{A}_0) \boldsymbol{\psi}_{k2} = -\mu_{k1} \boldsymbol{\psi}_{k1} - \mu_{k2} \boldsymbol{\phi}_k + \mathbf{A}_1 \boldsymbol{\psi}_{k1}, \\
\varepsilon = j & \quad \dot{\boldsymbol{\psi}}_{kj} + (\lambda_k \mathbf{E} - \mathbf{A}_0) \boldsymbol{\psi}_{kj} = \mathbf{f}_j(u, \mu_{k1}, \dots, \mu_{kj-1}, \boldsymbol{\phi}_k, \boldsymbol{\psi}_{k1}, \dots, \boldsymbol{\psi}_{kj-1}).
\end{aligned}$$

Таким образом, для определения очередного приближения  $\boldsymbol{\psi}_{kj}$  ( $\boldsymbol{\phi}_k + \sum_{j=1}^n \varepsilon^j \boldsymbol{\psi}_{kj}(u)$  уже не является собственным вектором, так как матрица  $\mathbf{A}_1$  зависит от времени) необходимо решать неоднородные уравнения, которые, вообще говоря, могут оказаться сложнее исходных уравнений движения. Характеристические показатели Ляпунова соответствующего приближения находятся из условия периодичности функций  $\boldsymbol{\psi}_{kj}(u) = \boldsymbol{\psi}_{kj}(u + 2\pi)$ . Зачастую можно утверждать [5], что такие решения найти можно, а ряд (2.9) сходится. Для этого достаточно, чтобы ни одна из разностей  $\lambda_{kj} - \lambda_{kl}$  не была равна  $it$  при  $j \neq l$ , где  $t$  – целое число. Эти разности являются собственными числами матрицы  $(\lambda_k \mathbf{E} - \mathbf{A}_0)$  однородной части уравнений для определения  $\boldsymbol{\psi}_{kj}$ . Фактически это означает, что общее решение однородных уравнений имеет период, отличный от  $2\pi$ , и возникает необходимость определения частного решения таким образом, чтобы получить  $\boldsymbol{\psi}_{kj}$  требуемой периодичности. В рассматриваемом случае разности характеристических чисел нулевого приближения удовлетворяют представленному условию, что позволяет перейти к поиску характеристических показателей системы (2.6) в первом приближении. Для этого обратимся к системе (2.5) и представим ее решение, соответствующее  $k$ -му собственному числу, в виде

$$\beta = (A_k + \varepsilon \tau_k(u)) \exp(\lambda_k + \varepsilon \sigma_k) u,$$

$$\gamma = (B_k + \varepsilon \vartheta_k(u)) \exp(\lambda_k + \varepsilon \sigma_k) u.$$

Подставляя это выражение в систему (2.5), получаем

$$\begin{aligned}
\varepsilon \ddot{\tau}_k + (A_k + \varepsilon \tau_k)(\lambda_k + \varepsilon \sigma_k)^2 + \varepsilon \cos^2 u \left[ \varepsilon \dot{\tau}_k + (A_k + \varepsilon \tau_k)(\lambda_k + \varepsilon \sigma_k) \right] + \\
+ (2\varepsilon \sin u \cos u - 1 + \theta_C) \left[ \varepsilon \dot{\vartheta}_k + (B_k + \varepsilon \vartheta_k)(\lambda_k + \varepsilon \sigma_k) \right] + \theta_C (A_k + \varepsilon \tau_k) = 0, \\
\varepsilon \ddot{\vartheta}_k + (B_k + \varepsilon \vartheta_k)(\lambda_k + \varepsilon \sigma_k)^2 + (2\varepsilon \xi \sin u \cos u + 1 - \theta_A) \left[ \varepsilon \dot{\tau}_k + (A_k + \varepsilon \tau_k)(\lambda_k + \varepsilon \sigma_k) \right] + \\
+ 4\varepsilon \xi \sin^2 u \left[ \varepsilon \dot{\vartheta}_k + (B_k + \varepsilon \vartheta_k)(\lambda_k + \varepsilon \sigma_k) \right] + (3\lambda_A + \theta_A)(B_k + \varepsilon \vartheta_k) = 0.
\end{aligned}$$

Сгруппируем члены при  $\varepsilon^0$ :

$$\begin{aligned}
(\lambda_k^2 + \theta_C)A_k + (\theta_C - 1)\lambda_k B_k &= 0, \\
(1 - \theta_A)\lambda_k A_k + (\lambda_k^2 + 3\lambda_A + \theta_A)B_k &= 0.
\end{aligned} \tag{2.10}$$

Определитель системы (2.10) совпадает с характеристическим уравнением (2.7) и потому нулевой. Сгруппируем теперь члены при  $\varepsilon$ :

$$\begin{aligned}
\ddot{i}_k + 2A_k \lambda_k \sigma_k + \lambda_k^2 \tau_k + \cos^2 u A_k \lambda_k + 2 \sin u \cos u B_k \lambda_k + \\
+ (\theta_C - 1)B_k \lambda_k + (\theta_C - 1)\lambda_k \mathcal{G}_k + \theta_C \tau_k &= 0, \\
\ddot{g}_k + 2B_k \lambda_k \sigma_k + \lambda_k^2 \mathcal{G}_k + 2\xi \sin u \cos u A_k \lambda_k + (1 - \theta_A)\dot{i}_k + \\
+ (1 - \theta_A)A_k \lambda_k + (1 - \theta_A)\lambda_k \tau_k + 4\xi \sin^2 u B_k \lambda_k + (3\lambda_A + \theta_A)\mathcal{G}_k &= 0.
\end{aligned} \tag{2.11}$$

Запишем эти уравнения в виде

$$\begin{aligned}
F_1 - f_1 + C_1 \sigma_k &= 0, \\
F_2 - f_2 + C_2 \sigma_k &= 0,
\end{aligned} \tag{2.12}$$

где

$$\begin{aligned}
F_1 &= \ddot{i}_k + (\theta_C - 1)\dot{g}_k + (\theta_C - 1)\lambda_k \mathcal{G}_k + (\theta_C + \lambda_k^2)\tau_k, \\
F_2 &= \ddot{g}_k + (1 - \theta_A)\dot{i}_k + (1 - \theta_A)\lambda_k \tau_k + (3\lambda_A + \theta_A + \lambda_k^2)\mathcal{G}_k, \\
f_1(u) &= -\cos^2 u A_k \lambda_k - 2 \sin u \cos u B_k \lambda_k, \\
f_2(u) &= -4\xi \sin^2 u B_k \lambda_k - 2\xi \sin u \cos u A_k \lambda_k, \\
C_1 &= 2A_k \lambda_k + (\theta_C - 1)B_k, \\
C_2 &= 2B_k \lambda_k + (1 - \theta_A)A_k.
\end{aligned}$$

Умножим теперь первое уравнение (2.12) на  $\lambda_k^2 + \theta_C$ , второе на  $-(\theta_C - 1)\lambda_k$  и сложим, затем первое на  $1 - \theta_A$ , второе на  $-(\lambda_k^2 + 3\lambda_A + \theta_A)$  и сложим.

Получим систему

$$\begin{aligned}
(\lambda_k^2 + \theta_C)(F_1 - f_1 + C_1 \sigma_k) - (\theta_C - 1)\lambda_k (F_2 - f_2 + C_2 \sigma_k) &= 0, \\
(1 - \theta_A)\lambda_k (F_1 - f_1 + C_1 \sigma_k) - (\lambda_k^2 + 3\lambda_A + \theta_A)(F_2 - f_2 + C_2 \sigma_k) &= 0.
\end{aligned} \tag{2.13}$$

Определитель этой системы, совпадающий с определителем (2.10), нулевой. Система (2.13) имеет отличное от нуля решение. В частности, при любом значении  $F_2 - f_2 + C_2 \sigma_k$  можно найти  $F_1 - f_1 + C_1 \sigma_k$  такое, что выполняется

$$(\lambda_k^2 + \theta_C)(F_1 - f_1 + C_1 \sigma_k) - (\theta_C - 1)\lambda_k (F_2 - f_2 + C_2 \sigma_k) = 0. \tag{2.14}$$

Используем последнее выражение, чтобы найти первое приближение характеристического показателя  $\sigma_k$ . При этом первое приближение соответствующего ему собственного вектора нас не интересует. Имеют

значение его свойства – величины  $\tau_k$  и  $\mathcal{G}_k$  и их производные периодичны, что обеспечивается подбором постоянных интегрирования уравнения (2.11) и  $\sigma_k$ .

Проинтегрируем соотношение (2.14) от 0 до  $2\pi$ , принимая во внимание периодичность  $\tau_k$  и  $\mathcal{G}_k$  и их производных, откуда  $\int_0^{2\pi} F_j(u) du = 0$ ,

$$(\lambda_k^2 + \theta_C)(-\bar{f}_1 + 2\pi C_1 \sigma_k) - (\theta_C - 1)\lambda_k(-\bar{f}_2 + 2\pi C_2 \sigma_k) = 0,$$

где

$$\bar{f}_1 = \int_0^{2\pi} f_1(u) du = \int_0^{2\pi} \left[ -\frac{1}{2} A_k \lambda_k (1 + \cos 2u) - B_k \lambda_k \sin 2u \right] du = -\pi A_k \lambda_k,$$

$$\bar{f}_2 = \int_0^{2\pi} f_2(u) du = \int_0^{2\pi} \left[ 2B_k \lambda_k (-1 + \cos 2u) - A_k \lambda_k \sin 2u \right] \xi du = -4\pi \xi \chi A_k \lambda_k.$$

Это позволяет записать первое приближение  $k$ -го характеристического показателя

$$\sigma_k = \frac{1}{2} \frac{4\xi \chi \lambda_k^2 (\theta_C - 1) - \lambda_k (\lambda_k^2 + \theta_C)}{(\lambda_k^2 + \theta_C) [2\lambda_k + \chi (\theta_C - 1)] - \lambda_k (\theta_C - 1) [2\chi \lambda_k + (1 - \theta_A)]}. \quad (2.15)$$

Наибольший интерес с точки зрения переходных процессов представляет вещественная часть  $\sigma_k$ , характеризующая их скорость. Обозначим  $\lambda_k = i\eta_k$  и

$$\chi = \frac{\theta_C - \eta_k^2}{\eta_k (\theta_C - 1)} i = \chi_r i. \text{ Тогда (2.15) можно записать в виде}$$

$$\sigma_k = \frac{1}{2} \frac{4\xi \chi_r \eta_k^2 (1 - \theta_C) + \eta_k (\eta_k^2 - \theta_C)}{(\theta_C - \eta_k^2) [2\eta_k + \chi_r (\theta_C - 1)] + \eta_k (\theta_C - 1) [2\chi_r \eta_k + (\theta_A - 1)]}.$$

При этом  $\sigma_1 = \sigma_2, \sigma_3 = \sigma_4$ . Окончательно получаем характеристические показатели (2.5) в первом приближении

$$\begin{aligned}
v_1 &= i\eta_1 + \frac{1}{2}\varepsilon(1+4\xi)\frac{\eta_1^2(\eta_1^2 - \theta_C)}{-3\eta_1^4 + [2\theta_C + (\theta_A - 1)(\theta_C - 1)]\eta_1^2 + \theta_C^2}, \\
v_2 &= -i\eta_1 + \frac{1}{2}\varepsilon(1+4\xi)\frac{\eta_1^2(\eta_1^2 - \theta_C)}{-3\eta_1^4 + [2\theta_C + (\theta_A - 1)(\theta_C - 1)]\eta_1^2 + \theta_C^2}, \\
v_3 &= i\eta_3 + \frac{1}{2}\varepsilon(1+4\xi)\frac{\eta_3^2(\eta_3^2 - \theta_C)}{-3\eta_3^4 + [2\theta_C + (\theta_A - 1)(\theta_C - 1)]\eta_3^2 + \theta_C^2}, \\
v_4 &= -i\eta_3 + \frac{1}{2}\varepsilon(1+4\xi)\frac{\eta_3^2(\eta_3^2 - \theta_C)}{-3\eta_3^4 + [2\theta_C + (\theta_A - 1)(\theta_C - 1)]\eta_3^2 + \theta_C^2},
\end{aligned} \tag{2.16}$$

где

$$\begin{aligned}
\eta_1 &= i\sqrt{\frac{1}{2}\left(3\lambda_A + 1 + \theta_A\theta_C + \sqrt{(3\lambda_A + 1 + \theta_A\theta_C)^2 + 12\lambda_A\theta_C(\theta_A - 1)}\right)}, \\
\eta_3 &= i\sqrt{\frac{1}{2}\left(-3\lambda_A - 1 - \theta_A\theta_C + \sqrt{(3\lambda_A + 1 + \theta_A\theta_C)^2 + 12\lambda_A\theta_C(\theta_A - 1)}\right)}.
\end{aligned}$$

Для определения степени устойчивости (ближайшая к вещественной оси отрицательная часть характеристических показателей) системы (2.5) в первом приближении необходимо сравнить  $-\varepsilon\sigma_1$  и  $-\varepsilon\sigma_3$ , соотношение между которыми зависит от параметров спутника и управления. Рассмотрим в качестве примера спутник с тензором инерции  $\mathbf{J} = \text{diag}(1.5, 1.8, 1.1)$  кг·м<sup>2</sup> (спутник массой в несколько десятков килограмм) на орбите высотой 1000 км и коэффициентом усиления в управлении  $k = 5 \cdot 10^5$  Н·м·с/Тл<sup>2</sup> ( $\varepsilon \approx 0.18$ ). На рис. 1 представлена зависимость степени устойчивости  $\zeta$  (в данном случае  $\zeta = -\varepsilon\sigma_3$ ) от величины кинетического момента тангажного маховика.

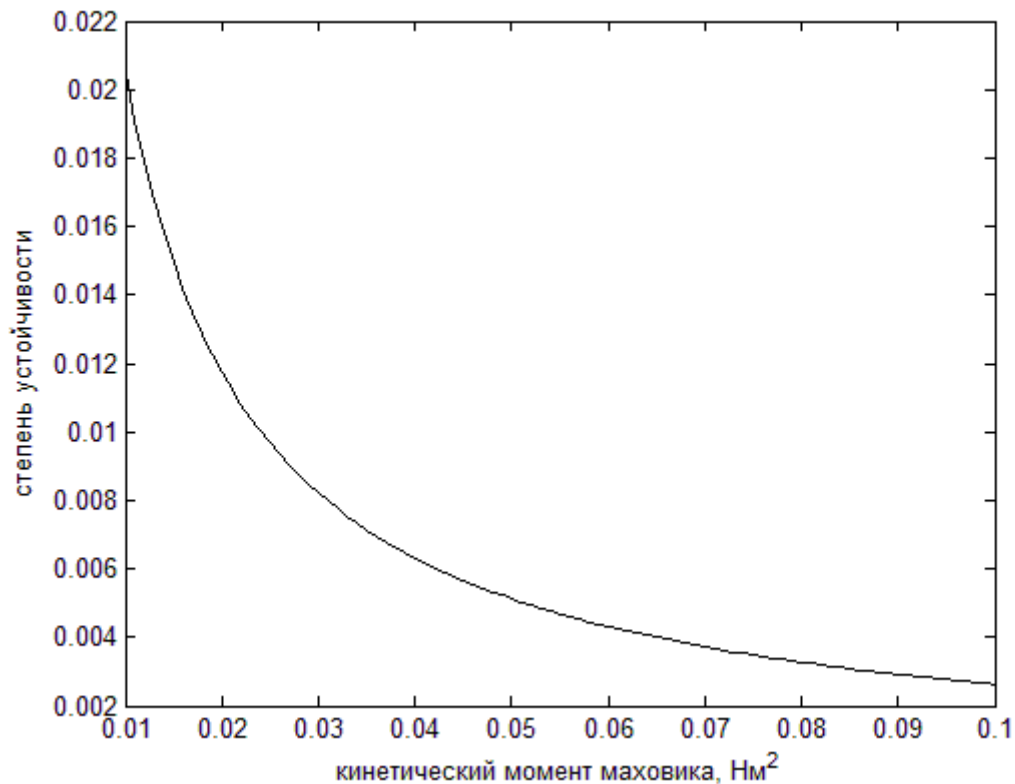


Рис. 1. Степень устойчивости в зависимости от кинетического момента маховика

Уменьшение степени устойчивости означает увеличение времени, затрачиваемого на поворот маховика при возрастании его кинетического момента. Так, при величине кинетического момента 0.01 Н·м степень устойчивости равна  $\zeta \approx 0.02$ . Численное моделирование, проведенное с теми же параметрами, показывает падение угла между осями  $O_a X_2$  и  $O_a x_2$  с  $9.2^\circ$  до  $1.1^\circ$  за  $10^5$  секунд, при этом степень устойчивости указывает на конечное значение  $0.8^\circ$ . Для тангажного маховика с кинетическим моментом 0.05 Н·м степень устойчивости равна  $\zeta \approx 0.005$ . В этом случае угол между одноименными осями составляет  $5.6^\circ$  при проведении моделирования и  $5.8^\circ$  при использовании примерных значений степени устойчивости. Приближенный результат (2.16) представляется потому полезным при оценке времени переходных процессов.

### 3. Номинальный режим гравитационной ориентации

Перейдем к рассмотрению номинального режима движения спутника, когда его угловая скорость мала, а оси системы  $Ox_1x_2x_3$  практически совпадают с осями системы  $OX_1X_2X_3$  и выполнены условия устойчивости (2.1). Будем

считать, что на спутник действуют гравитационный восстанавливающий и магнитный демпфирующий моменты (положение равновесия, заданное условиями (2.1), становится асимптотически устойчивым). Устойчивость в плоскости орбиты обеспечивается лишь действием гравитационного момента, для большинства компоновок спутников имеющего небольшую величину. В случае использования алгоритма демпфирования (2.3) без учета возмущающих моментов возможна точная ориентация аппарата. Однако зачастую используется упрощенный алгоритм демпфирования

$$\mathbf{m} = -k \frac{d\mathbf{B}_x}{dt}. \quad (3.1)$$

Его связь с алгоритмом (2.3) ясна из выражения для производной вектора индукции в связанной системе

$$\frac{d\mathbf{B}_x}{dt} = \mathbf{A} \frac{d\mathbf{B}_x}{dt} - \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{B}_x. \quad (3.2)$$

В случае быстрых вращений спутника, когда обычно и используется алгоритм (3.1), скорость вращения вектора индукции в орбитальной системе, примерно равная орбитальной скорости, много меньше скорости вращения связанной системы, и первым слагаемым в (3.2) можно пренебречь. В номинальном же режиме относительная скорость спутника меньше орбитальной, и такого допущения сделать нельзя. Определим, как скажется на точности ориентации использование простого алгоритма (3.1) вместо более подходящего в номинальном режиме алгоритма (2.3).

Перепишем систему (1.2)-(1.4), введя дифференцирование по аргументу широты,

$$\begin{aligned} \frac{d\omega_1}{du} &= h_A \omega_3 + \lambda_A (\omega_2 \omega_3 - 3a_{23} a_{33}) + \varepsilon \frac{C}{A} \overline{M}_{1x}, \\ \frac{d\omega_2}{du} &= \lambda_B (\omega_1 \omega_3 - 3a_{13} a_{33}) + \frac{C}{B} \varepsilon \overline{M}_{2x}, \\ \frac{d\omega_3}{du} &= -h_C \omega_1 - \lambda_C (\omega_1 \omega_2 - 3a_{13} a_{23}) + \varepsilon \overline{M}_{3x}, \\ \frac{d\alpha}{du} &= \frac{1}{\cos \beta} (\omega_2 \cos \gamma - \omega_3 \sin \gamma) - 1, \\ \frac{d\beta}{du} &= \omega_2 \sin \gamma + \omega_3 \cos \gamma, \\ \frac{d\gamma}{du} &= \omega_1 - \operatorname{tg} \beta (\omega_2 \cos \gamma - \omega_3 \sin \gamma), \end{aligned} \quad (3.3)$$

где  $\lambda_A = \frac{B-C}{A}$ ,  $\lambda_B = \frac{C-A}{B}$ ,  $\lambda_C = \frac{B-A}{C}$ ,  $h_A = \frac{h}{A\omega_0}$ ,  $h_C = \frac{h}{C\omega_0}$ ,  $\varepsilon = \frac{kB_0^2}{C\omega_0}$ ,  $\overline{M}_{1x}$  –

компоненты безразмерного демпфирующего момента. Обозначения, введенные при записи системы (2.2), сохранены.

Система (3.3) при отсутствии магнитного момента допускает стационарное решение  $\alpha = \beta = \gamma = 0, \omega_1 = \omega_3 = 0, \omega_2 = 1$ . Будем искать решения, рождающиеся из него при действии слабого магнитного момента, при помощи метода Пуанкаре [6]. Представим уравнения движения (3.3) в виде

$$\mathbf{x} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \varepsilon \mathbf{g}(\mathbf{x}),$$

где  $\mathbf{x} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3, \alpha, \beta, \gamma)$ . Решение ищем в виде  $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + \varepsilon \mathbf{x}_1 + O(\varepsilon^2)$ , где  $\mathbf{x}_0 = (0, 1, 0, 0, 0, 0)$  – стационарное решение. Тогда

$$\frac{d\mathbf{x}_0}{du} + \varepsilon \frac{d\mathbf{x}_1}{du} = \mathbf{f}(\mathbf{x}_0) + \varepsilon (\mathbf{F}(\mathbf{x}_0)\mathbf{x}_1 + \mathbf{g}(\mathbf{x}_0)) + O(\varepsilon^2),$$

где  $F_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}$  и в нашем случае

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}_0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \theta_A & 0 & 0 & -3\lambda_A \\ 0 & 0 & 0 & 3\lambda_B & 0 & 0 \\ -\theta_C & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Определим  $\mathbf{g}(\mathbf{x}_0)$ , положив в (3.2)  $\boldsymbol{\Omega} = \mathbf{0}$ ,  $\mathbf{A} = \mathbf{E}$ , откуда  $\frac{d\mathbf{B}_x}{dt} = \frac{d\mathbf{B}_x}{dt}$  и

$$\mathbf{B}_x = \mathbf{B}_x. \text{ В этом случае } \mathbf{g}(\mathbf{x}_0) = \left( -2\frac{C}{A} \cos u \sin i \cos i, -2\frac{C}{B} \sin^2 i, \sin u \sin i \cos i, 0, 0, 0 \right)^T.$$

Группируя члены при  $\varepsilon$ , для определения  $\mathbf{x}_1$  получаем систему

$$\frac{dx_1}{du} = \theta_A x_3 - 3\lambda_A x_6 - 2\frac{C}{A} \sin i \cos i \cos u,$$

$$\frac{dx_2}{du} = 3\lambda_B x_4 - 2\frac{C}{B} \sin^2 i,$$

$$\frac{dx_3}{du} = -\theta_C x_1 + \sin i \cos i \sin u,$$

(3.4)



$$\frac{dx_4}{du} = x_2, \quad \frac{dx_5}{du} = x_3 + x_6, \quad \frac{dx_6}{du} = x_1 - x_5.$$

Уравнения для  $x_2$  и  $x_4$  (движение в плоскости орбиты) отделяются. Запишем их в виде

$$\ddot{x}_4 - 3\lambda_B x_4 = -2\frac{C}{B} \sin^2 i.$$

Из условий (2.1) следует  $\lambda_B < 0$ , а значит общее решение последнего уравнения – колебания в окрестности нуля. Точность ориентации определяется в первую очередь частным решением

$$x_2 = \frac{2C \sin^2 i}{3(C - A)}. \quad (3.5)$$

Выпишем матрицу однородной системы для определения  $x_1, x_3, x_5, x_6$ ,

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 0 & \theta_A & 0 & -3\lambda_A \\ -\theta_C & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

и найдем ее собственные числа:

$$\det(\mathbf{Q} - \lambda \mathbf{E}) = \lambda^4 + a\lambda^2 + b = 0,$$

где  $a = 1 + 3\lambda_A + \theta_A \theta_C$ ,  $b = \theta_C (3\lambda_A + \theta_A)$ . Тогда

$$\lambda^2 = \frac{1}{2} \left( -a \pm \sqrt{a^2 - 4b} \right).$$

Здесь, как и при рассмотрении переходного режима, предполагаем, что кинетический момент маховика велик, тогда

$$a^2 - 4b = \theta_A^2 \theta_C^2 + (1 + 3\lambda_A^2) - 2\theta_A \theta_C + 6\lambda_A \theta_A (\theta_C - 2) > 0.$$

Вместе с тем,  $a > 0$ . Поэтому все четыре собственных значения чисто мнимые и общее решение – колебания около стационарного решения. Частное решение будем искать в виде

$$x_5 = A_1 \sin u + A_2 \cos u, \quad x_6 = B_1 \sin u + B_2 \cos u.$$

Подставляя эти выражения в (3.4) и приравнивая коэффициенты при  $\sin u$  и  $\cos u$ , получаем систему для определения  $A_1, A_2, B_1, B_2$

$$(1 - \theta_A)A_1 + (-1 + \theta_A + 3\lambda_A)B_2 = -2\frac{C}{A} \sin i \cos i, \quad (-1 + \theta_A + 3\lambda_A)A_2 + (-1 + \theta_A)B_1 = 0,$$

$$(-1 + \theta_C)A_2 + (-1 + \theta_C)B_1 = 0, \quad (-1 + \theta_C)A_1 + (1 - \theta_C)B_2 = \sin i \cos i.$$

Решая ее, можем окончательно выписать вынужденное решение системы (3.4)

$$x_1 = \frac{1}{\theta_C - 1} \sin i \cos i \sin u,$$

$$x_2 = \frac{2C \sin^2 i}{3(C - A)},$$

$$x_3 = \frac{1}{\theta_C - 1} \sin i \cos i \cos u,$$

$$x_4 = 0,$$

$$x_5 = \frac{1}{3\lambda_A} \left( \frac{\theta_A - 1}{\theta_C - 1} - 2\frac{C}{A} + 3\lambda_A \right) \sin i \cos i \sin u,$$

$$x_6 = \frac{1}{3\lambda_A} \left( \frac{\theta_A - 1}{\theta_C - 1} - 2\frac{C}{A} \right) \sin i \cos i \cos u.$$

Таким образом, найдено отклонение от стационарного решения, вызванное влиянием магнитного управления. В плоскости орбиты возникает постоянное отклонение от положения равновесия. Это отклонение увеличивается с ростом величины управляющего момента (параметр  $\varepsilon$ ), наклона орбиты (эффективность работы магнитной системы ориентации [7]) и уменьшается при росте гравитационного момента (разница между моментами инерции, величина восстанавливающего момента). Вне плоскости орбиты наблюдаются малые колебания с орбитальной частотой.

Заметим, что может возникнуть резонанс, если собственное число  $\lambda$  матрицы  $\mathbf{Q}$  окажется равным  $\pm i$ . Найдем параметры, приводящие к таким собственным числам. Они определяются из соотношения

$$\lambda^2 = \frac{1}{2} \left( -a \pm \sqrt{a^2 - 4b} \right) = -1,$$

откуда  $\theta_C - 1 = 0$ .

В рассматриваемом случае маховика с большим кинетическим моментом  $\theta_C$  несоизмеримо с 1 и резонанса не возникает.

На рис. 2 приведен результат численного моделирования для спутника с тензором инерции  $\mathbf{J} = \text{diag}(1.5, 1.8, 1.1)$  кг·м<sup>2</sup> на орбите высотой 1000 км, наклоном 60° и коэффициентом усиления в управлении  $k = 5 \cdot 10^5$  Н·м·с/Тл<sup>2</sup>.

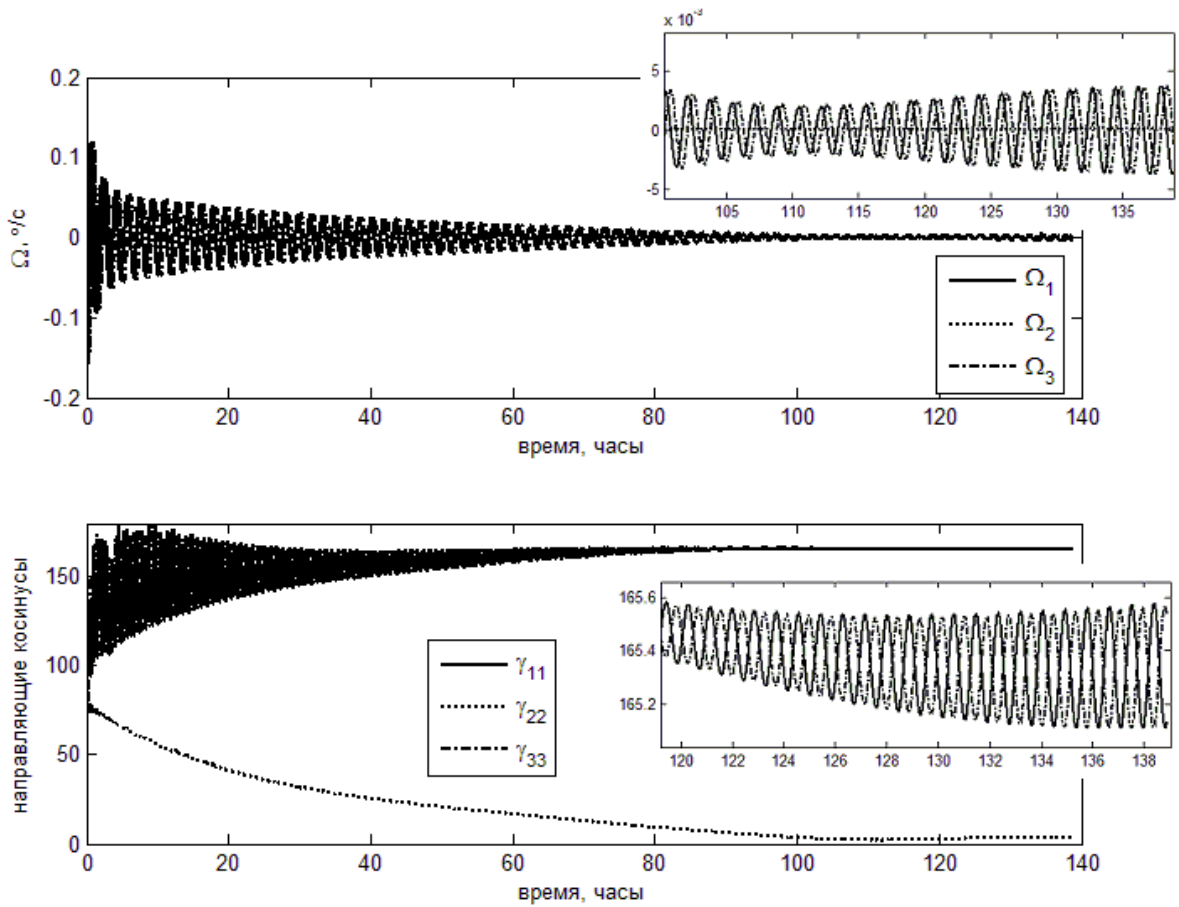


Рис. 2. Точность ориентации в номинальном режиме

$\gamma_{jj}$  – углы между одноименными осями орбитальной и связанной систем. Согласно рис. 2, точность ориентации в плоскости орбиты оказывается около  $14.5^\circ$ , тогда как использование результата (3.5) дает величину  $13.6^\circ$ . Формула (3.5) оказывается удобным инструментом оценки точности ориентации аппарата. Из рис. 2 также видно, что быстродействие системы ориентации оказывается невелико – на приведение спутника в требуемую ориентацию, даже при начальной скорости порядка орбитальной, требуется более 80 часов. Повышение коэффициента усиления до  $k = 5 \cdot 10^6$  Н·м·с/Тл<sup>2</sup>, однако, приводит к потере требуемой ориентации: спутник начинает отслеживать магнитное поле (согласно (3.5), точность оказывается около  $130^\circ$ ). В этом случае необходимо либо использование закона управления (2.3) без «паразитного» члена  $d\mathbf{B}_x/dt$ , либо гравитационной штанги (рис. 3).

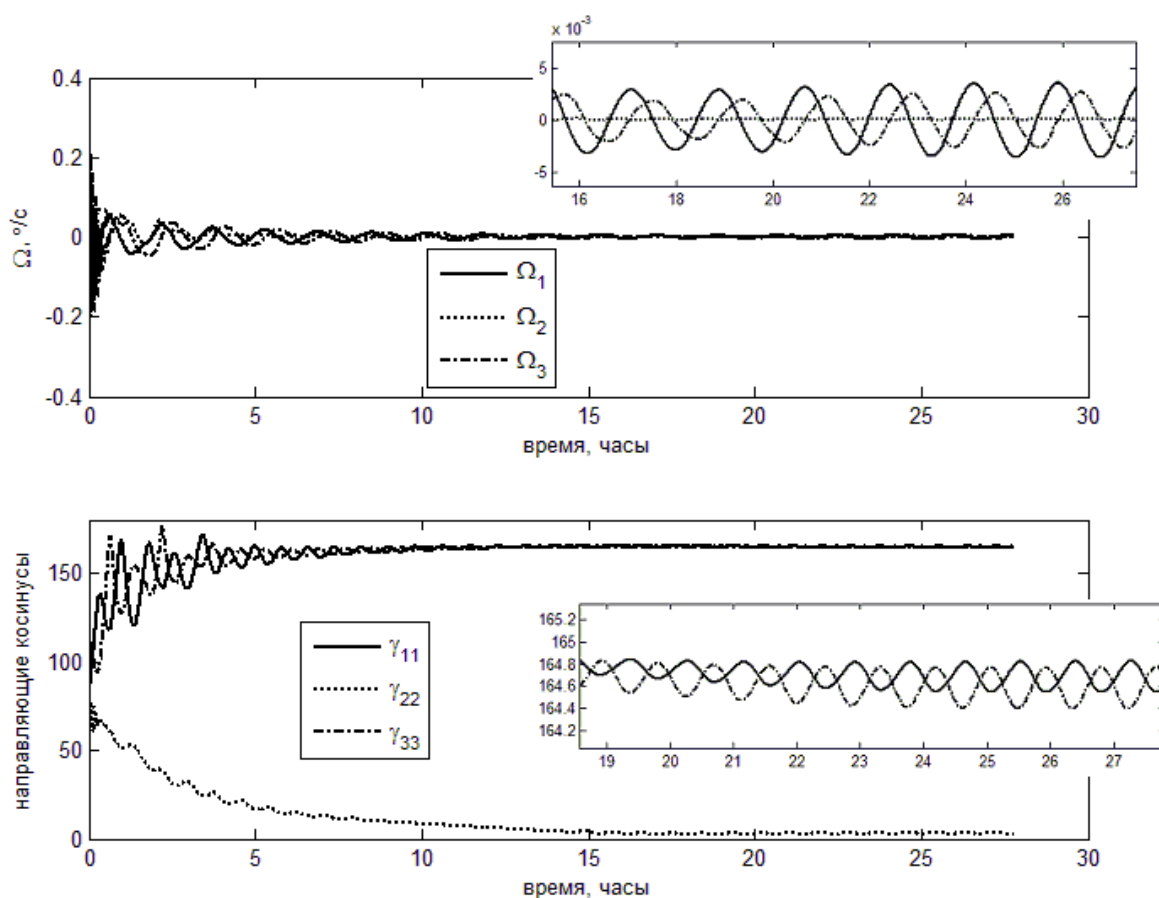


Рис. 3. Точность ориентации при использовании гравитационной штанги

Использование на том же спутнике гравитационной штанги длиной 1.5 метра с прикрепленной массой 1.5 кг приведет к точности около  $14.5^\circ$  (численный результат –  $15.5^\circ$ ) с увеличенным коэффициентом усиления (время приведения в требуемую ориентацию – несколько часов).

#### 4. Номинальный режим произвольной ориентации

Магнитная система может использоваться для того, чтобы обеспечить как существование, так и устойчивость любого наперед заданного положения равновесия  $\alpha = \alpha_0$  в плоскости орбиты. При этом гравитационный момент будет играть роль не восстанавливающего, а возмущающего. Предположим, что после окончания переходного режима  $\beta, \gamma \sim 0$ ,  $\Omega_1, \Omega_2 \sim 0$ ,  $\Omega_3 \sim 1$ . Уравнения движения (1.3)-(1.4) запишем тогда в виде

$$\ddot{\gamma} + (1 - \theta_A)\dot{\beta} + \theta_A\gamma = -3\lambda_A(\beta \sin \alpha \cos \alpha + \gamma \cos^2 \alpha) + \varepsilon \frac{C}{A} \overline{M}_1,$$

$$\ddot{\alpha} = 3\lambda_B \sin \alpha \cos \alpha + \varepsilon \frac{C}{B} \overline{M}_2, \quad (4.1)$$

$$\ddot{\beta} + (\theta_C - 1)\dot{\gamma} + \theta_C\beta = -3\lambda_C \sin \alpha \cos \alpha + \varepsilon \overline{M}_3,$$

где конкретный вид безразмерного параметра  $\varepsilon$  пока не определен, так как не определен вид закона управления.

Как видно из второго уравнения (4.1), движение в плоскости орбиты отделяется, если вторая компонента управляющего момента не зависит от  $\beta, \gamma$ . Используем это наблюдение, чтобы построить управление положением аппарата в плоскости орбиты. Пусть

$$\overline{M}_2 = k_r \sin(\alpha_0 - \alpha). \quad (4.2)$$

Тогда, вводя обозначение  $\rho = \alpha - \alpha_0$ , где  $\alpha_0$  – требуемое положение в плоскости орбиты, второе уравнение (4.1) запишем в виде

$$\ddot{\rho} + k_r \varepsilon \frac{C}{B} \sin \rho = 3\lambda_B \sin(\rho + \alpha_0) \cos(\rho + \alpha_0). \quad (4.3)$$

В отсутствие гравитационного момента ( $\lambda_B = 0$ ) уравнение (4.3) описывает колебания около устойчивого положения равновесия  $\rho = 0$ . Асимптотическая устойчивость этого положения (стремление спутника занять именно это положение в плоскости орбиты) обеспечивается введением диссипативного управляющего момента согласно (2.3). Введение гравитационного момента приводит к смещению положения равновесия и, в линейном приближении, его значению

$$\rho_0 = \frac{\sin \alpha_0 \cos \alpha_0}{\sin^2 \alpha_0 - \cos^2 \alpha_0 + k_r \varepsilon C / 3(C - A)}. \quad (4.4)$$

Сравнение полученного результата с моделированием сопряжено с вопросом реализации управления (4.2). При этом возникают некоторые проблемы. Во-первых, из-за особенностей магнитной системы ориентации возникает механический момент, действующий вне плоскости орбиты и возмущающий нутационное движение, так как  $M_2 = m_3 B_1 - m_1 B_3$ . Предположим, что восстанавливающий момент создается первой катушкой, при этом  $m_2 = m_3 = 0$ . Тогда управляющий восстанавливающий момент, действующий на спутник, имеет вид

$$\mathbf{M}_r = \left( 0, k_r \varepsilon \sin(\alpha_0 - \alpha), -k_r \varepsilon \sin(\alpha_0 - \alpha) \frac{B_{2x}}{B_{3x}} \right)^T. \quad (4.5)$$

Возможен и другой выбор управляющей катушки, в особенности, если  $B_{3x}$  близко к нулю. Однако при рассматриваемом режиме движения  $B_{3x} \approx B_0 \sin \alpha \cos u \sin i + B_0 \cos \alpha \cos i$ , причем  $\alpha$  далеко как от 0, так и от  $\pi/2$ , так что  $B_{3x}$  близко к нулю только на полярной орбите при  $u = \pi/2$ . Поэтому управление (4.5) может быть использовано без дополнительных условий. Из (4.5) видно, что возникает паразитная третья компонента механического момента. Ее воздействие на систему (4.1) будет рассмотрено численно. Вторая проблема реализации – использование в законе управления (4.5) угла ориентации, тогда как при численном моделировании и в управляющих циклах бортовых компьютеров спутников используются кватернионы или элементы матрицы направляющих косинусов. Принимая во внимание вид матрицы направляющих косинусов при  $\beta, \gamma \sim 0$  и отбрасывая малые слагаемые, можно (4.5) записать в виде

$$\mathbf{M}_r = \left( 0, k_r \varepsilon (\sin \alpha_0 a_{11} + \cos \alpha_0 a_{13}), -k_r \varepsilon (\sin \alpha_0 a_{11} + \cos \alpha_0 a_{13}) \frac{B_{2x}}{B_{3x}} \right)^T. \quad (4.6)$$

Это управление будет использоваться при численном моделировании движения спутника, в том числе в переходном режиме, когда  $\beta, \gamma$  далеки от нулевых значений. Кроме того, управляющий дипольный момент магнитных катушек, реализующий восстанавливающую и демпфирующую компоненты управления, будет приводиться к выбранному максимальному дипольному моменту катушек и его части, соответственно. Использование управления (4.6) в этом случае нецелесообразно, однако величина кинетического момента тангажного маховика в любом случае обеспечивает выполнение условия  $\beta, \gamma \sim 0$  после переходного режима, что позволяет упростить цикл управления, не перегружая его лишними условиями переключения.

На рис. 4 представлен результат моделирования движения спутника, когда требуемая ориентация в плоскости орбиты соответствует  $\alpha_0 = 40^\circ$  (вдали от гравитационного положения равновесия), дипольный восстанавливающий момент катушек –  $3.2 \text{ А} \cdot \text{м}^2$  (величина восстанавливающего дипольного момента нормируется таким образом, чтобы его максимальная компонента была равна  $3.2 \text{ А} \cdot \text{м}^2$ ), демпфирующий –  $1.2 \text{ А} \cdot \text{м}^2$ , остальные параметры сохранены.

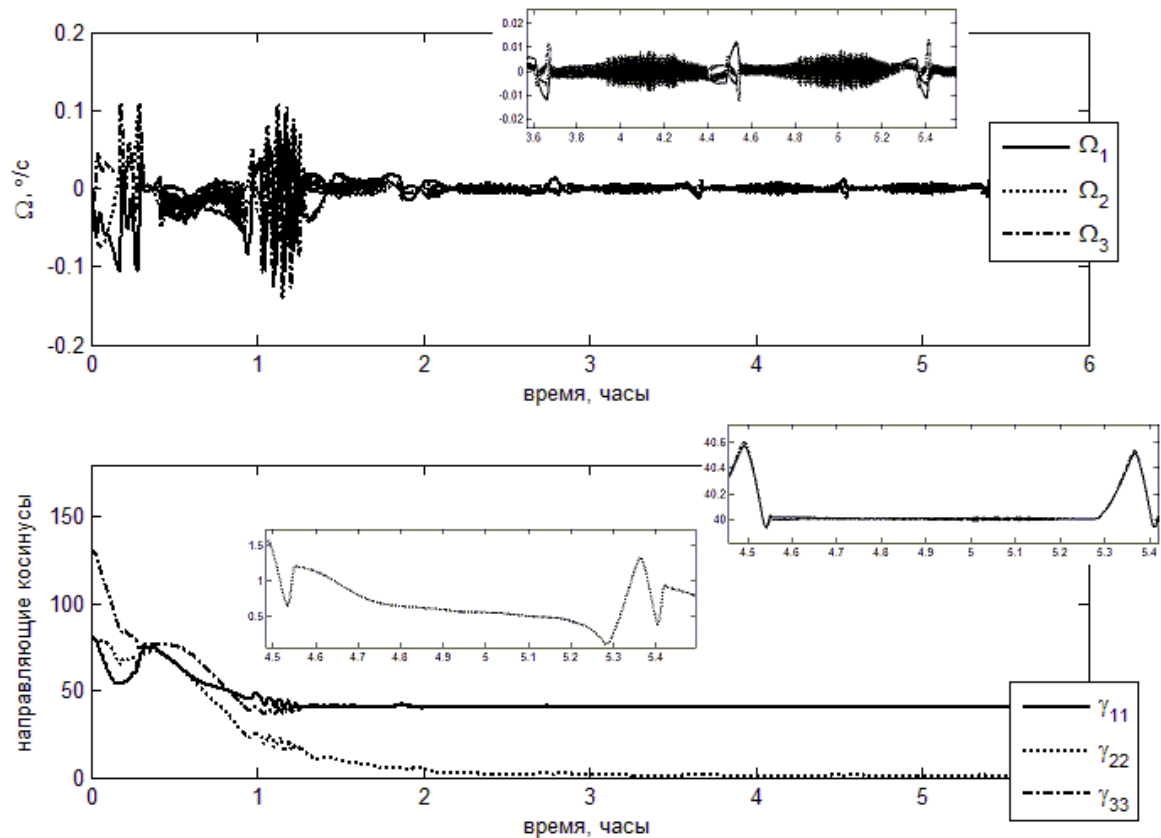


Рис. 4. Номинальный режим произвольной ориентации

Для выбранных параметров спутника и магнитных катушек выражение (4.4) дает (после сопоставления параметра  $k_r$  с используемым в численном моделировании подходе к реализации управления) точность ориентации в плоскости около  $0.45^\circ$ , что хорошо согласуется с численным результатом ( $0.6^\circ$ ). Влияние паразитной компоненты момента приводит к точности ориентации вне плоскости орбиты около  $1.5^\circ$ .

## Заключение

Для спутника, оснащенного тангажным маховиком и активной магнитной системой ориентации, рассмотрены переходный и стационарный режимы. В переходном режиме получены конечные выражения характеристических показателей при движении спутника на полярной орбите. Эти выражения могут использоваться для оценки времени переходных процессов на этапе проектирования системы ориентации. В номинальном режиме ориентации в гравитационном поле получены оценки точности ориентации при использовании упрощенного алгоритма гашения угловой скорости. В

номинальном режиме произвольной ориентации в плоскости орбиты предложен алгоритм разворота спутника, получена оценка точности в случае действия на спутник слабого гравитационного момента. Приведены примеры численного моделирования.

## Библиография

1. Сарычев В.А. Вопросы ориентации искусственных спутников. Москва: ВИНТИ, 1978. 222 с.
2. Likins P.W. Attitude stability criteria for dual spin spacecraft // *J. Spacecr. Rockets*. 1967. V. 4, № 12. pp. 1638–1643.
3. Сарычев В.А., Сазонов В.В. Нутационные демпферы спутников с двойным вращением // *Celest. Mech. Dyn. Astron.* 1977. V. 15, № 2. pp. 225–242.
4. Овчинников М.Ю., Ролдугин Д.С. Магнитная система ориентации спутника, оснащенного тангажным маховиком // *Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша*. 2011. № 21. 28 с. URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2011-21>
5. Артемьев Н.А. Метод определения характеристических показателей и приложение его к двум задачам небесной механики // *Известия АН СССР. Серия математическая*. 1944. Т. 8, № 2. с. 61–100.
6. Малкин И.Г. Некоторые задачи теории нелинейных колебаний. Москва: Едиториал УРСС, 2004. 496 с.
7. Ovchinnikov M.Y., Roldugin D.S., Penkov V.I. Asymptotic study of a complete magnetic attitude control cycle providing a single-axis orientation // *Acta Astronaut.* 2012. V. 77. pp. 48–60.