



Попов И. В., Тимофеева Ю.Е.

Построение разностной
схемы повышенного порядка
аппроксимации для
уравнения переноса с
использованием адаптивной
искусственной вязкости

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Попов И. В., Тимофеева Ю.Е. Построение разностной схемы повышенного порядка аппроксимации для уравнения переноса с использованием адаптивной искусственной вязкости // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2015. № 39. 25 с. URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2015-39>

**Ордена Ленина
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М.В.Келдыша
Российской академии наук**

И. В. Попов, Ю. Е. Тимофеева

**Построение разностной схемы
повышенного порядка аппроксимации
для уравнения переноса
с использованием адаптивной
искусственной вязкости**

Москва — 2015

И. В. Попов, Ю. Е. Тимофеева

Построение разностной схемы повышенного порядка аппроксимации для уравнения переноса с использованием адаптивной искусственной вязкости

Применён метод адаптивной искусственной вязкости (АИВ) при моделировании процесса одномерного переноса. Использовалась неустойчивая разностная схема с третьим порядком аппроксимации по времени. Проведено сравнение с существующими разностными схемами.

Ключевые слова: адаптивная искусственная вязкость, перенос.

I. V. Popov, Y. E. Timofeeva

Construction of difference scheme with heightened order approximation with adaptive artificial viscosity for advection equation.

This paper describes the adaptive artificial viscosity (AAV) method applied for one-dimensional advection process modeling. Unstable difference scheme with third order approximation on time was used for it. This paper also contains comparative analysis with known schemes.

Key words: adaptive artificial viscosity, advection.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект 15-01-04620-а

Введение

Уравнение переноса является основным гиперболическим уравнением, которое используется для разработки и тестирования новых численных методов, моделирующих процессы тепломассопереноса. В настоящее время построено большое количество конечно-разностных схем для решения задачи Коши для одномерного уравнения переноса. Все они в той или иной степени искажают точное решение по прошествии некоторого промежутка времени. При использовании устойчивых разностных схем первого порядка аппроксимации численное решение, как правило, «размывается» со временем по пространству. Схемы повышенного порядка аппроксимации также могут приводить к существенным качественным искажениям решения. Некоторые из используемых схем сложно обобщить на неструктурированные сетки. Поэтому представляет интерес разработка численного метода, дающего монотонные решения с практически приемлемой точностью, который допускает обобщения на различные типы сеток.

Приведём наиболее известные разностные схемы, аппроксимирующие уравнение переноса, $\gamma = Ku = \frac{\alpha \tau}{h}$ - число Куранта.

1) *Явная схема с левой разностью*

$$u_i^{n+1} = (1 - \gamma)u_i^n + \gamma u_{i-1}^n$$

имеет первый порядок аппроксимации по времени и по пространству, устойчива при $\gamma \leq 1$.

2) *Схема Лакса-Вендроффа*

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \gamma(F_p - F_l),$$

$$F_p = 0.5(u_{i+1}^n + u_i^n) - 0.5\gamma(u_{i+1}^n - u_i^n); F_l = 0.5(u_i^n + u_{i-1}^n) - 0.5\gamma(u_i^n - u_{i-1}^n).$$

Аппроксимирует исходную задачу со вторым порядком по времени и пространству, устойчива для $\gamma \leq 1$.

3) *Схема Р. П. Федоренко*

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \gamma(u_i^n - u_{i-1}^n) - 0.5\sigma\gamma(\gamma - \gamma^2)(u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n),$$

$$\sigma = \begin{cases} 1, \text{если } |u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n| < \lambda |u_i^n - u_{i-1}^n| \\ 0 - \text{в противном случае} \end{cases}$$

При $\lambda = 0$ схема превращается в схему с левой разностью, при $\lambda = \infty$ получается схема Лакса-Вендроффа. Для других λ схема соединяет в себе свойства двух данных схем, устойчива при $\gamma \leq 1$.

4) *Схема К. И. Бабенко*

$$u_{i+1}^{n+1} = u_i^n - \frac{1-\gamma}{1+\gamma} (u_i^{n+1} - u_{i+1}^n)$$

имеет второй порядок аппроксимации по времени и пространству, абсолютно устойчива.

5) *Схема второго порядка («парабола»)*

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \frac{\gamma}{2} (u_{i-2}^n - 4u_{i-1}^n + 3u_i^n) + \frac{\gamma^2}{2} (u_{i-2}^n - 2u_{i-1}^n + u_i^n)$$

устойчива при $\gamma \leq 2$, имеет второй порядок аппроксимации по времени и пространству.

Схема Федоренко является одной из первых схем с искусственными монотонизаторами. Для большинства из описанных схем существуют монотонизированные варианты. Чаще всего при этом в схему добавляются «лимитеры». Другой способ регуляризации решения состоит в ведении искусственной вязкости. Он был предложен фон Нейманом и Рихтмайером для численного решения системы уравнений газовой динамики. Однако введение искусственной вязкости во всей области решения приводит к потере точности и размыванию начального профиля. Новый подход, позволяющий выбирать вязкость в зависимости от особенностей решения, предложен в [1]. Используем его для обеспечения монотонности разностной схемы.

Постановка задачи

Рассмотрим линейное одномерное уравнение переноса

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = 0, a = \text{const.}$$

Для определённости положим скорость переноса a положительной величиной. Начальные и граничные условия имеют вид

$$u(0, x) = \psi(x); u(t, 0) = \varphi_1(t); u(t, l) = \varphi_2(t); 0 \leq x \leq l, 0 \leq t \leq T$$

Построение разностной схемы

По пространственной переменной x для простоты введём равномерную сетку узлов с шагом $h = \frac{l}{N-1}$, где N — число узлов: $x_0 = 0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{N-1} = l$. Введём сетку по времени $t_n = n\tau, n = 0, 1 \dots$. Шаг сетки τ определяется по формуле $\tau = \frac{Ku \cdot h}{a}$. Обозначим функции, относящиеся к моментам времени t_n и t_{n+1} , верхними индексами $u^n = u(t_n), u^{n+1} = u(t_{n+1})$.

При построении разностной схемы воспользуемся подходом Лакса-Вендроффа, который описан в [2], но при разложении функции u в ряд Тейлора

по t , в отличие от представленной в [2] схемы, оставим члены до третьего порядка включительно:

$$u^{n+1} = u^n + \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^n \tau + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right)^n \frac{\tau^2}{2} + \left(\frac{\partial^3 u}{\partial t^3}\right)^n \frac{\tau^3}{6} + O(\tau^4)$$

Выразим производные по времени через пространственные производные, используя исходное уравнение. Будем иметь:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -a \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t} \left(-a \frac{\partial u}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(-a \frac{\partial u}{\partial t}\right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(a^2 \frac{\partial u}{\partial x}\right) = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial^3 u}{\partial t^3} = \frac{\partial}{\partial t} \left(a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)$$

Третью производную будем аппроксимировать на сетку в представленном выше виде, чтобы не расширять шаблон по пространственной переменной x . При таком способе можно получить две схемы – явную и неявную, в зависимости от того, какие временные слои использовать для нахождения производной.

Подставим пространственные производные вместо временных в разложение функции u :

$$u^{n+1} = u^n - a\tau \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^n + \frac{a^2\tau^2}{2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)^n + \frac{a^2\tau^3}{6} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)^n$$

$$\frac{u^{n+1} - u^n}{\tau} = -a \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^n + \frac{a^2\tau}{2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)^n + \frac{a^2\tau^2}{6} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)^n$$

Аппроксимируем пространственные производные, для третьей производной используем n -ый и $(n-1)$ -ый слои, чтобы схема получилась явной:

$$\begin{aligned} \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\tau} &= -a \frac{u_{i+1}^n - u_i^n}{h} + \frac{a^2\tau}{2} \frac{(u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n)}{h^2} \\ &+ \frac{a^2\tau^2}{6} \frac{1}{\tau} \left(\frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{h^2} - \frac{u_{i+1}^{n-1} - 2u_i^{n-1} + u_{i-1}^{n-1}}{h^2} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_i^{n+1} &= u_i^n - a\tau \frac{u_{i+1}^n - u_i^n}{h} + \frac{a^2\tau^2}{2} \frac{(u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n)}{h^2} \\ &+ \frac{a^2\tau^2}{6} \left(\frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{h^2} - \frac{u_{i+1}^{n-1} - 2u_i^{n-1} + u_{i-1}^{n-1}}{h^2} \right) \end{aligned}$$

$$u_i^{n+1} = u_i^n - a\tau \frac{u_{i+1}^n - u_i^n}{h} + \frac{2a^2\tau^2}{3} \frac{(u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n)}{h^2} - \frac{a^2\tau^2}{6} \frac{u_{i+1}^{n-1} - 2u_i^{n-1} + u_{i-1}^{n-1}}{h^2}$$

Если для аппроксимации третьей производной использовать $(n+1)$ -ый и n -ый слои, то получим неявную схему:

$$\begin{aligned} \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\tau} &= -a \frac{u_{i+1}^n - u_i^n}{h} + \frac{a^2\tau}{2} \frac{(u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n)}{h^2} \\ &+ \frac{a^2\tau^2}{6} \frac{1}{\tau} \left(\frac{u_{i+1}^{n+1} - 2u_i^{n+1} + u_{i-1}^{n+1}}{h^2} - \frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{h^2} \right) \\ \frac{a^2\tau^2}{6h^2} u_{i-1}^{n+1} - \left(1 + \frac{a^2\tau^2}{3h^2} \right) u_i^{n+1} + \frac{a^2\tau^2}{6h^2} u_{i+1}^{n+1} \\ &= -(u_i^n - \frac{a\tau}{h} (u_{i+1}^n - u_i^n) + \frac{a^2\tau^2}{3h^2} (u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n)) \end{aligned}$$

Первая производная аппроксимируется разностью вперёд для того, чтобы за счёт внесения неустойчивости в схему, избежать сильного «размытия» пространственного профиля решения и падения его амплитуды относительно начального профиля, которое характерно для устойчивых разностных схем первого порядка аппроксимации.

Исследование порядка аппроксимации схемы

Зафиксируем шаг по времени $\tau = 10^{-6}$, выберем начальный профиль «левый треугольник»

$$\begin{cases} u(0, x) = 1 \text{ при } x \in (-\infty; l_1) \cup (l_2; +\infty), \\ u(0, x) = \frac{2}{l_2 - l_1} (x - l_1) \text{ при } x \in [l_1, l_2] \end{cases}$$

$l_1 = 10, l_2 = 30, T_{fin} = 0.1$ - время остановки

Проведём несколько расчётов по явной схеме, уменьшая шаг в два, четыре, восемь и шестнадцать раз, и найдём ошибку численного решения в норме C .

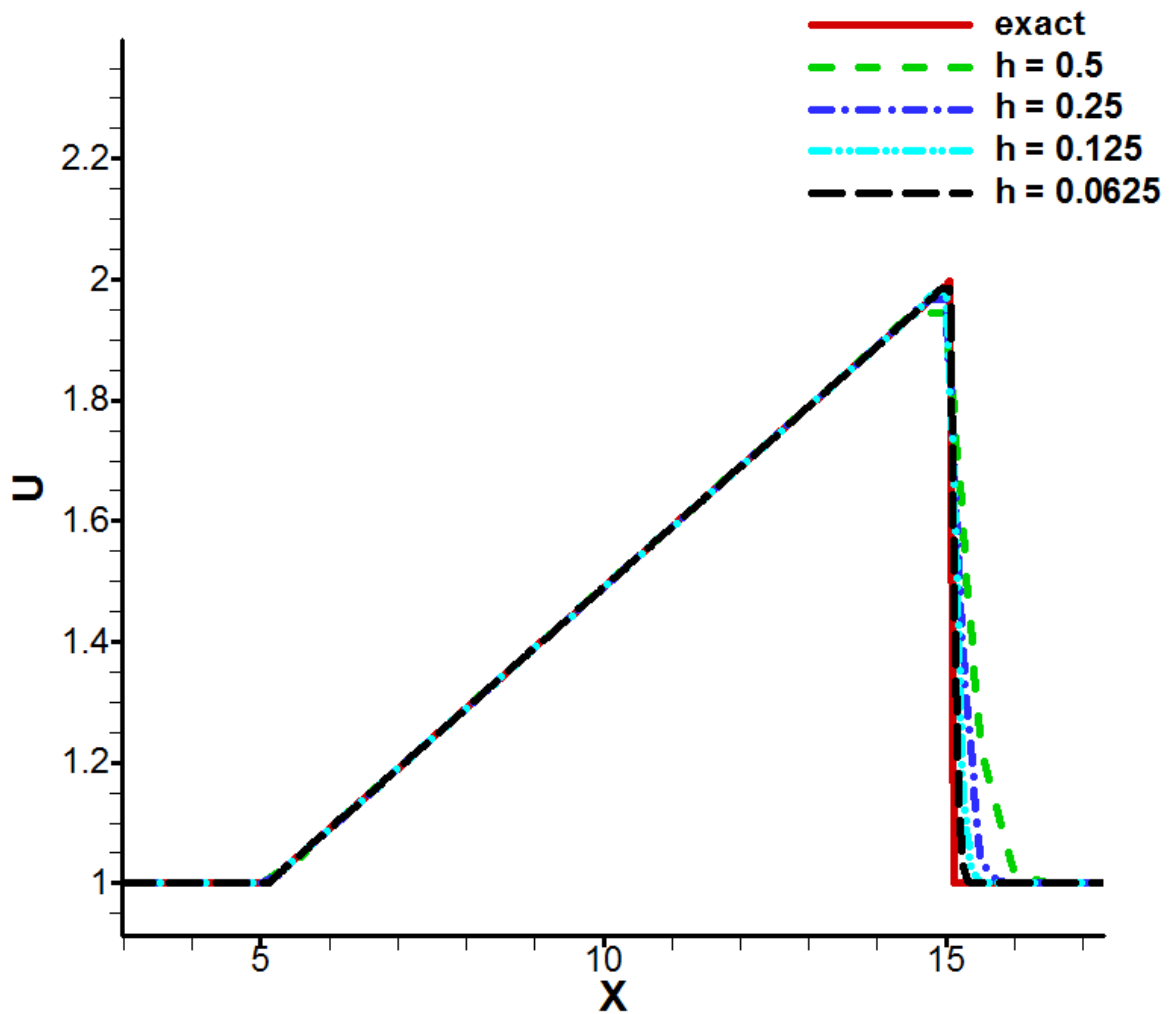


Рис. 1 Вид численного решения при сгущении сетки

Таблица 1

Шаг	Норма C разности точного и численного решений
$h = 0.5$	$\Delta_1 = 0.023196$
$h = 0.25$	$\Delta_2 = 0.0118141$
$h = 0.125$	$\Delta_3 = 0.00555276$
$h = 0.0625$	$\Delta_4 = 0.00210553$

Оценим порядок аппроксимации по полученным значениям норм:

$$p_1 = \log_2 \frac{\Delta_1}{\Delta_2} = \log_2 \frac{0.023196}{0.0118141} = 0.973366$$

$$p_2 = \log_2 \frac{\Delta_2}{\Delta_3} = \log_2 \frac{0.0118141}{0.00555276} = 1.08923$$

$$p_3 = \log_2 \frac{\Delta_3}{\Delta_4} = \log_2 \frac{0.00555276}{0.00210553} = 1.39902$$

Таким образом, порядок точности схемы по пространству в норме С равен 1.

Монотонизация схемы

Для обеспечения монотонности схем добавим слагаемое с искусственной вязкостью в правую часть, согласно методу адаптивной искусственной вязкости, описанному в [1]:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial x} \right)$$

Запишем уравнение в разностном виде (явная схема):

$$\begin{aligned} \frac{u^{n+1} - u^n}{\tau} = & -a \frac{u_{i+1}^n - u_i^n}{h} + \frac{a^2 \tau (u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n)}{2h^2} \\ & + \frac{a^2 \tau^2}{6\tau} \left(\frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{h^2} - \frac{u_{i+1}^{n-1} - 2u_i^{n-1} + u_{i-1}^{n-1}}{h^2} \right) \\ & + \frac{\mu_{i+\frac{1}{2}} \frac{u_{i+1}^n - u_i^n}{h} - \mu_{i-\frac{1}{2}} \frac{u_i^n - u_{i-1}^n}{h}}{h} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_i^{n+1} = & u_i^n - a\tau \frac{u_{i+1}^n - u_i^n}{h} + \frac{2a^2 \tau^2 (u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n)}{3h^2} \\ & - \frac{a^2 \tau^2 (u_{i+1}^{n-1} - 2u_i^{n-1} + u_{i-1}^{n-1})}{6h^2} + \mu_{i+\frac{1}{2}} \tau \frac{u_{i+1}^n - u_i^n}{h^2} - \mu_{i-\frac{1}{2}} \tau \frac{u_i^n - u_{i-1}^n}{h^2} \end{aligned}$$

Аналогично для неявной схемы:

$$\begin{aligned} \frac{a^2 \tau^2}{6h^2} u_{i-1}^{n+1} - \left(1 + \frac{a^2 \tau^2}{3h^2} \right) u_i^{n+1} + \frac{a^2 \tau^2}{6h^2} u_{i+1}^{n+1} \\ = - \left(u_i^n - \frac{a\tau}{h} (u_{i+1}^n - u_i^n) + \frac{a^2 \tau^2}{3h^2} (u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n) \right) \\ + \mu_{i+\frac{1}{2}} \tau \frac{u_{i+1}^n - u_i^n}{h^2} - \mu_{i-\frac{1}{2}} \tau \frac{u_i^n - u_{i-1}^n}{h^2} \end{aligned}$$

Для определения величины искусственной вязкости потребуем выполнения условий принципа максимума, который обеспечивает отсутствие осцилляций сеточной природы. Для анализа воспользуемся методом «замороженных» коэффициентов из [3]. Положим искусственную вязкость

одинаковой во всех узлах сетки $\mu_{i+\frac{1}{2}} = \mu_{i-\frac{1}{2}} = \mu$ и запишем уравнения для явной и неявной схем в трёхточечном виде

$$\begin{aligned}
u_i^{n+1} &= u_{i-1}^n \left(\frac{2a^2\tau^2}{3h^2} + \mu \frac{\tau}{h^2} \right) + u_i^n \left(1 + \frac{a\tau}{h} - \frac{4a^2\tau^2}{3h^2} - 2\mu \frac{\tau}{h^2} \right) \\
&\quad + u_{i+1}^n \left(-\frac{a\tau}{h} + \frac{2a^2\tau^2}{3h^2} + \mu \frac{\tau}{h^2} \right) - \frac{a^2\tau^2}{6h^2} (u_{i+1}^{n-1} - 2u_i^{n-1} + u_{i-1}^{n-1}) \\
\frac{a^2\tau^2}{6h^2} u_{i-1}^{n+1} - \left(1 + \frac{a^2\tau^2}{3h^2} \right) u_i^{n+1} + \frac{a^2\tau^2}{6h^2} u_{i+1}^{n+1} \\
&= - (u_{i-1}^n \left(\frac{a^2\tau^2}{3h^2} + \mu \frac{\tau}{h^2} \right) + u_i^n \left(1 + \frac{a\tau}{h} - \frac{2a^2\tau^2}{3h^2} - 2\mu \frac{\tau}{h^2} \right) \\
&\quad + u_{i+1}^n \left(-\frac{a\tau}{h} + \frac{a^2\tau^2}{3h^2} + \mu \frac{\tau}{h^2} \right))
\end{aligned}$$

Для обеспечения монотонности по критерию Фридрикса воспользуемся принципом максимума, для выполнения которого коэффициенты при $u_{i-1}^n, u_i^n, u_{i+1}^n$ должны быть положительными. Неравенство для коэффициента при первом слагаемом в явной схеме

$$\begin{aligned}
\frac{2a^2\tau^2}{3h^2} + \mu \frac{\tau}{h^2} &> 0 \\
\mu &> -\frac{2}{3}a^2\tau
\end{aligned}$$

выполняется автоматически, т. к. a^2 и τ - положительные величины. Для неявной схемы:

$$\begin{aligned}
\frac{a^2\tau^2}{3h^2} + \mu \frac{\tau}{h^2} &> 0 \\
\mu &> -\frac{1}{3}a^2\tau
\end{aligned}$$

Из неравенства для коэффициента при u_{i+1}^n получим нижнее ограничение на величину искусственной вязкости для явной схемы:

$$\begin{aligned}
-\frac{a\tau}{h} + \frac{2a^2\tau^2}{3h^2} + \mu \frac{\tau}{h^2} &> 0 \\
\mu &> ah \left(1 - \frac{2}{3}a \frac{\tau}{h} \right) \\
\mu_{min} &= ah \left(1 - \frac{2}{3}a \frac{\tau}{h} \right)
\end{aligned}$$

Для неявной схемы:

$$-\frac{a\tau}{h} + \frac{a^2\tau^2}{3h^2} + \mu \frac{\tau}{h^2} > 0$$

$$\mu > ah\left(1 - \frac{1}{3}a\frac{\tau}{h}\right)$$

$$\mu_{min} = ah\left(1 - \frac{1}{3}a\frac{\tau}{h}\right)$$

Отсюда же получаем ограничение на число Куранта $Ku = \frac{a\tau}{h}$ (явная схема):

$$1 - \frac{2}{3}Ku > 0$$

$$Ku < \frac{3}{2}$$

Аналогично для неявной схемы:

$$1 - \frac{1}{3}Ku > 0$$

$$Ku < 3$$

Из неравенства для коэффициента при u_i^n получим верхнее ограничение на величину искусственной вязкости для явной схемы:

$$1 + \frac{a\tau}{h} - \frac{4}{3}\frac{a^2\tau^2}{h^2} - 2\mu\frac{\tau}{h^2} > 0$$

$$\mu < ah\left(\frac{h}{2a\tau} + \frac{1}{2} - \frac{2}{3}\frac{a\tau}{h}\right)$$

$$\mu_{max} = ah\left(\frac{h}{2a\tau} + \frac{1}{2} - \frac{2}{3}\frac{a\tau}{h}\right)$$

Также получим ограничение на число Куранта:

$$\frac{h}{2a\tau} + \frac{1}{2} - \frac{2}{3}\frac{a\tau}{h} > 0$$

$$\frac{1}{2Ku} + \frac{1}{2} - \frac{2}{3}Ku > 0$$

$$\frac{4}{3}Ku^2 - Ku - 1 < 0$$

$$\frac{4}{3}(Ku - 1.37)(Ku + 0.62) < 0$$

Таким образом, согласно теоретическому исследованию, число Куранта лежит в пределах $0 < Ku < 1.37$ при «замороженных» коэффициентах, однако в реальных расчётах следует использовать $Ku < 1$ для обеспечения устойчивости.

Для неявной схемы получаем:

$$1 + \frac{a\tau}{h} - \frac{2a^2\tau^2}{3h^2} - 2\mu\frac{\tau}{h^2} > 0$$

$$\mu < ah\left(\frac{h}{2a\tau} + \frac{1}{2} - \frac{1a\tau}{3h}\right)$$

$$\mu_{max} = ah\left(\frac{h}{2a\tau} + \frac{1}{2} - \frac{1a\tau}{3h}\right)$$

$$\frac{1}{2Ku} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3}Ku > 0$$

$$\frac{2}{3}Ku^2 - Ku - 1 < 0$$

$$\frac{2}{3}(Ku - 2.18)(Ku + 0.68) < 0$$

Число Куранта лежит в пределах $0 < Ku < 2.18$ согласно теоретическому исследованию.

Представим наглядно искусственную вязкость для явной схемы при $a = 1, h = 1$ (рис. 2). По оси x отложим число Куранта и построим графики μ_{max} (серая пунктирная линия) и μ_{min} (черная сплошная линия).

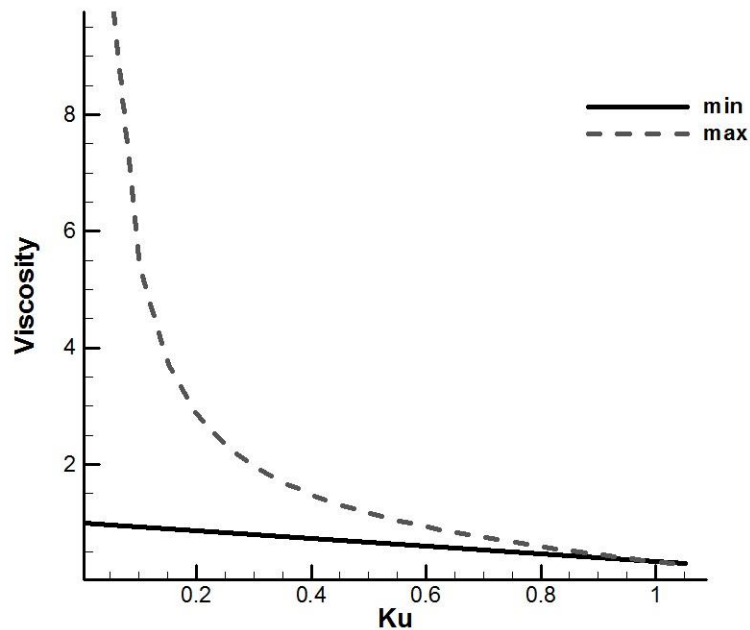


Рис. 2 Максимальное и минимальное значения искусственной вязкости

Для определения оптимального числа Куранта построим также разность $\mu_{max} - \mu_{min}$ (рис. 3). Координата x точки пересечения графика разности с μ_{min} даст искомое значение числа Куранта при заданных значениях скорости и шага.

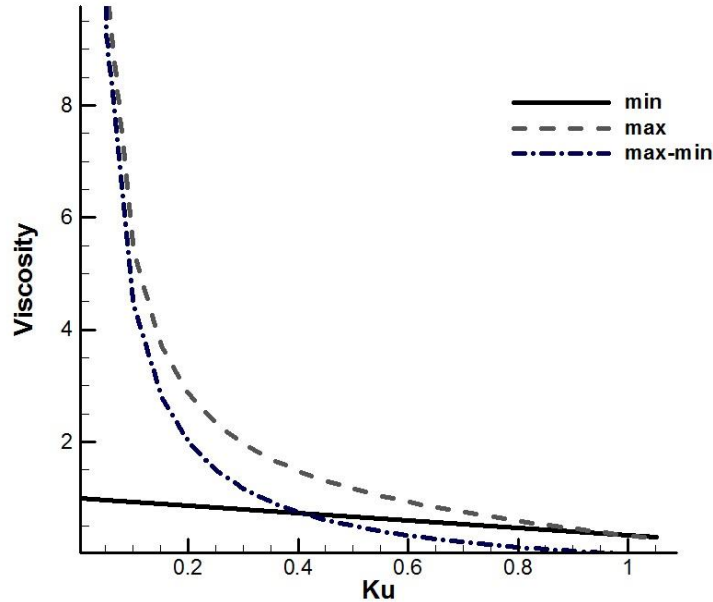


Рис. 3. Нахождение оптимального числа Куранта

Этапы расчёта

На первом шаге находится решение уравнения

$$\frac{\hat{u}_i^{n+1} - u_i^n}{\tau} + a \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^n = 0,$$

где \hat{u}^{n+1} - «предиктор». Далее по найденным значениям определяется, на каких интервалах возникают осцилляции решения, т.е. выполняется неравенство $(\hat{u}_i^{n+1} - \hat{u}_{i-1}^{n+1})(\hat{u}_{i+1}^{n+1} - \hat{u}_i^{n+1}) < 0$. Обнаруженные немонотонности необходимо подавить. Для этого в правую часть уравнения добавляется слагаемое с искусственной вязкостью, величина которой равна $\tilde{\mu} = \mu_{min}$ на участках немонотонности и $\tilde{\mu} = 0$ при $\hat{u}_{i-1}^{n+1} \leq \hat{u}_i^{n+1} \leq \hat{u}_{i+1}^{n+1}$. По полученному уравнению

$$\frac{\tilde{u}_i^{n+1} - \hat{u}_i^{n+1}}{\tau} + a \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^n = \frac{\partial}{\partial x} \left(\tilde{\mu} \frac{\partial u}{\partial x} \right)^n$$

находится решение \tilde{u}^{n+1} .

Так как введённая вязкость имела минимальное значение, необходимо повторно проверить наличие немонотонности решения с помощью условия $(\tilde{u}_i^{n+1} - \tilde{u}_{i-1}^{n+1})(\tilde{u}_{i+1}^{n+1} - \tilde{u}_i^{n+1}) < 0$. Полагаем $\tilde{\mu} = \mu_{max} - \mu_{min}$ на отрезках, для которых выполнено неравенство $(\tilde{u}_i^{n+1} - \tilde{u}_{i-1}^{n+1})(\tilde{u}_{i+1}^{n+1} - \tilde{u}_i^{n+1}) < 0$, и $\tilde{\mu} = 0$ на остальных участках. Имеем уравнение

$$\frac{u_i^{n+1} - \tilde{u}_i^{n+1}}{\tau} + a \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^n = \frac{\partial}{\partial x} \left(\tilde{\mu} \frac{\partial u}{\partial x} \right)^n,$$

решением которого является искомая функция на следующем временном слое.

Таким образом, если минимальной вязкости не хватило для подавления немоноктонности, на отрезке вводится максимальная вязкость, которая обеспечивает монотонность решения.

Представляется возможным сократить число этапов вычисления, вводя искусственную вязкость один раз (полагая, например, $\mu = 0.5 * (\mu_{max} + 0.5 * \mu_{min})$), однако подобранная вязкость может оказаться недостаточной или избыточной для конкретного начального профиля.

Итак, расчёт осуществляется в пять этапов:

- 1) нахождение предикторного решения в отсутствие искусственной вязкости:

явная схема

$$u_i^{n+1} = u_i^n - a\tau \frac{u_{i+1}^n - u_i^n}{h} + \frac{2a^2\tau^2}{3} \frac{(u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n)}{h^2} - \frac{a^2\tau^2}{6} \frac{u_{i+1}^{n-1} - 2u_i^{n-1} + u_{i-1}^{n-1}}{h^2};$$

неявная схема

$$\begin{aligned} \frac{a^2\tau^2}{6h^2} u_{i-1}^{n+1} - \left(1 + \frac{a^2\tau^2}{3h^2} \right) u_i^{n+1} + \frac{a^2\tau^2}{6h^2} u_{i+1}^{n+1} \\ = -(u_i^n - \frac{a\tau}{h} (u_{i+1}^n - u_i^n)) + \frac{a^2\tau^2}{3h^2} (u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n) \end{aligned}$$

Для нахождения решения на новом временном слое при использовании неявной схемы применяется метод прогонки.

- 2) проверка полученного на новом временном слое решения на монотонность:

если выполняется неравенство $(u_{i+1} - u_i)(u_i - u_{i-1}) < 0$, то на отрезках

$[u_{i-1}, u_i], [u_i, u_{i+1}]$ вводится искусственная вязкость μ_{min} . Там, где решение монотонно, искусственная вязкость полагается равной нулю.

- 3) нахождение корректорного решения по явной схеме с включёнными в неё диссипативными слагаемыми:

явная схема

$$u_i^{n+1} = u_{i-1}^n \left(\frac{2a^2\tau^2}{3h^2} + \mu \frac{\tau}{h^2} \right) + u_i^n \left(1 + \frac{a\tau}{h} - \frac{4a^2\tau^2}{3 \cdot 3h^2} - 2\mu \frac{\tau}{h^2} \right) + u_{i+1}^n \left(-\frac{a\tau}{h} + \frac{2a^2\tau^2}{3h^2} + \mu \frac{\tau}{h^2} \right) - \frac{a^2\tau^2}{6h^2} (u_{i+1}^{n-1} - 2u_i^{n-1} + u_{i-1}^{n-1});$$

неявная схема

$$\begin{aligned} \frac{a^2\tau^2}{6h^2} u_{i-1}^{n+1} - \left(1 + \frac{a^2\tau^2}{3h^2} \right) u_i^{n+1} + \frac{a^2\tau^2}{6h^2} u_{i+1}^{n+1} \\ = - (u_{i-1}^n \left(\frac{a^2\tau^2}{3h^2} + \mu \frac{\tau}{h^2} \right) + u_i^n \left(1 + \frac{a\tau}{h} - \frac{2a^2\tau^2}{3 \cdot 3h^2} - 2\mu \frac{\tau}{h^2} \right) \\ + u_{i+1}^n \left(-\frac{a\tau}{h} + \frac{a^2\tau^2}{3h^2} + \mu \frac{\tau}{h^2} \right)) \end{aligned}$$

- 4) проверка полученного решения на монотонность аналогично п.2, на отрезках немонотонности вводится искусственная вязкость

$$\mu = \mu_{\max} - \mu_{\min}$$

- 5) пересчёт решения по формуле из п.3.

Результаты расчётов

Для экспериментального исследования схемы использовались тесты, предложенные в [4]. Начальное условие имеет вид

$$u(0, x) = 0 \text{ при } x \in (-\infty; l_1) \cup (l_2; +\infty),$$

$$u(0, x) = \begin{cases} \frac{1}{l_2 - l_1}(x - l_1) \\ 0.5 \left(1 - \cos \left(\frac{2\pi}{l_2 - l_1}(x - l_1) \right) \right) \\ \begin{cases} -\frac{2}{3(l_{11} - l_1)}(x - l_1) + 1, x \in [l_1, l_{11}) \\ \frac{1}{3}, x \in (l_{11}, l_{22}) \\ \frac{2}{3(l_2 - l_{22})}(x - l_2) + 1, x \in (l_{22}, l_2] \end{cases} \\ \begin{cases} -\frac{2}{3(l_{12} - l_1)}(x - l_1) + 1, x \in [l_1, l_{12}) \\ \frac{2}{3(l_2 - l_{12})}(x - l_2) + 1, x \in [l_{12}, l_2] \end{cases} \\ \frac{1}{l_2 - l_1}(l_2 - x) \end{cases}$$

при $x \in [l_1, l_2]$

Явная схема

Результаты расчётов задачи Коши для всех шести форм получены при следующих значениях параметров: $l = 520; l_1 = 10; l_2 = 30; T = 400; h = 1; a = 1$ и числе Куранта $Ku = 0.4$. Для определения точности использовались нормы C, L_1, L_2 разности точного и численного решений. Ошибка рассчитывалась как интегрально (по всему промежутку $0 \leq t \leq T$), так и локально (на последнем слое $t = T$).

Ниже приведены таблицы норм разности точного и численного решений (таблицы 2 и 3).

Интегрально ($0 \leq t \leq T$):

Таблица 2

норма	левый треугольник	прямоугольник	косинус	зуб	«М»	правый треугольник
C	0.589763	0.630752	0.370238	0.622347	0.588488	0.527556
L_1	837.084	375.524	1144.4	1295.26	1060.98	661.861
L_2	12.0344	10.5937	15.9565	18.155	14.3308	9.70588

Локально ($t = T$):

Таблица 3

норма	левый треугольник	прямоугольник	косинус	зуб	«М»	правый треугольник
C	0.261266	0.116481	0.350057	0.479697	0.3517	0.230223
L_1	2.7175	0.512808	3.14647	4.25066	3.21061	1.78745
L_2	0.685417	0.210325	0.864189	1.04764	0.761747	0.44397

Профили точного (чёрная сплошная линия) и численного (серая штриховая линия) решений в разные моменты времени:

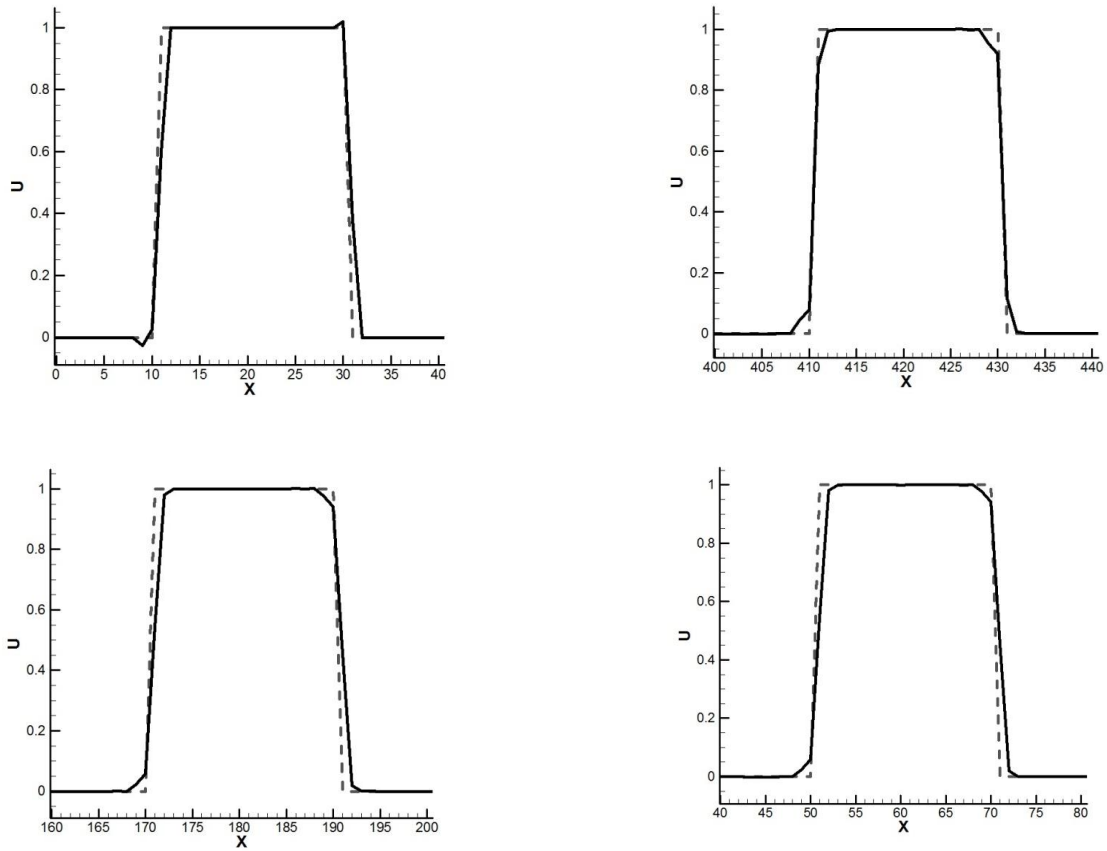
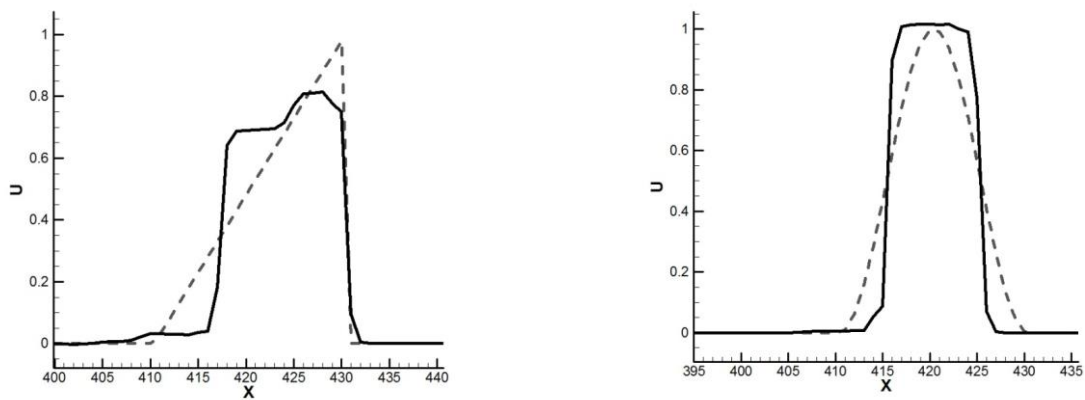


Рис. 4. Профиль «прямоугольник» в моменты времени $T = 0.4; 40; 160; 400$

Профили точного (серая штриховая линия) и численного решения (черная сплошная линия) при $T = 400$:



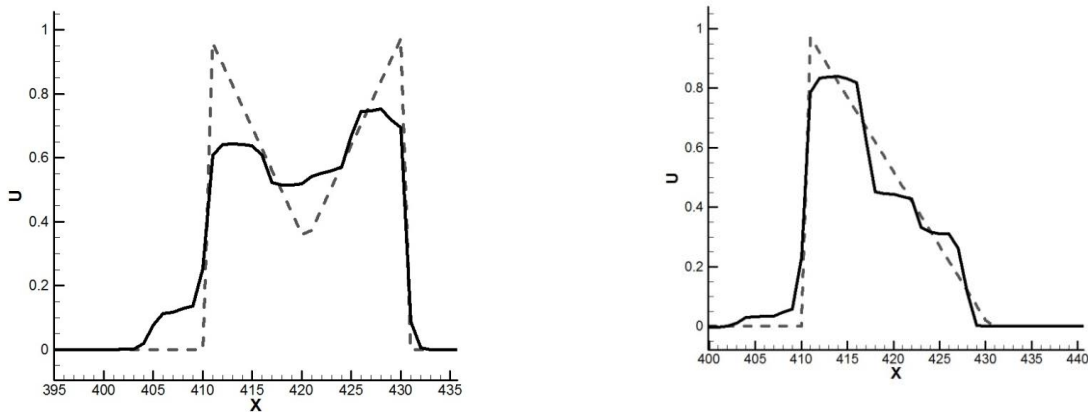


Рис. 5. Профили «левый треугольник», «косинус», «М», «правый треугольник» в момент времени $T = 400$

Используем нормы ошибок для сравнения со схемами без «лимитеров», описанных в [4]. Проведём сравнение построенной схемы (обозначим «АИВ») со схемами Р. П. Федоренко («Ф»), схемой К. И. Бабенко («Б»), схемой со сглаживанием («С»), которая построена путём монотонизации схемы К.И. Бабенко, и схемой второго порядка «парабола» («П») при числе Куранта, равном 0.25. Построим таблицу схем, состоящую из шести столбцов, соответствующих различным формам начального условия, и трёх строк, соответствующих разным нормам. Элементом таблицы является схема, дающая минимальную норму ошибки для данного начального условия.

Интегрально ($0 \leq t \leq T$):

Таблица 4

норма	левый треугольник	прямоугольник	косинус	зуб	«М»	правый треугольник
C	П	П	С	АИВ	П	Б
L_1	АИВ	АИВ	АИВ	АИВ	АИВ	П
L_2	АИВ	АИВ	АИВ	АИВ	АИВ	АИВ

Локально ($t = T$):

Таблица 5

норма	левый треугольник	прямоугольник	косинус	зуб	«М»	правый треугольник
C	Б	АИВ	АИВ	АИВ	АИВ	АИВ
L_1	АИВ	АИВ	АИВ	АИВ	АИВ	АИВ
L_2	АИВ	АИВ	АИВ	АИВ	АИВ	АИВ

Приведём также таблицы, аналогичные представленным выше, с числовыми значениями норм. В ячейке указана норма разности для схемы с минимальной ошибкой, а в скобках – норма разности для построенной схемы.

Интегрально ($0 \leq t \leq T$):

Таблица 6

норма	левый треугольник	прямоугольник	косинус	зуб	«М»	правый треугольник
C	0.7157, П (0.797296)	0.7174, П (0.948985)	0.4141, С (0.4337)	0.70411, АИВ	0.7203, П (0.776586)	0.6844, Б (0.748784)
L_1	1118.13, АИВ	551.303, АИВ	980.449, АИВ	1745.54, АИВ	1703.11, АИВ	271.514, П (930.692)
L_2	18.0832, АИВ	14.8535, АИВ	13.66448, АИВ	23.6665, АИВ	22.8179, АИВ	13.7436, АИВ

Локально ($t = T$):

Таблица 7

норма	левый треугольник	прямоугольник	косинус	зуб	«М»	правый треугольник
C	0.5843,Б (0.636617)	0.422903, АИВ	0.326024, АИВ	0.564235, АИВ	0.527367, АИВ	0.296273, АИВ
L_1	3.28388, АИВ	1.52873, АИВ	2.59611, АИВ	5.02801, АИВ	5.26241, АИВ	2.73669, АИВ
L_2	0.960744, АИВ	0.593281, АИВ	0.685194, АИВ	1.25018, АИВ	1.22855, АИВ	0.62265, АИВ

Построенная схема даёт наилучшие значения в нормах L_1 и L_2 для интегрального расчёта. Локально же построенная схема лидирует среди остальных для большинства начальных профилей. Малая ошибка при $t = T$ говорит о схожести форм точного и численного решений.

Схема может применяться для расчётов на длительные времена.

Расширим расчётную область и увеличим длительность расчёта, параметры имеют следующие значения: $l = 1040$; $T = 800$; $h = 1$; $a = 1$; $Ku = 0.4$.

Интегрально ($0 \leq t \leq T$):

Таблица 8

норма	левый треугольник	прямоугольник	косинус	зуб	«М»	правый треугольник
C	0.589763	0.639752	0.370238	0.645912	0.628412	0.531151
L_1	2149.61	778.396	2294.3	3262.14	2749.55	1564.22
L_2	20.6531	15.8524	22.5573	29.7709	24.3768	15.155

Локально ($t = T$):

Таблица 9

норма	левый треугольник	прямоугольник	косинус	зуб	«М»	правый треугольник
C	0.318621	0.116469	0.347666	0.553709	0.418502	0.246479
L_1	3.41168	0.517342	3.12018	4.95541	4.50981	2.55588
L_2	0.843815	0.210316	0.856639	1.17204	0.971467	0.591978

Таблица 10

Модуль разности между локальными нормами при $T=400$ и $T=800$.

норма	левый треугольник	прямоугольник	косинус	зуб	«М»	правый треугольник
C	0.057355	0.000012	0.002397	0.074012	0.066802	0.016256
L_1	0.69418	0.004534	0.02629	0.70475	1.2992	0.76843
L_2	0.158398	0.000009	0.00755	0.1244	0.20972	0.148008

Изменение норм на профилях в виде прямоугольника и косинуса малы, для остальных начальных условий норма C также изменяется мало.

Неявная схема

Проведём аналогичные расчёты, используя неявную схему на 1,3 и 5 этапах вычисления. Значения параметров:

$$l = 520; l_1 = 10; l_2 = 30; T = 400; h = 1; a = 1; Ku = 0.5.$$

Интегрально ($0 \leq t \leq T$):

Таблица 11

норма	левый треугольник	прямоугольник	косинус	зуб	«М»	правый треугольник
C	0.546733	0.587745	0.359313	0.637316	0.604922	0.506731
L_1	1166.63	457.105	1006.87	2066.29	1899.73	1146.33
L_2	15.251	11.3458	13.948	24.2737	21.6090	14.2631

Локально ($t = T$):

Таблица 12

норма	левый треугольник	прямоугольник	косинус	зуб	«М»	правый треугольник
C	0.504436	0.147439	0.280744	0.633845	0.568055	0.358067
L_1	3.35291	0.707564	2.32278	6.26742	5.91893	4.17981
L_2	0.865829	0.248527	0.636577	1.40262	1.29028	0.939342

Вид конечных профилей представлен на рис.6 :

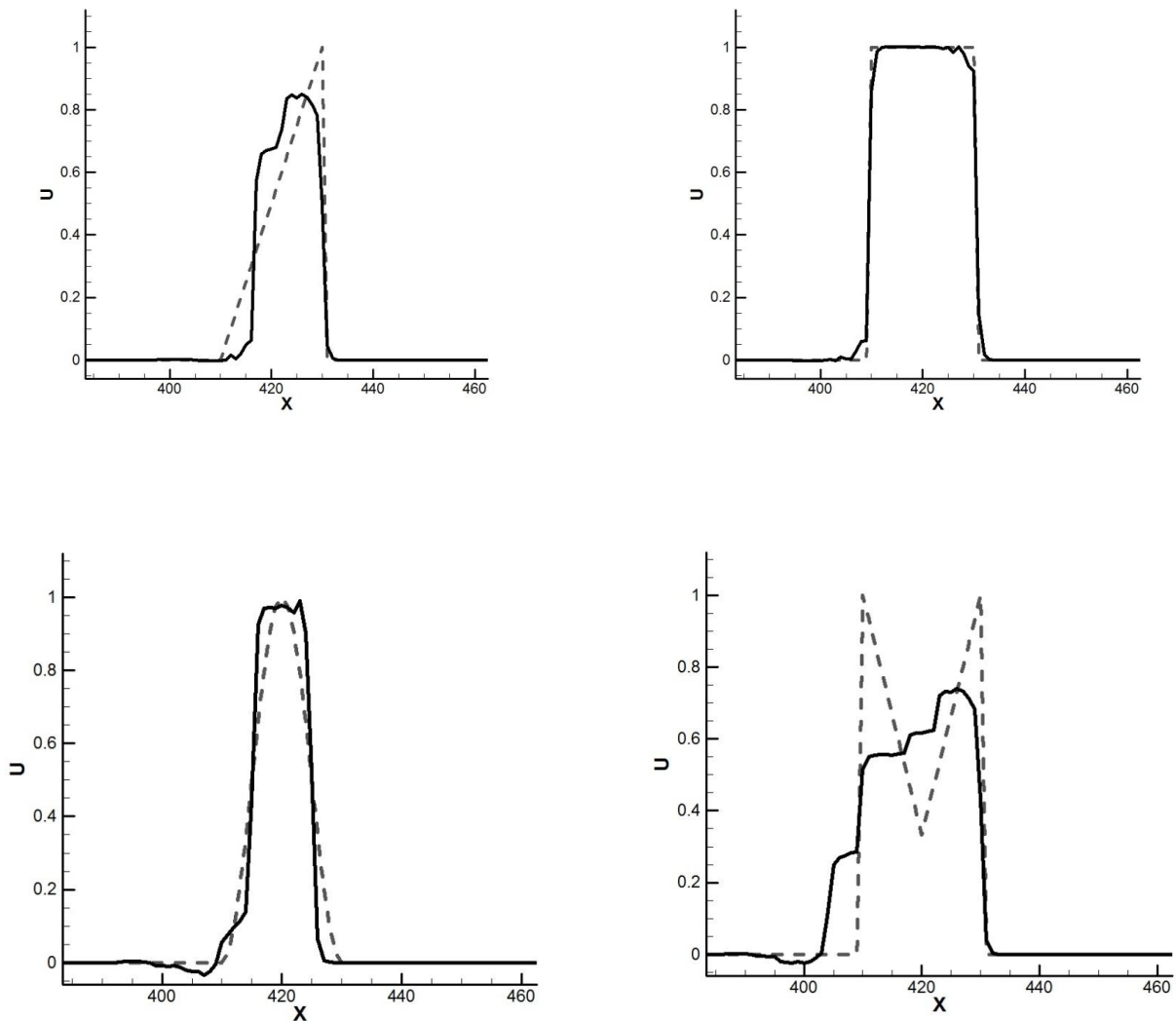


Рис. 6. Профили «левый треугольник», «прямоугольник», «косинус», «правый треугольник» в момент времени $T = 400$

Проведём сравнение построенной схемы (обозначим «АИВ») с неявными схемами, описанными в [5]: схемой Crank-Nicolson («CN»), неявной схемой с левой разностью («НС»), неявной схемой типа Lax-Wendroff'a («LW», $\sigma = 0.5$) при числе Куранта, равном 0.25. Построим таблицы схем, аналогично приведённым в 5.1.

Интегрально ($0 \leq t \leq T$):

Таблица 13

норма	левый треугольник	прямоугольник	косинус	зуб	«М»	правый треугольник
C	LW	АИВ	АИВ	НС	НС	АИВ
L_1	АИВ	АИВ	АИВ	АИВ	АИВ	АИВ
L_2	АИВ	АИВ	АИВ	АИВ	АИВ	АИВ

Локально ($t = T$):

Таблица 14

норма	левый треугольник	прямоугольник	косинус	зуб	«М»	правый треугольник
C	АИВ	АИВ	АИВ	АИВ	АИВ	АИВ
L_1	АИВ	АИВ	АИВ	АИВ	АИВ	АИВ
L_2	АИВ	АИВ	АИВ	АИВ	АИВ	АИВ

Таблицы с числовыми значениями норм:
Интегрально ($0 \leq t \leq T$):

Таблица 15

норма	левый треугольник	прямоугольник	косинус	зуб	«М»	правый треугольник
C	0.6991, LW (0.845122)	0.781504, АИВ	0.390765, АИВ	0.8096, НС (0.825349)	0.8, НС (0.824675)	0.784061, АИВ
L_1	1315.12, АИВ	481.18, АИВ	897.095, АИВ	2021.65, АИВ	1940.29, АИВ	965.126, АИВ
L_2	20.131, АИВ	13.9278, АИВ	12.869, АИВ	25.3724, АИВ	24.3488, АИВ	13.252, АИВ

Локально ($t = T$):

Таблица 16

норма	левый треугольник	прямоугольник	косинус	зуб	«М»	правый треугольник
C	0.637846, АИВ	0.352803, АИВ	0.34392, АИВ	0.592404, АИВ	0.540343, АИВ	0.296586, АИВ
L_1	4.056611 АИВ	1.44355, АИВ	2.15042, АИВ	5.94408, АИВ	5.97475, АИВ	2.56036, АИВ
L_2	1.10606, АИВ	0.624947, АИВ	0.613111, АИВ	1.3851, АИВ	1.33803, АИВ	0.604628, АИВ

Построенная схема даёт наилучшие результаты в нормах L_1 и L_2 для всех начальных профилей, а на последнем временном слое - также в норме C .

Возможные модификации метода

Вместо пяти этапов расчёта можно использовать три (исключаются четвёртый и пятый этапы), выбрав величину искусственной вязкости, равную $\mu = 0.5 * (\mu_{max} + 0.5 * \mu_{min})$ на втором этапе.

При таком расчёте, профили для $T = 400$ при использовании явной схемы имеют вид.

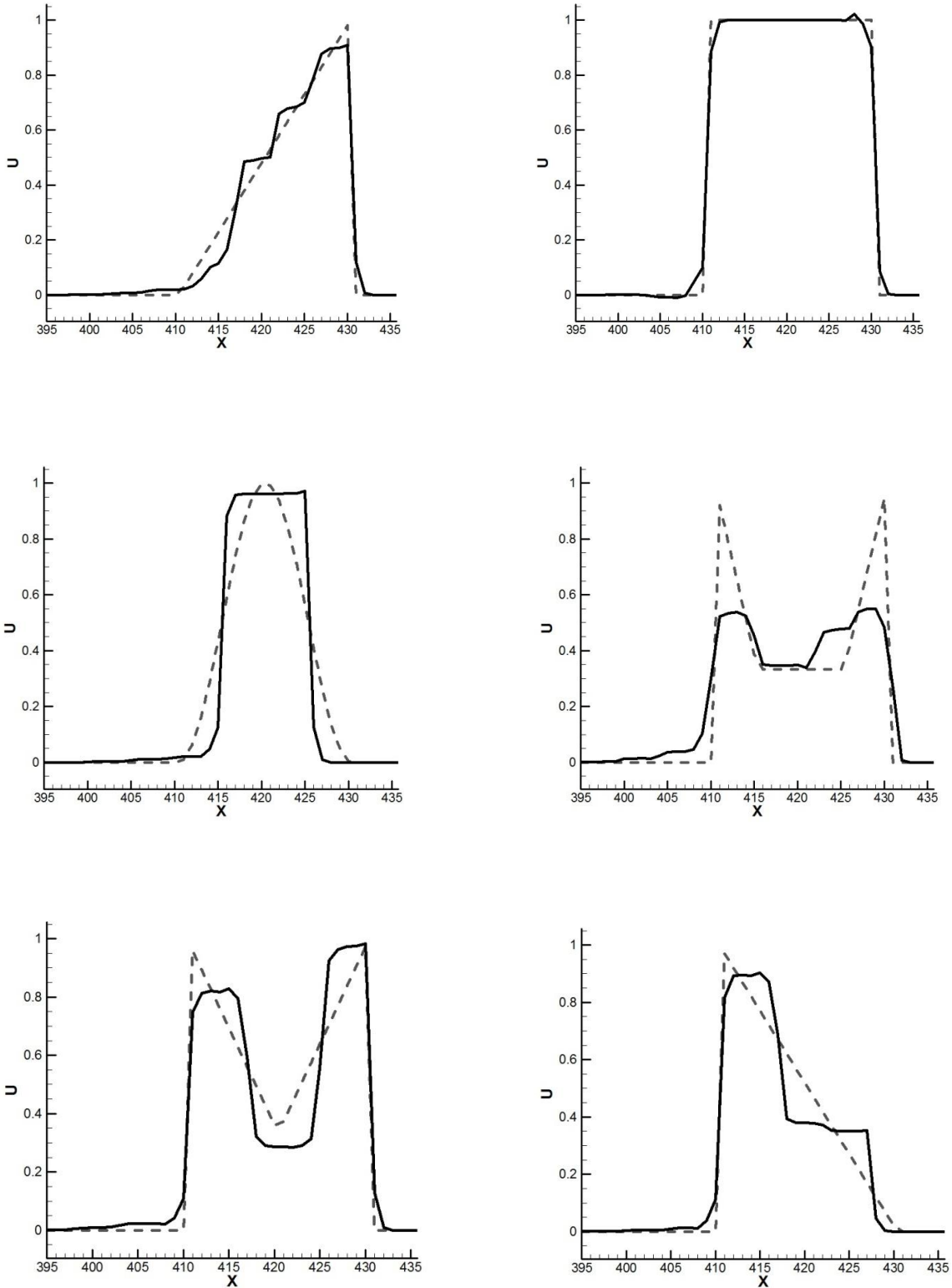


Рис. 7. Профили «левый треугольник», «прямоугольник», «косинус», «зуб», «M», «правый треугольник» в момент времени $T=400$

Интегрально ($0 \leq t \leq T$):

Таблица 17

норма	левый треугольник	прямоугольник	косинус	зуб	«М»	правый треугольник
C	0.572836	0.595419	0.409717	0.644248	0.64314	0.616146
L_1	544.743	370.751	1051.62	1074.42	1152.86	778.004
L_2	9.34636	10.5874	15.2313	16.3712	15.1331	11.1641

Локально ($t = T$):

Таблица 18

норма	левый треугольник	прямоугольник	косинус	зуб	«М»	правый треугольник
C	0.117914	0.113972	0.408495	0.462988	0.259458	0.225785
L_1	1.22555	0.534429	3.02306	3.26513	2.96615	2.10615
L_2	0.298868	0.207024	0.851354	0.888294	0.669793	0.520897

Значения норм разности точного и численного решений схожи со значениями, полученными при пятиэтапном расчёте, однако конечные профили в ряде случаев ближе по форме к точному решению.

Заключение

Предложена монотонизированная разностная схема с использованием адаптивной искусственной вязкости, имеющая третий порядок аппроксимации по времени, первый по пространству в случае направленной разности вперёд и второй порядок в случае центральной разности. Были построены две схемы: явная и неявная. Проведено сравнение со схемами без «лимитеров» из [3], [4]. Для большинства начальных профилей предложенный метод показал наименьшую ошибку на последнем временном слое в нормах L_1, L_2 , а также в норме L_1 при вычислении нормы по всем временным слоям.

Список литературы

1. И. В. Попов, И. В. Фрязинов. Метод адаптивной искусственной вязкости численного решения уравнений газовой динамики // М., Красанд, 2015
2. Р. Рихтмайер, К. Мортон. Разностные методы решения краевых задач // М., Мир, 1972. – с.300-304
3. Н. Бахвалов, Г. Кобельков, Н. Жидков. Численные методы // М., Наука, 1987. – с.521-524
4. М. П. Галанин, Т. Г. Еленина. Тестирование разностных схем для линейного уравнения переноса // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. 1999. № 40.
5. М. П. Галанин, Т. Г. Еленина. Сравнительный анализ разностных схем для линейного уравнения переноса // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. 1998. № 52.

Оглавление

Введение.....	3
Постановка задачи.....	4
Построение разностной схемы.....	4
Исследование порядка аппроксимации схемы.....	6
Монотонизация схемы.....	8
Этапы расчёта.....	12
Результаты расчётов.....	14
Явная схема.....	15
Неявная схема.....	19
Возможные модификации метода.....	21
Заключение.....	23
Список литературы.....	24