



Маштаков Я.В., [Ткачев С. С.](#)

Построение углового
движения космического
аппарата при межпланетном
перелете

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Маштаков Я.В., Ткачев С. С.
Построение углового движения космического аппарата при межпланетном перелете //
Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2015. № 24. 16 с. URL:
<http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2015-24>

**Ордена Ленина
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М.В. Келдыша
Российской академии наук**

Я.В. Маштаков, С.С. Ткачев

**Построение углового движения
космического аппарата
при межпланетном перелете**

Москва — 2015

Маштаков Я.В., Ткачев С.С.

Построение углового движения космического аппарата при межпланетном перелете

Рассматривается задача построения углового движения и его реализации с помощью двигателей-маховиков при межпланетных перелетах. Требуемое угловое движение строится на основе известного направления вектора тяги маршевого двигателя и направления на Солнце, а управление, обеспечивающее асимптотическую устойчивость такого движения, строится с использованием PD-регулятора. Рассматривается алгоритм разгрузки избыточного кинетического момента, накопленного маховиками при парировании внешних возмущений.

Ключевые слова: построение углового движения КА, PD-регулятор, межпланетный перелет

Yaroslav Mashtakov, Stepan Tkachev

Angular motion synthesis for interplanetary flight

Problem of angular motion synthesis for interplanetary flight is considered. Control algorithm based on PD-controller is applied to guarantee asymptotic stability of the obtained angular motion. Reaction wheels are used to provide necessary control torques. Different disturbances which can affect orientation of the satellite are considered. Reaction wheels desaturation is studied.

Key words: SC angular motion synthesis, PD-controller, interplanetary flight

Работа поддержана грантом РФФИ № 14-11-00621.

Введение

В настоящее время для межпланетных перелетов все чаще используются двигатели малой тяги. С одной стороны, это позволяет сократить расход топлива, необходимый для осуществления перелета, и тем самым увеличить массу полезной нагрузки. Такой эффект достигается за счет гораздо большей по сравнению со стандартными ракетными двигателями скорости истечения рабочего тела при использовании плазменных и ионных двигателей. В то же время из-за малости тяги двигатели работают практически на всем протяжении перелета. Это, в свою очередь, требует определенного режима углового движения космического аппарата (КА): в течение длительного периода времени необходимо ориентировать аппарат таким образом, чтобы направление вектора тяги соответствовало заданному.

Одним из недостатков плазменных и ионных двигателей является их высокое энергопотребление, поэтому помимо ограничений на положение вектора тяги КА, накладываются ограничения и на ориентацию солнечных панелей, установленных на КА. Вместе эти условия позволяют построить требуемое программное угловое движение.

Для реализации полученного углового движения в настоящей работе используется маховичная система ориентации. В силу действующих на КА различных возмущающих факторов, например, неточности знания динамической модели, ошибок при установке маршевого двигателя и маховиков, изменения тензора инерции КА из-за расхода топлива, маховики накапливают избыточный кинетический момент, который необходимо сбрасывать. В настоящей работе в качестве инструмента разгрузки маховиков рассматриваются двигатели с нерегулируемой тягой.

Основное внимание в работе уделяется методической части построения управления угловым движением КА. Для подтверждения достоверности полученных результатов приводится пример конкретной межпланетной миссии.

1. Постановка задачи

Рассматривается задача построения и реализации углового движения КА во время межпланетного перелета. Вводятся следующие системы координат:

$O_a Y_1 Y_2 Y_3$ — инерциальная система координат (ИСК), ее начало расположено в центре масс гравитирующего тела, ось $O_a Y_2$ направлена перпендикулярно плоскости эклиптики, $O_a Y_3$ направлена в точку весеннего равноденствия эпохи J2000, а $O_a Y_1$ дополняет эту систему до правой ортогональной;

$Ox_1x_2x_3$ — связанная с КА система координат (ССК), ее начало расположено в центре масс аппарата, оси являются его главными центральными осями инерции;

$OX_1X_2X_3$ — опорная система координат (ОСК), начало совпадает с центром масс КА, положение ее осей соответствует программному движению КА; в случае идеального управления ССК должна быть совмещена с ОСК.

В качестве известных величин рассматриваются требуемое направление вектора тяги \mathbf{r}_{thr} и вектор \mathbf{r}_s , направленный из центра масс КА к центру масс Солнца. На основе двух этих функций времени требуется синтезировать угловое движение КА, а также построить алгоритм его реализации.

2. Построение углового движения

Для построения программного углового движения КА, используются кинематические уравнения Пуассона [1] для матрицы перехода из ИСК в ОСК:

$$\dot{\mathbf{B}} = \mathbf{W}\mathbf{B}, \quad (2.1)$$

где

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1^T \\ \mathbf{e}_2^T \\ \mathbf{e}_3^T \end{pmatrix}, \quad \dot{\mathbf{B}} = \begin{pmatrix} \dot{\mathbf{e}}_1^T \\ \dot{\mathbf{e}}_2^T \\ \dot{\mathbf{e}}_3^T \end{pmatrix}, \quad \mathbf{W} = \begin{pmatrix} 0 & \omega_{3,abs} & -\omega_{2,abs} \\ -\omega_{3,abs} & 0 & \omega_{1,abs} \\ \omega_{2,abs} & -\omega_{1,abs} & 0 \end{pmatrix},$$

$\omega_{i,abs}$ — компоненты вектора угловой скорости КА в проекциях на оси ОСК, \mathbf{e}_i — орты ОСК в проекции на оси ИСК. Здесь и далее точка означает производную по времени.

Как уже упоминалось выше, требуется построить угловое движение КА, обеспечивающее выполнение заданного закона изменения направления вектора тяги. Предполагая, что вектор тяги двигателя направлен вдоль второго орта ССК, нормаль к солнечным панелям вдоль первого, а также предполагая, что ССК и ОСК совмещены, можно получить следующие выражения для базисных векторов ОСК:

$$\mathbf{e}_2 = \frac{\mathbf{r}_{thr}}{|\mathbf{r}_{thr}|}, \quad \mathbf{e}_1 = \frac{\mathbf{r}_s - (\mathbf{r}_s, \mathbf{e}_2)\mathbf{e}_2}{|\mathbf{r}_s - (\mathbf{r}_s, \mathbf{e}_2)\mathbf{e}_2|}, \quad \mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2. \quad (2.2)$$

Однако для построения углового движения, а точнее угловых скоростей КА, требуется знание производных базисных векторов ОСК. В

предположении, что векторы тяги и направления на Солнце известны как функции времени, можно получить следующие выражения:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{e}}_1 &= \frac{\dot{\mathbf{h}} - \mathbf{e}_1(\mathbf{e}_1, \dot{\mathbf{h}})}{|\dot{\mathbf{h}}|} \\ \dot{\mathbf{e}}_2 &= \frac{\dot{\mathbf{r}}_{thr} - \mathbf{e}_2(\dot{\mathbf{r}}_{thr}, \mathbf{e}_2)}{|\dot{\mathbf{r}}_{thr}|}, \\ \dot{\mathbf{e}}_3 &= \dot{\mathbf{e}}_1 \times \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_1 \times \dot{\mathbf{e}}_2,\end{aligned}\quad (2.3)$$

где введены обозначения

$$\mathbf{h} = \mathbf{r}_s - (\mathbf{r}_s, \mathbf{e}_2)\mathbf{e}_2, \quad \dot{\mathbf{h}} = \dot{\mathbf{r}}_s - \dot{\mathbf{e}}_2(\mathbf{r}_s, \mathbf{e}_2) - \mathbf{e}_2[(\dot{\mathbf{r}}_s, \mathbf{e}_2) + (\mathbf{r}_s, \dot{\mathbf{e}}_2)].$$

Угловая скорость КА получается подстановкой (2.2) и (2.3) в (2.1). Таким образом, угловое движение КА детерминировано.

При расчете орбит межпланетных перелетов функцию вектора тяги редко удается получить в аналитическом виде. Как правило, эта функция вычисляется численно и ее значение известно лишь в некоторые моменты времени t_i (обычно, с шагом в несколько десятков минут). Для построения даже углового движения, не говоря уже об управлении, таких данных недостаточно, поэтому требуется каким-либо образом интерполировать полученную численно функцию направления вектора тяги.

В настоящей работе для интерполяции используются сплайны Эрмита [2], которые позволяют построить кривую нужной степени гладкости, проходящую через заданный набор точек. При этом интерполируются функции вектора тяги и направления на Солнце, после чего по полученным выше формулам строится угловое движение КА (рис. 1).

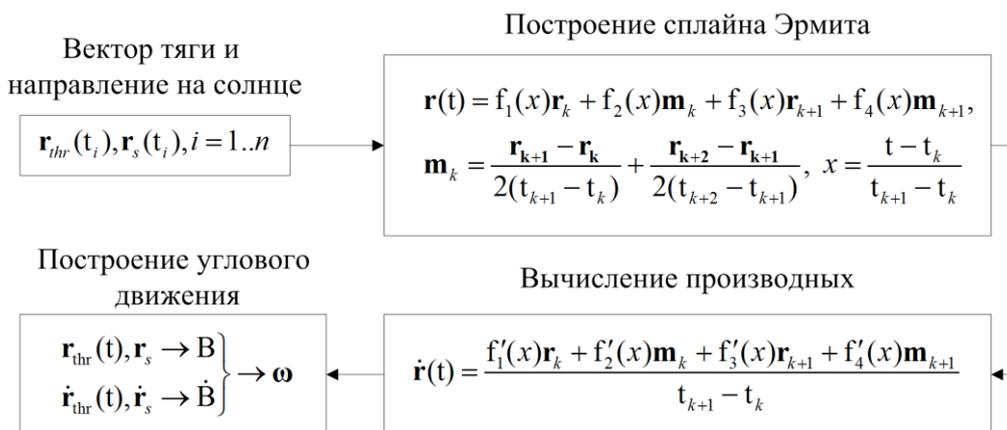


Рис. 1. Алгоритм построения углового движения

Функции $f_i(x)$, $f_i'(x)$ являются полиномами третьей степени, выражения для них и их производных записываются в виде

$$\begin{aligned}
f_1(x) &= 2x^3 - 3x^2 + 1, \quad f_1'(x) = 6x^2 - 6x, \\
f_2(x) &= x^3 - 2x^2 + x, \quad f_2'(x) = 3x^2 - 4x + 1, \\
f_3(x) &= -2x^3 + 3x^2, \quad f_3'(x) = -6x^2 + 6x, \\
f_4(x) &= x^3 - x^2, \quad f_4'(x) = 3x^2 - 2x.
\end{aligned}$$

Таким образом удается получить угловое движение КА, то есть его ориентацию и угловую скорость как функции времени.

3. Построение управления

Управление строится на основе PD-регулятора [3–5], который обеспечивает глобальную асимптотическую устойчивость требуемого движения. Для построения управления используется закон изменения кинетического момента системы

$$\dot{\mathbf{K}} + \boldsymbol{\omega}_{abs} \times \mathbf{K} = \mathbf{M}_{dist} + \mathbf{M}_{ctrl}. \quad (3.1)$$

Здесь $\mathbf{K} = \mathbf{J}\boldsymbol{\omega}_{abs}$ — суммарный кинетический момент КА, \mathbf{J} — тензор инерции КА, $\boldsymbol{\omega}_{abs}$ — абсолютная угловая скорость аппарата, \mathbf{M}_{dist} и \mathbf{M}_{ctrl} — момент внешних сил и управляющий момент соответственно. Управление строится таким образом, чтобы совместить ОСК и ССК и обеспечить такому движению асимптотическую устойчивость. Для синтеза такого управления используется теорема Барбашина-Красовского [6]. Функция Ляпунова V , фигурирующая в теореме, выбирается в виде

$$V = \frac{1}{2}(\boldsymbol{\omega}_{rel}, \mathbf{J}\boldsymbol{\omega}_{rel}) + k_a(3 - \text{tr}\mathbf{A}),$$

где $\boldsymbol{\omega}_{rel}$ — угловая скорость ССК относительно ОСК, \mathbf{A} — матрица направляющих косинусов, связывающая ССК и ОСК, k_a — положительный коэффициент. Легко видеть, что $V > 0$ для любого положения спутника, кроме положения равновесия (это напрямую следует из того факта, что тензор инерции \mathbf{J} есть положительно определенная матрица, а след матрицы направляющих косинусов равняется трем только в случае тождественного преобразования). Рассматривая производную этой функции с учетом (3.1) и принимая, что $\boldsymbol{\omega}_{abs} = \boldsymbol{\omega}_{rel} + \mathbf{A}\boldsymbol{\omega}_0$, где $\boldsymbol{\omega}_0$ — угловая скорость ОСК, можно получить

$$\dot{V} = (\boldsymbol{\omega}_{rel}, \mathbf{M}_{dist} + \mathbf{M}_{ctrl} - \boldsymbol{\omega}_{abs} \times \mathbf{J}\boldsymbol{\omega}_{abs} - \mathbf{J}\dot{\mathbf{A}}\boldsymbol{\omega}_0 - \mathbf{J}\mathbf{A}\dot{\boldsymbol{\omega}}_0) - k_a \text{tr}\dot{\mathbf{A}}.$$

Из кинематических уравнений Пуассона для матрицы перехода между ОСК и ССК следует:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{A}} &= \mathbf{W}_{rel} \mathbf{A}, \\ \mathbf{W}_{rel} &= \begin{pmatrix} 0 & \omega_3 & -\omega_2 \\ -\omega_3 & 0 & \omega_1 \\ \omega_2 & -\omega_1 & 0 \end{pmatrix} \\ \text{tr} \dot{\mathbf{A}} &= \omega_1(a_{32} - a_{23}) + \omega_2(a_{13} - a_{31}) + \omega_3(a_{21} - a_{12}),\end{aligned}$$

где ω_i – компоненты вектора угловой скорости $\boldsymbol{\omega}_{rel}$, a_{ij} – компоненты матрицы \mathbf{A} .

Итоговое выражение для \dot{V} принимает вид

$$\dot{V} = (\boldsymbol{\omega}_{rel}, \mathbf{M}_{dist} + \mathbf{M}_{ctrl} - \boldsymbol{\omega}_{abs} \times \mathbf{J} \boldsymbol{\omega}_{abs} - \mathbf{J} \mathbf{W}_{rel} \mathbf{A} \boldsymbol{\omega}_0 - \mathbf{J} \mathbf{A} \dot{\boldsymbol{\omega}}_0 - k_a \mathbf{S}),$$

где $\mathbf{S} = (a_{32} - a_{23}, a_{13} - a_{31}, a_{21} - a_{12})^T$.

Согласно теореме Барбашина-Красовского, если функция \dot{V} отрицательна для любой целой траектории, кроме положения равновесия (в нем значение функции должно быть равно нулю), то такое положение равновесия будет асимптотически устойчивым. Это выполняется, если

$$\mathbf{M}_{dist} + \mathbf{M}_{ctrl} - \boldsymbol{\omega}_{abs} \times \mathbf{J} \boldsymbol{\omega}_{abs} - \mathbf{J} \mathbf{W}_{rel} \mathbf{A} \boldsymbol{\omega}_0 - \mathbf{J} \mathbf{A} \dot{\boldsymbol{\omega}}_0 - k_a \mathbf{S} = -k_\omega \boldsymbol{\omega}_{rel}, k_\omega > 0.$$

Таким образом,

$$\dot{V} = -k_\omega (\boldsymbol{\omega}_{rel}, \boldsymbol{\omega}_{rel}). \quad (3.2)$$

Из (3.2) и выражения для абсолютной угловой скорости КА следует выражение для управляющего момента

$$\begin{aligned}\mathbf{M}_{ctrl} &= -\mathbf{M}_{dist} + \boldsymbol{\omega}_{abs} \times \mathbf{J} \boldsymbol{\omega}_{abs} + \mathbf{J} \mathbf{W}_{rel} \mathbf{A} \boldsymbol{\omega}_0 + \\ &\quad + \mathbf{J} \mathbf{A} \dot{\boldsymbol{\omega}}_0 + k_a \mathbf{S} - k_\omega (\boldsymbol{\omega}_{abs} - \mathbf{A} \boldsymbol{\omega}_0).\end{aligned}$$

Теперь можно построить управление, реализующее полученное ранее угловое движение.

4. Реализация управления

В качестве основного инструмента управления ориентацией КА используются двигатели-маховики. Выражение для управления в этом случае принимает вид

$$\mathbf{M}_{ctrl} = -\dot{\mathbf{H}} - \boldsymbol{\omega}_{abs} \times \mathbf{H},$$

где \mathbf{H} есть полный кинетический момент маховиков.

При парировании различных моментов, действующих на КА, маховики могут накапливать избыточный кинетический момент, который

необходимо каким-либо образом «сбрасывать». В настоящей работе предполагается, что для этих целей на КА установлены двигатели нерегулируемой тяги. При моделировании полагается, что на КА установлены три двигателя-маховика вдоль главных осей инерции, и каждому из них соответствует набор разгрузочных двигателей. Для разгрузки предлагается использовать следующий алгоритм: как только кинетический момент, накопленный маховиком, достигает некоторого порогового значения, на короткий промежуток времени включаются разгрузочные двигатели, создающие момент M_{unload} противоположно направленный текущему значению накопленного кинетического момента. После этого двигатели выключаются, и происходит стабилизация аппарата. Как только аппарат стабилизируется, двигатели снова включаются на малый промежуток времени. Так происходит, пока кинетический момент, накопленный маховиками, не достигнет некоторого удовлетворительного значения. Блок-схема алгоритма приведена на рис. 2.

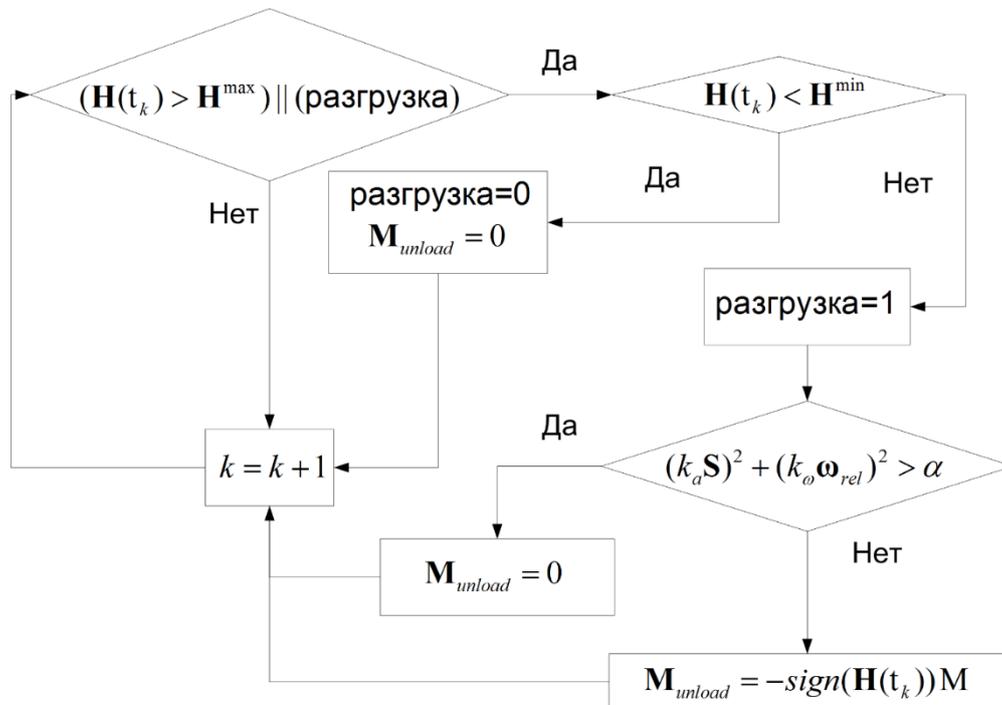


Рис. 2. Алгоритм разгрузки маховиков

Использование такого алгоритма позволяет сохранить точность ориентации аппарата во время разгрузки маховиков на приемлемом уровне и в то же время сбросить накопленный ими кинетический момент.

5. Компьютерное моделирование

Для оценки работы полученных алгоритмов рассматривается задача перелета Земля-Луна с использованием двигателя малой тяги. При этом приняты следующие параметры КА:

- Характерные размеры спутника 1 м;
- Вектор тяги направлен вдоль второй оси связанной с КА СК;
- Тензор инерции КА $\mathbf{J} = \text{diag}(400, 380, 50)$ кг·м²;
- Рассматривается три случая работы двигателей разгрузки:
 1. $|\mathbf{M}_{unload}| = 0.25$ Н·м, минимальное время работы 1 с;
 2. $|\mathbf{M}_{unload}| = 3$ Н·м, минимальное время работы 1 с;
 3. $|\mathbf{M}_{unload}| = 3$ Н·м, минимальное время работы 0.1 с;
- Максимальный кинетический момент, накапливаемый маховиками, составляет 2 Н·м·с;
- Максимальный управляющий момент 0.05 Н·м;
- На КА установлен двигатель СПД-100 [7], направление вектора тяги которого может отличаться от номинального на 0.7° ;
- Тензор инерции известен с точностью до 10%;
- Точность установки маховиков 1° .

Рассматривается два режима работы системы управления в зависимости от коэффициента α , который используется в качестве порогового значения для остановки разгрузки: точный и грубый.

Результаты моделирования представлены ниже на рисунках.

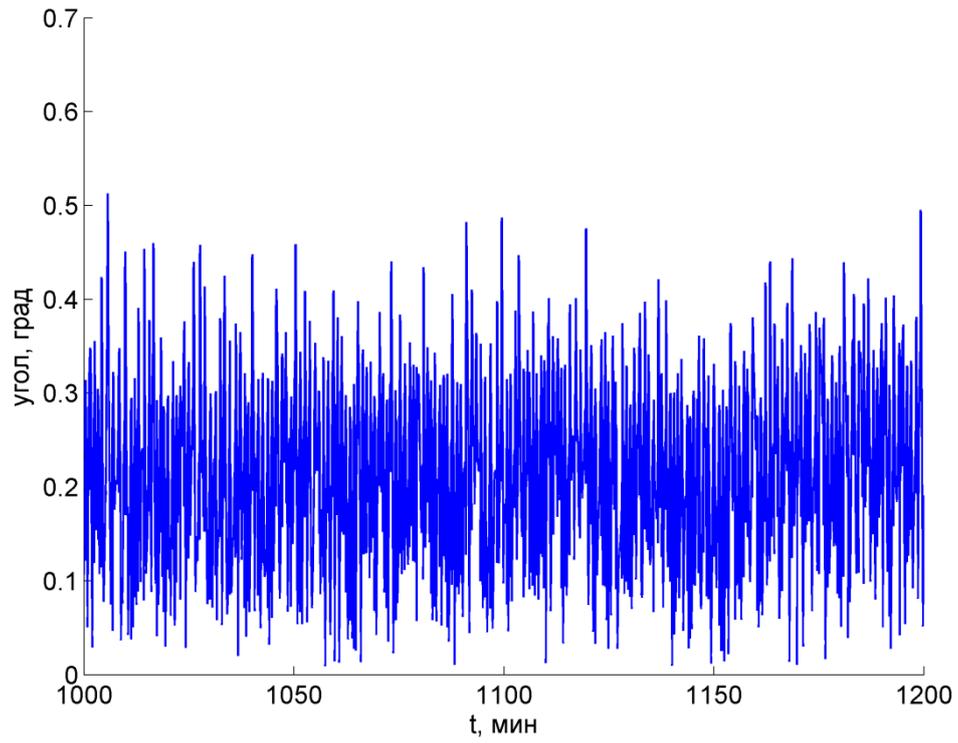


Рис. 3. Отклонение вектора тяги, случай 1, точный режим

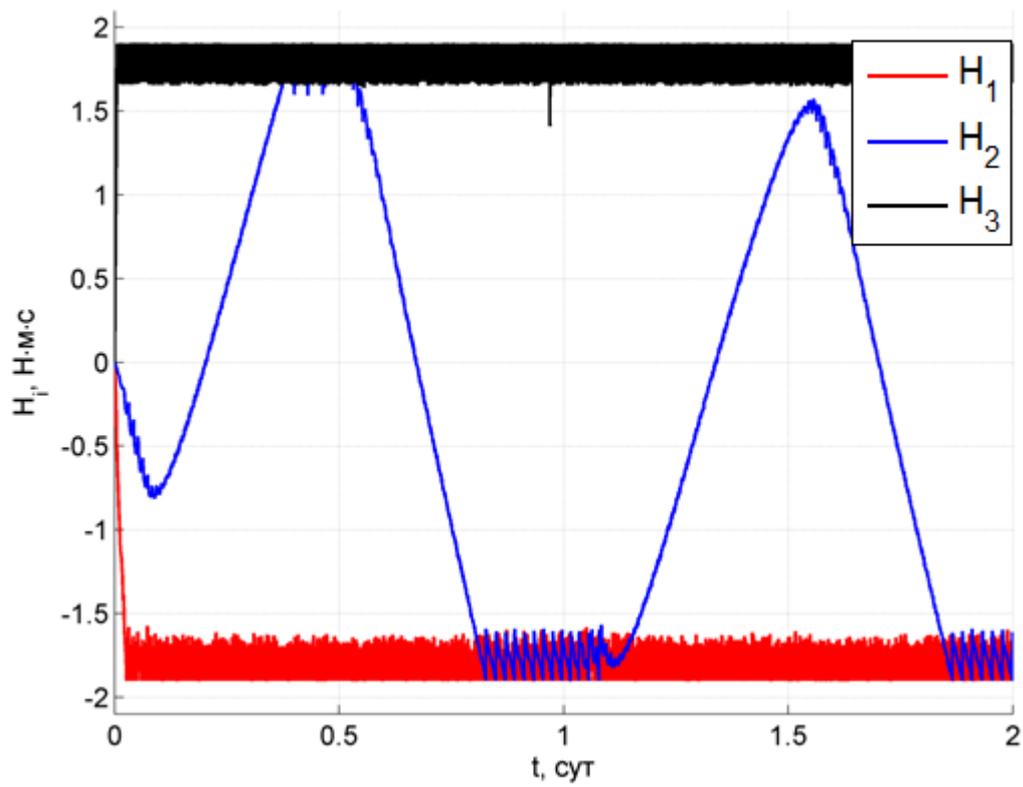


Рис. 4. Кинетический момент маховиков, случай 1, точный режим

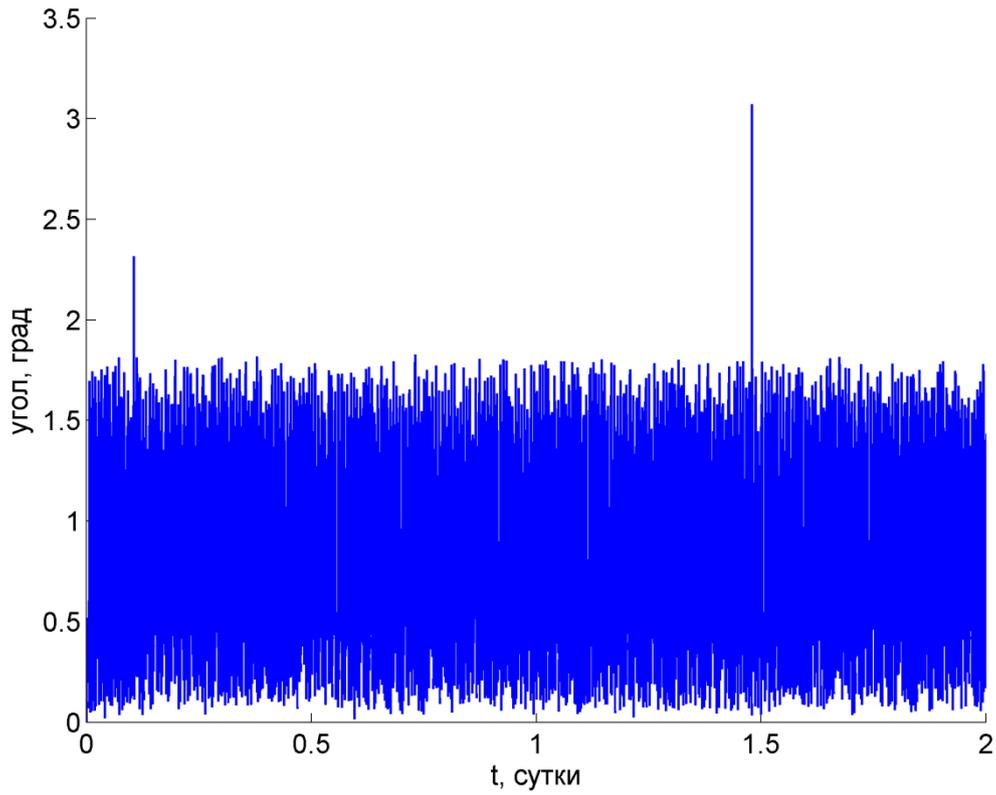


Рис. 5. Отклонение вектора тяги, случай 1, грубый режим

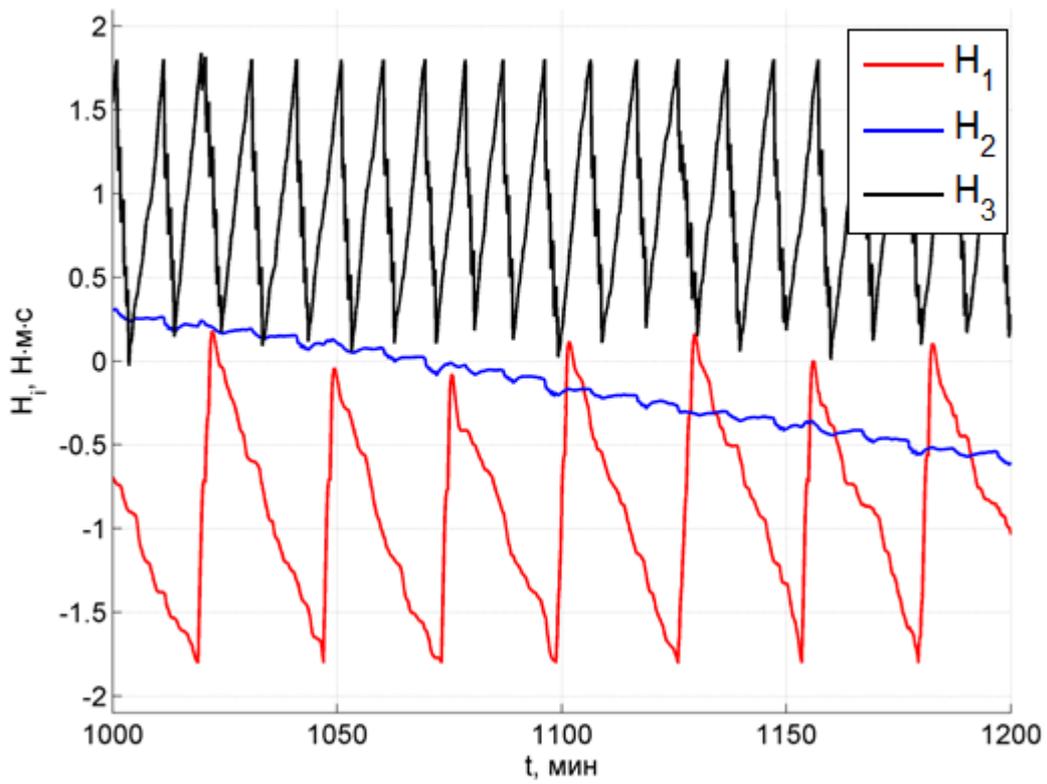


Рис. 6. Кинетический момент маховиков, случай 1, грубый режим

При использовании точного режима ошибка в направлении вектора тяги не превышает 1° , однако маховики практически все время насыщены (см. рис. 3-4). В то же время, при использовании грубого режима точность ухудшается до 2° , однако маховики загружены меньше (см. рис. 5-6).

Использование двигателей разгрузки большей тяги, которые работают минимум в течение одной секунды, является неприемлемым: за это время КА получает слишком большой прирост кинетического момента, который маховики не могут компенсировать без значительной потери ориентации — ошибка в направлении вектора тяги доходит до 110° (рис. 7).

В то же время, если минимальное время работы двигателя составляет 0.1 с, результаты значительно улучшаются. Также как и для малых двигателей можно выделить два режима работы.

За двое суток полета время работы двигателей в первом случае составило 3640 с, а в третьем случае — 304 с.

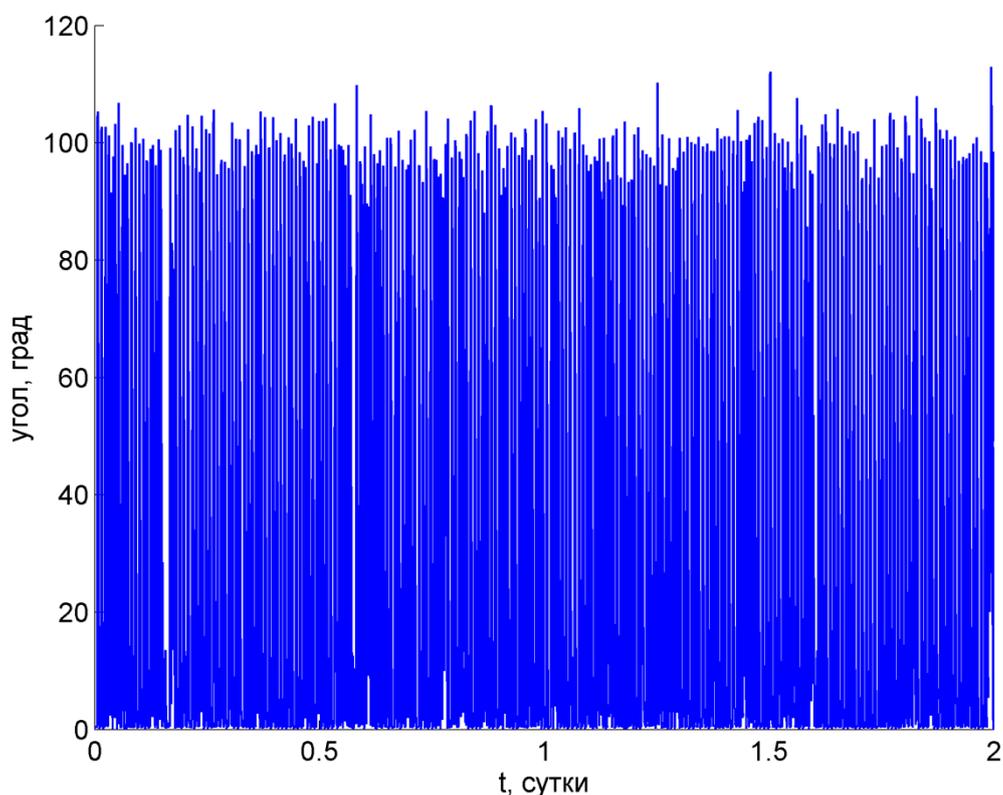


Рис. 7. Отклонение вектора тяги, случай 2

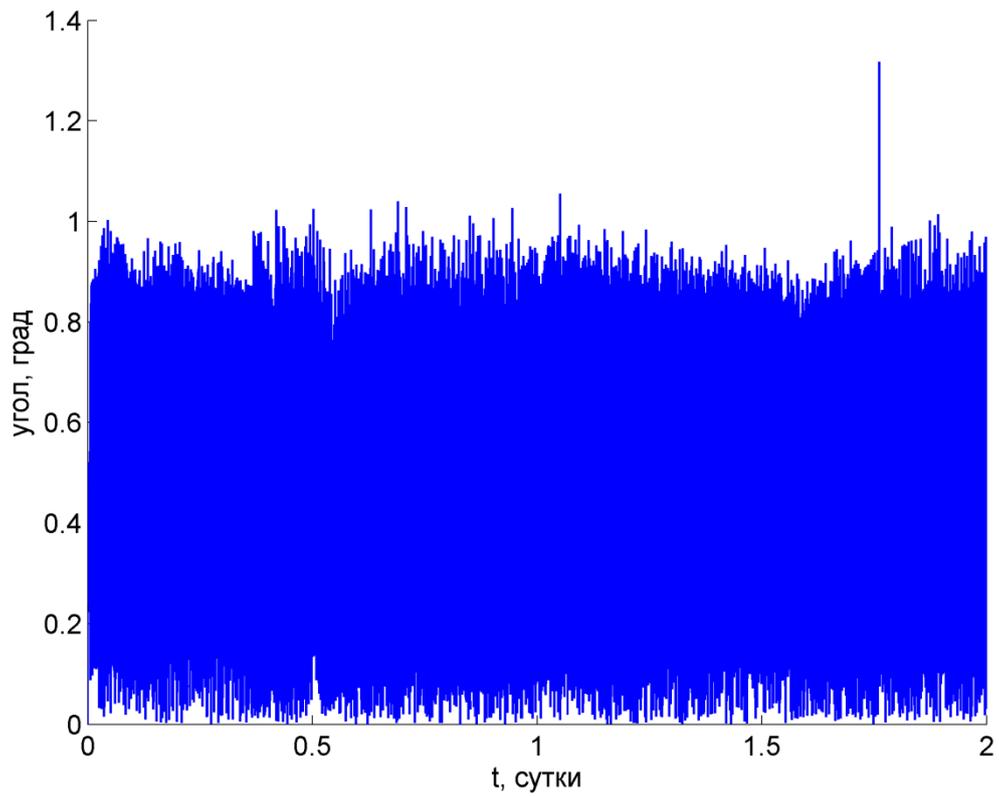


Рис. 8. Отклонение вектора тяги, случай 3, точный режим

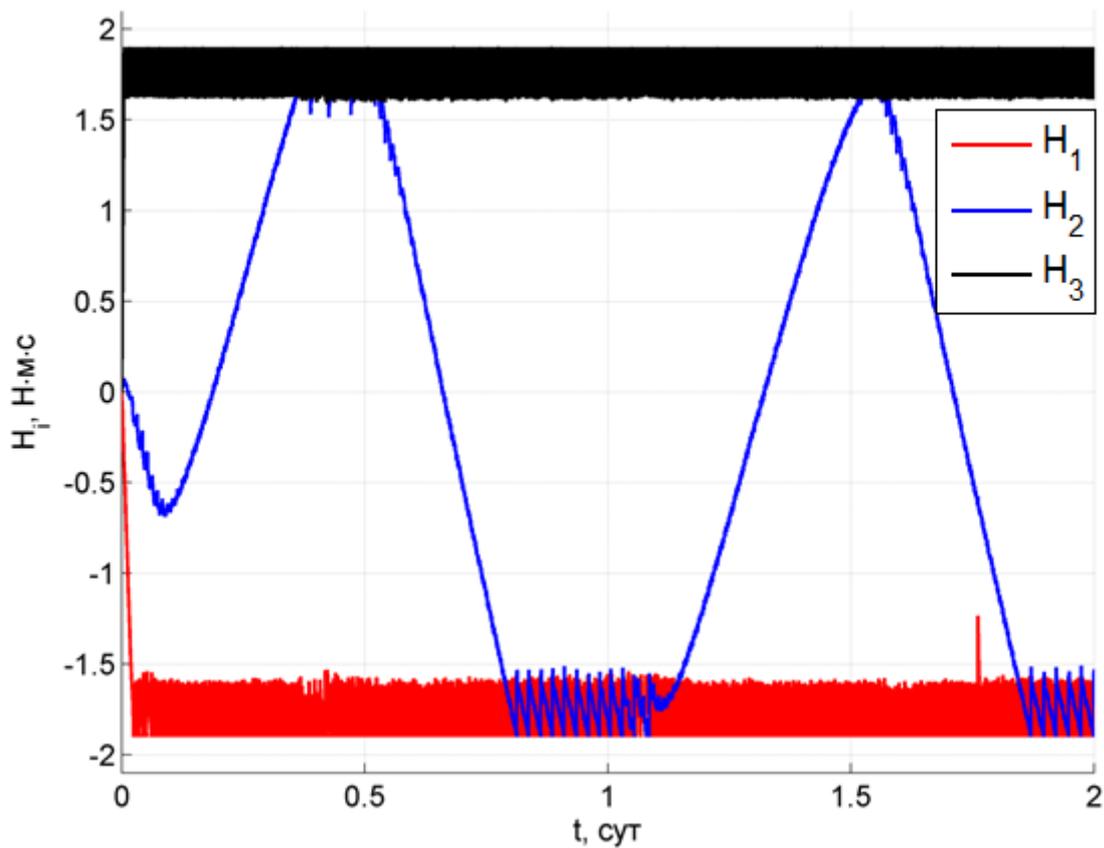


Рис. 9. Кинетический момент маховиков, случай 3, точный режим

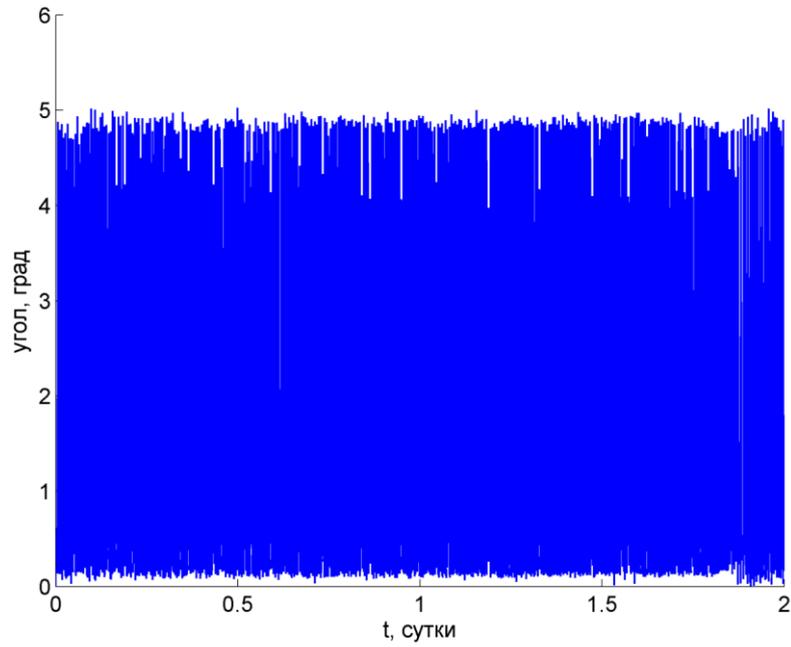


Рис. 10. Отклонение вектора тяги, случай 3, грубый режим

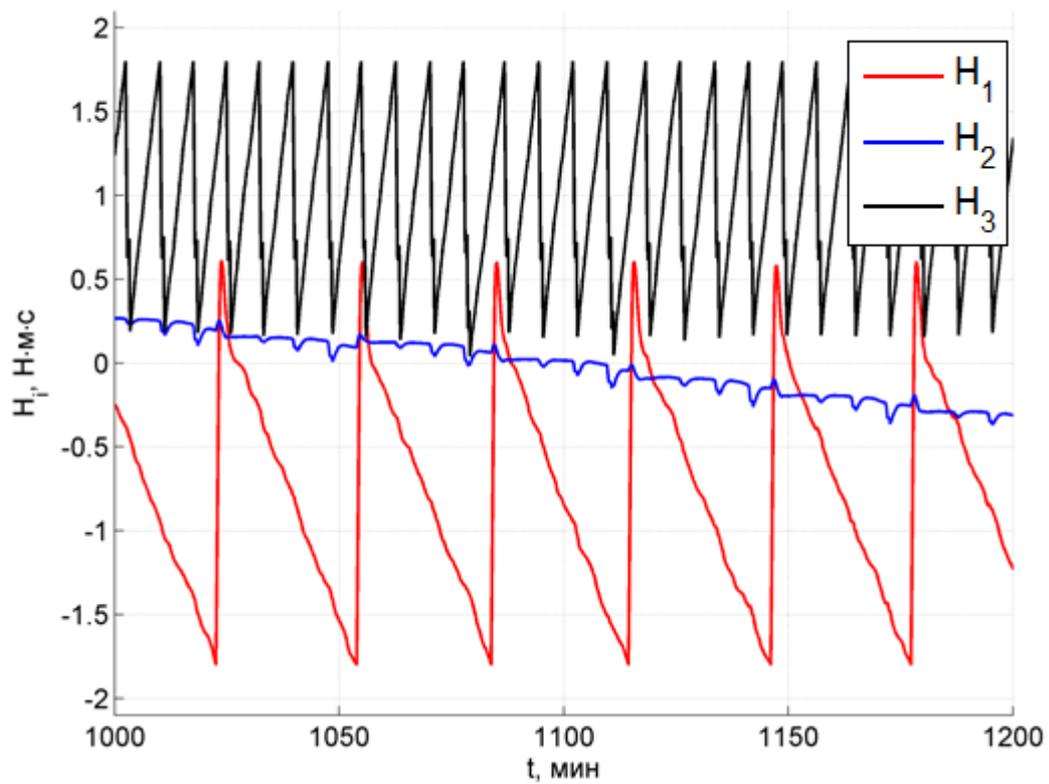


Рис. 11. Кинетический момент маховиков, случай 3, грубый режим

Заключение

Предложены методика построения углового движения КА при межпланетном перелете и алгоритм разгрузки маховичной системы ориентации. Проведено численное моделирование работы полученных алгоритмов, при котором учитывались различные возмущения, воздействующие на КА. Были промоделированы двигатели разгрузки различной тяги, а также выявлены два режима их работы. Определено время работы двигателей.

Авторы выражают благодарность С.П. Трофимову за предоставленные для моделирования данные по орбитальному движению КА и М.Ю. Овчинникову за внимание к работе.

Список литературы

1. Бранец В.Н., Шмыглевский И.П. Применение кватернионов в задачах ориентации твердого тела. М.: Издательство “Наука,” 1973. 320 С.
2. Роджерс Д., Адамс Д. Математические основы машинной графики. М.: Мир, 2001. 604 С.
3. Wie B., Lu J. Feedback control logic for spacecraft eigenaxis rotations under slew rate and control constraints // J. Guid. Control. Dyn. 1995. Vol. 18. N 6. P. 1372–1379.
4. Wie B., Barba P.M. Quaternion feedback for spacecraft large angle maneuvers. // J. Guid. Control. Dyn. 1985. Vol. 8. N 3. P. 360–365.
5. Tsitorias P. New Control Laws for the Attitude Stabilization of Rigid Bodies // 13th IFAC Symposium on Automatic Control in Aerospace. – 1994. – P. 316–321.
6. Яковенко Г.Н. Краткий курс аналитической динамики. М.: БИНОМ, 2004.
7. Двигатель СПД-100 [Электронный ресурс]. URL: <http://www.fakel-russia.com/production/spd/SPD-100D/> (дата обращения: 16.03.2015).

Оглавление

Введение	3
1. Постановка задачи	3
2. Построение углового движения	4
3. Построение управления	6
4. Реализация управления	7
5. Компьютерное моделирование.....	8
Заключение	15
Список литературы	15