



ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 56 за 2015 г.



ISSN 2071-2898 (Print)
ISSN 2071-2901 (Online)

**Абрашкин В.И., Воронов К.Е.,
Пяков И.В., Пузин Ю.Я.,
Сазонов В.В., Семкин Н.Д.,
Чебуков С. Ю.**

Упрощенная методика
определения вращательного
движения спутника по
бортовым измерениям
угловой скорости и
магнитного поля Земли

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Упрощенная методика определения вращательного движения спутника по бортовым измерениям угловой скорости и магнитного поля Земли / В.И.Абрашкин [и др.] // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2015. № 56. 23 с.
URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2015-56>

**РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
Ордена Ленина
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
им. М.В.Келдыша**

**В.И. Абрашкин, К.Е. Воронов, И.В. Пияков, Ю.Я. Пузин,
В.В. Сазонов, Н.Д. Семкин, С.Ю. Чебуков**

**УПРОЩЕННАЯ МЕТОДИКА ОПРЕДЕЛЕНИЯ ВРАЩАТЕЛЬНОГО
ДВИЖЕНИЯ СПУТНИКА ПО БОРТОВЫМ ИЗМЕРЕНИЯМ УГЛОВОЙ
СКОРОСТИ И МАГНИТНОГО ПОЛЯ ЗЕМЛИ**

Москва – 2015

Аннотация

Математическая модель, использованная для реконструкции вращательного движения спутников «Бион М-1» и «Фотон М-4» посредством обработки измерений бортовых магнетометров и датчика угловой скорости (препринты ИПМ им. М.В. Келдыша РАН № 2, 2014 и № 8, 2015), была достаточно детальной и точной. Если несколько снизить требования к точности и перейти к более грубой модели – не уточнять смещения в измерениях компонент угловой скорости, то методику обработки измерений можно существенно упростить. Сокращается объем вычислений при минимизации функционала метода наименьших квадратов, наиболее сложная часть расчетов выполняется с помощью стандартной процедуры вычислительной линейной алгебры. Ниже описана эта упрощенная методика и приведены примеры ее использования для реконструкции вращательного движения спутника «Фотон М-4». Заметное отличие в реконструкциях движения, построенных по упрощенной и более точной методикам, проявляется при обработке измерений на отрезках времени более 4 часов.

V.I.Abrashkin, K.E.Voronov, I.V.Piyakov, Yu.Ya.Puzin, V.V.Sazonov, N.D.Semkin, S.Yu.Chebukov. Simplified technique for reconstructing spacecraft attitude motion by processing onboard measurements of the angular rate and the strength of Earth magnetic field. Reconstruction of the attitude motion of the spacecraft Bion M-1 and Foton M-4 was made by sufficiently detail and exact mathematical model (KIAM preprints No. 2, 2014 and No. 8, 2015). The model used for processing onboard measurements of the strength of the Earth magnetic field and the spacecraft angular rate. If we will slightly reduce accuracy requirements, we can greatly simplify the processing technique. The simplification consists in refusal of specification of the shifts in angular rate measurements. This reduces the calculations at minimization of the functional of the least squares method, the most complicated part of them being fulfilled by the standard procedure of computational linear algebra. We describe the simplified technique by the example of reconstruction attitude motion of the spacecraft Foton M-4. The noticeable difference between results obtained by the new technique and the more exact old one becomes apparent at processing measurements in time interval more than 4 hours.

1. Модель вращательного движения спутника. Математические модели, используемые для реконструкции вращательного движения космических аппаратов посредством обработки измерений бортовых датчиков ориентации, должны быть достаточно детальными. Слишком простые модели обычно не позволяют выполнить реконструкцию с требуемой точностью. Однако, во-первых, интересно найти предел такого упрощения модели, при котором она все еще обеспечивает приемлемую точность. Во-вторых, иногда упрощение модели при не очень значительном снижении точности позволяет существенно изменить методику обработки. Ниже приводятся пример такого упрощения и результаты использования упрощенной модели для реконструкции вращательного движения спутника «Фотон М-4». Изложение ведется применительно к этому спутнику. Для упрощения текста слово «спутник», если иначе не оговорено особо, означает «Фотон М-4».

В качестве исходной не упрощенной модели принята модель, описанная в [1 – 3]. Она позволила реконструировать движение «Биона М-1» и во многом похожего на него спутника «Фотон М-4». Модель основана на кинематических уравнениях вращательного движения твердого тела. Для записи этих уравнений и соотношений, используемых при обработке данных измерений, введем две правые декартовы системы координат.

Приборная система $y_1y_2y_3$ жестко связана со спутником. В ней интерпретируются показания бортовых датчиков ориентации.

Система $Y_1Y_2Y_3$ близка ко второй геоэквиаториальной системе координат эпохи даты. Ее начало находится в центре масс Земли, плоскость Y_1Y_2 совпадает с плоскостью экватора, ось Y_3 направлена в северный полюс мира, ось Y_1 направлена приблизительно в точку весеннего равноденствия – повернута от плоскости гринвичского меридиана на среднее звездное время против вращения Земли. Система $Y_1Y_2Y_3$ используется в модели SGP4 [4], принятой в данной работе для описания орбитального движения спутника. Эту систему считаем инерциальной.

Положение приборной системы $y_1y_2y_3$ относительно системы $Y_1Y_2Y_3$ зададим нормированным кватернионом $\mathbf{q} = (q_0, q_1, q_2, q_3)$, $q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 = 1$. Пусть \mathbf{a} – произвольный вектор, a_1 , a_2 и a_3 – его компоненты в одной из введенных систем координат. Если эти компоненты относятся к системе $Y_1Y_2Y_3$, то образованный из них вектор-столбец $(a_1, a_2, a_3)^T$ обозначим $[\mathbf{a}]_Y$. Если же они относятся к приборной системе, то этот вектор-столбец будем обозначать $[\mathbf{a}]_y$. Имеет место соотношение $[\mathbf{a}]_Y = A[\mathbf{a}]_y$, где $A = \| a_{ij} \|_{i,j=1}^3$ – матрица перехода от системы $y_1y_2y_3$ к системе $Y_1Y_2Y_3$.

Ниже наряду с векторно-матричными обозначениями используются кватернионные. Связь между введенными системами координат задается нормированным кватернионом $\mathbf{q} = (q_0, q_1, q_2, q_3)$, $\|\mathbf{q}\| = 1$. Если $[\mathbf{a}]_Y = (A_1, A_2, A_3)^T$, $[\mathbf{a}]_y = (a_1, a_2, a_3)^T$, то, рассматривая в кватернионных формулах трехмерные

векторы как чисто мнимые кватернионы, будем писать $[\mathbf{a}]_Y = \mathbf{q} \circ [\mathbf{a}]_y \circ \mathbf{q}^{-1}$. Элементы матрицы перехода A выражаются через компоненты кватерниона \mathbf{q} по формулам

$$\begin{aligned} a_{11} &= q_0^2 + q_1^2 - q_2^2 - q_3^2, & a_{12} &= 2(q_1q_2 - q_0q_3), & a_{13} &= 2(q_1q_3 + q_0q_2), \\ a_{21} &= 2(q_2q_1 + q_0q_3), & a_{22} &= q_0^2 + q_2^2 - q_1^2 - q_3^2, & a_{23} &= 2(q_2q_3 - q_0q_1), \\ a_{31} &= 2(q_3q_1 - q_0q_2), & a_{32} &= 2(q_3q_2 + q_0q_1), & a_{33} &= q_0^2 + q_3^2 - q_1^2 - q_2^2. \end{aligned}$$

Орбитальное движение спутника на представляющем интерес временном интервале описывается с помощью модели SGP4. Параметры модели определяются по данным измерений аппаратуры спутниковой навигации [1 – 3]. Математическая модель вращательного движения спутника построена на основе кинематических уравнений, которым удовлетворяет кватернион \mathbf{q} . Эти уравнения имеют вид

$$2\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{q} \circ [\boldsymbol{\omega}]_y. \quad (1)$$

Здесь точка над символом означает дифференцирование по времени t , $\boldsymbol{\omega}$ – абсолютная угловая скорость спутника, $[\boldsymbol{\omega}]_y = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)^T$.

Измерения $[\boldsymbol{\omega}]_y$ выполнялись непрерывно в течение практически всего полета. Данные этих измерений представлены в цифровом виде на временной сетке с постоянным шагом 12с. По этим данным построены непрерывные кусочно-линейные функции $\Omega_i(t)$ ($i=1, 2, 3$), которые в узлах сетки совпадают с данными измерений величин ω_i , а в промежутках между узлами линейны. Ниже вращательное движение спутника описывается уравнениями (1) с $\omega_i = \Omega_i(t)$. В [1 – 3] в уравнения (1) подставлялись выражения $\omega_i = \Omega_i(t) + \chi_i$ ($i=1, 2, 3$), где χ_i – постоянные смещения в измерениях. Эти смещения служили уточняемыми параметрами – они определялись на каждом обрабатываемом интервале вместе с начальными условиями движения и другими параметрами модели. Уточнение смещений χ_i повышает точность аппроксимации магнитных измерений, но получаемые оценки этих величин малы. Если сравнить результаты обработки магнитных измерений на интервалах времени до 4 часов с уточнением χ_i и при условии $\chi_1 = \chi_2 = \chi_3 = 0$, то среднеквадратичная ошибка аппроксимации этих измерений во втором случае возрастет примерно на 10÷20% по отношению первому случаю. Поскольку аппроксимация в первом случае получается довольно точной, такая потеря точности является допустимой. Отказ от уточнения смещений χ_i позволяет существенно изменить методику обработки.

2. Подготовка магнитных измерений. На борту спутника находились два трехкомпонентных магнитометра. Измерения проводились в течение всего орбитального полета. Оцифровка показаний обоих магнитометров выполнялась в единые моменты времени. В начале полета шаг измерений составлял 12 – 14с. В конце полета шаг уменьшился и стал менее равномерным. Иногда его значения доходили до 2с. Согласно проектным документам компоненты измеренных

магнитометрами векторов напряженности магнитного поля выдавались в системе координат $y_1 y_2 y_3$. При обработке в качестве измерения каждой компоненты поля в этой системе принималось среднее арифметическое соответствующих компонент показаний магнитометров. Результаты измерений, полученные на некотором интервале времени, обозначим

$$t_n, [\mathbf{h}^{(n)}]_y = [h_1^{(n)}, h_2^{(n)}, h_3^{(n)}]^T; \quad n=1, 2, \dots, N. \quad (2)$$

В файле с магнитными измерениями вектор $[\mathbf{h}^{(n)}]_y$ привязан к моменту времени t_n . Эта привязка содержит ошибку. Фактический момент времени, к которому следует привязать вектор $[\mathbf{h}^{(n)}]_y$, обозначим $t_n + \tau$. Постоянную систематическую ошибку в измерениях (2) обозначим $[\Delta]_y = (\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3)^T$. Несмещенными измерениями считаются векторы $[\mathbf{h}^{(n)}]_y - [\Delta]_y = [\mathbf{h}^{(n)} - \Delta]_y$. Предварительные оценки величин τ и Δ_i определялись методом наименьших квадратов из условия наилучшего согласования модуля исправляемых данных (2) с модулем расчетного вектора напряженности магнитного поля Земли (МПЗ) [5 – 7].

Введем функцию

$$\Psi(\tau, \Delta_1, \Delta_2, \Delta_3) = \sum_{n=1}^N \left\{ \sqrt{\sum_{i=1}^3 [h_i^{(n)} - \Delta_i]^2} - H(t_n + \tau) \right\}^2,$$

где $H(t)$ – расчетный модуль напряженности МПЗ в момент времени t . Функция $H(t)$ строится с использованием модели орбитального движения SGP4 и аналитической модели МПЗ IGRF. Положим

$$\Psi_1(\tau) = \min_{\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3} \Psi(\tau, \Delta_1, \Delta_2, \Delta_3).$$

Функция $\Psi_1(\tau)$ вычислялась на равномерной сетке с шагом 1с. Минимизация Ψ по Δ_i в каждом ее узле выполнялась методом Гаусса-Ньютона [8]. Значение τ° , доставляющее минимум функции Ψ_1 на этой сетке, принималось в качестве сдвига, а соответствующие экстремальные значения Δ_i° служили оценками смещений.

Согласование получалось значительно лучше, когда в качестве измерений принимались величины $\kappa h_i^{(n)}$ при $\kappa = 1 \div 1.06$. Коэффициент κ подбирался на сетке с шагом 0.005 для каждого отрезка данных. Уточнение этого коэффициента приводило обычно и к уменьшению $|\tau^\circ|$. В дальнейшем он не уточнялся, и, чтобы не вводить новых обозначений, величины $\kappa h_i^{(n)}$ будем обозначать $h_i^{(n)}$. Ниже под измерениями магнитного поля понимаются именно эти величины при подходящем значении κ . Найденные значения τ° и Δ_i° служили предварительными оценками этих величин. Они уточнялись в процессе определения вращательного значения спутника.

3. Методика определения движения спутника по данным магнитных измерений. Рассмотрим обработку магнитных измерений (2), выполненных на отрезке $I = \{t: t_a \leq t \leq t_b\} \subset [t_1 + \tau^\circ, t_N + \tau^\circ]$. Следуя методу наименьших квадратов, реконструкцией фактического движения спутника на отрезке I будем считать решение уравнений (1), доставляющее минимум функционалу

$$\Phi = \sum_{n \in U(\tau)} \sum_{i=1}^3 [h_i^{(n)} - \Delta_i - \hat{h}_i(t_n + \tau)]^2, \quad (3)$$

$$\hat{h}_i(t) = \sum_{j=1}^3 H_j(t) a_{ji}(t) \quad (i=1, 2, 3).$$

Здесь $U(\tau) = \{n: t_n + \tau \in I\}$, $H_i(t)$ – расчетные значения компонент напряженности МПЗ в системе координат $Y_1 Y_2 Y_3$ в момент времени t . Функции $H_i(t)$ строятся с использованием модели орбитального движения SGP4 и аналитической модели IGRF. Минимизация Φ выполняется по начальным условиям решения $\mathbf{q}(t_a) \equiv \mathbf{c}$ и параметрам Δ_i ($i=1, 2, 3$), τ . При этом учитывается условие нормировки $\|\mathbf{c}\| = 1$. Для простоты письма объединим величины Δ_i и компоненты \mathbf{c} в один семимерный вектор z и будем рассматривать функционал (3) как функцию $\Phi(z, \tau)$. Минимизация Φ по z и τ сводилась к вычислению функции

$$\Phi_1(\tau) = \max_z \Phi(z, \tau)$$

в последовательности точек τ_n , сходящейся к пределу $\tau_* = \operatorname{argmin} \Phi_1(\tau)$. Начальной точкой этой последовательности служило значение τ° , найденное при подготовке магнитных измерений (см. п. 2). Минимизация Φ по z при фиксированном τ выполнялась следующим образом.

Искомое решение уравнения (1) представим в виде $\mathbf{q}(t) = \mathbf{c} \circ \mathbf{p}(t)$, где $\mathbf{p}(t)$ – решение этого уравнения с начальным условием $\mathbf{p}(t_a) = (1, 0, 0, 0)$. Введя обозначение $[\mathbf{H}(t)]_Y = [H_1(t), H_2(t), H_3(t)]_Y^T$, функционал (3) запишем в кватернионной форме

$$\begin{aligned} \Phi &= \sum_{n \in U(\tau)} \left\| [\mathbf{h}^{(n)} - \Delta]_Y - \mathbf{q}^{-1}(t_n + \tau) \circ [\mathbf{H}(t_n + \tau)]_Y \circ \mathbf{q}(t_n + \tau) \right\|^2 = \\ &= \sum_{n \in U(\tau)} \left\| \mathbf{q}(t_n + \tau) \circ [\mathbf{h}^{(n)} - \Delta]_Y - [\mathbf{H}(t_n + \tau)]_Y \circ \mathbf{q}(t_n + \tau) \right\|^2 = \\ &= \sum_{n \in U(\tau)} \left\| \mathbf{c} \circ \mathbf{p}(t_n + \tau) \circ [\mathbf{h}^{(n)} - \Delta]_Y \circ \mathbf{p}^{-1}(t_n + \tau) - [\mathbf{H}(t_n + \tau)]_Y \circ \mathbf{c} \right\|^2. \end{aligned}$$

Из последнего выражения видно, что Φ является квадратичной формой компонент \mathbf{c} . Рассматривая этот кватернион как четырехмерный вектор-столбец, можно записать

$$\Phi = \mathbf{c}^T B \mathbf{c}, \quad B = \sum_{n \in U(\tau)} D_n^T D_n,$$

$$D_n = \left\| \begin{array}{cccc} 0 & -g_1^{(n)} + H_1^{(n)} & -g_2^{(n)} + H_2^{(n)} & -g_3^{(n)} + H_3^{(n)} \\ g_1^{(n)} - H_1^{(n)} & 0 & g_3^{(n)} + H_3^{(n)} & -g_2^{(n)} - H_2^{(n)} \\ g_2^{(n)} - H_2^{(n)} & -g_3^{(n)} - H_3^{(n)} & 0 & g_1^{(n)} + H_1^{(n)} \\ g_3^{(n)} - H_3^{(n)} & g_2^{(n)} + H_2^{(n)} & -g_1^{(n)} - H_1^{(n)} & 0 \end{array} \right\|.$$

Величины $g_i^{(n)}$ и $H_i^{(n)}$, использованные для задания элементов матриц D_n , определены соотношениями

$$\mathbf{p}(t_n + \tau) \circ [\mathbf{h}^{(n)} - \Delta]_y \circ \mathbf{p}^{-1}(t_n + \tau) = [g_1^{(n)}, g_2^{(n)}, g_3^{(n)}]^T, \quad H_i^{(n)} = H_i(t_n + \tau).$$

При фиксированных Δ_i минимальное значение Φ равно минимальному собственному числу матрицы B . Соответствующий нормированный собственный вектор обозначим $\hat{\mathbf{c}}$.

Сначала положим $\Delta_i = \Delta_i^\circ$ (см. п. 2). Для этих смещений найдем вектор $\hat{\mathbf{c}}$ и с его помощью обновим смещения по формуле

$$[\Delta]_y = \frac{1}{N_\tau} \sum_{n \in U(\tau)} ([\mathbf{h}^{(n)}]_y - A^T(t_n + \tau)[\mathbf{H}(t_n + \tau)]_y),$$

где N_τ – число элементов множества $U(\tau)$, или ей эквивалентной. Для новых смещений опять вычислим $\hat{\mathbf{c}}$ и т.д. Описанный процесс за несколько итераций позволяет решить задачу минимизации Φ по z .

При реализации этого процесса кватернионы $\mathbf{p}(t_n + \tau)$ вычислялись один раз и хранились в виде массива. Интегрирование уравнения (1) выполнялось методом Рунге-Кутты 4-го порядка с локальным контролем точности. Узлы сетки, на которой были построены кусочно-линейные функции $\Omega_i(t)$, входили в число граничных точек шагов интегрирования. Вычисление решения в точках $t_n + \tau$ (они практически всегда оказывались внутри шагов интегрирования) выполнялось с помощью интерполяционного полинома 3-го порядка. Этот полином строился по результатам вычислений на шаге правых частей уравнения (1), необходимых в методе Рунге-Кутты. Собственные числа матрицы B находились с помощью стандартной процедуры вычислительной линейной алгебры.

Выделение переменной τ из полного набора аргументов Φ вызвано ее особой ролью (в частности, зависимость $\Phi_1(\tau)$ от τ в окрестности точки τ_* – довольно слабая) и желанием упростить вычисления. Для упрощения программного кода временной отрезок I и обрабатываемый отрезок магнитных измерений выбирались таким образом, чтобы множество $U(\tau)$ не менялось в малой окрестности точки τ_* .

Точность оценки $(z_*, \tau_*) = \operatorname{argmin} \Phi(z, \tau)$ и ошибки аппроксимации магнитных измерений будем характеризовать соответствующими стандартными отклонениями. Компоненты вектора z_* , отвечающие смещениям Δ_i и кватерниону \mathbf{c} , обозначим соответственно Δ_i^* и \mathbf{c}_* . Стандартные отклонения вычислим в предположении, что ошибки в измерениях (2) некоррелированы и имеют одинаковые дисперсии, средние значения ошибок в измерениях векторной компоненты с номером i равны Δ_i^* . Это предположение согласовано с видом функционала (3). Стандартное отклонение σ_τ величины τ_* рассчитывается по формуле

$$\sigma_\tau^2 = 2\sigma^2 \left[\frac{d^2 \Phi_1(\tau_*)}{d\tau^2} \right]^{-1}, \quad \sigma = \sqrt{\frac{\Phi_1(\tau_*)}{3N_{\tau_*} - 7}}.$$

Здесь σ – стандартное отклонение ошибок в измерениях (2), вторая производная функции Φ_1 вычисляется разностным способом.

Стандартные отклонения оценки z_* вычислим в предположении, что значение $\tau = \tau_*$ фиксировано. Это – так называемые условные стандартные отклонения. Вследствие условия нормировки $\|\mathbf{c}\| = 1$ оценка z_* имеет вырожденную ковариационную матрицу. Чтобы избежать вырождения и сделать представление ошибок более наглядным, ошибки $d\mathbf{c}$ в задании компонент кватерниона \mathbf{c}_* выразим через вектор бесконечно малого поворота $[\boldsymbol{\theta}]_y = 2\mathbf{c}_*^{-1} \circ d\mathbf{c}$ системы $y_1 y_2 y_3$ в начальный момент t_a . Ошибки в задании смещений Δ_i^* обозначим $d\Delta_i$, из них составим вектор $[d\Delta]_y = (d\Delta_1, d\Delta_2, d\Delta_3)^T$. Математические ожидания векторов $[d\Delta]_y$ и $[\boldsymbol{\theta}]_y$ по определению – нулевые. Чтобы найти их совместную ковариационную матрицу, рассмотрим второй дифференциал $d^2\Phi(z_*, \tau_*)$ при $d\tau = 0$. Представим его в виде

$$d^2\Phi(z_*, \tau_*) = 2x C x^T, \quad x = ([d\Delta]_y^T, [\boldsymbol{\theta}]_y^T),$$

где матрица C определена соотношениями

$$C = \sum_{n \in U(\tau_*)} F_n^T F_n,$$

$$F_n = \left\| \begin{array}{cccccc} e_{11}^{(n)} & e_{12}^{(n)} & e_{13}^{(n)} & 0 & -G_3^{(n)} & G_2^{(n)} \\ e_{21}^{(n)} & e_{22}^{(n)} & e_{23}^{(n)} & G_3^{(n)} & 0 & -G_1^{(n)} \\ e_{31}^{(n)} & e_{32}^{(n)} & e_{33}^{(n)} & -G_2^{(n)} & G_1^{(n)} & 0 \end{array} \right\|,$$

матрица $\|e_{ij}^{(n)}\|_{i,j=1}^3$ выражается через компоненты кватерниона $\mathbf{p}(t_n + \tau_*)$ по формулам п. 1, величины $G_i^{(n)}$ заданы формулой

$$\mathbf{c}_*^{-1} \circ [\mathbf{H}(t_n + \tau_*)]_Y \circ \mathbf{c}_* = [G_1^{(n)}, G_2^{(n)}, G_3^{(n)}]^T.$$

Ковариационная матрица K_x вектора x имеет вид $K_x = \sigma^2 C^{-1} = \|K_{ij}\|_{i,j=1}^6$, величины $\sqrt{K_{jj}}$ ($j=1, 2, \dots, 6$) – условные стандартные отклонения компонент векторов $[d\Delta]_y$ и $[\Theta]_y$. Ниже эти стандартные отклонения обозначаются соответственно $\sigma_{\Delta i}$ и $\sigma_{\theta i}$ ($i=1, 2, 3$).

4. Примеры реконструкции движения спутника приведены на рисунках. Реконструкции на рис. 1 – 10 построены для тех же интервалов времени, которые были обработаны в [2]. Рис. 1 – 9 иллюстрируют поддержание режима одноосной солнечной ориентации, рис. 10 – поддержание режима орбитальной ориентации. На рис. 1(a) – 10(a) изображены графики углов, характеризующих положение спутника. На рис. 1(a) – 9(a) α и β – углы отклонения оси y_2 от орта \mathbf{s} , направленного от Земли к Солнцу, $[\mathbf{s}]_Y = (S_1, S_2, S_3)^T$. Эти углы вычисляются по формулам

$$\alpha = \arcsin \frac{a_{22}S_1 - a_{12}S_2}{\sqrt{S_1^2 + S_2^2}}, \quad \beta = \arcsin \left[a_{32} \sqrt{S_1^2 + S_2^2} - \frac{S_3(a_{12}S_1 + a_{22}S_2)}{\sqrt{S_1^2 + S_2^2}} \right].$$

Они отсчитываются в перпендикулярных плоскостях, пересекающихся по прямой «Земля – Солнце». Плоскость отсчета угла β содержит ось Y_3 . Направление отсчета этого угла – на север, направление отсчета угла α – на восток. Угол γ – это угол между осью y_1 приборной системы и плоскостью орбиты; при $0 < \gamma < \pi$ эта ось лежит в полупространстве, в которое направлен кинетический момент орбитального движения спутника. Функция $\zeta(t)$ (нижний график) характеризует тень Земли: в тени $\zeta = 0$, на свету $\zeta > 0$. Эта функция рассчитывается по формуле

$$\zeta = \max \left(0, \mathbf{r} \cdot \mathbf{s} + \sqrt{|\mathbf{r}|^2 - R_E^2} \right),$$

где \mathbf{r} – геоцентрический радиус-вектор центра масс спутника, $R_E = 637814$ км – радиус Земли, принятой шаром.

Рис. 10 (а) содержит графики компонент вектора бесконечно малого поворота, характеризующего отклонение системы $y_1 y_2 y_3$ от ее номинального положения в режиме орбитальной ориентации. Компоненты имеют следующий смысл: α_1 – угол крена, α_2 – угол рысканья, α_3 – угол тангажа.

Рис. 1(б) – 10(б) содержат графики функций $\omega_i = \Omega_i(t)$. Рис. 1(в, г) – 10(в, г) характеризуют построенную аппроксимацию магнитных измерений. Сплошные линии на рисунках (в) – графики функций $\hat{h}_i(t + \tau)$ (см. (3)), маркерами обозначены точки $(t_n + \tau, h_i^{(n)} - \Delta_i)$, $n \in U(\tau)$. На рисунках (г) изображены ломаные, звенья которых последовательно соединяют соседние по времени точки

$(t_n + \tau, h_i^{(n)} - \hat{h}_i(t_n + \tau) - \Delta_i)$. В подписях к рисункам указаны полетное время момента $t=0$ и найденные значения τ , Δ_i и σ . В скобках рядом с σ указано значение этой оценки, полученное в [2].

Как и следовало ожидать, реконструкции движения, построенные по упрощенной методике, оказались менее точными, чем реконструкции [2]. На сравнительно непродолжительных интервалах времени (менее 4 часов, рис. 1 – 5 и 10) новые реконструкции практически не отличаются от старых, но на интервалах времени около 10 часов (рис. 6 – 9) разница в точности становится весьма заметной. Во-первых, возрастают значения σ , для реконструкций на рис. 6 – 8 более чем на 60%. Во вторых, на графиках (γ) видно, что ошибки аппроксимации измерений в середине интервала реконструкции заметно меньше, чем на его концах. Это свидетельствует о неадекватности новой модели. В [2] такой эффект отсутствует. В-третьих, на графиках угла α присутствует линейный тренд, которого на соответствующих графиках в [2] нет. В действительности его также не было, в чем можно убедиться, сократив интервал обработки.

Результаты реконструкции движения спутника на сокращенных интервалах времени приведены на рис. 11, 12. Представленные здесь интервалы охватывают первые 3 часа каждого из интервалов, рассмотренных на рис. 6 – 9. На рис. 11, 12 изображены только графики углов α , β , γ , функции ζ и ошибок аппроксимации магнитных измерений. Видно, что ошибки аппроксимации уменьшились и распределены по интервалу более равномерно, линейный тренд на графиках угла α почти исчез.

В таблице приведены стандартные отклонения параметров построенных реконструкций. Каждому обработанному интервалу отвечает строка таблицы. В первом ее столбце указан номер рисунка, иллюстрирующего реконструкцию. Затем приведены стандартные отклонения σ , σ_τ , σ_{Δ_i} , σ_{θ_i} ($i=1, 2, 3$). Параметры интервалов, представленных на рис. 6 – 9, и соответствующих укороченных интервалов приведены рядом. Стандартные отклонения в этой таблице примерно такие же, как аналогичные величины в [2].

Хотя новая методика менее точна, чем методика, использованная в [1 – 3], она намного проще и не требует дополнительных усилий для поиска начального приближения реконструируемого движения. По этой причине ее можно использовать как первый этап реконструкции. Если же рассматривается не очень продолжительный временной интервал, то применением этой методики можно и ограничиться.

Данная работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 14-01-00423).

Литература

1. Абрашкин В.И., Воронов К.Е., Пияков И.В., Пузин Ю.Я., Сазонов В.В., Семкин Н.Д., Чебуков С.Ю. Определение движения спутника *Бион М-1* средствами аппаратуры ГРАВИТОН // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. 2014. № 2. 44 с.

2. Абрашкин В.И., Воронов К.Е., Пияков И.В., Пузин Ю.Я., Сазонов В.В., Семкин Н.Д., Чебуков С.Ю. Определение вращательного движения спутника *Фотон М-4* // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша РАН. 2015. № 8.
3. Абрашкин В.И., Воронов К.Е., Пияков И.В., Пузин Ю.Я., Сазонов В.В., Семкин Н.Д., Чебуков С.Ю. Определение движения спутника *Бион М-1* средствами аппаратуры ГРАВИТОН // Космические исследования. 2015. Т. 53. № 4. С. 306-319.
4. Hoots F.R., Roehrich R.L. Models for propagation of NORAD element sets. Spacetrack report No. 3. 1988.
5. Абрашкин В.И., Балакин В.Л., Белоконов И.В., Воронов К.Е., Зайцев А.С., Иванов В.В., Казакова А.Е., Сазонов В.В., Семкин Н.Д. Неуправляемое вращательное движение спутника *Фотон-12* и квазистатические микроускорения на его борту // Космические исследования. 2003. Т. 41. № 1. С. 45-56.
6. Абрашкин В.И., Богоявленский Н.Л., Воронов К.Е., Казакова А.Е., Пузин Ю.Я., Сазонов В.В., Семкин Н.Д., Чебуков С.Ю. Неуправляемое вращательное движение спутника «Фотон М-2» и квазистатические микроускорения на его боту // Космические исследования. 2007. Т. 45. № 5. С. 450-470.
7. Бойзелинк Т., Ван Бавинхов К., Абрашкин В.И., Казакова А.Е., Сазонов В.В. Определение вращательного движения спутника «Фотон М-3» по данным бортовых измерений магнитного поля Земли // Космические исследования. 2010. Т. 48. № 3. С. 252-265.

Таблица. Стандартные отклонения параметров построенных реконструкций

Рис.	$\sigma(\gamma)$	σ_{τ}, c	$\sigma_{\Delta 1}, \gamma$	$\sigma_{\Delta 2}, \gamma$	$\sigma_{\Delta 3}, \gamma$	$\sigma_{\theta 1} \times 10^4$	$\sigma_{\theta 1} \times 10^4$	$\sigma_{\theta 1} \times 10^4$
1	254	1.3	19	18	17	5.9	5.0	6.3
2	344	0.91	18	17	18	6.5	5.1	6.4
3	285	0.78	15	14	14	5.3	4.0	5.1
4	313	0.85	15	15	15	4.9	3.7	5.2
5	228	0.52	11	9.9	10	3.8	2.9	4.0
6	606	0.36	7.6	7.4	7.5	2.8	2.5	2.5
11а,б	385	0.42	8.3	8.4	8.5	3.1	2.7	2.7
7	848	0.43	8.8	8.8	8.6	3.2	3.1	2.7
11в,г	510	0.68	11	12	12	4.1	4.0	3.4
8	840	0.53	12	12	11	4.3	4.2	3.4
12а,б	546	0.65	15	14	13	5.1	5.4	4.1
9	816	0.56	11	11	11	4.0	4.0	2.9
12в,г	628	1.0	15	16	16	5.7	5.5	4.0
10	348	0.43	10	10	11	4.1	4.2	3.3

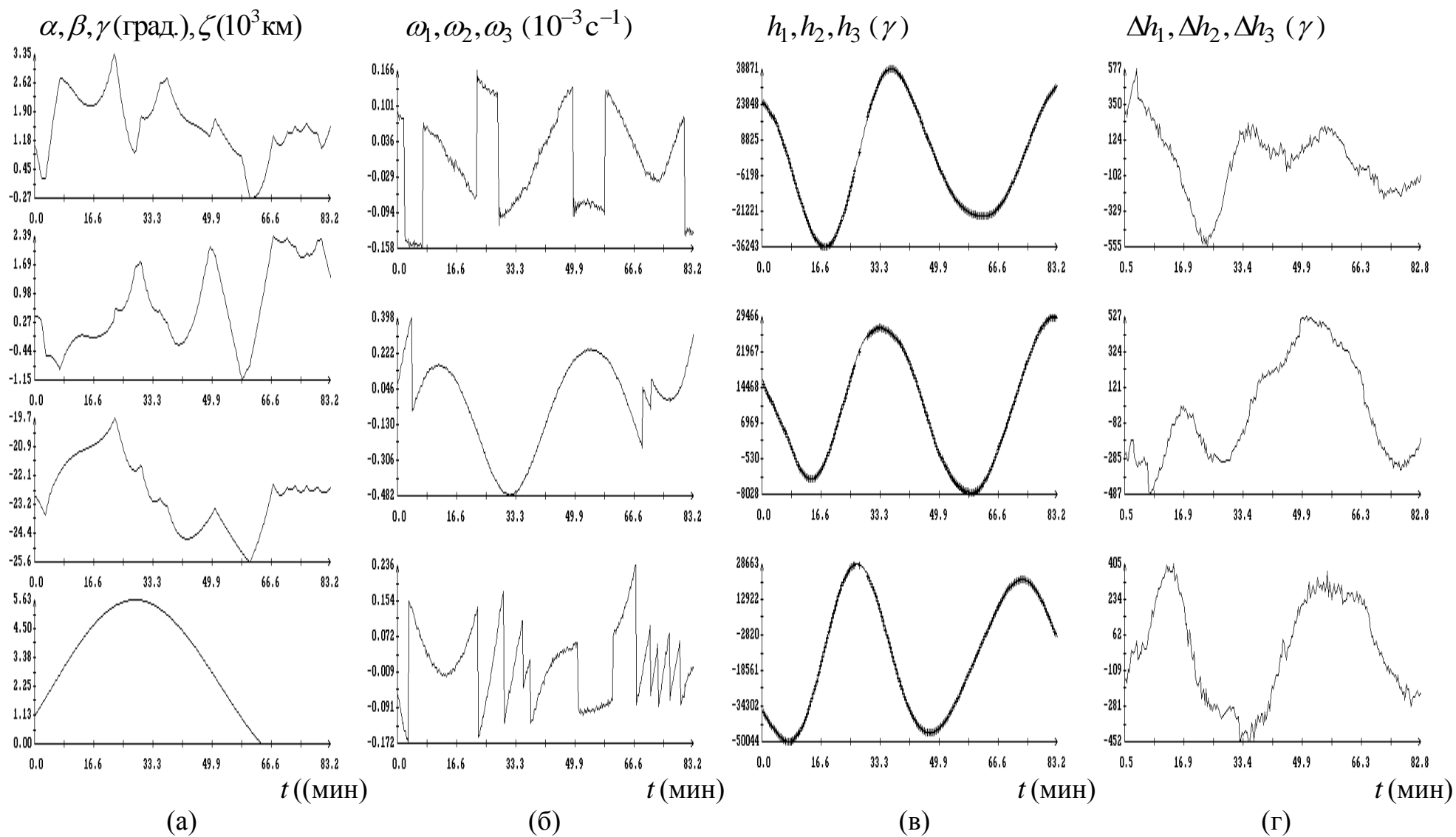


Рис. 1. Движение КА в солнечной ориентации. Момент $t = 0$ на графиках отвечает 1047581 с (23:59: 41 UTC 29.07.2014), сдвиг времени магнитных измерений 34.9с, смещения магнитных измерений (γ): 4461, -912, 824; $\sigma = 254(224)\gamma$.

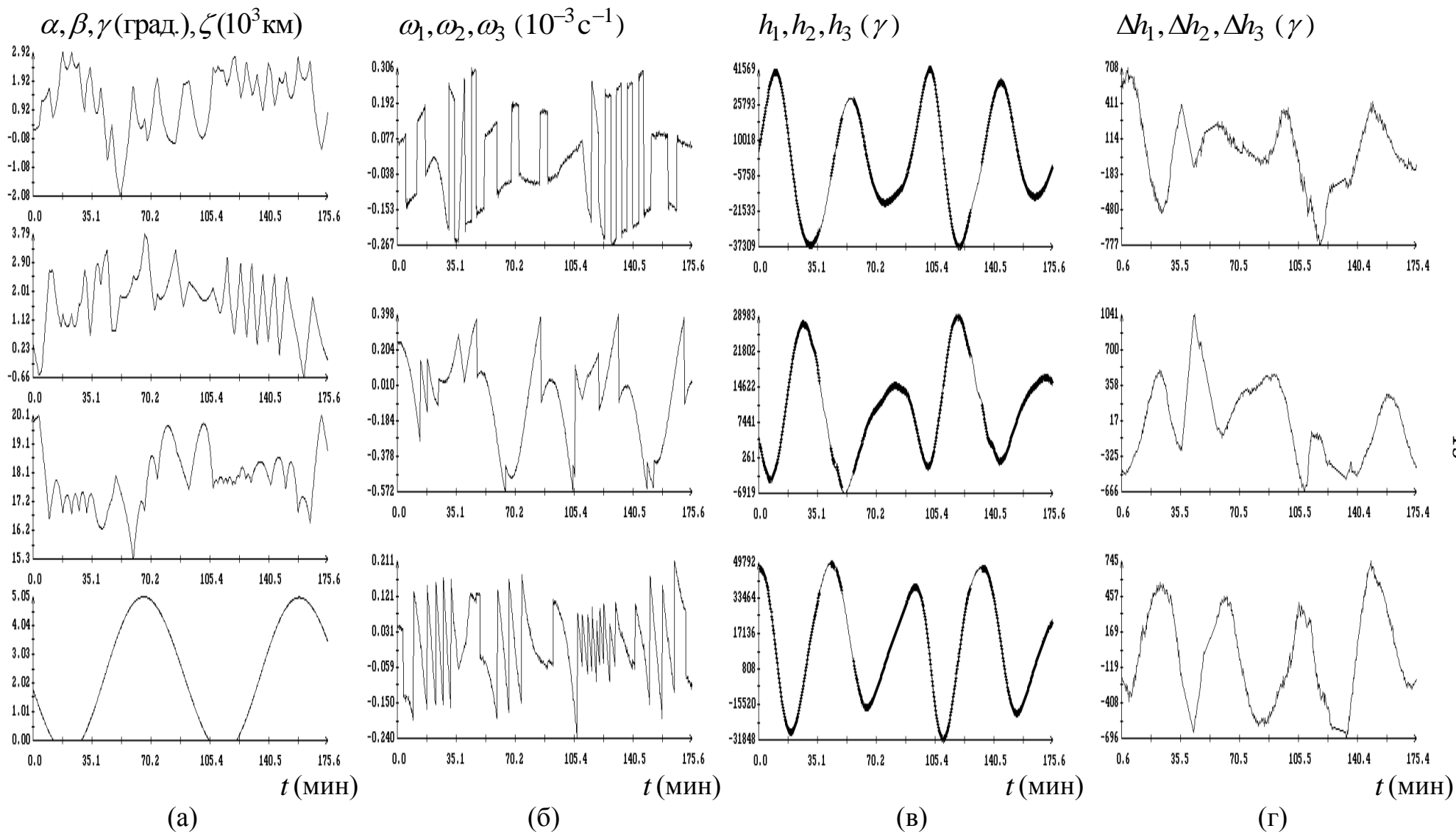


Рис. 2. Движение КА в солнечной ориентации. Момент $t = 0$ на графиках отвечает 1173149с (10:52:29 UTC 31.07.2014), сдвиг времени магнитных измерений 46.4с, смещения магнитных измерений (γ): 4431, -1227, 590; $\sigma = 344(321)\gamma$.

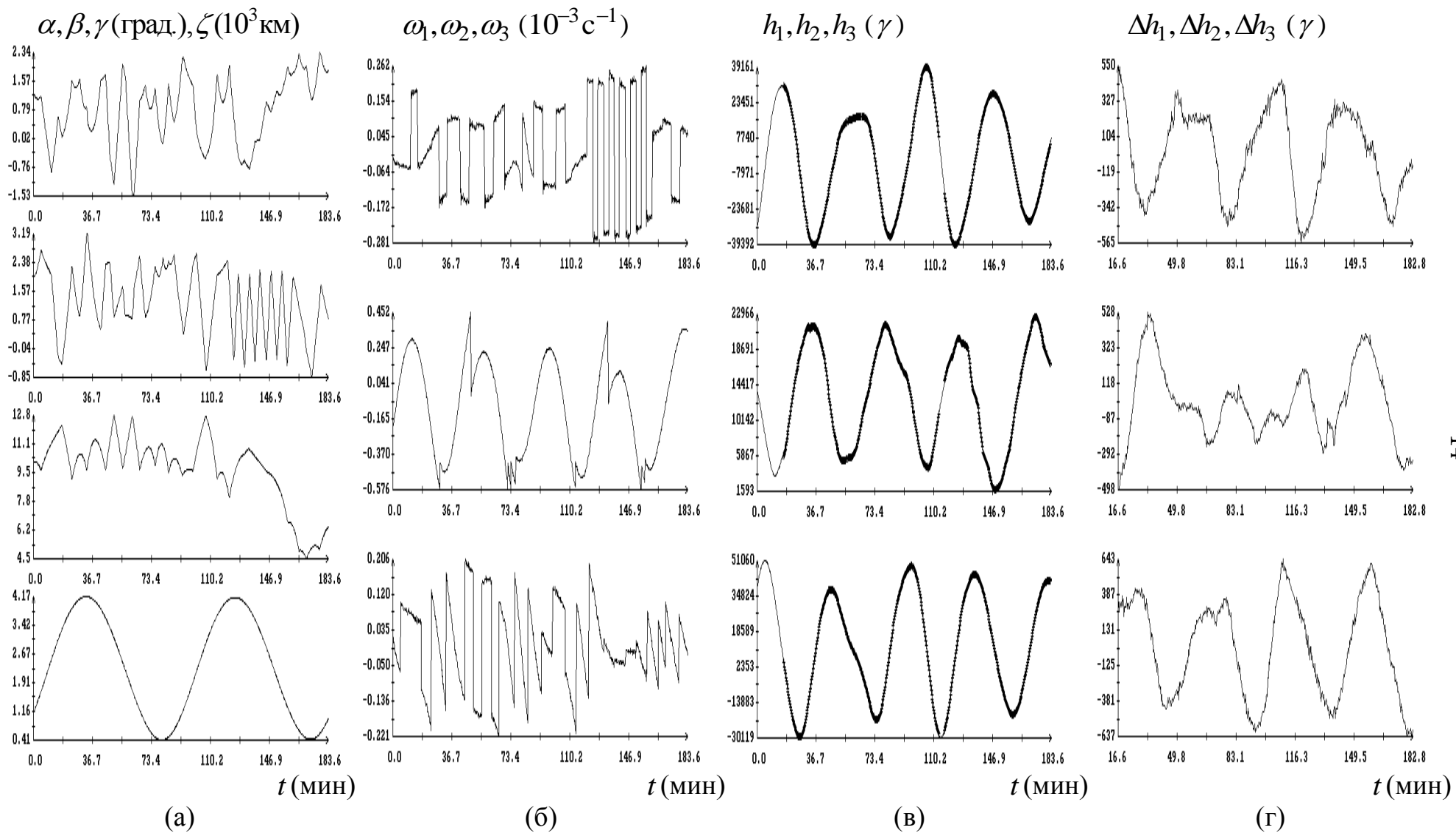


Рис. 3. Движение КА в солнечной ориентации. Момент $t = 0$ на графиках отвечает 1380881с (20:34:41 UTC 02.08.2014), сдвиг времени магнитных измерений 44.7с, смещения магнитных измерений (γ): 4439, -1334, 515; $\sigma = 285(270)\gamma$.

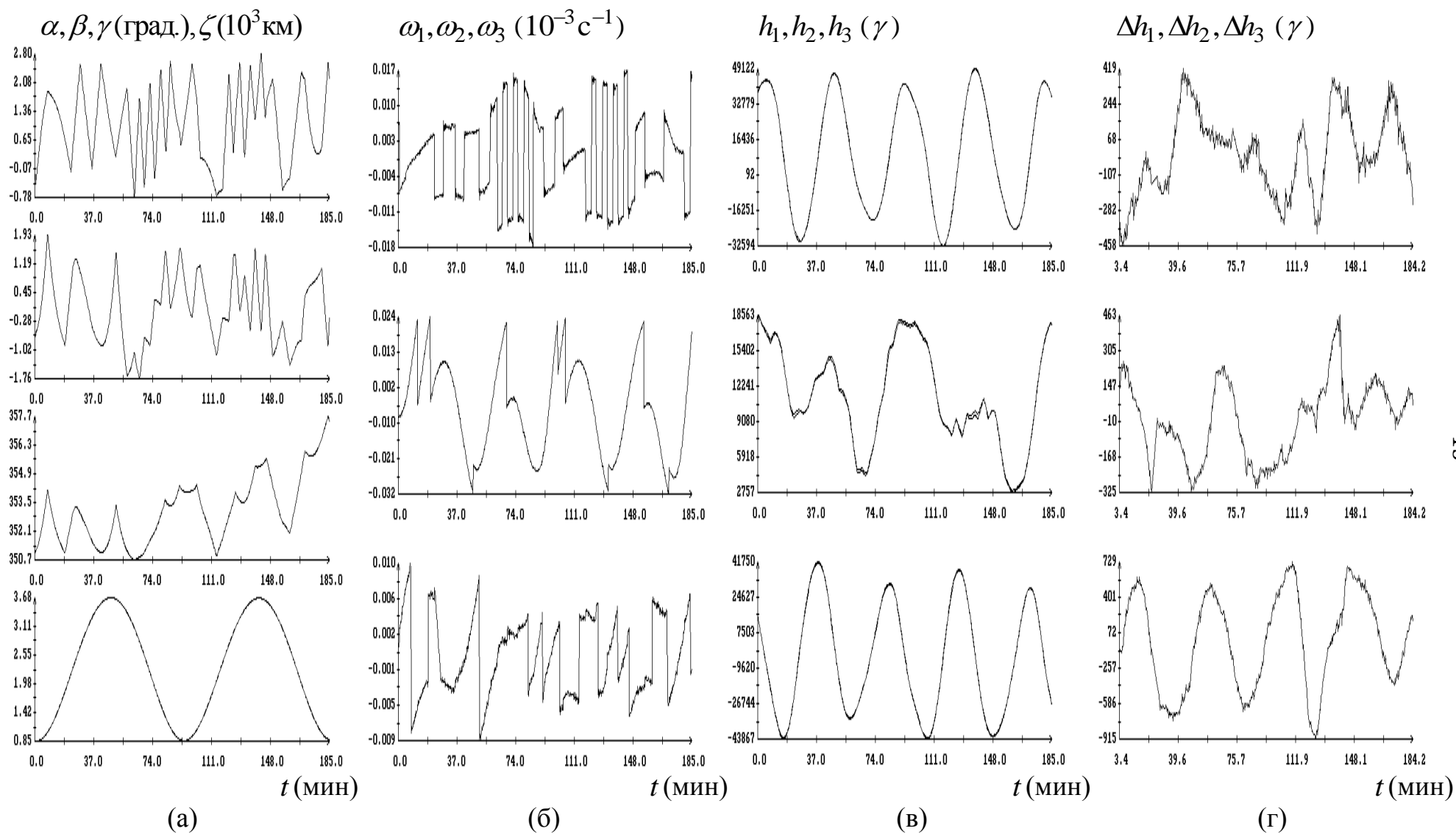


Рис. 4. Движение КА в солнечной ориентации. Момент $t = 0$ на графиках отвечает 1558157с (21:49:17 UTC 04.08.2014), сдвиг времени магнитных измерений 51.4с, смещения в измерениях компонент поля (γ): 4407, -1174, 750; $\sigma = 313(287)\gamma$.

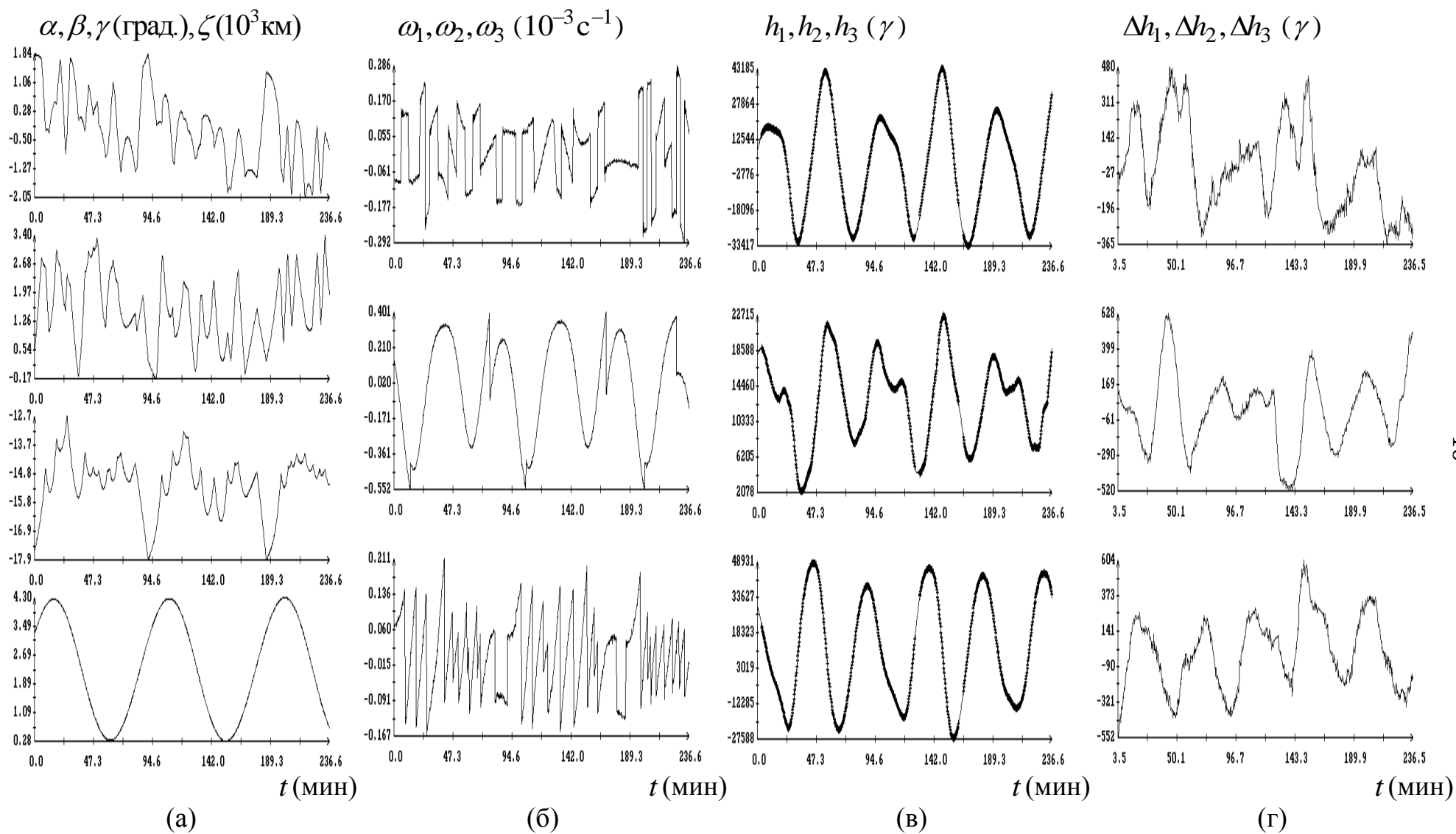


Рис. 5. Движение КА в солнечной ориентации. Момент $t = 0$ на графиках отвечает 1883057с (16:04:17 UTC 08.08.2014), сдвиг времени магнитных измерений 51.9с, смещения в измерениях компонент поля (γ): 4177, -1258, 527; $\sigma = 228(202)\gamma$.

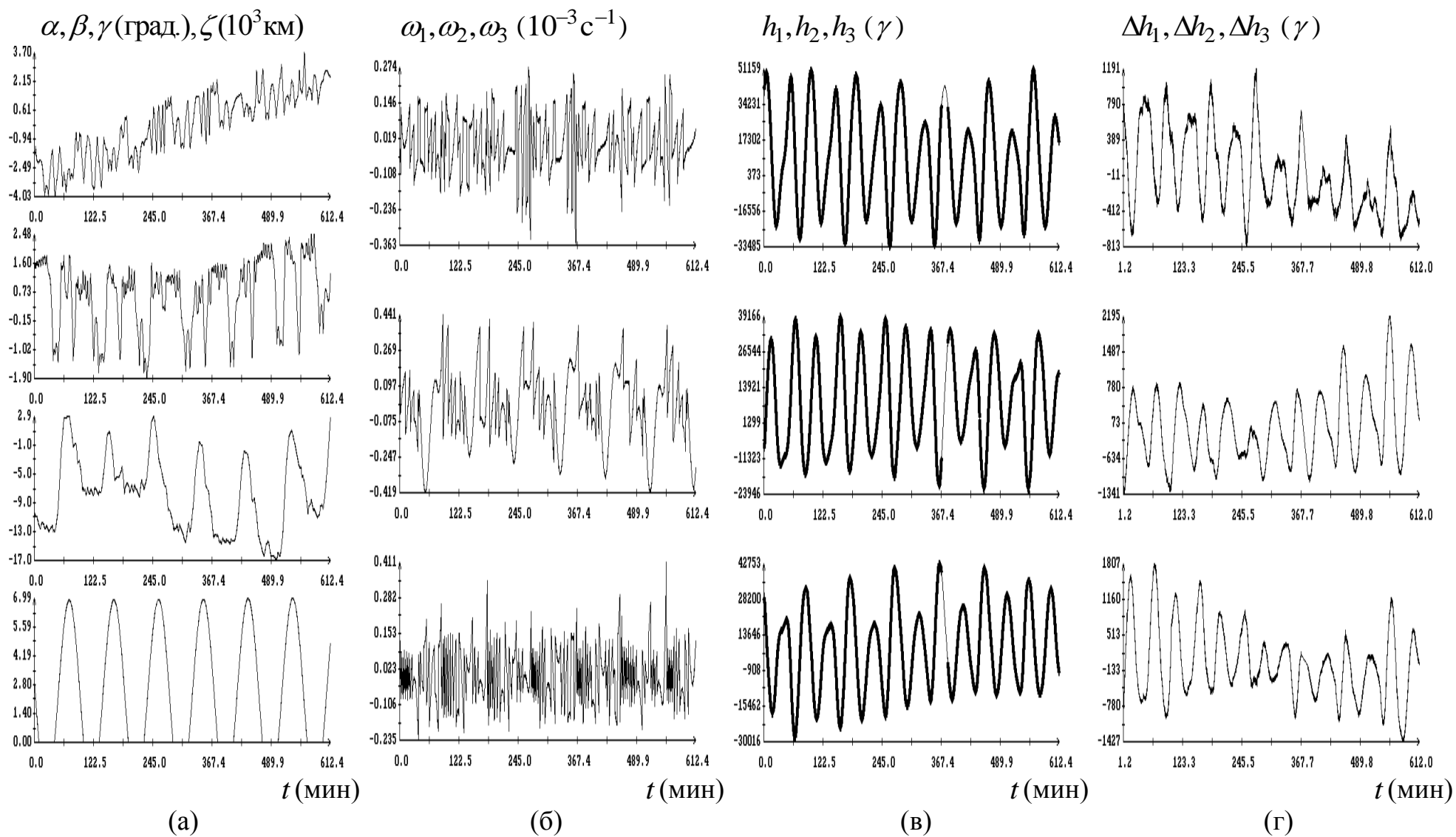


Рис. 6. Движение КА в солнечной ориентации. Момент $t = 0$ на графиках отвечает 2529426 с (03:37:06 UTC 16.08.2014), сдвиг времени магнитных измерений 64.1с, смещения магнитных измерений (γ): 4406, -1118, 797; $\sigma = 606(378)\gamma$.

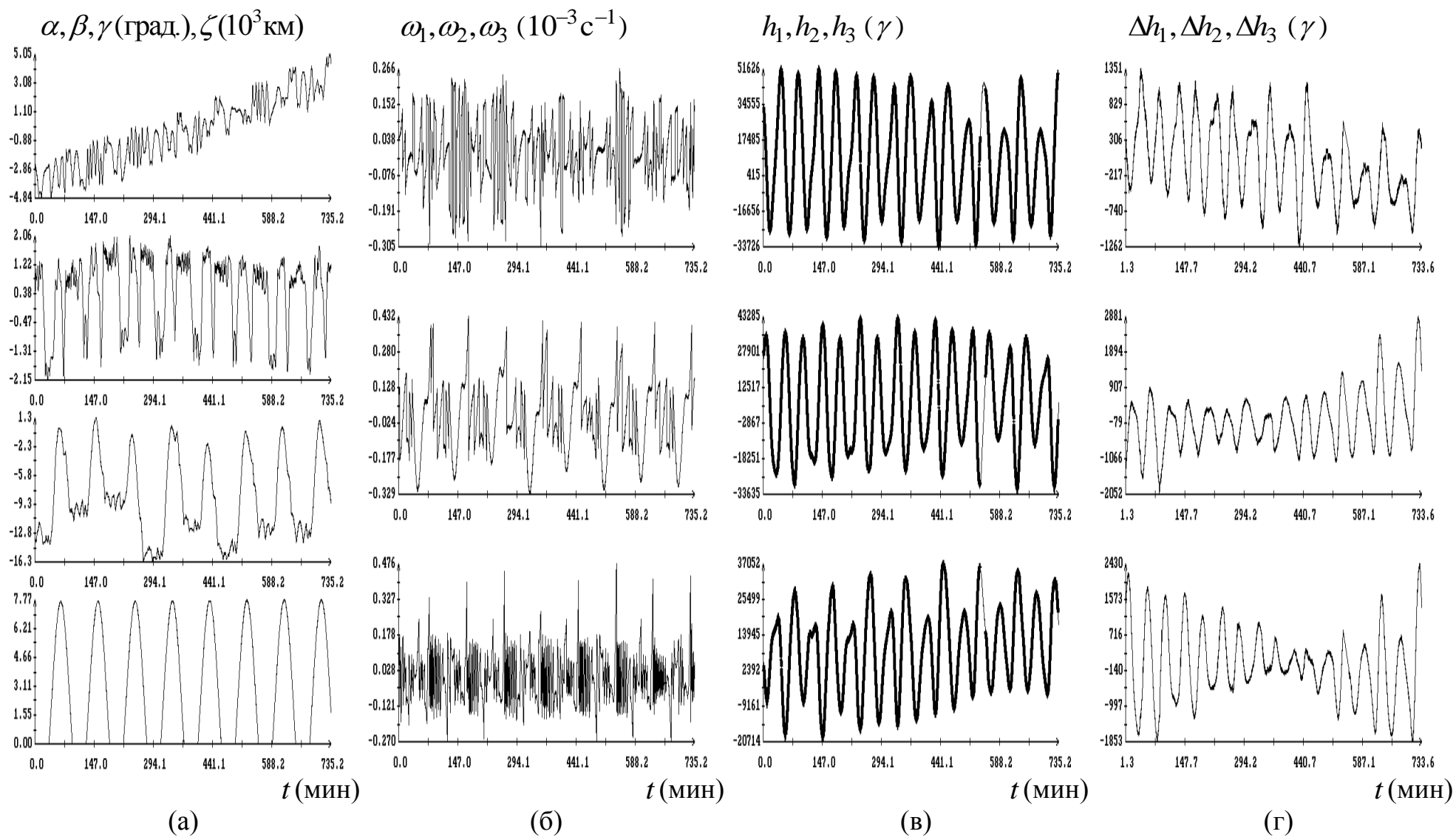


Рис. 7. Движение КА в солнечной ориентации. Момент $t = 0$ на графиках отвечает 2774058 с (23:34:18 UTC 18.08.2014), сдвиг времени магнитных измерений 65.9с, смещения магнитных измерений (γ): 4514, -1009, 848; $\sigma = 750(468)\gamma$.

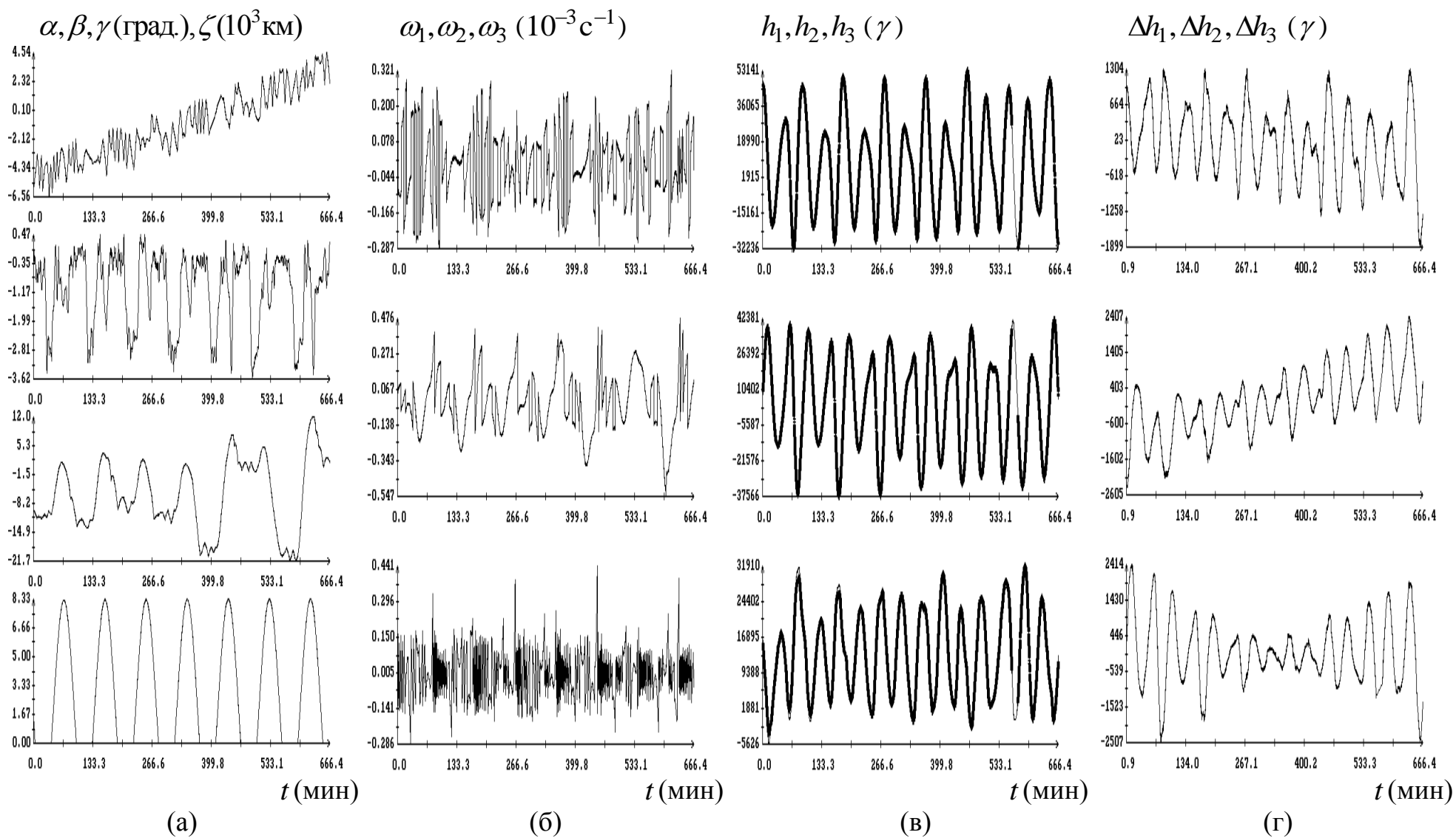


Рис. 8. Движение КА в солнечной ориентации. Момент $t = 0$ на графиках отвечает 3056694 с (06:04:54 UTC 22.08.2014), сдвиг времени магнитных измерений 55.5с, смещения магнитных измерений (γ): 4704, -1399, 1056; $\sigma = 840(472)\gamma$.

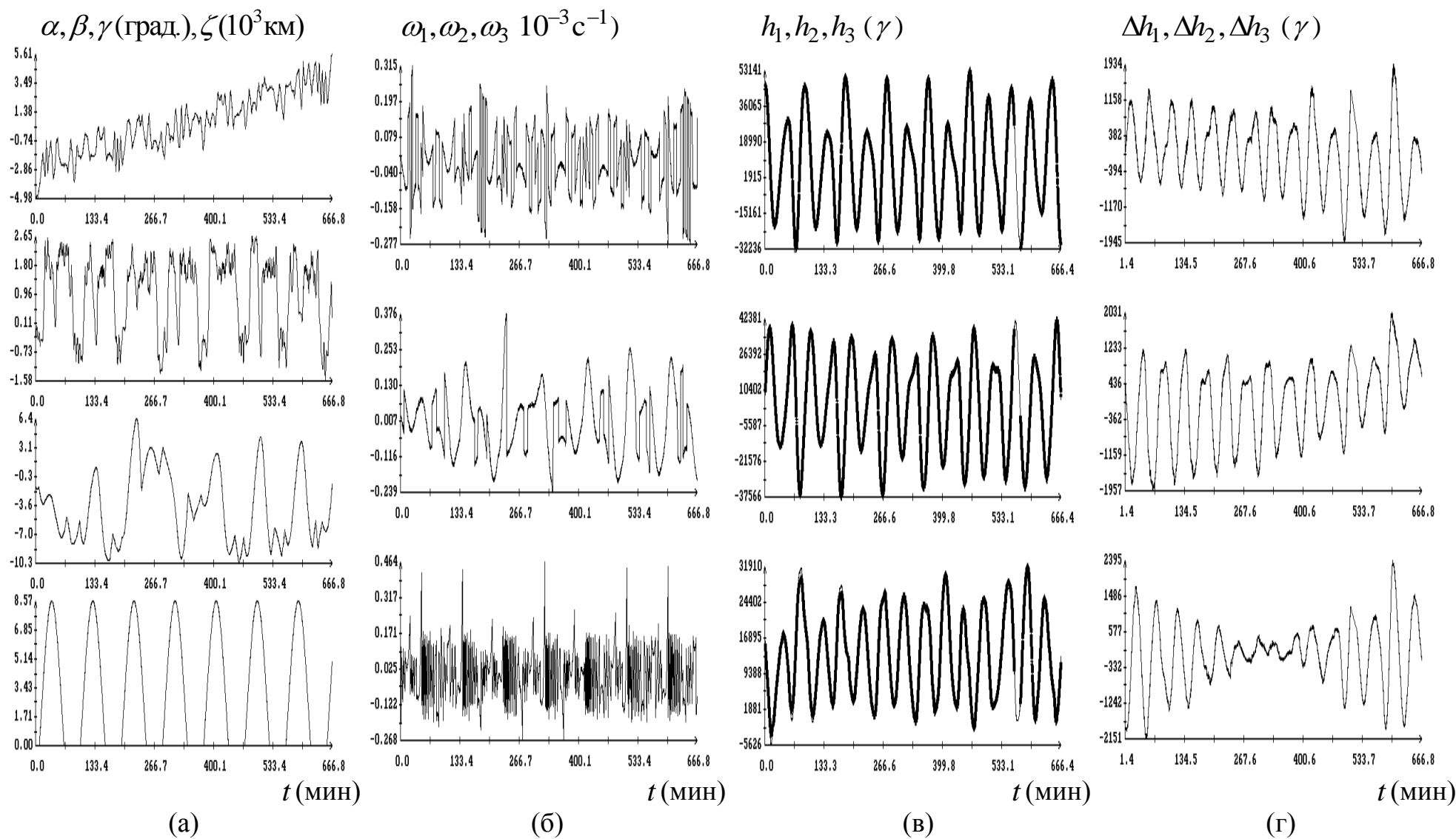


Рис. 9. Движение КА в солнечной ориентации. Момент $t = 0$ на графиках отвечает 3369102 с (20:51:42 UTC 25.08.2014), сдвиг времени магнитных измерений 79.7с, смещения магнитных измерений (γ): 4782, -616, 824; $\sigma = 817(586)\gamma$.

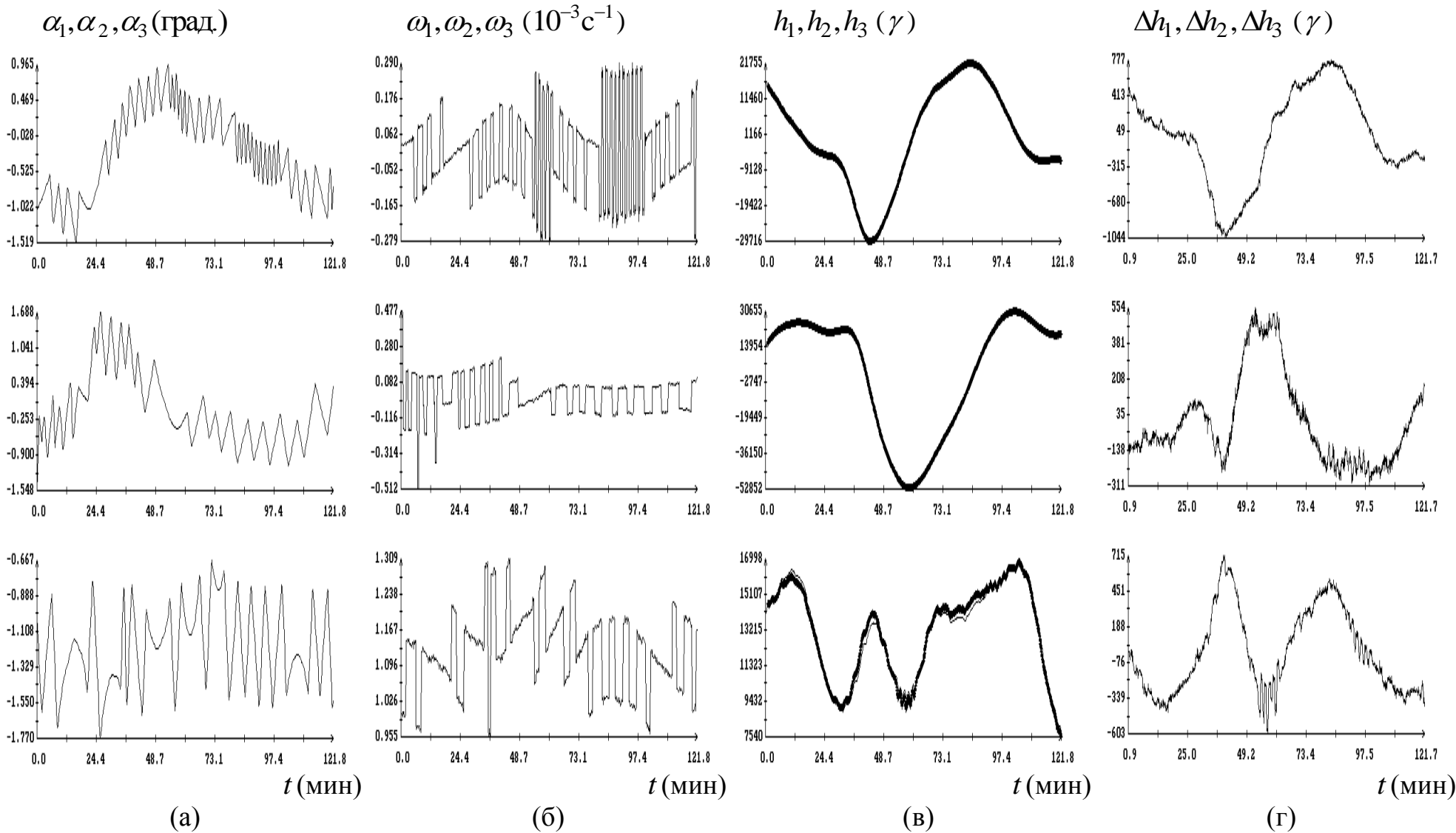


Рис. 10. Движение КА в орбитальной ориентации. Момент $t = 0$ на графиках отвечает 3922722с (06:38:42 UTC 01.09.2014), сдвиг времени магнитных измерений 65.1с, смещения магнитных измерений (γ): 4763, -644, 986; $\sigma = 348(324)\gamma$.

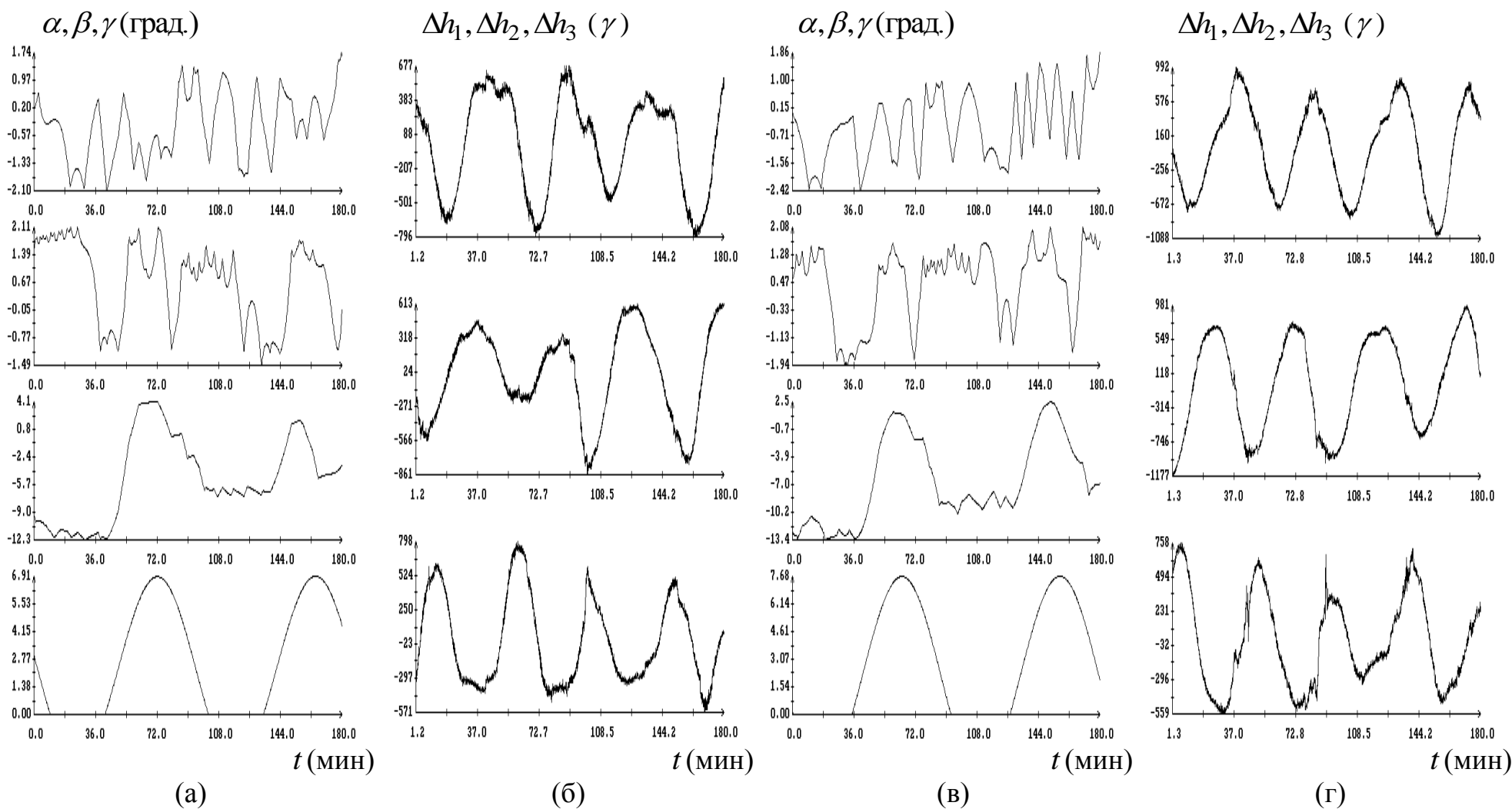


Рис. 11. Движение КА в солнечной ориентации. Графики (а). (б): момент $t = 0$ отвечает 2529426 с (03:37:06 UTC 16.08.2014), сдвиг времени магнитных измерений 65.4с, смещения магнитных измерений (γ): 4505, -991, 937; $\sigma = 385\gamma$. График (в). (г): момент $t = 0$ отвечает 2774058 с (23:34:18 UTC 18.08.2014), сдвиг времени магнитных измерений 67.0с, смещения магнитных измерений (γ): 4686, -894, 921; $\sigma = 510\gamma$.

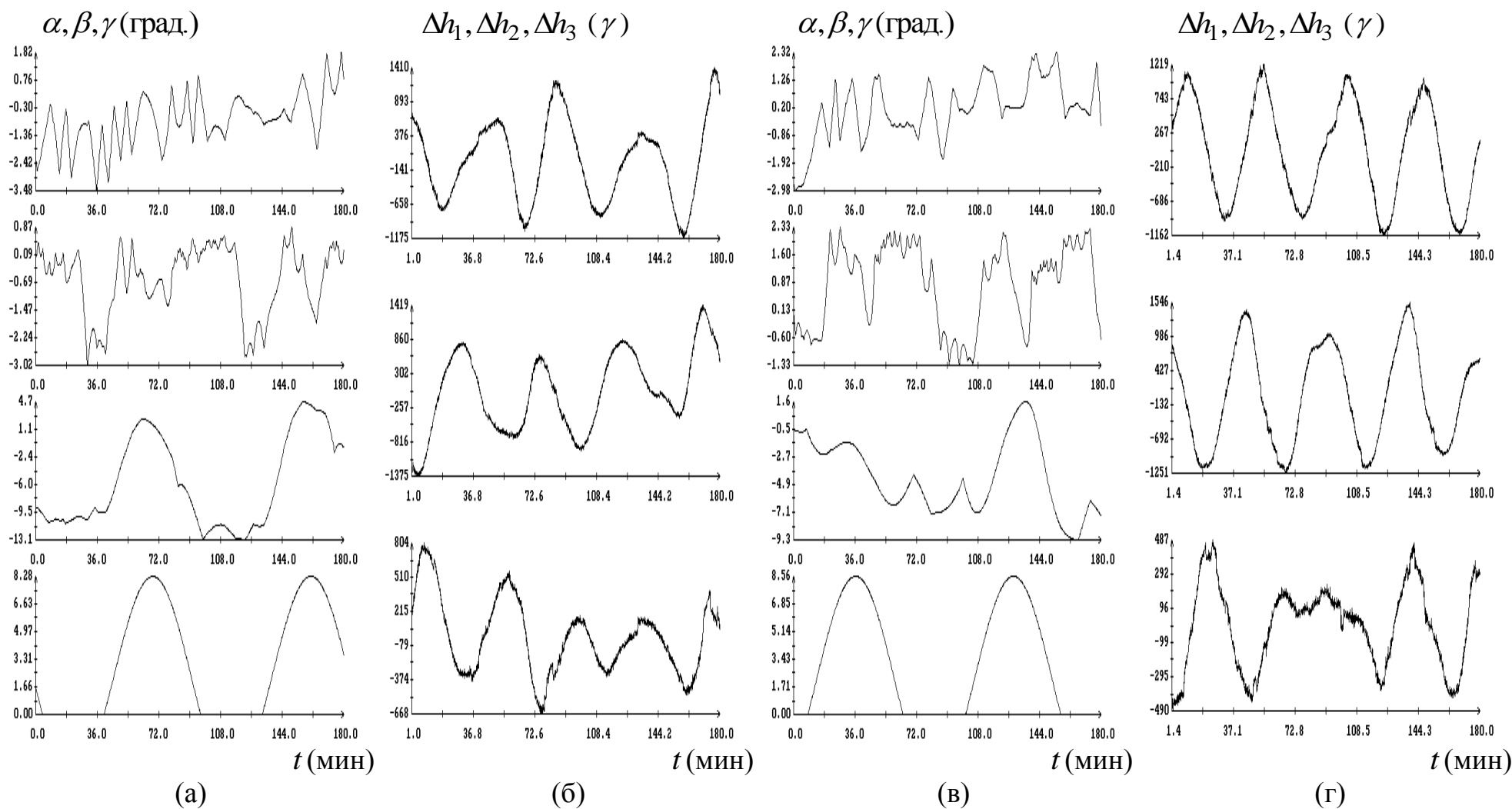


Рис. 12. Движение КА в солнечной ориентации. Графики (а). (б): момент $t = 0$ отвечает 3056694 с (06:04:54 UTC 22.08.2014), сдвиг времени магнитных измерений 60.9с, смещения магнитных измерений (γ): 4724, -1360, 930; $\sigma = 546\gamma$. График (в). (г): момент $t = 0$ отвечает 3369102 с (20:51:42 UTC 25.08.2014), сдвиг времени магнитных измерений 77.5с, смещения магнитных измерений (γ): 4918, -664, 888; $\sigma = 628\gamma$.