



ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 63 за 2015 г.



ISSN 2071-2898 (Print)
ISSN 2071-2901 (Online)

Круковский А.Ю., Новиков В. Г.,
Цыгвинцев И.П.

Программа 3DLINE:
моделирование воздействия
несоосного лазерного
импульса на оловянную
каплю

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Круковский А.Ю., Новиков В. Г., Цыгвинцев И.П. Программа 3DLINE: моделирование воздействия несоосного лазерного импульса на оловянную каплю // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2015. № 63. 24 с.
URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2015-63>

**Ордена Ленина
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М.В.Келдыша
Российской академии наук**

А.Ю.Круковский, В.Г.Новиков, И.П.Цыгвинцев

**Программа 3DLINE:
моделирование воздействия
несоосного лазерного импульса
на оловянную каплю**

Москва — 2015

Круковский А.Ю., Новиков В.Г., Цыгвинцев И.П.

Программа 3DLINE: моделирование воздействия несоосного лазерного импульса на оловянную каплю

В работе описана математическая модель динамики плазмы на основе полностью консервативной разностной схемы для трёхмерных уравнений радиационной газовой динамики. Модель реализована в программе 3DLINE, с использованием которой проведены расчёты физических процессов при воздействии центрального и нецентрального лазерных импульсов на мишень с целью получения источника излучения с заданными свойствами.

Работа выполнена при поддержке РФФ, грант №14-11-00699.

Krukovskiy A.Yu., Novikov V.G., Tsygvintsev I.P.

3DLINE code: modeling of non-central laser pulse coupling to tin droplet

This paper describes mathematical model of plasma dynamics based on completely conservative difference scheme for three-dimensional equations of radiation gas dynamics. It is realized in 3DLINE code, which has been used for modeling of the central and non-central laser coupling to target to produce the source of radiation with specified properties.

The study was supported by RSF under Grant No. 14-11-00699.

Оглавление

Введение	3
Уравнения движения и энергии	4
Система разностных уравнений.....	5
Алгоритм численного решения.....	8
Модель переноса теплового излучения в плазме.....	11
Модель поглощения лазерной энергии	13
Уравнения состояния и коэффициенты переноса.....	14
Адаптация методики для использования на высокопараллельных системах....	15
Результаты расчёта.....	16
Выводы	23
Список литературы.....	23

Введение

Данная публикация является развитием работы [1], в которой впервые был описан трёхмерный комплекс программ 3DLINE, созданный для изучения течений излучающей газоплазменной среды переменного ионизационного состава с частичным выходом излучения. За прошедшее время код был существенно модернизирован, в частности, были дополнены и усовершенствованы физические модели, а также осуществлено распараллеливание алгоритмов.

В настоящей работе кратко изложено описание расчётной методики с учётом всех изменений, а также приведены результаты моделирования воздействия несоосного лазерного импульса на оловянную каплю, что представляет большой интерес при разработке плазменных источников коротковолнового излучения для задач литографии.

Дискретная модель, положенная в основу кода, построена на двухслойной неявной полностью консервативной разностной схеме [2], записанной в смешанных эйлерово-лагранжевых переменных. Используемый алгоритм решения разностных уравнений является двухэтапным, его версия для расчётов физических задач в двумерной постановке подробно описана в [3 – 5].

Сначала решается система нелинейных уравнений в переменных Лагранжа, затем лагранжева сетка (если это требуется) корректируется, и, наконец, выполняется пересчёт рассчитанных величин на новую разностную сетку.

Для построения алгоритма решения разностных уравнений в переменных Лагранжа используется итерационный метод с выделением групп уравнений по характеру физических процессов.

При пересчёте рассчитанных величин на новую разностную сетку сохраняется полная консервативность, т.е. на каждом временном шаге сохраняются масса, импульс, кинетическая, внутренняя и полная энергии [6].

Имеется возможность проведения расчётов как в приближении эффективного времени установления ионизационного равновесия, так и в предположении квазистационарной ионизации. При этом равновесное значение ионизации вместе с оптическими коэффициентами определяется путём интерполяции между таблицами, рассчитанными в предположении полного выхода излучения и частично запертого излучения. Параметр интерполяции вычисляется из отношения поля излучения, полученного в результате решения уравнения переноса, к равновесному полю излучения в спектральном диапазоне, определяющем динамику плазмы.

Для моделирования переноса теплового излучения разработаны алгоритмы [7], использующие многогрупповое диффузионное приближение или метод коротких характеристик. Для получения интегральных величин реализована трассировка плазмы длинными характеристиками.

Для расчёта поглощения лазерного излучения используется методика [8], совмещающая приближение геометрической оптики с уравнением Гельмгольца для слоистой среды.

С помощью программы 3DLINE проведено моделирование центрального и нецентрального воздействия лазерного импульса на оловянную каплю. Подобные ситуации возникают в задаче разработки источника излучения на длине волны 13.5 нм (EUV-излучения), необходимого для нужд литографической промышленности [9].

Принципиальная схема источника на основе лазерной плазмы такова. Лазером воздействуют на оловянные капли размером в несколько десятков микрон. Образующаяся при этом плазма заметную долю поглощённой лазерной энергии конвертирует в излучение, часть которого (в 2% диапазоне вблизи 13.5 нм) собирают и перенаправляют с помощью молибден-кремниевых зеркал в оптическую систему, где далее используют для литографии. Ионы олова и мелкие неиспарённые фрагменты оседают на зеркало, что приводит к падению отражающей способности и снижению эффективности источника излучения. Поэтому интерес представляет не только количество излучения, испущенного плазмой, но и потоки вещества. Существуют программы (например, [10, 11]), которые обеспечивают достаточно надёжное описание процессов динамики плазмы в двумерной постановке (в частности, для осесимметричных задач). Однако распространение этих результатов на задачи с отсутствующей осевой симметрией не представляется возможным.

На практике одной из таких задач является нецентральное воздействие лазерного импульса на мишень, когда ось симметрии лазера не проходит через центр капли, что может повлиять на стабильность работы источника. Задача в этом случае является существенно трехмерной, и, как показывают предварительные расчёты, смещение оси симметрии лазерного импульса относительно центра капли, слабо влияя на коэффициент конверсии в излучение, может приводить к качественному изменению потоков плазмы.

Уравнения движения и энергии

Движение вещества описывается уравнениями Эйлера:

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\nabla P, \quad (1)$$

где ρ — плотность вещества, $\mathbf{v} = (u, w, v)$ — вектор скорости, P — давление.

Изменение координат частиц определяется соотношениями

$$\frac{dx}{dt} = u; \quad \frac{dy}{dt} = w; \quad \frac{dz}{dt} = v. \quad (2)$$

Уравнение неразрывности имеет вид

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{v} = 0. \quad (3)$$

Распределение по пространству и изменение со временем температур электронов T_e и ионов T_i описываются уравнениями для удельных внутренних энергий компонент:

$$\begin{aligned} \rho \frac{d\varepsilon_e}{dt} &= -\rho P_e \frac{\partial(1/\rho)}{\partial t} - \nabla \cdot \mathbf{W}_e + Q_{ei} + G_e^{rad} + G_e^{las}, \\ \rho \frac{d\varepsilon_i}{dt} &= -\rho P_i \frac{\partial(1/\rho)}{\partial t} - \nabla \cdot \mathbf{W}_i - Q_{ei}. \end{aligned} \quad (4)$$

Здесь ε_e и ε_i — внутренние энергии электронной и ионной компоненты, отнесённые к единице массы, P_e и P_i — давления электронов и ионов, Q_{ei} — член, определяющий теплообмен между электронами и ионами, $\mathbf{W}_{e,i} = -\chi_{e,i} \nabla T_{e,i}$ — электронный и ионный потоки тепла, χ_e и χ_i — коэффициенты теплопроводности электронов и ионов, G_e^{rad} и G_e^{las} — вклады в энергобаланс от теплового и лазерного излучений.

Ионизационное состояние плазмы определяется в приближении эффективного времени ионизации/рекомбинации:

$$\frac{dZ_0}{dt} = -\frac{Z_0 - Z_0^s}{\tau}, \quad (5)$$

где Z_0 — текущее значение ионизации, Z_0^s — равновесное значение ионизации, τ — эффективное время ионизации/рекомбинации. В пределе $\tau \rightarrow 0$ уравнение (5) сводится к квазистационарному приближению $Z_0 = Z_0^s$.

Система разностных уравнений

Дискретизация переменных проводится следующим образом.

В расчётной области $D \in R^3(x, y, z)$ вводится криволинейная регулярная разностная сетка, состоящая из шестигранников, на которой определены сеточные функции. Для записи сеточных функций, определённых в узлах разностной сетки, далее используются индексы (i, j, k) , функции, определённые в ячейках, отмечаются индексами (m, l, n) . Там, где это возможно, используются безындексные представления сеточных функций [2]. Для дискретизации по времени также используются обозначения [2]. Так, f — значение сеточной величины на n -ом временном слое, \hat{f} — значение сеточной

величины на $(n+1)$ -ом временном слое, $f_t = \frac{\hat{f} - f}{\Delta t_n}$, где Δt_n — шаг по времени при переходе от временного слоя n к слою $(n+1)$, $f^{(\sigma)} = \sigma \hat{f} + (1-\sigma)f$.

Кроме того, вводятся разностные шаблоны $III_1 - III_4$, определённые следующим образом:

III_1 — шаблон, определённый для ячейки. Состоит из восьми узлов, являющихся её вершинами;

III_2 — шаблон, определённый для узла. Состоит из восьми ячеек, имеющих его своей вершиной;

III_3 — шаблон, определённый для ячейки. Состоит из шести граней, прилегающих к ней;

III_4 — шаблон, определённый для грани. Состоит из двух ячеек, прилегающих к ней.

Разностная аппроксимация дифференциальных операторов (градиента и дивергенции) выполняется согласно [12]. При этом на ячейки сетки налагается требование выпуклости.

В этих обозначениях полностью консервативная неявная разностная схема, аппроксимирующая уравнения (1) – (5), записывается в виде

$$x_t = u^{(0.5)}; \quad y_t = w^{(0.5)}; \quad z_t = v^{(0.5)}, \quad (6)$$

$$\Delta m = \rho V = \hat{\rho} \hat{V}, \quad (7)$$

$$M_* u_t = \sum_{r \in III_2} \left(\frac{\partial \hat{V}_r}{\partial x} \right) \hat{P}_r, \quad M_* w_t = \sum_{r \in III_2} \left(\frac{\partial \hat{V}_r}{\partial y} \right) \hat{P}_r, \quad M_* v_t = \sum_{r \in III_2} \left(\frac{\partial \hat{V}_r}{\partial z} \right) \hat{P}_r, \quad (8)$$

$$\begin{aligned} (\varepsilon_e)_t &= -\hat{P}_e \left(\frac{1}{\rho} \right)_t + \hat{Q}_{ei} + \hat{G}_e^{rad} + \hat{G}_e^{las} + \frac{1}{\Delta m} \sum_{g \in III_3} (\hat{W}_e)_g \cdot \hat{S}_g, \\ (\varepsilon_i)_t &= -(\hat{P}_i + \hat{q}) \left(\frac{1}{\rho} \right)_t - \hat{Q}_{ei} + \frac{1}{\Delta m} \sum_{g \in III_3} (\hat{W}_i)_g \cdot \hat{S}_g, \end{aligned} \quad (9)$$

$$(Z_0)_t = -\frac{\hat{Z}_0 - \hat{Z}_0^s}{\hat{t}}. \quad (10)$$

Здесь V — объем ячейки, $M_* = \frac{1}{8} \sum_{r \in \mathbb{I}_2} \Delta m_r$ — масса, приписываемая узлу,

\mathbf{S}_g — вектор внутренней нормали, равный по модулю площади грани g ячейки (m, l, n) , полное давление $P = P_e + P_i + q$ кроме электронной и ионной компонент включает давление искусственной вязкости q , которое вводится в разностную схему для обеспечения сквозного счета течений с возможными разрывами. Оно берётся в виде комбинации линейной и квадратичной вязкости и отлично от нуля только в области волн сжатия [4]:

$$\hat{q} = \hat{\rho} \left(\mu_1 \sqrt{\frac{\hat{P}_e + \hat{P}_i}{\hat{\rho}}} \Delta U + \mu_2 (\Delta U)^2 \right),$$

где $\Delta U = \Delta l / \Delta t \cdot (\hat{\rho} / \rho - 1)$ при $\hat{\rho} > \rho$, и $\Delta U = 0$ в противном случае. Δl — среднее арифметическое длин четырёх больших диагоналей ячейки, μ_1 и μ_2 — численные коэффициенты.

Сеточные функции x, y, z, u, w, v определены в узлах разностной сетки; сеточные функции $\rho, P_e, P_i, q, V, T_e, T_i, G_e^{rad}, G_e^{las}, Q_{ei}, \chi_e, \chi_i, Z_0, Z_0^s, \tau$ определены в ячейках; сеточные функции $\mathbf{W}_e, \mathbf{W}_i, \mathbf{S}$ — на гранях ячеек.

Для вычисления потока тепла через грань ячейки необходимо найти значение коэффициентов теплопроводности. В соответствии с [2], это значение берётся как среднее арифметическое значений коэффициентов теплопроводности в прилегающих ячейках:

$$(\chi_{e,i})_g = \frac{1}{2} \sum_{r \in \mathbb{I}_4} (\chi_{e,i})_r.$$

Граничные значения давления и температуры относятся к граням соответствующих граничных ячеек. В зависимости от задачи на границах задаётся распределение давлений или скоростей для уравнений движения и температур или потоков тепла для уравнений энергии. В качестве начальных условий в расчётной области задаются значения температуры и плотности.

Разностная схема (6) – (9) полностью консервативна, т.е. из разностных уравнений движения и энергии вытекает закон сохранения полной энергии системы. Действительно, введём сеточный функционал полной энергии следующим образом:

$$E_{tot} = \sum_{mln} \Delta m_{mln} \left((\varepsilon_e)_{mln} + (\varepsilon_i)_{mln} + \frac{u_{mln}^2 + w_{mln}^2 + v_{mln}^2}{2} \right), \quad (11)$$

где под квадратом скорости в ячейке подразумевается среднее значение квадрата скорости в узлах, принадлежащих данной ячейке:

$$u_{mln}^2 = \frac{1}{8} \sum_{r \in III_1} u_r^2, \quad w_{mln}^2 = \frac{1}{8} \sum_{r \in III_1} w_r^2, \quad v_{mln}^2 = \frac{1}{8} \sum_{r \in III_1} v_r^2.$$

Обозначим: $ijk \in G$ — граничные узлы, \bar{r} — приграничные ячейки расчетной области, $\bar{g} \in \bar{G}$ — грани, замыкающие граничную область. В этих обозначениях изменение функционала (11) на одном шаге временного интегрирования в соответствии с (6) – (9) оказывается следующим:

$$\begin{aligned} \hat{E}_{tot} - E_{tot} = & -\Delta t \sum_{mln} \left((\hat{G}_e^{rad})_{mln} + (\hat{G}_e^{las})_{mln} \right) \hat{V}_{mln} + \Delta t \sum_{\bar{g} \in \bar{G}} \left((\hat{W}_e)_{\bar{g}} + (\hat{W}_i)_{\bar{g}} \right) \cdot \hat{S}_{\bar{g}} + \\ & + \Delta t \sum_{ijk \in G} \left[u_{ijk}^{(0.5)} \sum_{\bar{r} \in III_2} \left(\frac{\partial \hat{V}_{\bar{r}}}{\partial x_{ijk}} \right) \hat{P}_{\bar{r}} + w_{ijk}^{(0.5)} \sum_{\bar{r} \in III_2} \left(\frac{\partial \hat{V}_{\bar{r}}}{\partial y_{ijk}} \right) \hat{P}_{\bar{r}} + v_{ijk}^{(0.5)} \sum_{\bar{r} \in III_2} \left(\frac{\partial \hat{V}_{\bar{r}}}{\partial z_{ijk}} \right) \hat{P}_{\bar{r}} \right]. \end{aligned} \quad (12)$$

Как видно из (12), изменение полной энергии в системе, описываемой разностными уравнениями (6) – (9), определяется:

- вносом (выносом) энергии источниками (стоками);
- притоком (оттоком) тепла через границу области;
- работой внешних сил давления.

Алгоритм численного решения

Разностные уравнения (6) – (9) представляют собой систему нелинейных алгебраических уравнений, для решения которых используется итерационный метод с отдельным расчетом двух групп уравнений: уравнений динамики и уравнений энергии. При этом уравнение состояния является уравнением-связкой между уравнениями первой и второй группы.

Структура алгоритма состоит в следующем.

1. В качестве начального приближения для значений скорости, плотности и температуры на $(n+1)$ -м временном слое берутся значения с n -ого временного слоя.

2. При заданном значении температуры решаются уравнения движения и находятся приближенные значения скорости и плотности.

3. При полученных значениях скорости и плотности решается система уравнений энергии и находятся приближенные значения электронной и ионной температур.

4. Проверяется выполнение закона сохранения энергии (12). Если он выполнен с требуемой точностью, то значения функций на момент времени t^{n+1} для лагранжевого этапа считаются найденными. В противном случае необходимо вернуться к выполнению пункта 2 и снова повторить описанный

выше процесс, используя в качестве начальных приближений полученные в пунктах 2 и 3 значения переменных.

5. При необходимости проводится коррекция лагранжевой сетки и выполняется пересчёт всех величин на новую разностную сетку по методике [6].

Рассмотрим алгоритм более подробно.

Разностные уравнения движения (6) – (8) решаются методом Ньютона с редукцией неизвестных величин (см. [5]), то есть вначале, при переходе от итерации « s » к итерации « $s+1$ », мы полагаем, что все переменные, входящие в уравнения, зависят только от компонент скорости $u_{ijk}, w_{ijk}, v_{ijk}$ («основных» переменных в уравнениях первой группы). Предполагается также, что давление вещества в ячейках изменяется локально-баротропно, то есть температура фиксирована. Отмечая верхним индексом номер итерации, запишем для каждой функции в уравнениях движения формулу перехода от s -ой итерации к $(s+1)$ -ой:

$$u_{ijk}^{s+1} = u_{ijk}^s + \delta u_{ijk},$$

$$w_{ijk}^{s+1} = w_{ijk}^s + \delta w_{ijk},$$

$$v_{ijk}^{s+1} = v_{ijk}^s + \delta v_{ijk},$$

$$x_{ijk}^{s+1} = x_{ijk}^s + \delta x_{ijk} = x_{ijk}^s + \frac{\partial x_{ijk}}{\partial u_{ijk}} \delta u_{ijk} = x_{ijk}^s + \frac{\Delta t}{2} \delta u_{ijk},$$

$$y_{ijk}^{s+1} = y_{ijk}^s + \delta y_{ijk} = y_{ijk}^s + \frac{\partial y_{ijk}}{\partial w_{ijk}} \delta w_{ijk} = y_{ijk}^s + \frac{\Delta t}{2} \delta w_{ijk},$$

$$z_{ijk}^{s+1} = z_{ijk}^s + \delta z_{ijk} = z_{ijk}^s + \frac{\partial z_{ijk}}{\partial v_{ijk}} \delta v_{ijk} = z_{ijk}^s + \frac{\Delta t}{2} \delta v_{ijk},$$

$$\Phi_{mln}^{s+1} = \Phi_{mln}^s + \delta \Phi_{mln} = \Phi_{mln}^s + \sum_{r \in \mathbb{M}_1} \left(\frac{\partial \Phi_{mln}}{\partial u_r} \delta u_r + \frac{\partial \Phi_{mln}}{\partial w_r} \delta w_r + \frac{\partial \Phi_{mln}}{\partial v_r} \delta v_r \right),$$

где Φ_{mln} — функции в ячейке (P_{mln} или q_{mln}).

Подставляя значения функций на $(s+1)$ -ой итерации в уравнения движения системы (6) – (8) и пренебрегая квадратами приращений функций, получим систему линейных алгебраических уравнений относительно приращений компонент скорости $\delta u_{ijk}, \delta w_{ijk}, \delta v_{ijk}$:

$$\begin{aligned}
\sum_{k_1, k_2, k_3=-1}^1 \left(a_{1ijk}^{(k_1 k_2 k_3)} \delta u_{i+k_1, j+k_2, k+k_3} + b_{1ijk}^{(k_1 k_2 k_3)} \delta w_{i+k_1, j+k_2, k+k_3} + c_{1ijk}^{(k_1 k_2 k_3)} \delta v_{i+k_1, j+k_2, k+k_3} \right) &= F_{ijk}^{(1)}, \\
\sum_{k_1, k_2, k_3=-1}^1 \left(a_{2ijk}^{(k_1 k_2 k_3)} \delta u_{i+k_1, j+k_2, k+k_3} + b_{2ijk}^{(k_1 k_2 k_3)} \delta w_{i+k_1, j+k_2, k+k_3} + c_{2ijk}^{(k_1 k_2 k_3)} \delta v_{i+k_1, j+k_2, k+k_3} \right) &= F_{ijk}^{(2)}, \\
\sum_{k_1, k_2, k_3=-1}^1 \left(a_{3ijk}^{(k_1 k_2 k_3)} \delta u_{i+k_1, j+k_2, k+k_3} + b_{3ijk}^{(k_1 k_2 k_3)} \delta w_{i+k_1, j+k_2, k+k_3} + c_{3ijk}^{(k_1 k_2 k_3)} \delta v_{i+k_1, j+k_2, k+k_3} \right) &= F_{ijk}^{(3)}.
\end{aligned} \quad (13)$$

Здесь $a_{1,2,3ijk}^{(k_1 k_2 k_3)}$, $b_{1,2,3ijk}^{(k_1 k_2 k_3)}$, $c_{1,2,3ijk}^{(k_1 k_2 k_3)}$, $F_{ijk}^{(1,2,3)}$ — численные коэффициенты, определяемые физическими величинами, геометрией сетки и шагом интегрирования по времени. Система уравнений (13) имеет матрицу блочной структуры. Для её решения используются итерационные методы [13].

После нахождения приращения скорости на $(s+1)$ -ой итерации определяются величины u_{ijk} , w_{ijk} , v_{ijk} , x_{ijk} , y_{ijk} , z_{ijk} , V_{mln} , ρ_{mln} , P_{mln} , q_{mln} .

Уравнения энергии (9) и ионизации (10) решаются согласованно. При этом мы полагаем, что все функции, входящие в эти уравнения, зависят только от температур электронной и ионной компонент. Запишем для функций в уравнениях энергии формулу перехода от s -ой итерации к $(s+1)$ -ой итерации:

$$\begin{aligned}
(T_{e,i})_{mln}^{s+1} &= (T_{e,i})_{mln}^s + \delta(T_{e,i})_{mln}, \\
(P_{e,i})_{mln}^{s+1} &= (P_{e,i})_{mln}^s + \delta(P_{e,i})_{mln} = (P_{e,i})_{mln}^s + \left(\frac{\partial P_{e,i}}{\partial T_{e,i}} \right)_{mln} \delta(T_{e,i})_{mln}, \\
(\mathcal{E}_{e,i})_{mln}^{s+1} &= (\mathcal{E}_{e,i})_{mln}^s + \delta(\mathcal{E}_{e,i})_{mln} = (\mathcal{E}_{e,i})_{mln}^s + \left(\frac{\partial \mathcal{E}_{e,i}}{\partial T_{e,i}} \right)_{mln} \delta(T_{e,i})_{mln}, \\
(Q_{ei})_{mln}^{s+1} &= (Q_{ei})_{mln}^s + \left(\frac{\partial Q_{ei}}{\partial T_e} \right)_{mln} \delta(T_e)_{mln} + \left(\frac{\partial Q_{ei}}{\partial T_i} \right)_{mln} \delta(T_i)_{mln}, \\
(\chi_{e,i})_g^{s+1} &= (\chi_{e,i})_g^s + \sum_{q \in III_4} \left(\frac{\partial \chi_{e,i}}{\partial T_{e,i}} \right)_q \delta(T_{e,i})_q.
\end{aligned}$$

Здесь под $(\chi_{e,i})_g$ понимается проекция коэффициента электронной или ионной теплопроводности, определённого в ячейках, на грань g . Подставляя значения функций на $(s+1)$ -ой итерации в уравнения энергии и пренебрегая квадратами приращений функций, получим систему линейных алгебраических уравнений относительно приращений температур $\delta(T_e)_{mln}$, $\delta(T_i)_{mln}$:

$$\sum_{k_1, k_2, k_3=-1}^1 \left(a_{mln}^{(k_1 k_2 k_3)} (\delta T_e)_{m+k_1, l+k_2, n+k_3} \right) + b_{mln}^{(0,0,0)} (\delta T_i)_{mln} = \tilde{F}_{mln}^{(1)},$$

$$c_{mln}^{(0,0,0)} (\delta T_e)_{mln} + \sum_{k_1, k_2, k_3=-1}^1 \left(d_{mln}^{(k_1 k_2 k_3)} (\delta T_i)_{m+k_1, l+k_2, n+k_3} \right) = \tilde{F}_{mln}^{(2)}. \quad (14)$$

Здесь $a_{mln}^{(k_1 k_2 k_3)}$, $d_{mln}^{(k_1 k_2 k_3)}$, $b_{mln}^{(0,0,0)}$, $c_{mln}^{(0,0,0)}$, $\tilde{F}_{mln}^{(1)}$, $\tilde{F}_{mln}^{(2)}$ — численные коэффициенты. В отличие от системы (13), в системе (14) используется неполный шаблон, и ненулевыми являются только коэффициенты с индексами $(k_1 k_2 k_3) = (0, 0, \pm 1), (0, \pm 1, 0), (\pm 1, 0, 0), (0, 0, 0)$.

Аналогичные уравнения на границе получаются в соответствии с типом граничных условий. Например, при заданной температуре все приращения температур на границе тождественно равны нулю.

Система разностных уравнений (14) решается аналогично системе (13).

Модель переноса теплового излучения в плазме

Для описания процессов переноса теплового излучения были апробированы два подхода [7]. В первом используется уравнение переноса в многогрупповом диффузионном приближении [14], имеющее вид

$$\frac{\partial U_\nu}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{W}_\nu + \kappa_\nu^P c U_\nu = 4\pi j_\nu,$$

$$\mathbf{W}_\nu = -\frac{c}{3\kappa_\nu^R} \nabla U_\nu. \quad (15)$$

Здесь индекс ν определяет спектральную группу, U_ν — плотность энергии излучения, \mathbf{W}_ν — поток энергии, j_ν — излучательная способность, κ_ν^P , κ_ν^R — коэффициент поглощения, усреднённый по спектральной группе ν по Планку и Росселанду соответственно, c — скорость света в вакууме. На границе ставятся условия Маршака:

$$\mathbf{W}_\nu = \mathbf{n} \frac{c}{2} U_\nu$$

(\mathbf{n} — вектор внешней нормали к границе).

Разностная аппроксимация уравнения (15) для каждой спектральной группы имеет вид

$$\sum_{k_1, k_2, k_3=-1}^1 \left(\alpha_{mln}^{(k_1 k_2 k_3)} U_{m+k_1, l+k_2, n+k_3} \right) = F_{mln}. \quad (16)$$

Подобно системе (14), в системе (16) используется семиточечный шаблон «крест». Система (16) решается аналогично системам (13) и (14).

Вклад излучения в изменение энергии электронов в этом приближении определяется по формуле

$$G_e^{rad} = -\sum_{\nu} (4\pi j_{\nu} - \kappa_{\nu}^p c U_{\nu}).$$

Основными достоинствами диффузионного приближения являются простота реализации и высокая скорость работы. Это приближение обеспечивает физически корректные результаты как в прозрачной, так и в плотной плазме, однако в области, где пробег фотона сравним с характерным масштабом плазмы, возможна существенная анизотропия излучения. В этой области диффузионное приближение формально неприменимо и может приводить к некорректным результатам. Кроме того, из решения уравнения (15) невозможно получить угловое распределение вышедшей энергии, поскольку диффузионное приближение предполагает изотропность. Для получения углового распределения можно воспользоваться процедурой трассировки полученной конфигурации плазмы методом длинных характеристик [7].

Альтернативой диффузионному приближению является метод коротких характеристик (метод характеристик с интерполяцией, [15]). В этом методе используется дискретизация уравнения переноса по пространству, направлениям и спектральным группам. Интенсивность в каждом узле для каждого направления определяется из аналитического решения уравнения переноса в предположении фиксированной температуры и плотности внутри каждой ячейки:

$$I_{\nu, \Omega} = \frac{j_{\nu}}{\kappa_{\nu}^p} (1 - e^{-\kappa_{\nu}^p d}) + I_0 e^{-\kappa_{\nu}^p d}, \quad (17)$$

где $I_{\nu, \Omega}$ — интенсивность излучения в спектральной группе ν в направлении Ω , определённая в узле разностной сетки, d — путь, пройденный короткой характеристикой от узла до границы ячейки, I_0 — значение интенсивности на границе ячейки, полученное путём интерполяции из узлов в точку на грани. К этому уравнению на границе расчётной области ставится граничное условие $I_{\nu, \Omega} = 0$, если $\Omega \cdot \mathbf{n} < 0$, то есть вектор Ω направлен внутрь расчётной области. Вклад излучения в изменение энергии ячейки определяется путём вычисления интегрального потока излучения через грани:

$$G_e^{rad} = \sum_{\nu} \sum_{\Omega} \sum_{g \in III_3} \Omega \cdot \mathbf{S}_g \langle I_{\nu, \Omega} \rangle_g,$$

где $\langle I_{\nu, \Omega} \rangle_g$ — среднее по грани g значение $I_{\nu, \Omega}$.

Недостатком этого метода является необходимость выполнения большого числа операций. При этом затраты процессорного времени слабо зависят от физической ситуации: в любом случае необходимо в каждом узле для каждой частоты и направления построить характеристику и вычислить вдоль неё интенсивность по формуле (17). Кроме того, для обеспечения корректного выхода на диффузионный предел в плотной плазме необходимо использование аппроксимаций не ниже второго порядка (см. [11]), что существенно усложняет реализацию алгоритма.

Модель поглощения лазерной энергии

Для моделирования процесса поглощения лазерной энергии в данной работе используется комбинированный подход [8], состоящий в следующем.

В области, где плотность электронов n_e меньше критической плотности $n_c = m_e \omega^2 / 4\pi e^2$ (e и m_e — заряд и масса электрона, $\omega = 2\pi c / \lambda$ — круговая частота лазера, λ — длина волны), расчёт поглощения осуществляется в приближении геометрической оптики [16]. В расчётную область запускается некоторое множество лучей, каждый из которых несёт на себе определённую мощность, определяемую распределением входящей лазерной интенсивности. Уравнения траектории каждого луча и диссипации энергии на нём имеют вид [17]

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{r}}{d\tau} &= n\mathbf{s}, \\ \frac{d(ns)}{d\tau} &= \frac{1}{2}\nabla n^2, \\ \frac{dP}{d\tau} &= -n\mu P. \end{aligned} \tag{18}$$

Здесь \mathbf{r} — координата на луче, $n = \text{Re}\sqrt{\varepsilon}$ — показатель преломления, $\mu = \frac{2\omega}{c}\text{Im}\sqrt{\varepsilon}$ — коэффициент поглощения, ε — комплексная диэлектрическая проницаемость, \mathbf{s} — единичный вектор в направлении луча, τ — параметр, монотонно возрастающий вдоль луча, P — мощность.

В соответствии с уравнениями (18) осуществляется трассировка луча через гидродинамическую сетку, при этом мощность, потерянная лучом в ячейке, служит источником энергии G_e^{las} . По достижении области, где плотность электронов близка к критической, осуществляется переход к одномерной модели слоистой среды, в которой решается уравнение Гельмгольца по методике [18]. Луч при этом частично отражается, и его энергия уменьшается в соответствии с решением уравнения Гельмгольца.

Такой подход обеспечивает учёт эффектов рефракции и, в то же время, позволяет учесть поглощение в области, где $n_e > n_c$, что необходимо для моделирования начала процесса испарения мишени, когда имеется резкая граница «металл-вакуум».

В этом случае всё поглощение лазерной энергии происходит в скин-слое с характерной толщиной $\delta \sim \lambda / \text{Im}\sqrt{\varepsilon}$. При интенсивности лазера $>10^9$ Вт/см² теплопроводность металла не способна обеспечить отвод поступающей энергии, в результате чего происходит испарение малой массы вещества с очень высокой температурой.

Следует отметить, что при применении методики на сетке, разрешающей длину волны, могут возникнуть осцилляции в подкритической области, соответствующие стоячим волнам в одномерном уравнении Гельмгольца. Для согласования решения с геометрической оптикой в таком случае целесообразно применить усреднение поглощаемой лазерной мощности на масштабе порядка длины волны лазера.

Уравнения состояния и коэффициенты переноса

Для обеспечения полноты системы уравнений (1) – (4), к ней необходимо добавить уравнения, связывающие термодинамические характеристики вещества. В описываемой методике независимыми термодинамическими переменными полагаются температуры электронов и ионов T_e и T_i , плотность вещества ρ и степень ионизации Z_0 . Добавочными уравнениями являются уравнения состояния для электронной и ионной компоненты.

Для ионов используется приближение идеального газа, а для электронов — табличное уравнение состояния, рассчитанное по модели Хартри-Фока-Слэтера [19], в которое, при необходимости, вводится поправка на отклонение ионизации от равновесного значения.

Коэффициент теплопроводности ионов и обменный член Q_{ei} в уравнении (4) вычисляются по формулам из работы [20]

$$Q_{ei} = -3 \frac{m_e n_e}{m_i \tau_i} k (T_e - T_i), \quad \chi_i = 3.906 \frac{\rho \tau_i}{m_i^2} k T_i \cdot k,$$

$$\tau_i = \frac{3(m_i k T_i)^{3/2}}{4\sqrt{\pi} \Lambda e^4 Z_0^4 \rho},$$

где k — постоянная Больцмана, m_i — масса иона, τ_i — время ионных столкновений, Λ — кулоновский логарифм.

Для коэффициента электронной теплопроводности используется интерполяция между формулами Спитцера и Хаббарда [21]:

$$\chi_e = \sqrt{\chi_S^2 + \chi_H^2},$$

$$\chi_S = \frac{16\sqrt{2}}{\pi^{3/2}} \frac{(kT_e)^{5/2}}{Z_0 e^4 \sqrt{m_e} \Lambda} k, \quad \chi_H = \frac{\pi}{3\sqrt{2}} \frac{(kT_F)^{3/2} kT_e}{Z_0 e^4 \sqrt{m_e} \Lambda} k,$$

где T_F — температура Ферми.

Равновесный средний заряд иона, время ионизации/рекомбинации, электронная теплопроводность, спектральные коэффициенты поглощения и излучательная способность, как и вклад электронов в уравнение состояния, берутся из таблиц, рассчитанных по методике [19].

Для учёта влияния неполного выхода излучения на свойства плазмы используется следующий подход. Рассчитываются две таблицы: одна — в предположении запертого излучения, а вторая — в предположении свободного выхода излучения. Далее для всех требуемых характеристик вещества проводится интерполяция [22]

$$f = \xi f^{(1)} + (1 - \xi) f^{(0)},$$

где под $f^{(1)}$ понимается значение величины f , полученное в приближении запертого излучения, а под $f^{(0)}$ — в предположении свободного выхода излучения. Коэффициент интерполяции ξ определяется отдельно для каждой ячейки по формуле

$$\xi = \frac{\sum_{\nu} c U_{\nu}}{\sum_{\nu} 4\pi \frac{j_{\nu}^{(1)}}{\kappa_{\nu}^{(1)}}}.$$

Таким образом, если практически всё излучение остаётся в плазме и поле излучения близко к планковскому, то $\xi \approx 1$ и $f \approx f^{(1)}$. Если же перепоглощается пренебрежимо малая доля излучения, то $\xi \approx 0$ и $f \approx f^{(0)}$.

Адаптация методики для использования на высокопараллельных системах

Код 3DLINE написан в соответствии со стандартами языка Fortran 90 и распараллелен с использованием библиотек MPI и OpenMP для вычислений на суперкомпьютерах современной архитектуры (в частности, на суперкомпьютере K-100 [23]).

Многонитевой подход с общей памятью используется для ускорения решения уравнений (13), (14), (16) и вычисления уравнений состояния. При этом для обеспечения воспроизводимости результатов пришлось перейти от неявных итераций Гаусса-Зейделя к явному методу Якоби, что привело к

увеличению числа итераций в среднем в полтора раза. Использование 12 нитей на одном вычислительном узле обеспечивает восьмикратное ускорение решения соответствующих уравнений и общее ускорение расчёта примерно в шесть раз.

Разбиение сетки на расчётные домены (которые реализуются на разных узлах) было мотивировано скорее ограничениями, связанными с памятью, нежели со временем счёта. Неявная аппроксимация уравнений движения (8), приводящая к системе (13), требует вычисления и хранения в памяти массивов $a_{1,2,3ijk}^{(k_1k_2k_3)}$, $b_{1,2,3ijk}^{(k_1k_2k_3)}$, $c_{1,2,3ijk}^{(k_1k_2k_3)}$, $F_{ijk}^{(1,2,3)}$, общее число которых — 246. Ввиду этого обстоятельства использование более чем 10^6 ячеек разностной сетки на одном вычислительном домене представляется нерациональным. Поэтому было реализовано разбиение расчётной области на домены, информация о которых хранится на разных узлах. Из-за первого порядка аппроксимации производных по пространству оказалось достаточно обмена данными на одном слое ячеек на границах доменов.

Пока что остаётся не распараллеленной часть кода, отвечающая за расчёт поглощения лазерного излучения с учётом рефракции. Параллельный расчёт на подробной сетке с отключённой рефракцией возможен при условии выбора разбиения расчётной области вдоль направления распространения лазерного пучка.

Результаты расчёта

Для апробации возможностей кода были проведены расчёты несоосного падения лазерного пучка на оловянную каплю. Расчёты проводились на одном вычислительном узле с использованием двенадцати ядер на сетке $100 \times 100 \times 100$ узлов с учётом рефракции и использованием одnogруппового диффузионного приближения.

В качестве мишени была взята сферическая оловянная капля радиусом 50 мкм с начальной температурой 1000 К. Начальное пространственное распределение плотности задавалось выражением, обеспечивающим сферическую форму мишени с резкой границей:

$$\rho(r) = \rho_0 \exp\left(-\left(\frac{r}{r_0}\right)^{18}\right),$$

где ρ_0 — начальная плотность, равная 7.3 г/см^3 , r_0 — радиус капли, а r — расстояние до центра капли. Ось симметрии лазерного пучка в одном расчёте проходила сквозь центр капли, в другом — была смещена на 16 мкм вдоль оси y .

Полная энергия в импульсе Nd:YAG-лазера с длиной волны 1.064 мкм составила 2.625 Дж, пиковая мощность — 30 МВт, максимальная

интенсивность — $3.0 \cdot 10^{11}$ Вт/см². Временная зависимость мощности и профиль пучка приведены на рис.1, ширина гауссова пучка на e^2 равна 160 мкм.

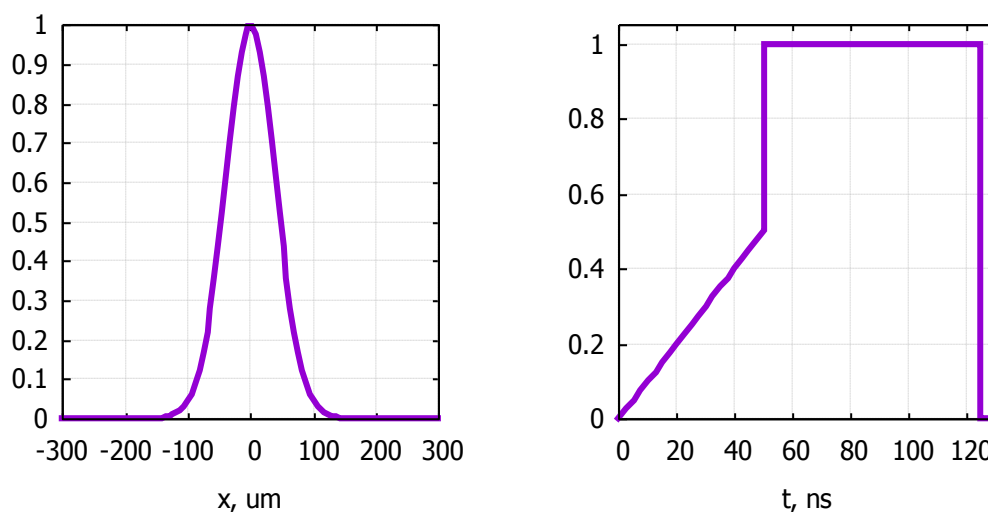


Рис.1. Пространственное распределение интенсивности лазерного пучка и временная зависимость его мощности в относительных единицах.

Расчётная временная зависимость коэффициента поглощения приведена на рис.2. Как видно из рисунка, за время ~ 5 нс успевает наработаться достаточно плазмы для эффективного поглощения лазерного пучка. В дальнейшем коэффициент поглощения остаётся высоким. Интегральное значение поглощённой лазерной энергии составило 2.45 Дж или 93% входящей лазерной энергии в обоих расчётах. Этот результат является характерным для Nd:YAG-лазера с длительностью импульса в десятки наносекунд.

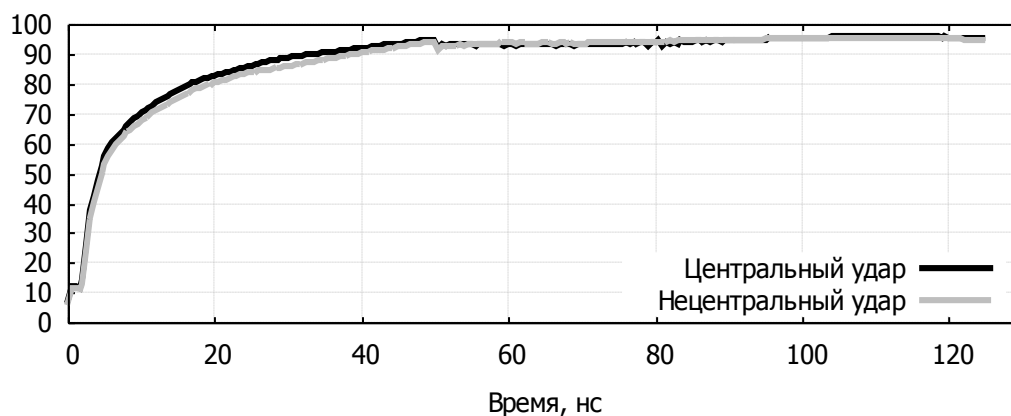


Рис.2. Временная зависимость коэффициента поглощения.

На рис.3 представлена временная зависимость отношения излучаемой в единицу времени плазмой энергии к поглощаемой. На протяжении основной части импульса она составляет $\sim 70\%$ и практически не меняется, что свидетельствует о квазистационарном режиме динамики плазмы. Скачок в момент времени 50 нс связан со скачком лазерной интенсивности в 2 раза

(см. рис.1). Как следует из рис.3, за время ~ 3 нс плазма успевает вернуться в квазистационарный режим.

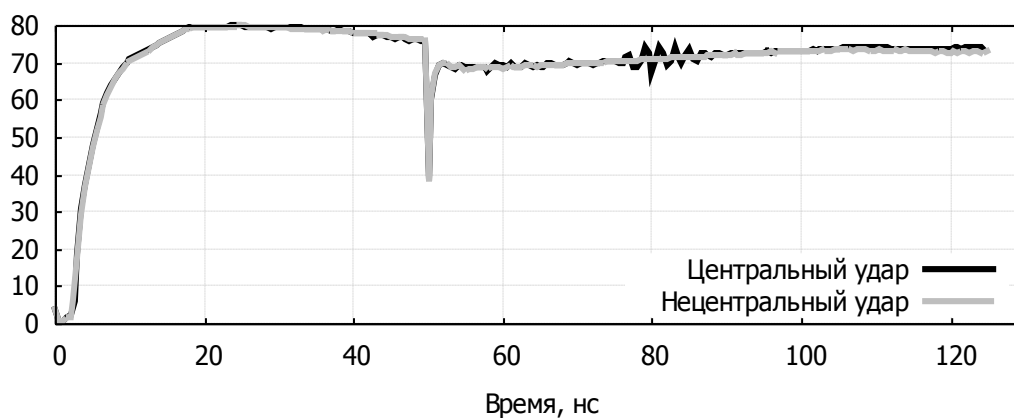


Рис.3. Отношение излучаемой плазмой энергии к поглощаемой.

В задачах моделирования EUV-источника одной из наиболее важных величин является коэффициент конверсии, определяемый отношением выходящего в верхнюю полусферу излучения с длиной волны $13.5 \text{ нм} \pm 1\%$ к входящей лазерной мощности. Для определения коэффициента конверсии была проведена трассировка расчётных распределений плазмы по методу длинных характеристик [7] и получена доля излученной энергии, приходящаяся на интересующий нас интервал углов и частот.

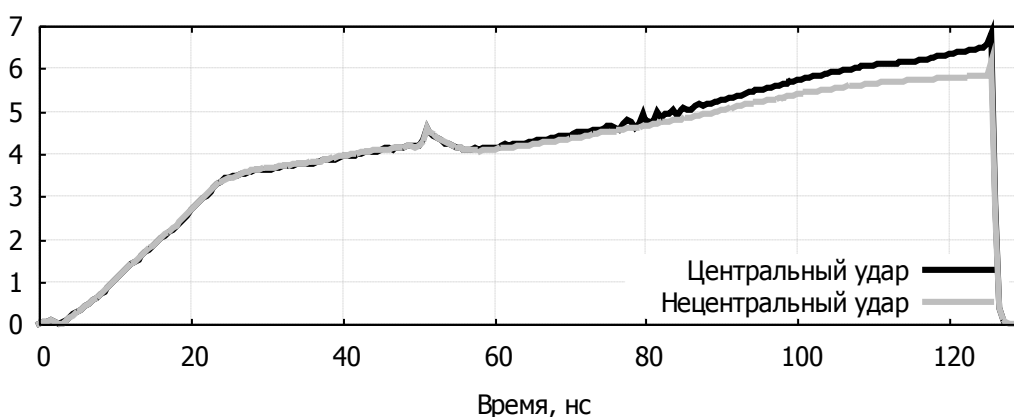


Рис.4. Отношения мощности излучения в диапазоне $13.5 \text{ нм} \pm 1\%$, вышедшего в верхнюю полусферу, к интегральной излученной мощности.

Коэффициент конверсии лазерного излучения в EUV представлен на рис.5. За весь импульс в диапазоне $13.5 \text{ нм} \pm 1\%$ в верхнюю полусферу было излучено 86 мДж в случае центрального удара и 82 мДж для нецентрального импульса, то есть 3.3% и 3.1% от входящей лазерной энергии.

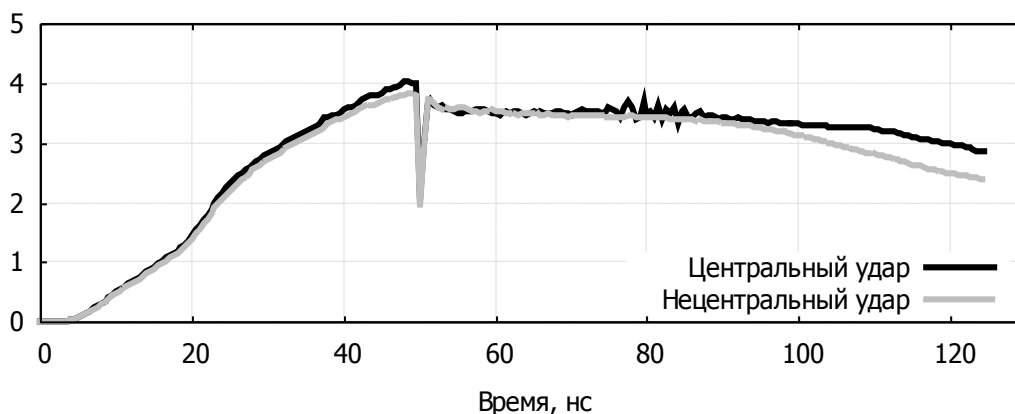


Рис.5. Коэффициент конверсии лазерной мощности в излучение в спектральном диапазоне $13.5 \text{ нм} \pm 1\%$ в верхнюю полусферу.

Из вышеприведенных графиков видно, что смещение пучка практически не влияет на конверсию лазерной мощности в излучение. Это легко объясняется тем, что величина сдвига оси симметрии лазерного импульса относительно центра капли (16 мкм) много меньше как характерного размера пучка (160 мкм), так и диаметра капли (100 мкм). Тем не менее, в гидродинамике жидкого вещества капли в этих двух случаях наблюдаются существенные отличия. На рисунках 6 – 9 изображены распределения плотности (цветом), температуры (контуром) и скорости (векторы) в срезе y - z на различные моменты времени для расчёта со смещённым пучком.

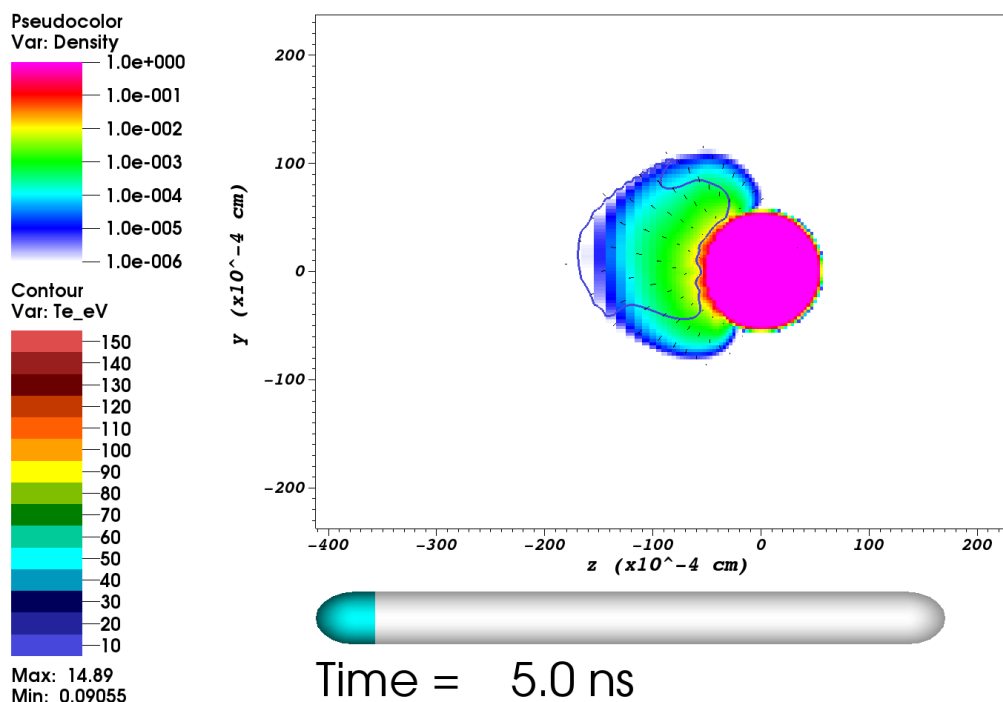


Рис.6. К моменту времени 5 нс формируется факел лазерной плазмы. Видна асимметрия плазмы, связанная со смещением пучка относительно центра капли, форма капли пока что остаётся близкой к сферической.

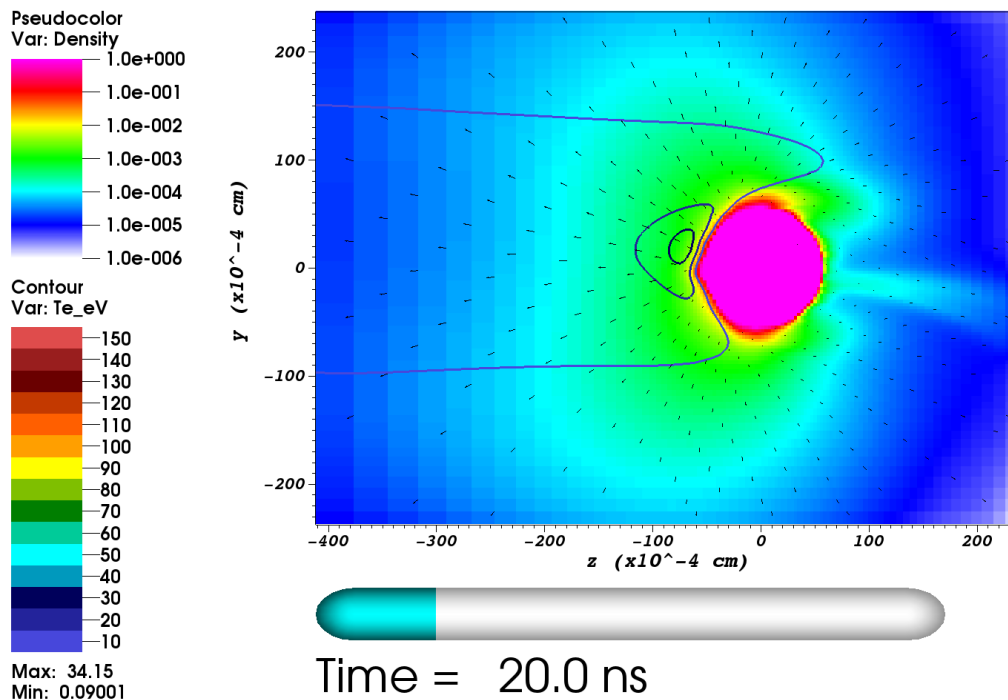


Рис.7. Плазма обошла каплю и кумулировала за ней. Перед каплей испарение идёт в квазистационарном режиме, температура в факеле определяется текущей интенсивностью лазера. Заметна деформация капли.

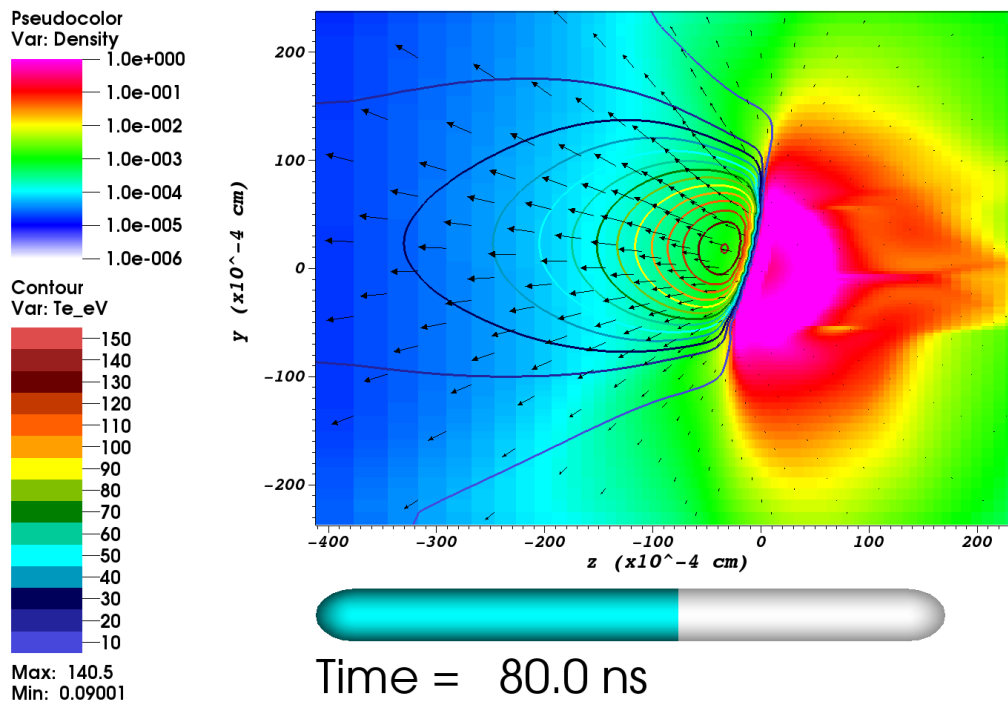


Рис.8. Процесс идёт в квазистационарном режиме. Так как лазер вышел на постоянную мощность, температура и форма факела практически не меняются, плотный остаток капли медленно деформируется и уплощается.

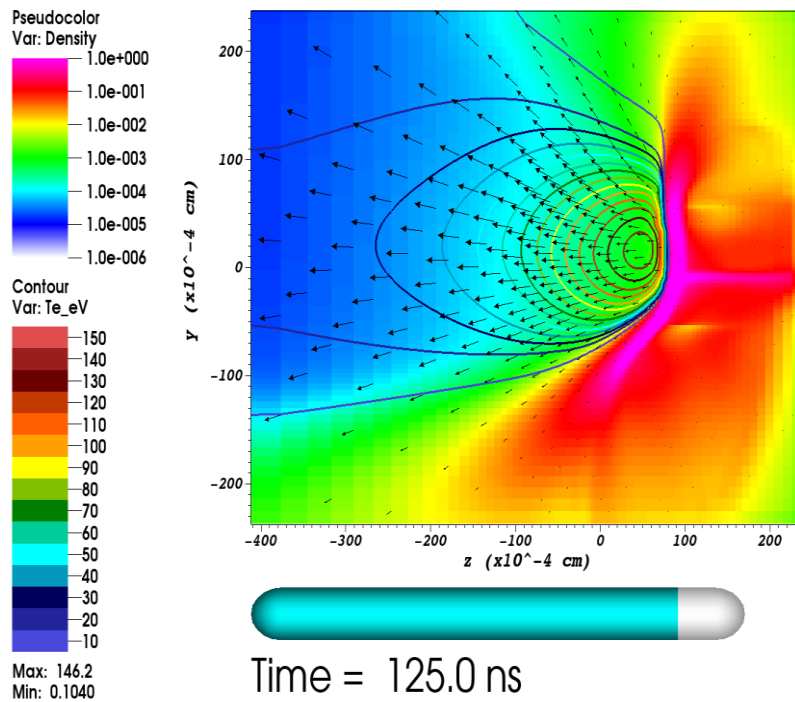


Рис.9. Конец импульса. Неиспарённое вещество расплющено лазером в тонкий блин, часть которого вышла из-под лазерного пятна. В результате образовалась струя вещества, идущая под углом $\sim 30^\circ$ к оси лазерного пучка в направлении, противоположном смещению.

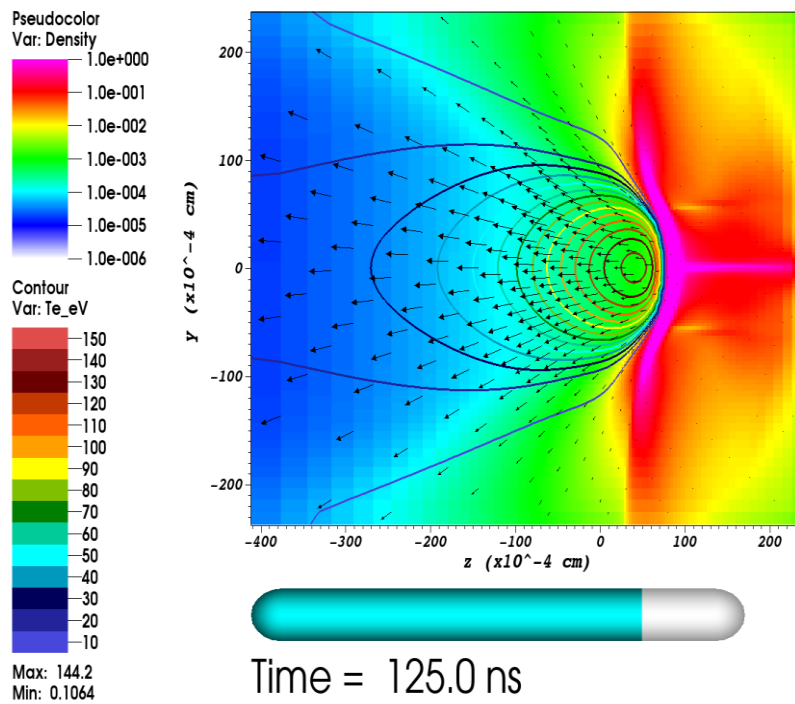


Рис.10. Распределение плотности (цветом) и температуры (контуром) на момент 125 нс в расчёте с центральным импульсом. Струи нет.

На рис.9 и 10 представлены распределения плотности и температуры в обоих расчётах на момент окончания лазерного импульса. Температура и форма факела близки, но в расчёте со смещением часть плотного вещества выходит из-под лазерного пятна и формируется узкая струя. Интегральные угловые распределения кинетической энергии представлены на рис.11 и 12. Видно, что в случае центрального попадания струи не возникает.

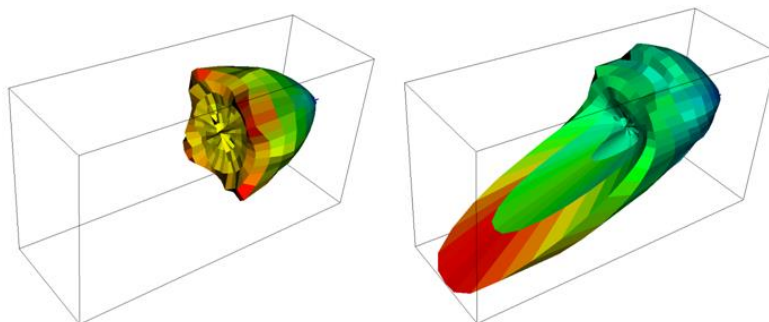


Рис.11. Угловое распределение кинетической энергии ионов на конец лазерного импульса. Слева центральный импульс, справа — смещённый.

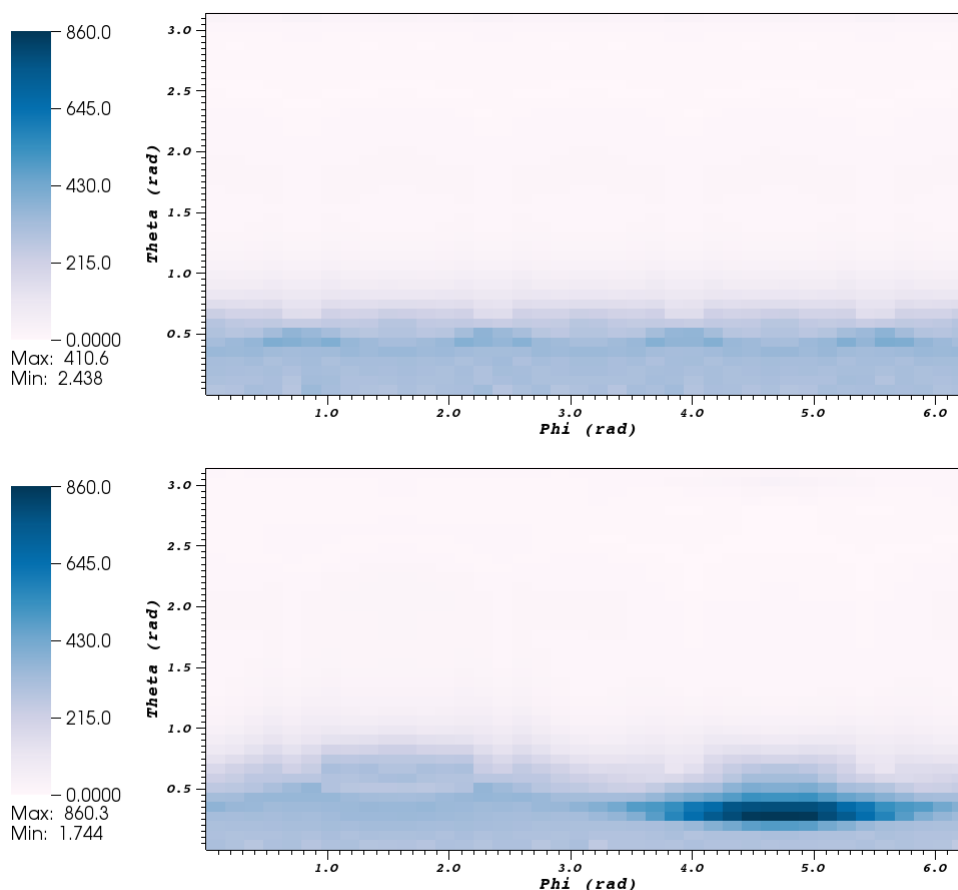


Рис.12. Угловое распределение кинетической энергии ионов на конец лазерного импульса в зависимости от полярного и азимутального углов в радианах. Сверху центральный импульс, снизу — смещённый. Шкала проградуирована в мДж/стерадиан.

Выводы

Проведено трёхмерное моделирование воздействия лазера на оловянную сферическую мишень. Наблюдается разумное согласие полученных результатов с типичными экспериментальными данными. Обнаружено, что относительно небольшое смещение оси симметрии лазерного пучка относительно центра капли может привести к качественному изменению распределения ионов при незначительном изменении коэффициента конверсии лазерной энергии в излучение.

Список литературы

1. Круковский А.Ю., Новиков В.Г., Цыгвинцев И.П. Программа 3DLINE: численное моделирование трёхмерных нестационарных задач радиационной газовой динамики. // Препринты ИПМ им.М.В.Келдыша, 2013, № 20, 24 с. URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2013-20>
2. Самарский А.А., Попов Ю.П. Разностные методы решения задач газовой динамики. М., Наука. 1992.
3. Гасилов В.А. и др. Неявная двухслойная лагранжево-эйлерова разностная схема газовой динамики на основе согласованных аппроксимаций уравнений балансов массы и импульса. // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша, 2015, № 38, 22 с. URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2015-38>
4. Гасилов В.А., Круковский А.Ю., Оточин А.А. Комплекс программ РАЗРЯД. Решение задач магнитной гидродинамики в R-Z геометрии в двухтемпературном приближении. // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша, 1990, №150.
5. Гасилов В.А., Круковский А.Ю., Новикова Т.П., Оточин А.А. Об алгоритмах решения двумерных уравнений магнитной гидродинамики в комплексе программ РАЗРЯД. // Препринты ИММ РАН, 1993, № 36.
6. Круковский А.Ю., Попов И.В. Полностью консервативные разностные схемы в смешанных эйлерово-лагранжевых переменных для расчета трехмерных уравнений газовой динамики. // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша, 2012, № 23, 11 с. URL: http://www.keldysh.ru/papers/2012/prep2012_23.pdf
7. Цыгвинцев И.П., Круковский А.Ю., Новиков В.Г. Сравнение различных методов расчёта переноса излучения для трёхмерных задач. // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша, 2014, № 48, 14 с. URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2014-48>
8. Цыгвинцев И.П., Круковский А.Ю., Новиков В.Г., Попов И.В. Трёхмерное моделирование поглощения лазерного излучения в приближении геометрической оптики. // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша, 2012, № 41, 20 с. URL: http://www.keldysh.ru/papers/2012/prep2012_41.pdf
9. Bakshi V. EUV Sources for Lithography, SPIE Press, Bellingham, WA (2005).

10. *Koshelev K.N. et al.* RZLINE code modeling of distributed tin targets for laser-produced plasma sources of extreme ultraviolet radiation. // J. Micro/Nanolith. MEMS MOEMS. 11(2), 021112 (May 21, 2012).
11. *Basko M.M., Maruhn J.A., Tauschwitz An.* Development of a 2D Radiation-Hydrodynamics Code RALEF for Laser Plasma Simulations. // GSI Report 2010-1, GSI Helmholtzzentrum für Schwerionenforschung GmbH, 2010, p. 410.
12. *Головизнин В.М., Самарский А.А., Фаворский А.П.* Вариационный подход к построению конечно-разностных математических моделей в гидродинамике. // ДАН СССР, 1977, т. 235, № 6, С. 1285 – 1288.
13. *Самарский А.А., Николаев Е.С.* Методы решения сеточных уравнений. М., Наука, 1978.
14. *Зельдович Я.Б., Райзер Ю.П.* Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений. М.: Наука, 1966, 688 с.
15. *Четверушкин Б.Н.* Математическое моделирование задач динамики излучающего газа. М.: Наука, 1985, 304 с.
16. *Kaiser T.B.* Laser ray tracing and power deposition on an unstructured three-dimensional grid. // Physical Review E (Statistical Physics, Plasmas, Fluids, and Related Interdisciplinary Topics). Volume 61, Issue 1, January 2000, pp.895–905.
17. *Лебо И.Г., Тишкин В.Ф.* Исследование гидродинамической неустойчивости в задачах лазерного термоядерного синтеза методами математического моделирования. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2006. 304 с.
18. *Povarnitsyn M.E., Andreev N.E., Levashov P.R., Khishchenko R.V., Rosmej O.N.* Dynamics of thin metal foils irradiated by moderate-contrast high-intensity laser beams. // PACS numbers: 52.50.Jm, 52.38.-r, 79.20.Ds.
19. *Никифоров А.Ф., Новиков В.Г., Уваров В.Б.* Квантово-статистические модели высокотемпературной плазмы и методы расчёта росселандовых пробегов и уравнений состояния. М.: Физматлит, 2000, 400 с.
20. *Брагинский С.И.* Явления переноса в плазме. // Вопросы теории плазмы. Вып.1, М., Атомиздат, 1964, С. 183 – 272.
21. *Basko M., Löwer Th., Kondrashov V.N., Kendl A., Sigel R., Meyer-ter-Vehn J.* Optical probing of laser-induced indirectly driven shock waves in aluminum. // Phys. Rev. E, 56, № 1 (1997) 1019 – 1031.
22. *Новиков В.Г., Соломянная А.Д.* Спектральные характеристики плазмы, согласованные с излучением. // ТВТ, 1998, т. 36, вып. 6, С. 858 – 864.
23. Гибридный вычислительный кластер K-100. URL: <http://www.kiam.ru/MVS/resources/k100.html>