



ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 58 за 2015 г.



ISSN 2071-2898 (Print)
ISSN 2071-2901 (Online)

Ткачев С.С., Ролдугин Д.С.,
Овчинников М.Ю.

Уравнения движения
спутника с нежесткими
элементами конструкции

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Ткачев С.С., Ролдугин Д.С., Овчинников М.Ю. Уравнения движения спутника с нежесткими элементами конструкции // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2015. № 58. 20 с.
URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2015-58>

**Ордена Ленина
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М.В. Келдыша
Российской академии наук**

**С.С. Ткачев, Д.С. Ролдугин,
М.Ю. Овчинников**

**Уравнения движения спутника
с нежесткими элементами конструкции**

Москва — 2015

С.С. Ткачев, Д.С. Ролдугин, М.Ю. Овчинников

Уравнения движения спутника с нежесткими элементами конструкции

Рассматривается задача построения математической модели спутника с упругими элементами. В качестве обобщенных координат упругих деформаций используются нормальные формы колебаний. Проведена линеаризация уравнений.

Ключевые слова: спутник, нежесткие элементы, уравнения движения

S.S. Tkachev, D.S. Roldugin, M.Yu. Ovchinnikov

Equations of motion for a satellite with flexible parts

The mathematical model for a satellite with flexible parts is developed. The eigen modes are used for the flexible parts motion description. Linearized equations are derived.

Key words: satellite, flexible elements, motion equations

Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда проект № 14-11-00621. Авторы благодарят сотрудников АО “Информационные спутниковые системы” имени академика М.Ф. Решетнева А.В. Овчинникова, М.Г. Матыленко, С.В. Меуса за полезные обсуждения.

Оглавление

Введение	3
Постановка задачи и системы координат	3
Уравнения движения системы	5
Преобразование уравнений	13
Моды колебаний.....	18
Заключение.....	20
Литература	20

Введение

Крупногабаритные нежесткие элементы конструкции спутника могут оказывать значительное влияние на его угловое движение и даже полностью определять характер поведения системы.

При выводе уравнений движения спутника с нежесткими элементами возможно использование двух подходов: объединение уравнений в частных производных (описывающих деформации) и обыкновенных дифференциальных уравнений (описывающих абсолютное движение) [1] или использование дискретного представления упругих колебаний. В последнем случае получается система обыкновенных дифференциальных уравнений. К выводу этих уравнений также можно подходить по-разному: использовать уравнения Лагранжа, как это сделано, например, в [2], или основной принцип механики для системы с идеальными связями (см., например, [3]). По трудоемкости оба подхода достаточно близки, поэтому отдать предпочтение одному из них сложно. В работе используется второй подход.

Полученные при выводе уравнения оказываются достаточно громоздкими и их затруднительно использовать в контуре управления. По этой причине часть работы посвящена преобразованию уравнений, которое позволяет привести систему (при определенных допущениях) к более простому виду.

Постановка задачи и системы координат

Рассматривается спутник, который состоит из корпуса - твердого тела с двумя дополнительными нежесткими телами. Для определенности будем называть эти тела антенной и солнечной панелью. Антенна к корпусу спутника крепится жестко, панель – с помощью одностепенного шарнира. Элементарные точечные i -ые массы этих тел – корпуса, антенны и панели – задаются относительно центра масс Земли, соответственно, векторами \mathbf{R}_{si} , \mathbf{R}_{ai} , \mathbf{R}_{pi} (индекс s соответствует корпусу спутника, a – антенне, p – панели, см. рис.1),

$$\mathbf{R}_{si} = \mathbf{R}_s + \mathbf{r}_{si},$$

$$\mathbf{R}_{ai} = \mathbf{R}_a + \mathbf{r}_{ai} + \mathbf{u}_{ai},$$

$$\mathbf{R}_{pi} = \mathbf{R}_p + \mathbf{r}_{pi} + \mathbf{u}_{pi},$$

где \mathbf{R}_s , \mathbf{R}_a , \mathbf{R}_p – выделенные точки соответствующего тела, показанные на рис.1; \mathbf{r}_{si} , \mathbf{r}_{ai} , \mathbf{r}_{pi} – радиус-векторы i -ых точек соответствующего тела относительно связанной с этим телом системы координат, начало которых помещено в точки, указанные на рис.1; \mathbf{u}_{ai} , \mathbf{u}_{pi} – смещения i -ых точек тела, вызванные упругими деформациями.

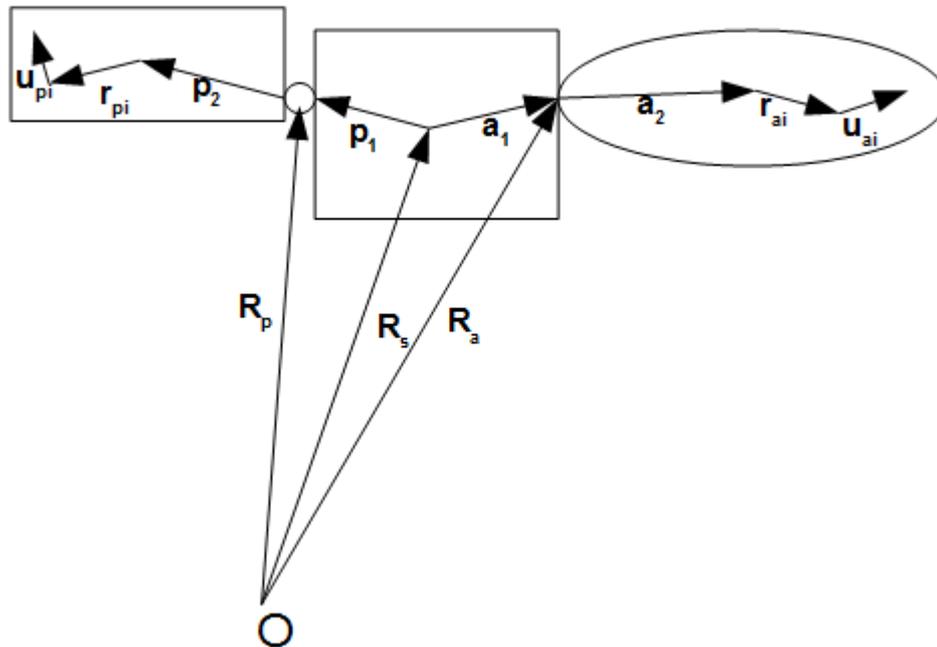


Рис.1. Геометрическая конфигурация спутника корпус-панель-антенна

Введем следующие правые ортонормированные системы координат:

$OXYZ$ – инерциальная система координат, ее начало лежит в центре масс Земли, ось OZ перпендикулярна плоскости экватора, OX направлена на точку весеннего равноденствия;

O_sxyz – связанная с корпусом спутника система координат, ее начало лежит в центре масс корпуса спутника, оси – его главные центральные оси;

$O_ax_ay_az_a$ – связанная с антенной система координат, ее начало расположено в точке крепления антенны к корпусу спутника, оси – главные оси инерции для недеформированной антенны;

$O_px_py_pz_p$ – связанная с панелью система координат, ее начало помещается в точке крепления к шарниру, оси – главные оси инерции для недеформированной панели;

$O_p\xi\eta\zeta$ – связанная с шарниром система координат, ось $O_p\xi$ – ось поворота в шарнире, две другие перпендикулярны ей.

Ниже приведена последовательность переходов между системами координат.

$$O_p\xi\eta\zeta \rightarrow O_px_py_pz_p$$

↑

$$OXYZ \rightarrow O_sxyz \rightarrow O_ax_ay_az_a$$

В дальнейшем предполагается, что величины \mathbf{p}_1 и \mathbf{a}_1 заданы в O_sxyz ; \mathbf{p}_2 , \mathbf{r}_{pi} и \mathbf{u}_{pi} в системе $O_px_py_pz_p$; \mathbf{a}_2 , \mathbf{r}_{ai} и \mathbf{u}_{ai} в системе $O_ax_ay_az_a$. При выводе соответствующие матрицы перехода опущены, чтобы не усложнять и без того громоздкие записи. То есть, будем считать, что все векторы записаны в одной системе координат.

Уравнения движения системы

С учетом рис.1 можно выписать цепочки равенств

$$\tilde{\mathbf{R}}_a = \mathbf{R}_s + \mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 + \tilde{\mathbf{a}}_2 = \mathbf{R}_s + \mathbf{a} + \tilde{\mathbf{a}}_2 = \mathbf{R}_a + \mathbf{a}_2 + \tilde{\mathbf{a}}_2, \quad (1)$$

$$\tilde{\mathbf{R}}_p = \mathbf{R}_s + \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 + \tilde{\mathbf{p}}_2 = \mathbf{R}_s + \mathbf{p} + \tilde{\mathbf{p}}_2 = \mathbf{R}_p + \mathbf{p}_2 + \tilde{\mathbf{p}}_2. \quad (2)$$

Здесь \mathbf{a}_1 – радиус-вектор из центра масс корпуса спутника в точку крепления антенны, \mathbf{a}_2 – из точки крепления антенны в центр масс недеформированной антенны, $\tilde{\mathbf{a}}_2$ – смещение центра масс антенны за счет ее деформации,

$$\tilde{\mathbf{a}}_2 = \frac{1}{m_a} \sum_i m_{ai} \mathbf{u}_{ai}, \quad (3)$$

где m_a – масса антенны. Суммирование ведется по точкам соответствующего тела (в данном случае антенны). Тильда здесь и далее обозначает, что в векторе учтены деформации. Аналогичные обозначения вводятся и для панели.

Пусть \mathbf{R}_C – центр масс системы трех тел, тогда имеет место соотношение

$$(m_s + m_a + m_p) \mathbf{R}_0 = m_s \mathbf{R}_s + m_a \tilde{\mathbf{R}}_a + m_p \tilde{\mathbf{R}}_p.$$

С учетом (1) и (2)

$$\mathbf{R}_s = \mathbf{R}_C - \frac{m_a}{m} (\mathbf{a} + \tilde{\mathbf{a}}_2) - \frac{m_p}{m} (\mathbf{p} + \tilde{\mathbf{p}}_2),$$

$$\tilde{\mathbf{R}}_a = \mathbf{R}_C + \mathbf{a} + \tilde{\mathbf{a}}_2 - \frac{m_a}{m} (\mathbf{a} + \tilde{\mathbf{a}}_2) - \frac{m_p}{m} (\mathbf{p} + \tilde{\mathbf{p}}_2),$$

$$\tilde{\mathbf{R}}_p = \mathbf{R}_C + \mathbf{p} + \tilde{\mathbf{p}}_2 - \frac{m_a}{m} (\mathbf{a} + \tilde{\mathbf{a}}_2) - \frac{m_p}{m} (\mathbf{p} + \tilde{\mathbf{p}}_2).$$

Здесь m – масса всей системы (трех тел).

Для вывода уравнений используется основной принцип механики – принцип возможных перемещений для системы с идеальными связями

$$\sum_i (m_i \ddot{\mathbf{R}}_i - \mathbf{F}_i) \delta \mathbf{R}_i = 0, \quad (4)$$

где $\delta \mathbf{R}_i$ – возможное перемещение для i -й точки системы, \mathbf{F}_i – равнодействующая всех активных сил, действующих на i -ю точку (предполагается, что связи идеальные, а значит, работа их реакций на возможных перемещениях равна нулю).

Для исследуемой системы выражение (4) запишется в виде

$$\sum_i (m_{si} \ddot{\mathbf{R}}_{si} - \mathbf{F}_{si}) \delta \mathbf{R}_{si} + \sum_i (m_{ai} \ddot{\mathbf{R}}_{ai} - \mathbf{F}_{ai}) \delta \mathbf{R}_{ai} + \sum_i (m_{pi} \ddot{\mathbf{R}}_{pi} - \mathbf{F}_{pi}) \delta \mathbf{R}_{pi} - \sum_i \mathbf{F}_{hi} \delta \mathbf{R}_{hi} = 0. \quad (5)$$

Каждая сумма берется по соответствующему телу. Последнее слагаемое отвечает за шарнир, который предполагается невесомым. Для него можно написать

$$\sum_i \mathbf{F}_{hi} \delta \mathbf{R}_{hi} = M_e \delta \varphi.$$

Здесь M_e – момент в шарнире (управляющий и, быть может, сил сопротивления), $\delta \varphi$ – возможный поворот в шарнире.

Для возможных перемещений в каждом теле можно записать

$$\begin{aligned} \delta \mathbf{R}_{si} &= \delta \mathbf{R}_s + \delta \boldsymbol{\theta} \times \mathbf{r}_{si}, \\ \delta \mathbf{R}_{ai} &= \delta \mathbf{R}_s + \delta \boldsymbol{\theta} \times (\mathbf{a}_1 + \mathbf{r}_{ai} + \mathbf{u}_{ai}) + \mathbf{A}_{ai} \delta \mathbf{q}_a, \\ \delta \mathbf{R}_{pi} &= \delta \mathbf{R}_s + \delta \boldsymbol{\theta} \times (\mathbf{p}_1 + \mathbf{r}_{pi} + \mathbf{u}_{pi}) + \mathbf{e} \delta \varphi \times (\mathbf{r}_{pi} + \mathbf{u}_{pi}) + \mathbf{A}_{pi} \delta \mathbf{q}_p. \end{aligned}$$

Здесь $\delta \boldsymbol{\theta}$ – элементарный поворот всей системы (угловое движение корпуса спутника), \mathbf{e} – ось шарнира, вектор деформации записан в виде разложения по собственным функциям

$$\mathbf{u}_i = \mathbf{A}_i(\mathbf{r}_i) \mathbf{q}(t), \quad (6)$$

где $\mathbf{A}_i(\mathbf{r}_i)$ – матрица собственных мод колебаний.

Возможные перемещения $\delta \mathbf{R}_s$, $\delta \boldsymbol{\theta}$, $\delta \mathbf{q}_a$, $\delta \varphi$, $\delta \mathbf{q}_p$ полагаются независимыми, поэтому равенство (5) выполняется в том и только в том случае, когда соответствующие множители перед возможными перемещениями обращаются в нуль,

$$\begin{aligned} \sum_i (m_{si} \ddot{\mathbf{R}}_{si} - \mathbf{F}_{si}) + \sum_i (m_{ai} \ddot{\mathbf{R}}_{ai} - \mathbf{F}_{ai}) + \sum_i (m_{pi} \ddot{\mathbf{R}}_{pi} - \mathbf{F}_{pi}) &= 0, \\ \sum_i \mathbf{r}_{si} \times (m_{si} \ddot{\mathbf{R}}_{si} - \mathbf{F}_{si}) + \sum_i (\mathbf{a}_1 + \mathbf{r}_{ai} + \mathbf{u}_{ai}) \times (m_{ai} \ddot{\mathbf{R}}_{ai} - \mathbf{F}_{ai}) + \\ + \sum_i (\mathbf{p}_1 + \mathbf{r}_{pi} + \mathbf{u}_{pi}) \times (m_{pi} \ddot{\mathbf{R}}_{pi} - \mathbf{F}_{pi}) &= 0, \\ \sum_i \mathbf{e}^T \left((\mathbf{p}_2 + \mathbf{r}_{pi} + \mathbf{u}_{pi}) \times (m_{pi} \ddot{\mathbf{R}}_{pi} - \mathbf{F}_{pi}) \right) &= M_e, \\ \sum_i \mathbf{A}_{ai}^T (m_{ai} \ddot{\mathbf{R}}_{ai} - \mathbf{F}_{ai}) &= 0, \\ \sum_i \mathbf{A}_{pi}^T (m_{pi} \ddot{\mathbf{R}}_{pi} - \mathbf{F}_{pi}) &= 0. \end{aligned} \quad (7)$$

Система уравнений (7) должна быть дополнена соответствующими кинематическими соотношениями. Первое уравнение из (7) описывает орбитальное движение центра масс спутника и может быть переписано после суммирования в виде

$$m_s \ddot{\mathbf{R}}_s - \mathbf{F}_s + m_a \ddot{\mathbf{R}}_a - \mathbf{F}_a + m_p \ddot{\mathbf{R}}_p - \mathbf{F}_p = 0$$

или

$$m \ddot{\mathbf{R}}_0 - \mathbf{F}_0 = 0, \quad (8)$$

где \mathbf{F}_0 – равнодействующая всех сил, действующая на систему. Уравнение (8) может быть переписано в виде

$$\ddot{\mathbf{R}}_0 = -\mu \frac{\mathbf{R}_0}{R_0^3} + \frac{\mathbf{F}_0^{603M}}{m}, \quad (9)$$

\mathbf{F}_0^{603M} – возмущения от несферичности Земли, солнечного давления, реактивного двигателя и других факторов, μ – гравитационная постоянная Земли.

Второе уравнение (7) описывает угловое движение спутника с антенной и панелью. Первое слагаемое в нем

$$\begin{aligned} \sum_i \mathbf{r}_{si} \times (m_{si} \ddot{\mathbf{R}}_{si} - \mathbf{F}_{si}) &= \sum_i \mathbf{r}_{si} \times (m_{si} \ddot{\mathbf{R}}_s + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r}_{si} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{si} - \mathbf{F}_{si}) = \\ &= \mathbf{J}_s \dot{\boldsymbol{\omega}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{J}_s \boldsymbol{\omega} - \mathbf{T}_s. \end{aligned} \quad (10)$$

Здесь $\boldsymbol{\omega}$ – абсолютная угловая скорость спутника, \mathbf{M}_s – момент внешних сил, действующих на спутник, \mathbf{J}_s – тензор инерции спутника, равный

$$\mathbf{J}_s = \sum_i m_{ai} \mathbf{K}(\mathbf{r}_{ai}, \mathbf{r}_{ai}),$$

где $\mathbf{K}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ – матрица двойного векторного произведения, задаваемого как

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{y} \times \mathbf{b}) = \mathbf{K}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \mathbf{y}, \quad \mathbf{K}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \begin{pmatrix} a_2 b_2 + a_3 b_3 & -a_2 b_1 & -a_3 b_1 \\ -a_1 b_2 & a_1 b_1 + a_3 b_3 & -a_3 b_2 \\ -a_1 b_3 & -a_2 b_3 & a_1 b_1 + a_2 b_2 \end{pmatrix}.$$

Перед тем как записать второе слагаемое во втором уравнении (7), необходимо отметить, что \mathbf{F}_{ai} (как и \mathbf{F}_{pi} в третьем слагаемом) содержит часть, отвечающую за силы, возникающие при деформации. Такая часть в дальнейшем выделена и обозначена как \mathbf{L}_{ai} и \mathbf{L}_{pi} соответственно. Эти силы являются внутренними, поэтому их момент и равнодействующая равны нулю. Кроме того, справедливы соотношения

$$\dot{\mathbf{R}}_{ai} = \dot{\mathbf{R}}_a + \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{r}_{ai} + \mathbf{u}_{ai}) + \dot{\mathbf{u}}_{ai},$$

$$\ddot{\mathbf{R}}_{ai} = \ddot{\mathbf{R}}_a + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times (\mathbf{r}_{ai} + \mathbf{u}_{ai}) + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{r}_{ai} + \mathbf{u}_{ai}) + 2\boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{u}}_{ai} + \ddot{\mathbf{u}}_{ai},$$

$$\dot{\mathbf{R}}_{pi} = \dot{\mathbf{R}}_p + \boldsymbol{\omega}_2 \times (\mathbf{r}_{pi} + \mathbf{u}_{pi}) + \dot{\mathbf{u}}_{pi},$$

$$\ddot{\mathbf{R}}_{pi} = \ddot{\mathbf{R}}_p + \dot{\boldsymbol{\omega}}_2 \times (\mathbf{r}_{pi} + \mathbf{u}_{pi}) + \boldsymbol{\omega}_2 \times \boldsymbol{\omega}_2 \times (\mathbf{r}_{pi} + \mathbf{u}_{pi}) + 2\boldsymbol{\omega}_2 \times \dot{\mathbf{u}}_{pi} + \ddot{\mathbf{u}}_{pi},$$

где $\boldsymbol{\omega}_2$ – абсолютная угловая скорость панели. Она и ее производная по времени, соответственно, равны

$$\boldsymbol{\omega}_2 = \boldsymbol{\omega} + \mathbf{e} \dot{\phi},$$

$$\dot{\boldsymbol{\omega}}_2 = \dot{\boldsymbol{\omega}} + \mathbf{e} \ddot{\phi} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e} \dot{\phi}.$$

С учетом этого можно отдельно написать слагаемые, входящие во второе уравнение системы (7)

$$\begin{aligned}
& \sum_i (\mathbf{a}_1 + \mathbf{r}_{ai} + \mathbf{u}_{ai}) \times (m_{ai} \ddot{\mathbf{R}}_{ai} - \mathbf{F}_{ai}) = \\
& = + \sum_i (\mathbf{a}_1 + \mathbf{r}_{ai} + \mathbf{u}_{ai}) \times \\
& \times m_{ai} \left(\dot{\boldsymbol{\omega}} \times (\mathbf{r}_{ai} + \mathbf{u}_{ai}) + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{r}_{ai} + \mathbf{u}_{ai}) + 2\boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{u}}_{ai} + \ddot{\mathbf{u}}_{ai} + \ddot{\mathbf{R}}_a - \frac{\mathbf{F}_{ai}}{m_{ai}} \right) = \\
& = m_a \mathbf{a}_1 \times \dot{\boldsymbol{\omega}} \times (\mathbf{a}_2 + \tilde{\mathbf{a}}_2) + m_a \mathbf{a}_1 \times \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{a}_2 + \tilde{\mathbf{a}}_2) + \\
& + 2m_a \mathbf{a}_1 \times \boldsymbol{\omega} \times \dot{\tilde{\mathbf{a}}}_2 + m_a \mathbf{a}_1 \times \ddot{\tilde{\mathbf{a}}}_2 + \tilde{\mathbf{J}}_a \dot{\boldsymbol{\omega}} + \boldsymbol{\omega} \times \tilde{\mathbf{J}}_a \boldsymbol{\omega} + \sum_i (\mathbf{r}_{ai} + \mathbf{u}_{ai}) \times m_{ai} (2\boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{u}}_{ai} + \ddot{\mathbf{u}}_{ai}) + \\
& + \sum_i (\mathbf{a}_1 + \mathbf{r}_{ai} + \mathbf{u}_{ai}) \times m_{ai} \left(\ddot{\mathbf{R}}_a - \frac{\mathbf{F}_{ai}}{m_{ai}} \right).
\end{aligned}$$

Здесь $\tilde{\mathbf{J}}_a$ – тензор инерции антенны относительно точки ее крепления с учетом деформации. Его связь с тензором инерции недеформированного тела \mathbf{J}_a задается выражением

$$\tilde{\mathbf{J}}_a = \mathbf{J}_a + \sum_i m_{ai} \mathbf{K}(\mathbf{r}_{ai}, \mathbf{u}_{ai}) + \sum_i m_{ai} \mathbf{K}(\mathbf{u}_{ai}, \mathbf{r}_{ai}) + \sum_i m_{ai} \mathbf{K}(\mathbf{u}_{ai}, \mathbf{u}_{ai}).$$

Выражение для \mathbf{F}_{ai} представимо в виде

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}_0 + \Delta\mathbf{r}, \mathbf{V}_0 + \Delta\mathbf{V}, t) = \mathbf{F}(\mathbf{r}_0, \mathbf{V}_0) + \left. \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{r}, \mathbf{V})}{\partial \mathbf{r}} \right|_{\substack{\mathbf{r}=\mathbf{r}_0 \\ \mathbf{V}=\mathbf{V}_0}} \Delta\mathbf{r} + \left. \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{r}, \mathbf{V})}{\partial \mathbf{V}} \right|_{\substack{\mathbf{r}=\mathbf{r}_0 \\ \mathbf{V}=\mathbf{V}_0}} \Delta\mathbf{V} + \mathbf{o}\left(\frac{\Delta r}{r_0} + \frac{\Delta V}{V_0}\right)$$

или в конкретном случае

$$\mathbf{F}_{ai} \approx \mathbf{F}_a + \frac{\partial \mathbf{F}_a}{\partial \mathbf{r}} (\mathbf{r}_{ai} + \mathbf{u}_{ai}) + \frac{\partial \mathbf{F}_a}{\partial \mathbf{V}} (\boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{r}_{ai} + \mathbf{u}_{ai}) + \dot{\mathbf{u}}_{ai}) = \mathbf{F}_a + \Delta\mathbf{F}_{ai}.$$

Здесь отброшены величины второго и более порядков малости (в смысле малости геометрических размеров системы по сравнению с расстоянием от центра масс Земли до центра соответствующего тела). В этом случае

$$\sum_i (\mathbf{a}_1 + \mathbf{r}_{ai} + \mathbf{u}_{ai}) \times m_{ai} \left(\ddot{\mathbf{R}}_a - \frac{\mathbf{F}_a + \Delta\mathbf{F}_{ai}}{m_{ai}} \right) = (\mathbf{a}_1 + \tilde{\mathbf{a}}_2) \times (m_a \ddot{\mathbf{R}}_a - \mathbf{F}_a) - \mathbf{a}_1 \times \sum_i \Delta\mathbf{F}_{ai} - \mathbf{T}_a.$$

Здесь \mathbf{T}_a – момент сил относительно точки крепления. Второй множитель в первом слагаемом преобразуется следующим образом:

$$\begin{aligned}
& m_a (\ddot{\mathbf{R}}_a - \ddot{\mathbf{R}}_0) + m_a \ddot{\mathbf{R}}_0 - \mathbf{F}_a = \\
& = m_a \left(\dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{a}_1 + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{a}_1 - \frac{m_a}{m} \left(\dot{\boldsymbol{\omega}} \times (\mathbf{a} + \tilde{\mathbf{a}}_2) + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{a} + \tilde{\mathbf{a}}_2) + 2\boldsymbol{\omega} \times \dot{\tilde{\mathbf{a}}}_2 + \ddot{\tilde{\mathbf{a}}}_2 \right) \right) - \\
& - \frac{m_a m_p}{m} \left(\dot{\boldsymbol{\omega}}_2 \times (\mathbf{p}_2 + \tilde{\mathbf{p}}_2) + \boldsymbol{\omega}_2 \times \boldsymbol{\omega}_2 \times (\mathbf{p}_2 + \tilde{\mathbf{p}}_2) + 2\boldsymbol{\omega}_2 \times \dot{\tilde{\mathbf{p}}}_2 + \ddot{\tilde{\mathbf{p}}}_2 + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{p}_1 + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{p}_1 \right) + \\
& + m_a \left(\frac{\mathbf{F}_0^{603M}}{m} - \frac{\mathbf{F}_a^{603M}}{m_a} \right) + m_a \mu \left(\frac{\Delta \mathbf{R}_a}{R_0^3} - \frac{3\mathbf{R}_0 (\mathbf{R}_0, \Delta \mathbf{R}_a)}{R_0^3} \right).
\end{aligned}$$

Здесь $\Delta \mathbf{R}_a = \mathbf{a}_1 - \frac{m_a}{m} (\mathbf{a} + \tilde{\mathbf{a}}_2) - \frac{m_p}{m} (\mathbf{p} + \tilde{\mathbf{p}}_2)$.

В итоге

$$\begin{aligned}
& \sum_i (\mathbf{a}_1 + \mathbf{r}_{ai} + \mathbf{u}_{ai}) \times (m_{ai} \ddot{\mathbf{R}}_{ai} - \mathbf{F}_{ai}) = \\
& = m_a \mathbf{a}_1 \times \dot{\boldsymbol{\omega}} \times (\mathbf{a}_2 + \tilde{\mathbf{a}}_2) + m_a \mathbf{a}_1 \times \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{a}_2 + \tilde{\mathbf{a}}_2) + \\
& + 2m_a \mathbf{a}_1 \times \boldsymbol{\omega} \times \dot{\tilde{\mathbf{a}}}_2 + m_a \mathbf{a}_1 \times \ddot{\tilde{\mathbf{a}}}_2 + \tilde{\mathbf{J}}_a \dot{\boldsymbol{\omega}} + \boldsymbol{\omega} \times \tilde{\mathbf{J}}_a \boldsymbol{\omega} + \\
& + \sum_i (\mathbf{r}_{ai} + \mathbf{u}_{ai}) \times m_{ai} (2\boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{u}}_{ai} + \ddot{\mathbf{u}}_{ai}) + \\
& + (\mathbf{a} + \tilde{\mathbf{a}}_2) \times \left(m_a \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{a}_1 + m_a \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{a}_1 - \frac{m_a^2}{m} \left(\dot{\boldsymbol{\omega}} \times (\mathbf{a} + \tilde{\mathbf{a}}_2) + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{a} + \tilde{\mathbf{a}}_2) \right) \right) - \quad (11) \\
& - \frac{m_a^2}{m} \left(2\boldsymbol{\omega} \times \dot{\tilde{\mathbf{a}}}_2 + \ddot{\tilde{\mathbf{a}}}_2 \right) - \frac{m_a m_p}{m} \left(\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{p}_1 + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{p}_1 + \dot{\boldsymbol{\omega}}_2 \times (\mathbf{p}_2 + \tilde{\mathbf{p}}_2) \right) - \\
& - \frac{m_a m_p}{m} \left(\boldsymbol{\omega}_2 \times \boldsymbol{\omega}_2 \times (\mathbf{p}_2 + \tilde{\mathbf{p}}_2) + 2\boldsymbol{\omega}_2 \times \dot{\tilde{\mathbf{p}}}_2 + \ddot{\tilde{\mathbf{p}}}_2 \right) + m_a \left(\frac{\mathbf{F}_0^{603M}}{m} - \frac{\mathbf{F}_a^{603M}}{m_a} \right) + \\
& + m_a \mu \left(\frac{\Delta \mathbf{R}_a}{R_0^3} - \frac{3\mathbf{R}_0 (\mathbf{R}_0, \Delta \mathbf{R}_a)}{R_0^3} \right) - \mathbf{a}_1 \times \sum_i \Delta \mathbf{F}_{ai} - \mathbf{T}_a.
\end{aligned}$$

Во многом аналогично для последней суммы из (7) получается

$$\begin{aligned}
& \sum_i (\mathbf{p}_1 + \mathbf{r}_{pi} + \mathbf{u}_{pi}) \times (m_{pi} \ddot{\mathbf{R}}_{pi} - \mathbf{F}_{pi}) = \\
& = m_p \mathbf{p}_1 \times \dot{\boldsymbol{\omega}}_2 \times (\mathbf{p}_2 + \tilde{\mathbf{p}}_2) + \\
& + m_p \mathbf{p}_1 \times \boldsymbol{\omega}_2 \times \boldsymbol{\omega}_2 \times (\mathbf{p}_2 + \tilde{\mathbf{p}}_2) + 2m_p \mathbf{p}_1 \times \boldsymbol{\omega}_2 \times \dot{\tilde{\mathbf{p}}}_2 + m_p \mathbf{p}_1 \times \ddot{\tilde{\mathbf{p}}}_2 + \tilde{\mathbf{J}}_p \dot{\boldsymbol{\omega}}_2 + \\
& + \boldsymbol{\omega}_2 \times \tilde{\mathbf{J}}_p \boldsymbol{\omega}_2 + \sum_i (\mathbf{r}_{pi} + \mathbf{u}_{pi}) \times m_{pi} \times (2\boldsymbol{\omega}_2 \times \dot{\mathbf{u}}_{pi} + \ddot{\mathbf{u}}_{pi}) + \\
& + (\mathbf{p}_2 + \tilde{\mathbf{p}}_2) \times \left(m_p \dot{\boldsymbol{\omega}}_2 \times \mathbf{p}_1 + m_p \boldsymbol{\omega}_2 \times \boldsymbol{\omega}_2 \times \mathbf{p}_1 - \frac{m_a m_p}{m} \dot{\boldsymbol{\omega}}_2 \times (\mathbf{a} + \tilde{\mathbf{a}}_2) - \right. \\
& - \frac{m_a m_p}{m} (\boldsymbol{\omega}_2 \times \boldsymbol{\omega}_2 \times (\mathbf{a} + \tilde{\mathbf{a}}_2) + 2\boldsymbol{\omega}_2 \times \dot{\tilde{\mathbf{a}}}_2 + \ddot{\tilde{\mathbf{a}}}_2) - \frac{m_p^2}{m} \dot{\boldsymbol{\omega}}_2 \times (\mathbf{p}_2 + \tilde{\mathbf{p}}_2) \\
& \left. - \frac{m_p^2}{m} (\boldsymbol{\omega}_2 \times \boldsymbol{\omega}_2 \times (\mathbf{p}_2 + \tilde{\mathbf{p}}_2) + 2\boldsymbol{\omega}_2 \times \dot{\tilde{\mathbf{p}}}_2 + \ddot{\tilde{\mathbf{p}}}_2 \dot{\boldsymbol{\omega}}_2 \times \mathbf{p}_1 + \boldsymbol{\omega}_2 \times \boldsymbol{\omega}_2 \times \mathbf{p}_1) \right) \\
& + m_p \left(\frac{\mathbf{F}_0^{603M}}{m} - \frac{\mathbf{F}_p^{603M}}{m_p} \right) + m_a \mu \left(\frac{\Delta \mathbf{R}_p}{R_0^3} - \frac{3\mathbf{R}_0 (\mathbf{R}_0, \Delta \mathbf{R}_p)}{R_0^3} \right) - \mathbf{p}_1 \times \sum_i \Delta \mathbf{F}_{pi} - \mathbf{M}_p.
\end{aligned} \tag{12}$$

Второе уравнение системы (7) получается суммированием выражений (10)-(12).

Левая часть третьего уравнения (7) представима в виде

$$\begin{aligned}
& \sum_i \mathbf{e}^T \left((\mathbf{p}_2 + \mathbf{r}_{pi} + \mathbf{u}_{pi}) \times (m_{pi} \ddot{\mathbf{R}}_{pi} - \mathbf{F}_{pi}) \right) = \\
& = \mathbf{e}^T \left\{ \tilde{\mathbf{J}}_p \dot{\boldsymbol{\omega}}_2 + \boldsymbol{\omega}_2 \times \tilde{\mathbf{J}}_p \boldsymbol{\omega}_2 + \right. \\
& + \sum_i (\mathbf{r}_{pi} + \mathbf{u}_{pi}) \times m_{pi} (2\boldsymbol{\omega}_2 \times \dot{\mathbf{u}}_{pi} + \ddot{\mathbf{u}}_{pi}) + (\mathbf{p}_2 + \tilde{\mathbf{p}}_2) \times (m_p \dot{\boldsymbol{\omega}}_2 \times \mathbf{p}_1 + m_p \boldsymbol{\omega}_2 \times \boldsymbol{\omega}_2 \times \mathbf{p}_1 - \\
& - \frac{m_a m_p}{m} (\dot{\boldsymbol{\omega}}_2 \times (\mathbf{a} + \tilde{\mathbf{a}}_2) + \boldsymbol{\omega}_2 \times \boldsymbol{\omega}_2 \times (\mathbf{a} + \tilde{\mathbf{a}}_2) + 2\boldsymbol{\omega}_2 \times \dot{\tilde{\mathbf{a}}}_2 + \ddot{\tilde{\mathbf{a}}}_2) - \frac{m_p^2}{m} \dot{\boldsymbol{\omega}}_2 \times (\mathbf{p}_2 + \tilde{\mathbf{p}}_2) - \\
& - \frac{m_p^2}{m} (\boldsymbol{\omega}_2 \times \boldsymbol{\omega}_2 \times (\mathbf{p}_2 + \tilde{\mathbf{p}}_2) + 2\boldsymbol{\omega}_2 \times \dot{\tilde{\mathbf{p}}}_2 + \ddot{\tilde{\mathbf{p}}}_2 + \dot{\boldsymbol{\omega}}_2 \times \mathbf{p}_1 + \boldsymbol{\omega}_2 \times \boldsymbol{\omega}_2 \times \mathbf{p}_1) + \\
& \left. + m_p \left(\frac{\mathbf{F}_0^{603M}}{m} - \frac{\mathbf{F}_p^{603M}}{m_p} \right) + m_a \mu \left(\frac{\Delta \mathbf{R}_p}{R_0^3} - \frac{3\mathbf{R}_0 (\mathbf{R}_0, \Delta \mathbf{R}_p)}{R_0^3} \right) - \mathbf{T}_p \right\}.
\end{aligned} \tag{13}$$

Четвертое уравнение из (7)

$$\begin{aligned}
& \sum_i \mathbf{A}_{ai}^T (m_{ai} \ddot{\mathbf{R}}_{ai} - \mathbf{F}_{ai} - \mathbf{L}_{ai}) = \\
& = \sum_i \mathbf{A}_{ai}^T m_{ai} \left(\dot{\boldsymbol{\omega}} \times (\mathbf{r}_{ai} + \mathbf{u}_{ai}) + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{r}_{ai} + \mathbf{u}_{ai}) + 2\boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{u}}_{ai} + \ddot{\mathbf{u}}_{ai} + \ddot{\mathbf{R}}_a - \frac{\mathbf{F}_{ai}}{m_{ai}} \right) - \mathbf{A}_{ai}^T \mathbf{L}_{ai} = \\
& = \sum_i \mathbf{A}_{ai}^T m_{ai} \ddot{\mathbf{u}}_{ai} + 2 \sum_i \mathbf{A}_{ai}^T m_{ai} \boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{u}}_{ai} + \sum_i \mathbf{A}_{ai}^T m_{ai} \left(\dot{\boldsymbol{\omega}} \times (\mathbf{r}_{ai} + \mathbf{u}_{ai}) + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{r}_{ai} + \mathbf{u}_{ai}) \right) - \\
& - \sum_i \mathbf{A}_{ai}^T \mathbf{L}_{ai} + \sum_i \mathbf{A}_{ai}^T (m_{ai} \ddot{\mathbf{R}}_a - \mathbf{F}_{ai}).
\end{aligned}$$

Если в этом выражении учесть (6), то

$$\begin{aligned}
& \sum_i m_{ai} \mathbf{A}_{ai}^T \mathbf{A}_{ai} \ddot{\mathbf{q}} + \sum_i m_{ai} \mathbf{A}_{ai}^T \left(\dot{\boldsymbol{\omega}} \times (\mathbf{r}_{ai} + \mathbf{A}_{ai} \mathbf{q}) + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{r}_{ai} + \mathbf{A}_{ai} \mathbf{q}) \right) + \\
& + 2 \sum_i m_{ai} \mathbf{A}_{ai}^T (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{A}_{ai} \dot{\mathbf{q}}) - \sum_i \mathbf{A}_{ai}^T \mathbf{L}_{ai} + \sum_i \mathbf{A}_{ai}^T (m_{ai} \ddot{\mathbf{R}}_a - \mathbf{F}_{ai}) = 0.
\end{aligned} \tag{14}$$

Силу \mathbf{L}_{ai} можно задать как

$$\mathbf{L}_{ai} = -m_i \mathbf{A}_{ai} \boldsymbol{\Omega} \mathbf{q},$$

где $\boldsymbol{\Omega} = \text{diag}(\Omega_1^2, \Omega_2^2, \dots)$ – матрица собственных частот колебаний. Если учесть демпфирование, то

$$\mathbf{L}_{ai} = -m_i \mathbf{A}_{ai} \mathbf{D} \dot{\mathbf{q}} - m_i \mathbf{A}_{ai} \boldsymbol{\Omega} \mathbf{q}.$$

Здесь $\mathbf{D} = \text{diag}(d_1, d_2, \dots)$ – матрица декрементов затухания. В этом случае (14)

представимо в виде

$$\begin{aligned}
& \sum_i m_{ai} \mathbf{A}_{ai}^T \mathbf{A}_{ai} (\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{D} \dot{\mathbf{q}} + \boldsymbol{\Omega} \mathbf{q}) + 2 \sum_i m_{ai} \mathbf{A}_{ai}^T (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{A}_{ai} \dot{\mathbf{q}}) + \\
& + \sum_i m_{ai} \mathbf{A}_{ai}^T \left(\dot{\boldsymbol{\omega}} \times (\mathbf{r}_{ai} + \mathbf{A}_{ai} \mathbf{q}) + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{r}_{ai} + \mathbf{A}_{ai} \mathbf{q}) \right) + \\
& + \sum_i \mathbf{A}_{ai}^T (m_{ai} \ddot{\mathbf{R}}_a - \mathbf{F}_a - \Delta \mathbf{F}_{ai}) = 0.
\end{aligned} \tag{15}$$

Последнее слагаемое в (15) можно преобразовать аналогично тому, как это сделано в (11) и (12),

$$\begin{aligned}
& \sum_i \mathbf{A}_{ai}^T (m_{ai} \ddot{\mathbf{R}}_a - \mathbf{F}_{ai}) = \sum_i \mathbf{A}_{ai}^T m_{ai} (\ddot{\mathbf{R}}_a - \ddot{\mathbf{R}}_0) + \sum_i \mathbf{A}_{ai}^T (m_{ai} \ddot{\mathbf{R}}_0 - \mathbf{F}_{ai}) = \\
& = \sum_i \mathbf{A}_{ai}^T m_{ai} (\ddot{\mathbf{R}}_a - \ddot{\mathbf{R}}_0) + \sum_i \mathbf{A}_{ai}^T \left(m_{ai} \mu \left(\frac{\Delta \mathbf{R}_{ai}}{R_0^3} - \frac{3\mathbf{R}_0 (\mathbf{R}_0, \Delta \mathbf{R}_{ai})}{R_0^3} \right) + m_{ai} \left(\frac{\mathbf{F}_0^{\text{гозм}}}{m} - \frac{\mathbf{F}_{ai}^{\text{гозм}}}{m_{ai}} \right) \right),
\end{aligned}$$

$$\Delta \mathbf{R}_{ai} = \mathbf{a} - \frac{m_a}{m} (\mathbf{a} + \tilde{\mathbf{a}}_2) - \frac{m_p}{m} (\mathbf{p} + \tilde{\mathbf{p}}_2) + \mathbf{r}_{ai} + \mathbf{u}_{ai}.$$

В итоге

$$\begin{aligned}
& \sum_i m_{ai} \mathbf{A}_{ai}^T \mathbf{A}_{ai} (\ddot{\mathbf{q}}_a + \mathbf{D} \dot{\mathbf{q}}_a + \boldsymbol{\Omega} \mathbf{q}_a) + 2 \sum_i m_{ai} \mathbf{A}_{ai}^T (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{A}_{ai} \dot{\mathbf{q}}_a) + \\
& + \sum_i m_{ai} \mathbf{A}_{ai}^T (\dot{\boldsymbol{\omega}} \times (\mathbf{r}_{ai} + \mathbf{A}_{ai} \mathbf{q}_a) + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{r}_{ai} + \mathbf{A}_{ai} \mathbf{q}_a)) + \\
& + \sum_i m_{ai} \mathbf{A}_{ai}^T \left(\dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{a}_1 + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{a}_1 - \frac{m_a}{m} (\dot{\boldsymbol{\omega}} \times (\mathbf{a} + \tilde{\mathbf{a}}_2) + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{a} + \tilde{\mathbf{a}}_2)) - \right. \\
& - \frac{m_a}{m} (2\boldsymbol{\omega} \times \dot{\tilde{\mathbf{a}}}_2 + \ddot{\tilde{\mathbf{a}}}_2) - \frac{m_p}{m} (\dot{\boldsymbol{\omega}}_2 \times (\mathbf{p}_2 + \tilde{\mathbf{p}}_2) + \boldsymbol{\omega}_2 \times \boldsymbol{\omega}_2 \times (\mathbf{p}_2 + \tilde{\mathbf{p}}_2) + 2\boldsymbol{\omega}_2 \times \dot{\tilde{\mathbf{p}}}_2 + \ddot{\tilde{\mathbf{p}}}_2) - \\
& \left. - \frac{m_p}{m} (\dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{p}_1 + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{p}_1) \right) + \sum_i m_{ai} \mathbf{A}_{ai}^T \mu \left(\frac{\Delta \mathbf{R}_{ai}}{R_0^3} - \frac{3\mathbf{R}_0 (\mathbf{R}_0, \Delta \mathbf{R}_{ai})}{R_0^3} \right) + \\
& + \left(\sum_i m_{ai} \mathbf{A}_{ai}^T \right) \frac{\mathbf{F}_0^{603M}}{m} - \sum_i m_{ai} \mathbf{A}_{ai}^T \mathbf{F}_{ai}^{603M} = 0.
\end{aligned} \tag{16}$$

Аналогично для последнего уравнения системы (7)

$$\begin{aligned}
& \sum_i m_{pi} \mathbf{A}_{pi}^T \mathbf{A}_{pi} (\ddot{\mathbf{q}}_p + \mathbf{D} \dot{\mathbf{q}}_p + \boldsymbol{\Omega} \mathbf{q}_p) + 2 \sum_i m_{pi} \mathbf{A}_{pi}^T (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{A}_{pi} \dot{\mathbf{q}}_p) + \\
& + \sum_i m_{pi} \mathbf{A}_{pi}^T (\dot{\boldsymbol{\omega}}_2 \times (\mathbf{r}_{pi} + \mathbf{A}_{pi} \mathbf{q}_p) + \boldsymbol{\omega}_2 \times \boldsymbol{\omega}_2 \times (\mathbf{r}_{pi} + \mathbf{A}_{pi} \mathbf{q}_p)) + \\
& + \sum_i m_{pi} \mathbf{A}_{pi}^T \left(\dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{p}_1 + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{p}_1 - \frac{m_a}{m} (\dot{\boldsymbol{\omega}} \times (\mathbf{a} + \tilde{\mathbf{a}}_2) + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{a} + \tilde{\mathbf{a}}_2)) - \right. \\
& - \frac{m_a}{m} (2\boldsymbol{\omega} \times \dot{\tilde{\mathbf{a}}}_2 + \ddot{\tilde{\mathbf{a}}}_2) - \frac{m_p}{m} (\dot{\boldsymbol{\omega}}_2 \times (\mathbf{p}_2 + \tilde{\mathbf{p}}_2) + \boldsymbol{\omega}_2 \times \boldsymbol{\omega}_2 \times (\mathbf{p}_2 + \tilde{\mathbf{p}}_2)) - \\
& \left. - \frac{m_p}{m} (2\boldsymbol{\omega}_2 \times \dot{\tilde{\mathbf{p}}}_2 + \ddot{\tilde{\mathbf{p}}}_2 + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{p}_1 + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{p}_1) \right) + \\
& + \sum_i m_{pi} \mathbf{A}_{pi}^T \mu \left(\frac{\Delta \mathbf{R}_{pi}}{R_0^3} - \frac{3\mathbf{R}_0 (\mathbf{R}_0, \Delta \mathbf{R}_{pi})}{R_0^3} \right) + \left(\sum_i m_{pi} \mathbf{A}_{pi}^T \right) \frac{\mathbf{F}_0^{603M}}{m} - \sum_i m_{pi} \mathbf{A}_{pi}^T \mathbf{F}_{pi}^{603M} = 0,
\end{aligned} \tag{17}$$

$$\Delta \mathbf{R}_{pi} = \mathbf{p} - \frac{m_a}{m} (\mathbf{a} + \tilde{\mathbf{a}}_2) - \frac{m_p}{m} (\mathbf{p} + \tilde{\mathbf{p}}_2) + \mathbf{r}_{pi} + \mathbf{u}_{pi}.$$

Таким образом, общая система уравнений включает в себя уравнение (9), уравнение, получаемое суммирование выражений (10),(11),(12) и приравниванием полученной суммы нулю, выражения (13), приравненного M_e , а также уравнений (16) и (17). Для использования этих уравнений необходимо вычислить суммы вида $\sum_i m_{ai} \mathbf{K}(\mathbf{r}_{ai}, \mathbf{u}_{ai})$, $\sum_i m_{ai} \mathbf{K}(\mathbf{u}_{ai}, \mathbf{r}_{ai})$, $\sum_i m_{ai} \mathbf{K}(\mathbf{u}_{ai}, \mathbf{u}_{ai})$, $\sum_i m_{pi} \mathbf{A}_{pi}^T$, $\sum_i m_{pi} \mathbf{A}_{pi}^T \mathbf{A}_{pi}$ и др. Их вычисление основано на разложении (6),

которое находится в ходе конечно-элементного моделирования. Уравнения должны быть также дополнены кинематическими соотношениями.

Преобразование уравнений

Полученные в предыдущем разделе уравнения неудобны для использования, так как они не разрешены относительно старших производных. Чтобы разрешить их, сгруппируем старшие производные. Введем обозначения

$$\begin{aligned}
\mathbf{f}_a &= m_a \left(\frac{\mathbf{F}_0^{603M}}{m} - \frac{\mathbf{F}_a^{603M}}{m_a} \right) + m_a \mu \left(\frac{\Delta \mathbf{R}_a}{R_0^3} - \frac{3\mathbf{R}_0(\mathbf{R}_0, \Delta \mathbf{R}_a)}{R_0^3} \right) - \mathbf{a}_1 \times \sum_i \Delta \mathbf{F}_{ai} - \mathbf{T}_a, \\
\mathbf{f}_p &= m_p \left(\frac{\mathbf{F}_0^{603M}}{m} - \frac{\mathbf{F}_p^{603M}}{m_p} \right) + m_p \mu \left(\frac{\Delta \mathbf{R}_p}{R_0^3} - \frac{3\mathbf{R}_0(\mathbf{R}_0, \Delta \mathbf{R}_p)}{R_0^3} \right) - \mathbf{p}_1 \times \sum_i \Delta \mathbf{F}_{pi} - \mathbf{T}_p, \\
\mathbf{J} &= \mathbf{J}_s + \tilde{\mathbf{J}}_a + \tilde{\mathbf{J}}_p + \mathbf{K} \left(\mathbf{a}_1, m_a \mathbf{a}_2 + \sum_i m_{ai} \mathbf{A}_{ai} \mathbf{q}_a \right) + \mathbf{K} \left(m_a \mathbf{a}_2 + \sum_i m_{ai} \mathbf{A}_{ai} \mathbf{q}_a, \mathbf{a}_1 \right) + \\
&+ \mathbf{K}(\mathbf{a}_1, m_a \mathbf{a}_1) + \mathbf{K} \left(\mathbf{p}_1, m_p \mathbf{p}_2 + \sum_i m_{pi} \mathbf{A}_{pi} \mathbf{q}_p \right) + \mathbf{K}(\mathbf{p}_1, m_a \mathbf{p}_1) + \\
&+ \mathbf{K} \left(m_p \mathbf{p}_2 + \sum_i m_{pi} \mathbf{A}_{pi} \mathbf{q}_p, \mathbf{p}_1 \right) - \frac{1}{m} \mathbf{K} \left(m_a \mathbf{a} + \sum_i m_{ai} \mathbf{A}_{ai} \mathbf{q}_a + m_p \mathbf{p} + \right. \\
&+ \left. \sum_i m_{pi} \mathbf{A}_{pi} \mathbf{q}_p, m_a \mathbf{a} + \sum_i m_{ai} \mathbf{A}_{ai} \mathbf{q}_a + m_p \mathbf{p} + \sum_i m_{pi} \mathbf{A}_{pi} \mathbf{q}_p \right), \\
\mathbf{S}_{\omega a} &= \sum_i (\mathbf{a}_1 + \mathbf{r}_{ai} + \mathbf{A}_{ai} \mathbf{q}_a) \times m_{ai} \mathbf{A}_{ai} - \\
&- \frac{1}{m} \left(m_a \mathbf{a} + \sum_i m_{ai} \mathbf{A}_{ai} \mathbf{q}_a + m_p \mathbf{p} + \sum_i m_{pi} \mathbf{A}_{pi} \mathbf{q}_p \right) \times \sum_i m_{ai} \mathbf{A}_{ai}, \\
\mathbf{S}_{\omega p} &= \sum_i (\mathbf{p}_1 + \mathbf{r}_{pi} + \mathbf{A}_{pi} \mathbf{q}_p) \times m_{pi} \mathbf{A}_{pi} - \\
&- \frac{1}{m} \left(m_a \mathbf{a} + \sum_i m_{ai} \mathbf{A}_{ai} \mathbf{q}_a + m_p \mathbf{p} + \sum_i m_{pi} \mathbf{A}_{pi} \mathbf{q}_p \right) \times \sum_i m_{pi} \mathbf{A}_{pi}, \\
\mathbf{S}_{\omega \varphi} &= \tilde{\mathbf{J}}_p - \frac{1}{m} \mathbf{K} \left(m_a \mathbf{a} + \sum_i m_{ai} \mathbf{A}_{ai} \mathbf{q}_a, m_p \mathbf{p}_2 + \sum_i m_{pi} \mathbf{A}_{pi} \mathbf{q}_p \right) - \\
&- \frac{1}{m} \mathbf{K} \left(m_p \mathbf{p} + \sum_i m_{pi} \mathbf{A}_{pi} \mathbf{q}_p, m_p \mathbf{p}_2 + \sum_i m_{pi} \mathbf{A}_{pi} \mathbf{q}_p \right) + \\
&+ \mathbf{K} \left(\mathbf{p}_1, m_p \mathbf{p}_2 + \sum_i m_{pi} \mathbf{A}_{pi} \mathbf{q}_p \right),
\end{aligned}$$

$$\mathbf{J}_e = \left(\tilde{\mathbf{J}}_p - \frac{1}{m} \mathbf{K} \left(m_p \mathbf{p}_2 + \sum_i m_{pi} \mathbf{A}_{pi} \mathbf{q}_p, m_p \mathbf{p}_2 + \sum_i m_{pi} \mathbf{A}_{pi} \mathbf{q}_p \right) \right),$$

$$\mathbf{S}_{\varphi a} = -\frac{1}{m} \left(m_p \mathbf{p}_2 + \sum_i m_{pi} \mathbf{A}_{pi} \mathbf{q}_p \right) \times \sum_i m_{ai} \mathbf{A}_{ai},$$

$$\mathbf{S}_{\varphi p} = \sum_i (\mathbf{r}_{pi} + \mathbf{u}_{pi}) \times m_{pi} \mathbf{A}_{pi} - \frac{1}{m} \left(m_p \mathbf{p}_2 + \sum_i m_{pi} \mathbf{A}_{pi} \mathbf{q}_p \right) \times \sum_i m_{pi} \mathbf{A}_{pi},$$

$$\mathbf{M}_a = \sum_i m_{ai} \mathbf{A}_{ai}^T \mathbf{A}_{ai} - \frac{1}{m} \sum_i m_{ai} \mathbf{A}_{ai}^T \sum_i m_{ai} \mathbf{A}_{ai},$$

$$\mathbf{S}_{ap} = -\frac{1}{m} \sum_i m_{ai} \mathbf{A}_{ai}^T \sum_i m_{pi} \mathbf{A}_{pi},$$

$$\mathbf{f}_{qa} = \sum_i m_{ai} \mathbf{A}_{ai}^T \mu \left(\frac{\Delta \mathbf{R}_{ai}}{R_0^3} - \frac{3\mathbf{R}_0 (\mathbf{R}_0, \Delta \mathbf{R}_{ai})}{R_0^3} \right) + \left(\sum_i m_{ai} \mathbf{A}_{ai}^T \right) \frac{\mathbf{F}_0^{603M}}{m} - \sum_i m_{ai} \mathbf{A}_{ai}^T \mathbf{F}_{ai}^{603M},$$

$$\mathbf{M}_p = \sum_i m_{pi} \mathbf{A}_{pi}^T \mathbf{A}_{pi} - \frac{1}{m} \sum_i m_{pi} \mathbf{A}_{pi}^T \sum_i m_{pi} \mathbf{A}_{pi},$$

$$\mathbf{f}_{qp} = \sum_i m_{pi} \mathbf{A}_{pi}^T \mu \left(\frac{\Delta \mathbf{R}_{pi}}{R_0^3} - \frac{3\mathbf{R}_0 (\mathbf{R}_0, \Delta \mathbf{R}_{pi})}{R_0^3} \right) + \left(\sum_i m_{pi} \mathbf{A}_{pi}^T \right) \frac{\mathbf{F}_0^{603M}}{m} - \sum_i m_{pi} \mathbf{A}_{pi}^T \mathbf{F}_{pi}^{603M},$$

$$\psi = \dot{\varphi}.$$

Также учтено, что

$$(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}\dot{\varphi}) \times (\mathbf{p}_2 + \tilde{\mathbf{p}}_2) + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}\dot{\varphi} \times (\mathbf{p}_2 + \tilde{\mathbf{p}}_2) + \mathbf{e}\dot{\varphi} \times \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{p}_2 + \tilde{\mathbf{p}}_2) = 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}\dot{\varphi} \times (\mathbf{p}_2 + \tilde{\mathbf{p}}_2),$$

$$\mathbf{a} \times \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{b} + \mathbf{b} \times \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{a} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{a} \times \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{b} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{b} \times \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{a}.$$

В этом случае

$$\mathbf{J}\dot{\boldsymbol{\omega}} + \mathbf{S}_{\omega\varphi} \mathbf{e}\dot{\psi} + \mathbf{S}_{\omega a} \ddot{\mathbf{q}}_a + \mathbf{S}_{\omega p} \ddot{\mathbf{q}}_p +$$

$$+ \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{J}\boldsymbol{\omega} + 2m_a \mathbf{a}_1 \times \boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{a}}_2 + 2 \sum_i (\mathbf{r}_{ai} + \mathbf{u}_{ai}) \times m_{ai} \boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{u}}_{ai} + 2 \sum_i (\mathbf{r}_{pi} + \mathbf{u}_{pi}) \times m_{pi} \boldsymbol{\omega}_2 \times \dot{\mathbf{u}}_{pi} +$$

$$+ \tilde{\mathbf{J}}_p (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}\psi) + \boldsymbol{\omega} \times \tilde{\mathbf{J}}_p \mathbf{e}\psi + \mathbf{e}\psi \times \tilde{\mathbf{J}}_p \boldsymbol{\omega} + \mathbf{e}\psi \times \tilde{\mathbf{J}}_p \mathbf{e}\psi -$$

$$- 2 \frac{1}{m} (m_a \mathbf{a} + m_a \tilde{\mathbf{a}}_2 + m_p \mathbf{p} + m_p \tilde{\mathbf{p}}_2) \times m_a \boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{a}}_2 +$$

$$+ \left(m_p \mathbf{p}_1 - \frac{1}{m} (m_a \mathbf{a} + m_a \tilde{\mathbf{a}}_2 + m_p \mathbf{p} + m_p \tilde{\mathbf{p}}_2) \right) \times (2m_p \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}\psi \times (\mathbf{p}_2 + \tilde{\mathbf{p}}_2) +$$

$$+ m_p \mathbf{e}\psi \times \mathbf{e}\psi \times (\mathbf{p}_2 + \tilde{\mathbf{p}}_2) + 2m_p \boldsymbol{\omega}_2 \times \dot{\tilde{\mathbf{p}}}_2) + \mathbf{f}_a + \mathbf{f}_p - \mathbf{T}_s = 0,$$

$$\begin{aligned}
& \mathbf{e}^T \mathbf{S}_{\omega\phi}^T \dot{\boldsymbol{\omega}} + \mathbf{e}^T \mathbf{J}_e \mathbf{e} \dot{\boldsymbol{\psi}} + \mathbf{e}^T \mathbf{S}_{\phi a} \ddot{\mathbf{q}}_a + \mathbf{e}^T \mathbf{S}_{\phi p} \ddot{\mathbf{q}}_p + \\
& + \mathbf{e}^T \left\{ \boldsymbol{\omega} \times \tilde{\mathbf{J}}_p \boldsymbol{\omega} + m_p (\mathbf{p}_2 + \tilde{\mathbf{p}}_2) \times \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{p}_1 - \frac{m_p m_p}{m} (\mathbf{p}_2 + \tilde{\mathbf{p}}_2) \times \right. \\
& \times \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega} \times (m_a \mathbf{a} + m_a \tilde{\mathbf{a}}_2) - \frac{m_p^2}{m} (\mathbf{p}_2 + \tilde{\mathbf{p}}_2) \times \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega} \times \\
& \times (\mathbf{p} + \tilde{\mathbf{p}}_2) + \mathbf{e} \boldsymbol{\psi} \times \mathbf{J}_e \mathbf{e} \boldsymbol{\psi} + \tilde{\mathbf{J}}_p (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e} \boldsymbol{\psi}) + \boldsymbol{\omega} \times \tilde{\mathbf{J}}_p \mathbf{e} \boldsymbol{\psi} + \mathbf{e} \boldsymbol{\psi} \times \tilde{\mathbf{J}}_p \boldsymbol{\omega} + \\
& + 2 \sum_i (\mathbf{r}_{pi} + \mathbf{u}_{pi}) \times m_{pi} \boldsymbol{\omega}_2 \times \dot{\mathbf{u}}_{pi} - \frac{m_p}{m} (\mathbf{p}_2 + \tilde{\mathbf{p}}_2) \times \\
& \times \left(\frac{2}{m} \boldsymbol{\omega} \times m_a \dot{\tilde{\mathbf{a}}}_2 + \frac{2m_p}{m} \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e} \boldsymbol{\psi} \times (\mathbf{p}_2 + \tilde{\mathbf{p}}_2) + \frac{2m_p}{m} \boldsymbol{\omega}_2 \times \dot{\tilde{\mathbf{p}}}_2 \right) + \\
& \left. + \mathbf{f}_p \right\} = M_e,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \mathbf{S}_{\omega a}^T \dot{\boldsymbol{\omega}} + \mathbf{S}_{\phi a}^T \mathbf{e} \dot{\boldsymbol{\psi}} + \mathbf{M}_a \ddot{\mathbf{q}}_a + \mathbf{S}_{ap} \ddot{\mathbf{q}}_p + \\
& + \sum_i m_{ai} \mathbf{A}_{ai}^T \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega} \times \left(\mathbf{r}_{ai} + \mathbf{A}_{ai} \mathbf{q}_a + \mathbf{a}_1 - \frac{1}{m} \left(m_a \mathbf{a} + \sum_i m_{ai} \mathbf{A}_{ai} \mathbf{q}_a + m_p \mathbf{p} + \sum_i m_{pi} \mathbf{A}_{pi} \mathbf{q}_p \right) \right) - \\
& - \frac{1}{m} \sum_i m_{ai} \mathbf{A}_{ai}^T \mathbf{e} \dot{\boldsymbol{\phi}} \times \mathbf{e} \dot{\boldsymbol{\phi}} \times \left(m_p \mathbf{p}_2 + \sum_i m_{pi} \mathbf{A}_{pi} \mathbf{q}_p \right) + \\
& + 2 \sum_i m_{ai} \mathbf{A}_{ai}^T \boldsymbol{\omega} \times \left(\mathbf{A}_{ai} \dot{\mathbf{q}}_a - \frac{1}{m} \left(\sum_i m_{ai} \mathbf{A}_{ai} \dot{\mathbf{q}}_a + \sum_i m_{pi} \mathbf{A}_{pi} \dot{\mathbf{q}}_p + \mathbf{e} \dot{\boldsymbol{\phi}} \times \left(m_p \mathbf{p}_2 + \sum_i m_{pi} \mathbf{A}_{pi} \mathbf{q}_p \right) \right) \right) - \\
& - 2 \frac{1}{m} \sum_i m_{ai} \mathbf{A}_{ai}^T \mathbf{e} \dot{\boldsymbol{\phi}} \times \sum_i m_{pi} \mathbf{A}_{pi} \dot{\mathbf{q}}_p + \mathbf{f}_{qa} + \sum_i m_{ai} \mathbf{A}_{ai}^T \mathbf{A}_{ai} (\mathbf{D} \dot{\mathbf{q}}_a + \boldsymbol{\Omega} \mathbf{q}_a) = 0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \mathbf{S}_{\omega p}^T \dot{\boldsymbol{\omega}} + \mathbf{S}_{\varphi p}^T \mathbf{e} \ddot{\boldsymbol{\varphi}} + \mathbf{S}_{ap}^T \ddot{\mathbf{q}}_a + \mathbf{M}_p \ddot{\mathbf{q}}_p + \\
& + \sum_i m_{pi} \mathbf{A}_{pi}^T \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega} \times \left(\mathbf{r}_{pi} + \mathbf{A}_{pi} \mathbf{q}_p + \mathbf{p}_1 - \frac{1}{m} \left(m_a \mathbf{a} + \sum_i m_{ai} \mathbf{A}_{ai} \mathbf{q}_a + m_p \mathbf{p} + \sum_i m_{pi} \mathbf{A}_{pi} \mathbf{q}_p \right) \right) + \\
& + \sum_i m_{pi} \mathbf{A}_{pi}^T \mathbf{e} \dot{\boldsymbol{\varphi}} \times \mathbf{e} \dot{\boldsymbol{\varphi}} \times \left(\mathbf{r}_{pi} + \mathbf{A}_{pi} \mathbf{q}_p \right) - \frac{1}{m} \left(m_p \mathbf{p}_2 + \sum_i m_{pi} \mathbf{A}_{pi} \mathbf{q}_p \right) + \\
& + 2 \sum_i m_{pi} \mathbf{A}_{pi}^T \boldsymbol{\omega} \times \left(\mathbf{A}_{pi} \dot{\mathbf{q}}_p + \mathbf{e} \dot{\boldsymbol{\varphi}} \times \left(\mathbf{r}_{pi} + \mathbf{A}_{pi} \mathbf{q}_p \right) - \frac{1}{m} \left(\sum_i m_{ai} \mathbf{A}_{ai} \dot{\mathbf{q}}_a + \sum_i m_{pi} \mathbf{A}_{pi} \dot{\mathbf{q}}_p \right) \right) - \\
& - \frac{1}{m} \mathbf{e} \dot{\boldsymbol{\varphi}} \times \left(m_p \mathbf{p}_2 + \sum_i m_{pi} \mathbf{A}_{pi} \mathbf{q}_p \right) - 2 \frac{1}{m} \sum_i m_{pi} \mathbf{A}_{pi}^T \mathbf{e} \dot{\boldsymbol{\varphi}} \times \sum_i m_{pi} \mathbf{A}_{pi} \dot{\mathbf{q}}_p + \\
& + \mathbf{f}_{qp} + \sum_i m_{pi} \mathbf{A}_{pi}^T \mathbf{A}_{pi} \left(\mathbf{D} \dot{\mathbf{q}}_p + \boldsymbol{\Omega} \mathbf{q}_p \right) = 0.
\end{aligned}$$

Выписанные уравнения представимы в матричном виде

$$\mathbf{S} \begin{pmatrix} \dot{\boldsymbol{\omega}} \\ \dot{\boldsymbol{\psi}} \\ \ddot{\mathbf{q}}_a \\ \ddot{\mathbf{q}}_p \end{pmatrix} = \mathbf{N}(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\psi}, \dot{\mathbf{q}}_a, \dot{\mathbf{q}}_p, \mathbf{A}, \boldsymbol{\varphi}, \mathbf{q}_a, \mathbf{q}_p), \quad (18)$$

где \mathbf{A} – матрица ориентации спутника, \mathbf{S} – симметрическая матрица вида

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} \mathbf{J} & \mathbf{S}_{\omega\varphi} \mathbf{e} & \mathbf{S}_{\omega a} & \mathbf{S}_{\omega p} \\ \mathbf{e}^T \mathbf{S}_{\omega\varphi}^T & \mathbf{e}^T \mathbf{J} \mathbf{e} & \mathbf{e}^T \mathbf{S}_{\varphi a} & \mathbf{e}^T \mathbf{S}_{\varphi p} \\ \mathbf{S}_{\omega a}^T & \mathbf{S}_{\varphi a}^T \mathbf{e} & \mathbf{M}_a & \mathbf{S}_{ap} \\ \mathbf{S}_{\omega p}^T & \mathbf{S}_{\varphi p}^T \mathbf{e} & \mathbf{S}_{ap}^T & \mathbf{M}_p \end{pmatrix}.$$

Система (18) может быть упрощена в предположении

$$\frac{m_a}{m} \ll 1, \quad \frac{m_p}{m} \ll 1,$$

то есть, когда массы панели и антенны много меньше массы всей системы (фактически корпуса спутника). В этом случае элементы матрицы \mathbf{S} переписутся в виде

$$\begin{aligned}
\mathbf{J} &= \mathbf{J}_s + \tilde{\mathbf{J}}_a + \tilde{\mathbf{J}}_p + \mathbf{K} \left(\mathbf{a}_1, m_a \mathbf{a}_2 + \sum_i m_{ai} \mathbf{A}_{ai} \mathbf{q}_a \right) + \mathbf{K} \left(m_a \mathbf{a}_2 + \sum_i m_{ai} \mathbf{A}_{ai} \mathbf{q}_a, \mathbf{a}_1 \right) + \\
& + \mathbf{K}(\mathbf{a}_1, m_a \mathbf{a}_1) + \mathbf{K}(\mathbf{p}_1, m_p \mathbf{p}_1) + \mathbf{K} \left(\mathbf{p}_1, m_p \mathbf{p}_2 + \sum_i m_{pi} \mathbf{A}_{pi} \mathbf{q}_p \right) + \\
& + \mathbf{K} \left(\mathbf{p}_1, m_p \mathbf{p}_2 + \sum_i m_{pi} \mathbf{A}_{pi} \mathbf{q}_p \right) + \mathbf{K} \left(m_p \mathbf{p}_2 + \sum_i m_{pi} \mathbf{A}_{pi} \mathbf{q}_p, \mathbf{p}_1 \right),
\end{aligned}$$

$$\mathbf{S}_{\omega a} = \sum_i (\mathbf{a}_1 + \mathbf{r}_{ai} + \mathbf{A}_{ai} \mathbf{q}_a) \times m_{ai} \mathbf{A}_{ai},$$

$$\mathbf{S}_{\omega p} = \sum_i (\mathbf{p}_1 + \mathbf{r}_{pi} + \mathbf{A}_{pi} \mathbf{q}_p) \times m_{pi} \mathbf{A}_{pi},$$

$$\mathbf{S}_{\omega\varphi} = \tilde{\mathbf{J}}_p + \mathbf{K} \left(\mathbf{p}_1, m_p \mathbf{p}_2 + \sum_i m_{pi} \mathbf{A}_{pi} \mathbf{q}_p \right),$$

$$\mathbf{J}_e = \tilde{\mathbf{J}}_p,$$

$$\mathbf{S}_{\varphi a} = 0,$$

$$\mathbf{S}_{\varphi p} = \sum_i (\mathbf{r}_{pi} + \mathbf{u}_{pi}) \times m_{pi} \mathbf{A}_{pi},$$

$$\mathbf{M}_a = \sum_i m_{ai} \mathbf{A}_{ai}^T \mathbf{A}_{ai},$$

$$\mathbf{S}_{ap} = 0,$$

$$\mathbf{M}_p = \sum_i m_{pi} \mathbf{A}_{pi}^T \mathbf{A}_{pi},$$

а сама матрица

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} \mathbf{J} & \mathbf{S}_{\omega\varphi} \mathbf{e} & \mathbf{S}_{\omega a} & \mathbf{S}_{\omega p} \\ \mathbf{e}^T \mathbf{S}_{\omega\varphi}^T & \mathbf{e}^T \mathbf{J} \mathbf{e} & 0 & \mathbf{e}^T \mathbf{S}_{\varphi p} \\ \mathbf{S}_{\omega a}^T & 0 & \mathbf{M}_a & 0 \\ \mathbf{S}_{\omega p}^T & \mathbf{S}_{\varphi p}^T \mathbf{e} & 0 & \mathbf{M}_p \end{pmatrix}.$$

Линеаризация уравнений дополнительно дает упрощения

$$\mathbf{J} = \mathbf{J}_s + \mathbf{J}_a + \mathbf{J}_p + \mathbf{K}(\mathbf{a}_1, m_a \mathbf{a}_2) + \mathbf{K}(m_a \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_1) + \mathbf{K}(\mathbf{a}_1, m_a \mathbf{a}_1) + \mathbf{K}(\mathbf{p}_1, m_p \mathbf{p}_2) + \\ + \mathbf{K}(\mathbf{p}_1, m_a \mathbf{p}_1) + \mathbf{K}(m_p \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_1),$$

$$\mathbf{S}_{\omega a} = \sum_i (\mathbf{a}_1 + \mathbf{r}_{ai}) \times m_{ai} \mathbf{A}_{ai},$$

$$\mathbf{S}_{\omega p} = \sum_i (\mathbf{p}_1 + \mathbf{r}_{pi}) \times m_{pi} \mathbf{A}_{pi},$$

$$\mathbf{S}_{\omega\varphi} = \mathbf{J}_p + \mathbf{K}(\mathbf{p}_1, m_p \mathbf{p}_2),$$

$$\mathbf{J}_e = \mathbf{J}_p,$$

$$\mathbf{S}_{\varphi p} = \sum_i \mathbf{r}_{pi} \times m_{pi} \mathbf{A}_{pi},$$

$$\mathbf{M}_a = \sum_i m_{ai} \mathbf{A}_{ai}^T \mathbf{A}_{ai},$$

$$\mathbf{M}_p = \sum_i m_{pi} \mathbf{A}_{pi}^T \mathbf{A}_{pi}.$$

Линеаризованные уравнения принимают вид

$$\mathbf{J} \dot{\boldsymbol{\omega}} + \mathbf{S}_{\omega\varphi} \mathbf{e} \ddot{\boldsymbol{\varphi}} + \mathbf{S}_{\omega a} \ddot{\mathbf{q}}_a + \mathbf{S}_{\omega p} \ddot{\mathbf{q}}_p + \mathbf{f}_a + \mathbf{f}_p - \mathbf{M}_s = 0,$$

$$\mathbf{e}^T \mathbf{S}_{\omega\varphi}^T \dot{\boldsymbol{\omega}} + \mathbf{e}^T \mathbf{J}_e \mathbf{e} \ddot{\boldsymbol{\varphi}} + \mathbf{e}^T \mathbf{S}_{\varphi p} \ddot{\mathbf{q}}_p + \mathbf{e}^T \mathbf{f}_p = M_e,$$

$$\mathbf{S}_{\omega a}^T \dot{\boldsymbol{\omega}} + \mathbf{M}_a (\ddot{\mathbf{q}}_a + \mathbf{D}\dot{\mathbf{q}}_a + \boldsymbol{\Omega}\mathbf{q}_a) + \mathbf{f}_{qa} = 0,$$

$$\mathbf{S}_{\omega p}^T \dot{\boldsymbol{\omega}} + \mathbf{S}_{\varphi p}^T \mathbf{e}\dot{\boldsymbol{\varphi}} + \mathbf{M}_p (\ddot{\mathbf{q}}_p + \mathbf{D}\dot{\mathbf{q}}_p + \boldsymbol{\Omega}\mathbf{q}_p) + \mathbf{f}_{qp} = 0.$$

Полученная система уравнений должна быть дополнена кинематическими соотношениями. В итоге получается система порядка $8 + 2n_a + 2n_p$, где n_a и n_p – число мод колебаний антенны и панели, соответственно.

Моды колебаний

Полученные в предыдущих разделах уравнения содержат члены, которые зависят от мод собственных колебаний. В качестве этих мод, в общем случае, используются результаты конечно-элементного моделирования в любом прикладном пакете (например, *Femap Nastran* [4] или *Ansys* [5]). При этом в качестве объекта моделирования достаточно взять сам нежесткий элемент с односторонним креплением, а не всю систему целиком. Далее на примере конечномерной системы будет показано использование этого подхода.

Рассматриваются две модельные механические системы: полная (рис.2) и состоящая только из упругого элемента, прикрепленного к неподвижному основанию, (рис.3).

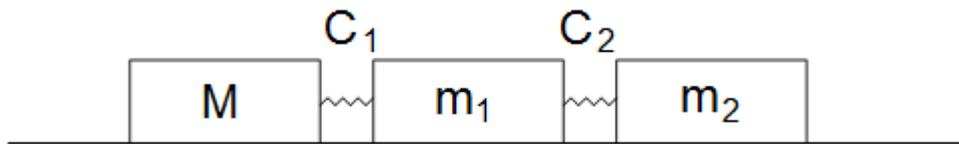


Рис.2. Полная система

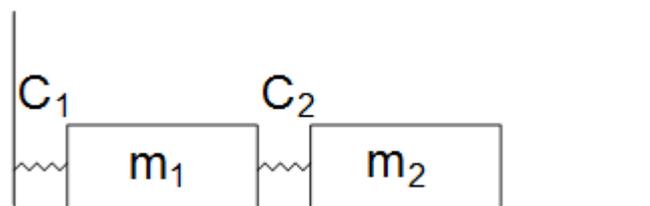


Рис.3. Только упругий элемент

Лагранжианы этих систем запишутся, соответственно, как

$$L_1 = \frac{1}{2} M \dot{x}^2 + \frac{1}{2} m_1 (\dot{x} + \dot{y}_1)^2 + \frac{1}{2} m_2 (\dot{x} + \dot{y}_2)^2 - \frac{1}{2} C_1 y_1^2 - \frac{1}{2} C_2 (y_1 - y_2)^2,$$

$$L_2 = \frac{1}{2}m_1y_1^2 + \frac{1}{2}m_2y_2^2 - \frac{1}{2}C_1y_1^2 - \frac{1}{2}C_2(y_1 - y_2)^2$$

или в векторно-матричном виде

$$L_1 = \frac{1}{2}(\dot{x} \quad \dot{\mathbf{y}})\mathbf{A}_1\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{\mathbf{y}} \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\mathbf{y}^T\mathbf{C}\mathbf{y},$$

$$L_2 = \frac{1}{2}\dot{\mathbf{y}}^T\mathbf{A}_2\dot{\mathbf{y}} + \frac{1}{2}\mathbf{y}^T\mathbf{C}\mathbf{y}.$$

Здесь x – положение центра масс тела с массой M , а y_1 и y_2 – относительные координаты (они отсчитываются от груза M для системы L_1 и от неподвижного основания для системы L_2). Лагранжиан L_1 переписется в виде

$$L_1 = \frac{1}{2}(M + m_1 + m_2)\dot{x}^2 + m_1\dot{x}\dot{y}_1 + m_2\dot{x}\dot{y}_2 + L_2 \quad (19)$$

Матрица \mathbf{C} может иметь достаточно сложный вид. В случае деформируемого тела ее элементы представляются в виде интегралов [6]. При этом использование нормальных координат (собственных мод колебаний) приводит эту матрицу к диагональному виду [6] по аналогии с нормальными координатами в модельной задаче. Пусть θ_1 и θ_2 – нормальные координаты для второй системы, а \mathbf{U} – матрица перехода к нормальным координатам. В этом случае ее лагранжиан переписется в виде

$$L_2 = \frac{1}{2}\dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2}\dot{\theta}_2^2 - \frac{1}{2}\omega_1^2\theta_1^2 - \frac{1}{2}\omega_2^2\theta_2^2 = \frac{1}{2}\dot{\boldsymbol{\theta}}^2 - \frac{1}{2}\boldsymbol{\theta}^T\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{\theta}.$$

Замена $\mathbf{y} = \mathbf{U}\boldsymbol{\theta}$ в полной системе (19) приведет к

$$L_1 = \frac{1}{2}(M + m_1 + m_2)\dot{x}^2 + \dot{x}(m_1 \quad m_2)\mathbf{U}\dot{\boldsymbol{\theta}} + \frac{1}{2}\dot{\boldsymbol{\theta}}^2 - \frac{1}{2}\boldsymbol{\theta}^T\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{\theta}.$$

Таким образом, использование нормальных координат θ_1 и θ_2 системы с лагранжианом L_2 вместо y_1 и y_2 позволяет в полной системе (с лагранжианом L_1) существенно упростить потенциальную энергию деформации. Аналогично при выводе уравнений движения системы с упругими элементами для определения параметров можно использовать результаты конечно-элементного моделирования (найденные собственные моды), проведенного отдельно для нежестких конструкций, а не для всей системы в целом. Это позволяет для спутников с подвижными элементами (например, при наличии вращающейся солнечной панели) проводить однократное конечно-элементное моделирование и его результаты использовать при построении математической модели всей системы.

Для того чтобы вид матрицы кинетической энергии был аналогичен виду матриц \mathbf{M}_a или \mathbf{M}_p , нужно вместо координаты x использовать положение центра масс системы

$$(M + m_1 + m_2)X = Mx + m_1(x + y_1) + m_2(x + y_2).$$

Разрешая это соотношение, имеем

$$X = x + \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2}{M + m_1 + m_2},$$

откуда $x = X - \boldsymbol{\mu}^T \mathbf{y}$, если ввести обозначения

$$\mu_1 = \frac{m_1}{M + m_1 + m_2} \text{ и } \mu_2 = \frac{m_2}{M + m_1 + m_2}.$$

В этом случае

$$L_1 = \frac{1}{2}(M + m_1 + m_2)\dot{X}^2 + \frac{1}{2}\dot{\boldsymbol{\theta}}^2 - \frac{1}{2}(M + m_1 + m_2)(\boldsymbol{\mu}^T \mathbf{U}\dot{\boldsymbol{\theta}})^2 - \frac{1}{2}\boldsymbol{\theta}^T \boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{\theta}.$$

Здесь уравнения, описывающие движение центра масс и относительно центра масс системы, независимы.

Можно заметить, что колебательные моды системы L_2 получаются из системы L_1 при $M \rightarrow \infty$, то есть при увеличении квадратичной формы кинетической энергии, что, согласно [7], приводит к уменьшению собственных частот. Это значит, что при обратном переходе от системы L_2 к системе L_1 не происходит появления новых, по сравнению с L_2 , форм колебаний с малыми частотами. По этой причине при конечно-элементном моделировании отдельной части системы можно отбрасывать высокочастотные моды и при этом в полной системе новых низкочастотных мод не возникнет (речь идет о колебательных степенях свободы).

Заключение

В работе получены уравнения движения спутника с нежесткими элементами. Уравнения представлены в общем виде, а также с учетом двух упрощающих предположений: малые относительные массы нежестких элементов и линейное приближение.

Литература

1. Junkins J., Kim Y. Introduction to Dynamics and Control of Flexible Structures / Washington, DC: AIAA Education Series, AIAA, 1993. - 452 с.
2. Meirovitch L., Quinn R.D. Equations of Motion for Maneuvering Flexible Spacecraft // J. Guid. Control. - 1987. - Т. 10. - № 5. - С. 453–465.
3. Santini P., Gasbarri P. Dynamics of multibody systems in space environment; Lagrangian vs. Eulerian approach // Acta Astronaut. - 2003. - Т. 54. - С. 1–24.
4. Обзор Nastran // ООО "Эм-Эс-Си Софтвэр Рус" [Официальный сайт]. URL: <http://www.mscsoftware.ru/products/nastran> (дата обращения: 10.08.2015).
5. Ansys, Inc [Официальный сайт]. URL: <http://www.ansys.com/> (дата обращения: 10.08.2015).
6. Meirovitch L. Computational methods in structural dynamics / : Sijthoff & Noordhoff International Publishers B.V., 1980. - 439 с.
7. Гантмахер Ф.Р. Теория Матриц / М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004. - 560 с.