



ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 64 за 2015 г.



ISSN 2071-2898 (Print)  
ISSN 2071-2901 (Online)

Голубев Ю.Ф., Грушевский А.В.,  
Корянов В.В., Тучин А.Г.,  
Тучин Д.А.

Методика формирования  
больших наклонов орбиты  
КА с использованием  
гравитационных манёвров

**Рекомендуемая форма библиографической ссылки:** Методика формирования больших наклонов орбиты КА с использованием гравитационных манёвров / Ю.Ф.Голубев [и др.] // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2015. № 64. 32 с.  
URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2015-64>

**Ордена Ленина  
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ  
имени М.В.Келдыша  
Российской академии наук**

**Ю.Ф. Голубев, А.В. Грушевский,  
В.В. Корянов, А.Г. Тучин, Д.А. Тучин**

**Методика формирования  
больших наклонов орбиты КА  
с использованием  
гравитационных манёвров**

**Москва — 2015**

**Голубев Ю.Ф., Грушевский А.В., Корянов В.В., Тучин А.Г., Тучин Д.А.**

Методика формирования больших наклонений орбиты КА с использованием гравитационных манёвров

С использованием реальных эфемерид Земли, Венеры и других естественных тел Солнечной системы разработана методика баллистического проектирования сценариев выхода КА на орбиты, высоко наклонённые к плоскости эклиптики и солнечному экватору, с использованием серии пучковых полиобъектных гравитационных манёвров. Даются приложения построенной методики к проектированию космических миссий класса «Интергелио-Зонд».

**Ключевые слова:** поворотный гравитационный манёвр, малая тяга, диаграмма Тиссерана, высоко наклонённая рабочая орбита

**Yuri F. Golubev, Alexey V. Grushevskii, Victor V. Koryanov, Andrey G. Tuchin, Denis A. Tuchin**

To the high inclined orbit formation with use of gravity assists maneuvers

Low-cost tours for the high inclined orbit formation in the Solar system with use of gravitational maneuvers near its planets (Earth and Venus) with the full ephemeris using are considered. Limited dynamic opportunities of their use require multiple passes near them. Relevance of regular creation of optimum scenarios – sequences of cranking passing of celestial bodies and solution of conditions of their execution is obvious. This work is devoted to the description of beam's conditions for their creation of such chains. Applications of its using for the study of concrete options of mission "Interheliozond" are given.

**Key words:** cranking gravity assist, low thrust, Tisserand graph, high inclined operating orbit

## **Оглавление**

Введение .....	3
Специфика проведения гравитационных манёвров .....	5
Космические проекты класса «Интергелио-Зонд» .....	8
Методика построения баллистических сценариев в 3D-случае .....	15
Заключение.....	28
Библиографический список.....	28
Приложение. Диаграмма Vinfinity-Map.....	31

## **Введение**

Современное эффективное освоение космического пространства невозможно без использования гравитационных манёвров. Их применение ослабляет ограничения, накладываемые на сценарии космических миссий такими бюджетами их характеристической скорости, которые могут быть реализованы при текущем развитии космической техники. Перспективные космические миссии, в частности, предполагают формирование значительно измененных по наклонению рабочих орбит КА с целью изучения полярных областей Солнца (миссия «Solar Orbiter» ESA, отечественный проект «Интергелио-Зонд» и т.д.). Манёвры по изменению наклона орбиты являются в астродинамике особенно энергозатратными, и, естественно, привлечение дополнительных источников энергии путем использования гравитационных манёвров для них является приоритетным. Очевидна актуальность построения цепочек-сценариев проведения гравитационных манёвров (GAM – Gravity Assists Maneuver), меняющих наклонение (в западной литературе – CGA - Cranking Gravity Assist), и подготовки к их эффективному проведению, которое приведет в результате к значительному изменению наклона орбиты КА-исследователя. Технология синтеза подобных сценариев осложняется необходимостью их 3D-проектирования, усиливающей изначально «неочевидность» конструирования даже квазикомпланарных («плоских») баллистических полиобъектных сценариев проведения гравитационных манёвров при использовании точных эфемеридных моделей (ТЭМ) [8-14]. Необходимость использования ТЭМ для нужд реального баллистического проектирования связана с существованием экспоненциальной неустойчивости и гиперболических точек при гравитационном рассеянии [1], что является характерной особенностью квазибиллиардных систем. В результате цепочки GAM, найденные с помощью первичной пристрелки с

применением достаточно грубых аппроксимирующих методов типа каскадов задач Ламберта и склеенных конических сечений [7], могут «разойтись», не связаться при разработке полноценного БНО (Баллистико-навигационного обеспечения космического полёта). Необходим поиск гибких адаптивных сценариев в ТЭМ-постановке. Для этого востребовано не только само трудоёмкое использование моделирования в ТЭМ, но и поиск приемлемых гибких структур формирования и «перенаправления» мегавариантных цепочек-пучков. Иными словами – должна быть создана формализация не для перебора, а для осознанного поиска 3D-модификаций эффективных «пучковых лочий» космических миссий с использованием, в частности, современных модификаций диаграмм Тиссерана-Пуанкаре [8-14]. Основой для такой формализации, как будет показано, служат два базовых фактора конструирования орбит с высоким наклоном, помимо стандартных ограничений на расход ресурса и длительности космической миссии:

- геометрические ограничения на максимально возможное наклонение орбиты КА, которое реализуется в зависимости от величины его асимптотической скорости;

- динамические ограничения, накладываемые на максимальный угол разворота вектора асимптотической скорости КА на одном GAM, которые также зависят от величины асимптотической скорости.

Следует отметить, что указанные выше первичные оценки могут всё же оказаться весьма полезными в качестве начального приближения для дальнейшего поиска и моделирования GAM в ТЭМ. Этот оптимизм вызывает то обстоятельство, что согласно так называемой «лемме об отслеживании» Д.В. Аносова и Р. Боуэна (*Shadowing lemma*) [27-28] в малой окрестности гиперболического множества диффеоморфизма выполняется свойство отслеживания. Структурно устойчивые диффеоморфизмы также обладают свойством отслеживания [29], то есть результаты компьютерного моделирования отражают поведение траекторий исходной динамической

системы, и для любой псевдотраектории динамической системы можно найти близкую к ней реальную траекторию КА.

Предварительный баллистический анализ миссии «Интергелио-Зонд» был проведён коллективами сотрудников НПО им. С.А. Лавочкина и МАИ [22-23], где с использованием метода склеенных конических сечений были найдены и оценены первичные варианты проведения ГАМ.

### **Специфика проведения гравитационных манёвров**

В первом приближении в планетоцентрических координатах гелиоцентрическая траектория КА представима в виде пролетной гиперболы [12].

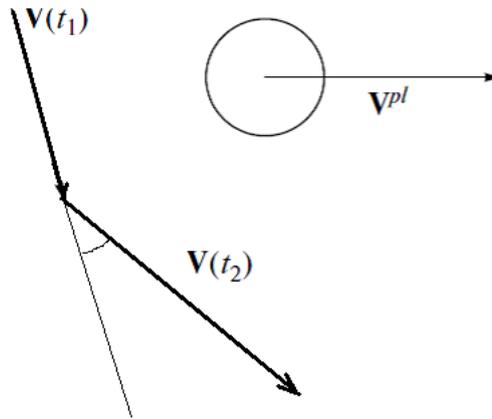
Как перелёты Земля-Венера, так и резонансные перелёты Венера-Венера можно проектировать с помощью следующего пошагового алгоритма.

1. Перед сближением со спутником-мишенью для осуществления текущего ГАМ задается следующий ГАМ исходя из выбора способа прохождения мишени.
2. В перигее, предшествующем текущему ГАМ, после выбора параметров последующего ГАМ первоначально по методу склеенных конических сечений [12] рассчитывается коррекция орбиты КА, обеспечивающая выполнение текущего ГАМ за счёт пролёта планеты-мишени на заданной высоте, вычисленной с помощью решения задачи Ламберта-Эйлера.
3. Проводится уточнение коррекции методом Ньютона согласно ТЭМ [24-25]. Далее соответствующее решение будем называть уточнённым решением задачи Ламберта-Эйлера.
4. Рассчитывается движение КА с учётом ТЭМ до перицентра, предшествующего следующему ГАМ.

Введём в рассмотрение термин траекторного пучка. Будем считать, что в первом приближении импульсное проведение произвольных малых коррекций орбиты перед ГАМ приводит к малому сдвигу вектора скорости КА, что

отвечает образованию «траекторной трубки», состоящей из большого числа первоначально компактного множества виртуальных задач Коши для траектории КА (иначе говоря – к «параксиальному пучку траекторий»). Это порождает при определённом выборе малых импульсов соответствующий набор возможных продольной и боковой высот пролёта картинной плоскости планеты-мишени. Модельная протяжка такого набора с использованием ТЭМ до выхода из сферы действия планеты-мишени приводит к формированию уже не параксиального, а «расходящегося» траекторного пучка. Для потребностей миссии класса «Интергелио-Зонд» с целью максимально точного моделирования может быть востребовано до десятков миллионов вариантов. В усиленном варианте моделирования отбрасывается условие изохронности начальных задач Коши и происходит их моделирование по всем сегментам орбитального витка КА.

Для описания конфигурации Солнце-Венера-КА будем применять терминологию [1,18-19] ограниченной задачи трёх тел: Солнце – основное (центральное, «первое») тело, планета – малое («второе») тело, КА – лёгкое, «третье» тело (тело ничтожно малой массы). Метод склеенных конических сечений представляет траектории КА в виде кусочно-Кеплеровых гелиоцентрических орбит с точками склейки (изломами) в местах проведения гравитационных манёвров около планеты (второго тела). Области проведения манёвров (с момента  $t_1$  входа в сферу действия второго тела до момента  $t_2$  выхода из нее) считаются ничтожными по сравнению с участками кеплерового гелиоцентрического движения и заменяются точками склейки (рис. 1). На рисунке  $\vec{V}(t_1)$  – вектор скорости КА относительно центрального тела до входа в сферу действия второго тела,  $\vec{V}(t_2)$  – соответствующий вектор скорости при выходе из сферы действия второго тела (после проведения гравитационного манёвра),  $\vec{V}^{pl}$  – скорость планеты-партнёра.



**Рис. 1.** Геометрия гравитационного манёвра.

Угол излома вектора  $\vec{V}(t)$  определяется исходя из угла раствора  $\delta$  “запакованной в точке склейки” пролетной гиперболы относительно второго тела — «планеты–партнера» по гравитационному манёвру. Модуль вектора асимптотической скорости КА относительно планеты-партнера  $v_\infty$  при этом не меняется, но поворачивается на некоторый угол  $\delta$ .

Изменение скорости КА относительно основного тела равно

$$\Delta\vec{V} = \vec{V}(t_2) - \vec{V}(t_1), \quad \Delta V = \|\Delta\vec{V}\| = 2v_\infty \sin \frac{\delta}{2} = \frac{2v_\infty \mu}{\mu + r_p v_\infty^2},$$

где  $\mu$  – гравитационная постоянная пролётного тела,  $r_p$  – расстояние до перицентра пролётной гиперболы КА, которое не может быть меньше радиуса планеты-партнёра  $R_{pl}$  [12].

Максимальная добавка к гиперболической скорости по модулю не может превышать первую космическую скорость для планеты-партнёра:

$$\Delta V_{\max} = \sqrt{\frac{\mu}{R_{pl}}}.$$

При переходе к модельным безразмерным величинам гравитационное маневрирование КА около любого небесного тела будет определяться модельным коэффициентом нормализованной скорости КА  $\frac{V}{V^{pl}}$ , где  $V^{pl}$  –

орбитальная скорость пролётного тела [17]. Следовательно, интенсивность любого гравитационного манёвра будет описываться безразмерным параметром

$$\chi = \frac{\Delta V_{\max}}{V^{pl}}.$$

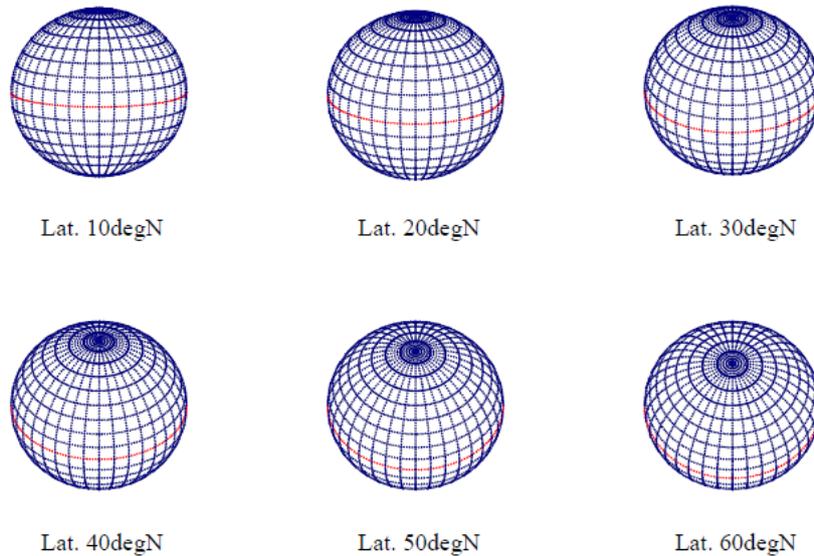
**Таблица 1.** Максимально возможные вариации скорости КА при пролёте крупных небесных тел Солнечной системы

Планета	Вариация скорости $\Delta V_{\max}$ , км/с	$\chi_{\text{mod}} = \frac{\Delta V_{\max}}{V^{pl}}$	Центральное тело
Меркурий	3.005	0.063	Солнце
Венера	7.326	0.209	Солнце
Земля	7.912	0.265	Солнце
Марс	3.557	0.147	Солнце
Церера	0.101	0.056	Солнце
Юпитер	42.57	3.257	Солнце
Сатурн	25.52	2.634	Солнце
Уран	15.12	2.22	Солнце
Нептун	16.67	3.07	Солнце
Плутон	0.85	0.18	Солнце
Хаумеа	1.16	0.26	Солнце
Макемаке	1.11	0.25	Солнце
Эрида	1.09	0.3	Солнце
Луна	1.680	1.6	Земля
Ио	1.809	0.1	Юпитер
Европа	1.433	0.1	Юпитер
Ганимед	1.949	0.17	Юпитер
Каллисто	1.725	0.21	Юпитер
Титан	1.867	0.3	Сатурн

### **Космические проекты класса «Интергелио-Зонд»**

Обратимся к проектам «Solar Orbiter» ESA и «Интергелио-Зонд». Их целью является, в частности, изучение приполярных областей Солнца. Наклонение солнечной оси вращения  $7.2^\circ$  к плоскости эклиптики даёт

первоначальный вклад для дальнейшего повышения орбиты КА над плоскостью солнечного экватора. Схематически вид Солнца с различных ракурсов наклона КА-исследователя представлен на рис. 2 согласно [21].



**Рис. 2.** Вид на Солнце с разных высоко наклонённых орбит (заимствован из [21]).

Из рис. 2 видно, что орбитальное наклонение порядка  $30^\circ$  уже «раскрывает» для обозрения приполярные области Солнца. Таким образом, именно эта величина при ограниченных возможностях современной космической техники является достаточной и востребованной для реализации. Проектируемые космические миссии, обеспечивающие такое значение наклона за 5-7 земных лет, будем в дальнейшем называть *миссиями класса «Интергелио-Зонд»*.

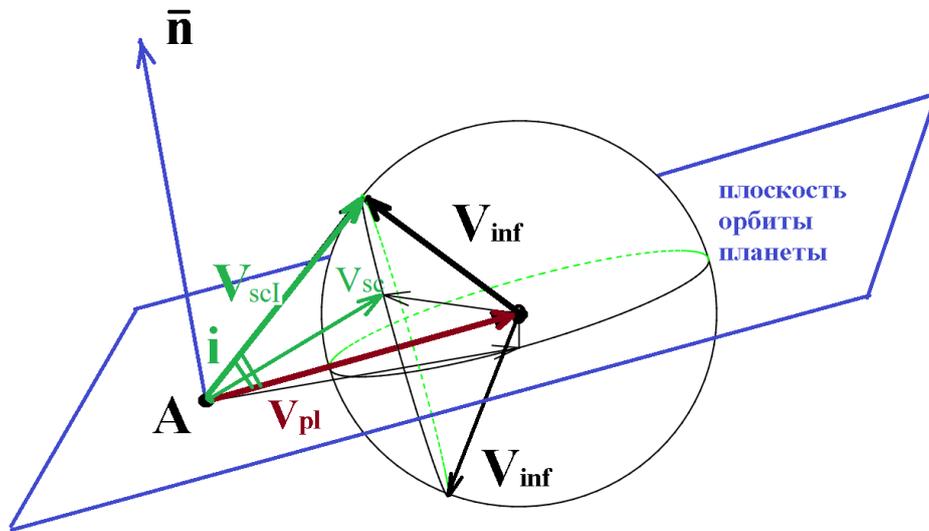
**Утверждение 1.** Пусть асимптотическая скорость КА  $V_{inf}$  не превосходит скорости планеты  $V_{pl}$ . Тогда синус максимального наклона орбиты КА, которое может обеспечить проведение CGA около конкретной планеты, не может превосходить величины их отношения

$$i_{\max} = \arcsin \frac{V_{\text{inf}}}{V_{pl}}. \quad (1)$$

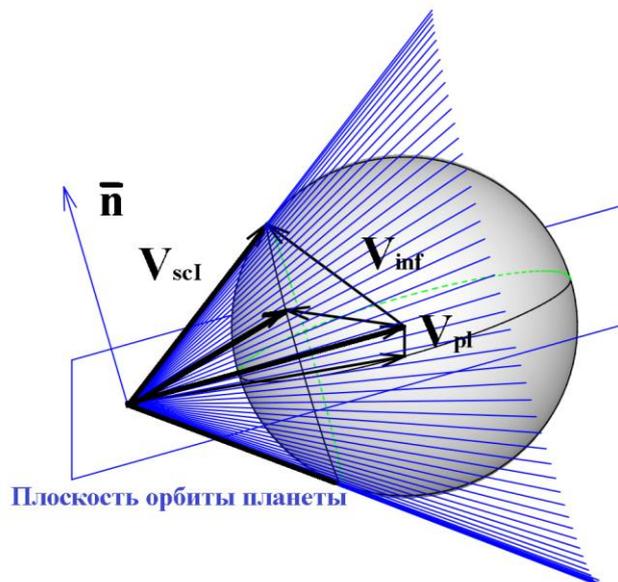
Данный факт известен (см., например, [7,20-21]), хотя в соответствующую формулу (3) в [21] вкралась опечатка: вместо функции  $\arcsin \frac{V_{\text{inf}}}{V_{pl}}$  стоит  $\arccos \frac{V_{\text{inf}}}{V_{pl}}$ . Доказательство утверждения непосредственно следует из геометрии проведения ГАМ согласно рис. 3. Из него видно, что максимальное наклонение орбиты КА достигается, когда  $V_{\text{inf}}$  перпендикулярен полученной скорости КА  $V_{sc}$  и одновременно принадлежит линейной оболочке вектора скорости планеты  $V_{pl}$  и нормали к плоскости её орбиты  $\bar{n}$  (иначе говоря –  $V_{sc}$  касается сферы всевозможных виртуальных скоростей  $V_{\text{inf}}$  (то есть – сферы радиуса  $V_{\text{inf}}$ ), построенной на конце вектора  $V_{pl}$ ). Доказательство можно провести, например, следующим способом.

*Необходимость.* Выпустим из точки А начала вектора скорости планеты  $V_{pl}$ , всевозможные векторы до указанной поверхности сферы радиуса  $V_{\text{inf}}$ . Их совокупность (а это – не что иное, как всевозможные векторы  $V_{sc}$  на выходе из ГАМ) замечает конус с углом раствора  $\varphi = \arcsin \frac{V_{\text{inf}}}{V_{pl}}$  («обернём» сферу конусом) (рис. 4). Никакая точка на сфере не преодолевает оболочку – поверхность конуса. Таким образом, ни один возможный ГАМ не может доставить  $i > \arcsin \frac{V_{\text{inf}}}{V_{pl}}$ .

*Достаточность.* Вектор  $V_{scI}$ , лежащий в плоскости векторов нормали к орбите планеты и  $V_{pl}$ , доставляет требуемое значение. Любой поворот  $V_{scI}$  вокруг оси  $V_{pl}$  понижает повернутый вектор к плоскости орбиты планеты и уменьшает реализуемое наклонение орбиты.



**Рис. 3.** Геометрия изменения наклона при гравитационном манёвре.



**Рис. 4.** Сфера  $V_{inf}$  в конусе виртуальных направлений  $V_{sc}$ .  
 $V_{scl}$  – такой  $V_{sc}$ -вектор, который лежит в плоскости, содержащей вектор скорости планеты и нормаль к плоскости её орбиты.

**Утверждение 2.** Любая планета геометрически может доставить требуемую величину наклона для миссий класса «Интергелио-Зонд»  $i_{\max} \geq 30^\circ$  с помощью CGA в случае

$$\frac{V_{\text{inf}}}{V_{\text{pl}}} \geq \frac{1}{2}. \quad (2)$$

Доказательство непосредственно следует из формулы (1).

Космический проект ESA-NASA «Ulysses» («Улисс»), например, использовал гравитационное поле Юпитера для увеличения наклона орбиты КА над плоскостью эклиптики. В 1992 году «Улисс» прошёл на высоте шести радиусов над Юпитером и, совершив пертурбационный манёвр для выхода из плоскости эклиптики, направился к областям межпланетной плазмы полярных областей Солнца (первоначально со стороны южного полюса).

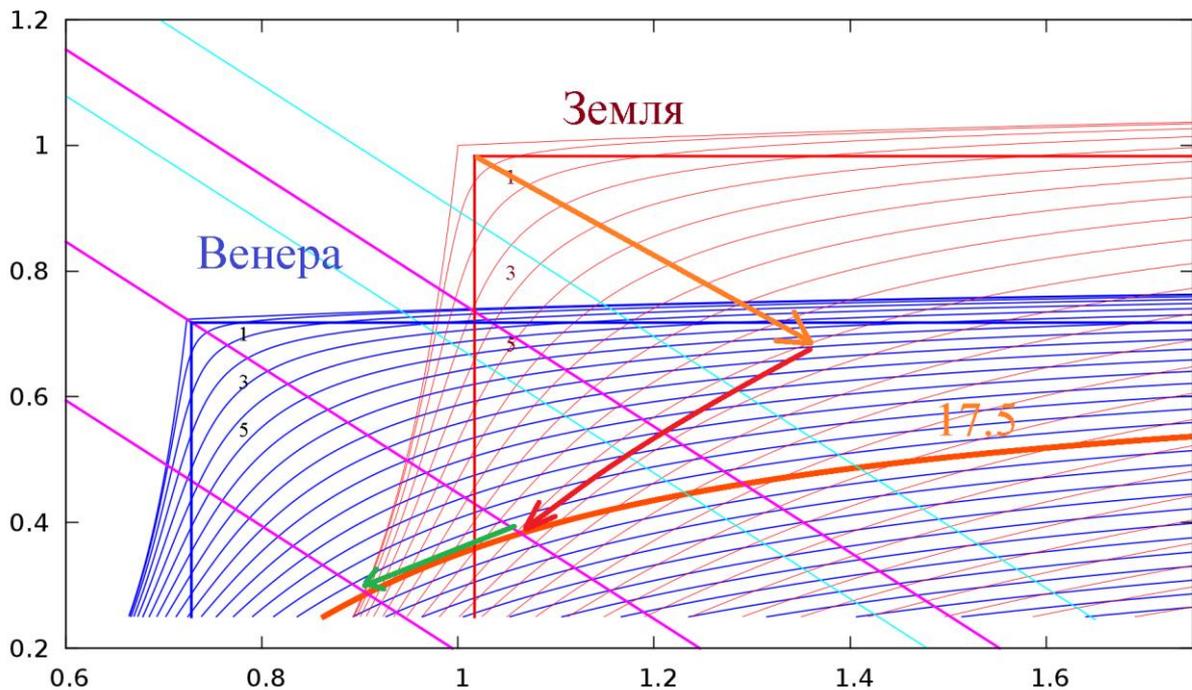
Таким образом, для использования с целью повышения наклона орбиты КА планеты **Венера** (орбитальная скорость Венеры  $V_{\text{plVen}} = 35 \text{ км/с}$ ), предварительно космическому аппарату должна быть обеспечена  $V_{\text{inf}} \geq 17.5 \text{ км/с}$ .

«Доставка» КА к планете Венера и поставка ему асимптотической скорости относительно Венеры  $V_{\text{inf}} \geq 17.5 \text{ км/с}$  является отдельной проблемой, поскольку согласно техническим возможностям разгонного блока (РБ) «Фрегат» и «Бриз» манёвр разгона с помощью РБ – ( $U_s$  – Upper stage) не может обеспечить избыток гиперболической скорости КА при отлете от Земли более 3.5 км/с. Очевидно, требуется дополнительный разгон КА с помощью малой тяги ( $L_t$  – Low thrust) и подсобных *разгонных* гравитационных манёвров PGA (Pumping Gravity Assist) около небесного тела, отличного от планеты Венера (например – планета Земля), с целью доставки КА к планете Венера, дальнейшего проведения около неё каскада эффективных CGA на высокой асимптотической скорости относительно Венеры и выхода на требуемую рабочую орбиту.

**Утверждение 3.** Проведение разгонных ГАМ (PGA) необходимо совершать около планет, отличных от Венеры.

Верность утверждения вытекает из существования интеграла Якоби и параметра Тиссерана [17-19,9] в модели ограниченной задачи трёх тел, описывающей в первом приближении систему «Солнце-Венера-КА». Из их существования немедленно следует невозможность изменить асимптотическую скорость КА относительно планеты-партнера по гравитационному маневрированию (Венеры) [8-9]. Однако временная «смена партнера» по ГАМ позволяет сместить значение  $V_{inf}$  в требуемую сторону [9-12].

Данное обстоятельство удобно проиллюстрировать с помощью так называемого плоского мультипланетного графа (диаграммы) Тиссерана-Пуанкаре (ГТП) [3-5,9]. На нем на плоскости  $(R_\alpha, R_\pi)$  (высота апогея орбиты КА – высота перигея орбиты КА в астрономических единицах *a.e.*) нанесены изолинии параметров Тиссерана орбиты КА относительно Венеры (голубые) и Земли (красные) в квазикомпланарном случае. Точка, отвечающая фазовому состоянию КА, не сходит с изолинии при проведении ГАМ около соответствующей планеты (рис. 5). Задействованы манёвр разгона с помощью РБ ( $U_s$ ) и малой тяги ( $L_t$ ) (схематично показаны оранжевым вектором), гравитационный манёвр около планеты Земля ( $E_1$  – бордовый вектор), первый резонансный ГАМ V1 около Венеры (зеленый вектор). Диаграмма иллюстрирует, что по «изоинфинам» Земли можно «подобраться» к высокой асимптотической скорости КА относительно Венеры. Жирной оранжевой изоинфиной показана асимптотическая скорость относительно планеты Венера, равная  $\frac{V_{plV}}{2} = 17.5 \text{ км/с}$ . Розовые прямые отвечают изолиниям резонансных периодов обращения КА, соотносящихся с периодом обращения Венеры как (3:4), (1:1), (4:3).



**Рис. 5.** Плоская мультипликативная диаграмма ТП.

В результате определяется общий сценарий миссии класса «Интергелио-Зонд» (и «Solar Orbiter»), который должен содержать два этапа:

1. разгон КА до требуемой величины  $V_{\text{inf}} \geq 17.5 \text{ км/с}$  относительно Венеры с помощью серии вспомогательных разгонных ГАМ РГА **не около Венеры** (и, возможно, – с применением  $L_t$ , малой тяги) с целью выхода на рабочую орбиту;
2. проведение эффективных **СГА около Венеры** с целью повышения наклонения («качества») рабочих орбит.

Для полноценных точных исследований необходимо использование полной модели эфемерид планет и спутников Солнечной системы, и для этого может быть востребовано применение пучков, состоящих из десятков миллионов виртуальных траекторий [10-11,14]. Поэтому важна формализация

представленного многошагового алгоритма поиска. Поиск цепочек – баллистических сценариев миссий класса «Интергелио-Зонд», можно производить с использованием следующей наиболее короткой конъюнкционной формулы:

$$S: S_1 \cup S_2 \equiv S_1 \{Lt, \bar{V}, \dots, \bar{V}\} \cup S_2 \{V, \dots, V\} = \{Lt, \bar{V}, \dots, \bar{V}, V, \dots, V\}. \quad (3)$$

Здесь:

$Lt$  – участок (участки) межпланетной траектории КА с малой тягой;

$\bar{V}, \dots, \bar{V}$  – разгонные PGA не с Венерой;

$V, \dots, V$  – каскад CGA с Венерой.

Отметим, что последовательность «НЕ\_Венера»  $\bar{V}, \dots, \bar{V}$  может содержать и  $V$ -вставки и не обязана быть «резонансной», то есть может содержать «косые» манёвры  $\bar{V}, V, \bar{V}$  [10], но каскад рабочих орбит второго этапа  $V, \dots, V$  **обязан** быть резонансным для всех GAM с целью обеспечения новых встреч с Венерой (за исключением, естественно, завершающего GAM).

### Методика построения баллистических сценариев в 3D-случае

Как было показано выше, баллистическое конструирование первичного сегмента цепочки  $S_1: \{Lt, \bar{V}, \dots, \bar{V}\}$  из PGA-манёвров целесообразно проводить с использованием плоской диаграммы Тиссерана-Пуанкаре, поскольку задача вначале остается квазикомпланарной [8-14]. Однако баллистическое конструирование заключительного сегмента цепочки  $S_2: \{V, \dots, V\}$  требует уже использования специальных 3D-конструкций. Далее фазовое состояние КА «поднимается» над базовой плоскостью ГТП  $i=0^\circ$ . Однако оказывается возможным продолжать рассматривать проекции «поднявшихся» треков фазового состояния КА на базовую плоскость ГТП.

Остановимся на этом поподробнее. В 3D-постановке постоянные уровня интеграла Якоби (как и параметра Тиссерана) будут уже не линиями на

плоскости  $(R_\alpha, R_\pi)$  (апоцентр орбиты-перицентр орбиты КА в а.е.), а поверхностями в  $\mathfrak{R}_3$  (3D-пространстве) (рис. 7). В 3D в рамках модели ограниченной задачи трёх тел (Солнце-Венера-КА) существованию интеграла Якоби по-прежнему соответствует инвариант – параметр Тиссерана  $T_i$ , не изменяющийся как на гелиоцентрических дугах, так и при проведении гравитационных манёвров около Венеры. Он линейно зависит от квадрата асимптотической скорости КА относительно Венеры  $V_\infty$ . В безразмерном виде, нормализованном по величине средней орбитальной скорости Венеры  $V_{pl} = 35.02$  км/с,  $v_\infty = V_\infty / V_{pl}$ , его можно записать как

$$T_i = 3(1 - \mu) - v_\infty^2 \approx 3 - v_\infty^2.$$

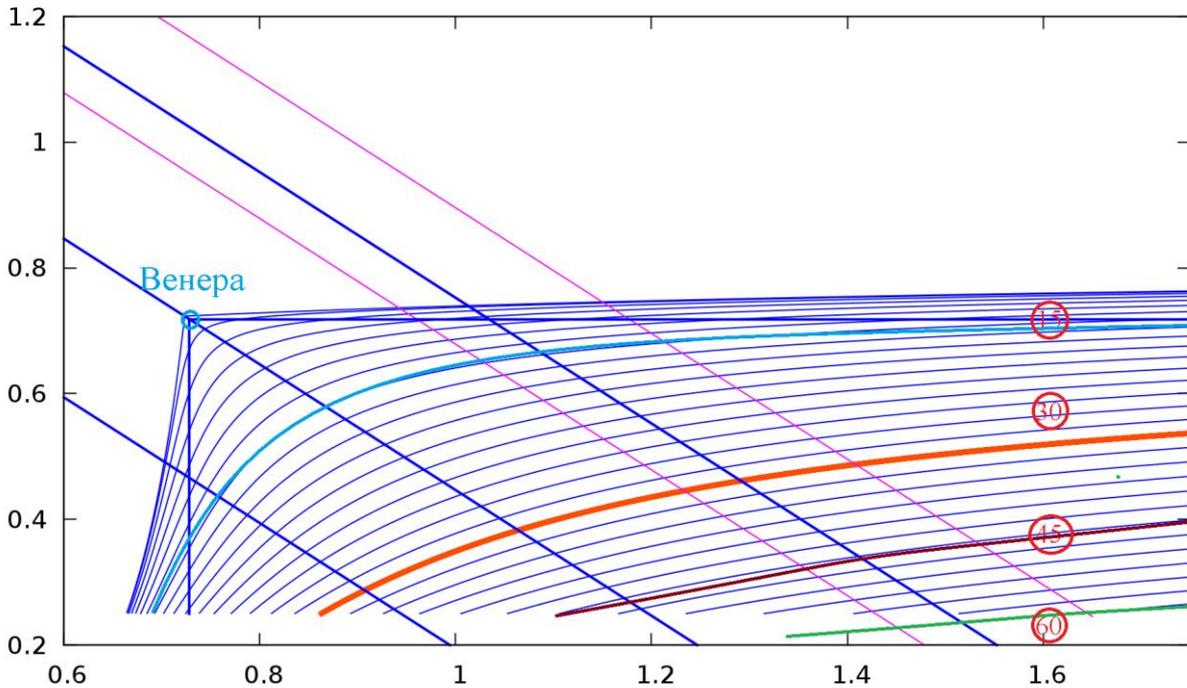
Напомним, что для выполнения требований миссии класса «Интергелио-Зонд» и обеспечения величины наклона  $30^\circ$  требуется формирование на орбите подлёта КА к Венере асимптотической скорости 17.5 км/с, что соответствует модельному значению интеграла Якоби ограниченной задачи трёх тел и соответствующему параметру Тиссерана  $T_i$  [8-10]

$$J_1 = T_i = 3 - v_\infty^2 = 2.75.$$

Запишем формулу (1) в виде

$$i_{\max} = \arcsin v_\infty.$$

Из неё, в частности, следует важный вывод, что на плоскости-основании 3D-диаграммы ТП (секция  $i=0$ ) в тиссерановых аргументах  $R_\alpha, R_\pi$  можно изображать изолинии максимально возможных наклонов [20] (они повторяют на ГТП некоторые изолинии асимптотической скорости для плоской задачи (рис. 5). На рис. 6 по осям отложены высоты перицентра и апоцентра орбиты КА в астрономических единицах. Прямые – резонансные соотношения периодов обращения КА и Венеры. В кружках – предельные геометрически допустимые наклоны в градусах.



**Рис. 6.** На плоской диаграмме ГТП в случае Венеры представлены изолинии максимально геометрически реализуемых с помощью ГАМ наклонов орбиты КА (в кружках – предельные геометрически допустимые наклонения в градусах).

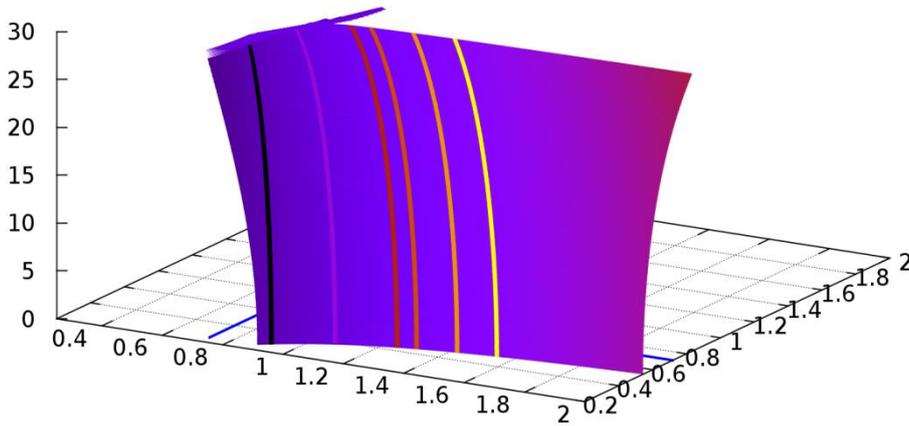
Множество  $i(R_a, R_p, T_i)$  является поверхностью на 3D-графе Тиссерана при фиксированном значении интеграла Якоби и параметра Тиссерана (рис. 7). На рисунке на плоскости основания отложены расстояния перицентра и апоцентра орбиты КА в астрономических единицах, по вертикали – наклонение в градусах. На поверхность нанесены резонансы 3:4, 1:1, 5:4, 4:3, 3:2, 5:3 (слева направо).

Выпишем уравнения тиссерановой поверхности для Венеры, т.е. зависимость наклона орбиты КА от  $a, e$  – нормированной по Венерианскому значению большой полуоси орбиты КА и её эксцентриситета с учётом соотношения Тиссерана [8,10]

$$i = \arccos\left[\left(T_i - \frac{1}{a}\right) / \sqrt{4a(1-e^2)}\right]$$

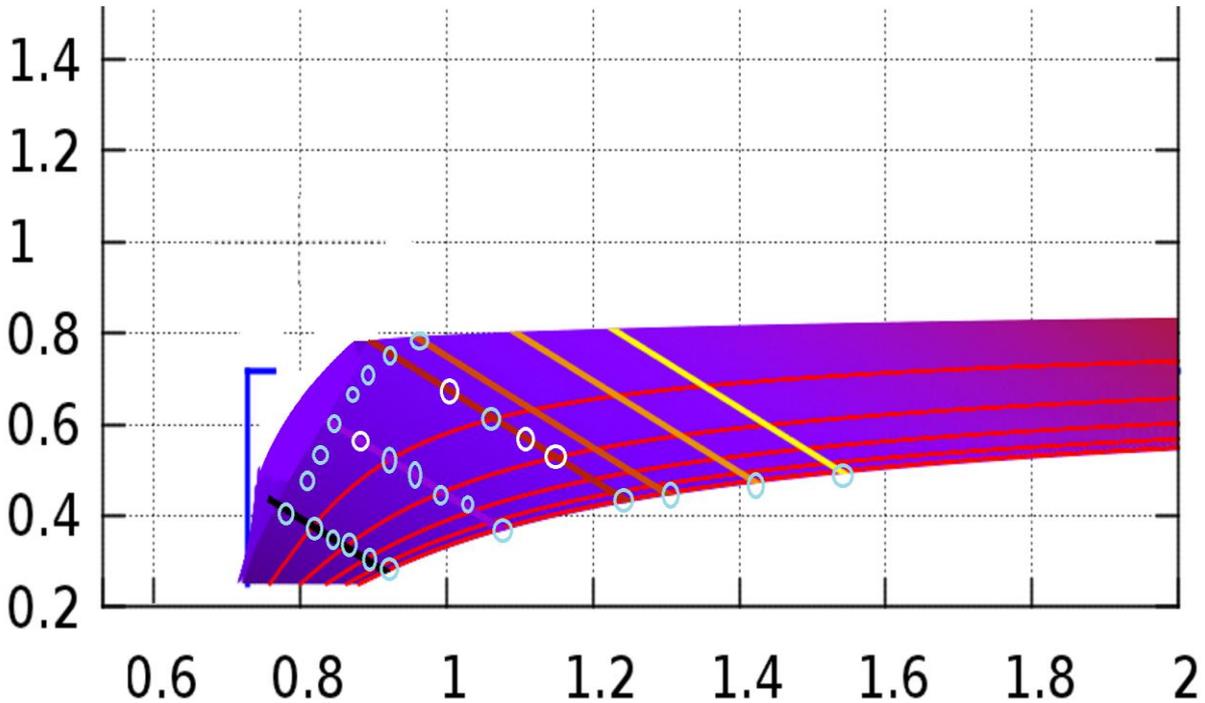
или, в нашем случае,

$$i = \arccos\left[\left(2.75 - \frac{1}{a}\right) / \sqrt{4a(1-e^2)}\right].$$



**Рис. 7.** Множество  $i(R_a, R_p, T_i)$  является инвариантной поверхностью на 3D-диаграмме Тиссерана-Пуанкаре при фиксированном значении интеграла Якоби и параметра Тиссерана  $T_i = 2.75$  для случая величины асимптотической скорости 17.5 км/с.

*Замечание.* Для проектирования миссии ESA “Solar Orbiter” вводятся так называемые V-infinity Maps (см. Приложение). В настоящей работе будет задействован несколько иной подход. Оказалось эффективным использование проекции поверхности интеграла Тиссерана на координатную плоскость диаграммы Тиссерана  $(R_\alpha, R_\pi)$  (рис. 8), на которую нанесены линии уровня (прямые) резонансов 3:4, 1:1, 5:4, 4:3, 3:2, 5:3 (слева направо). Розовые линии – изолинии наклонений с шагом  $5^\circ$ .



**Рис. 8.** Проекция поверхности уровня параметра Тиссерана на координатную плоскость диаграммы Тиссерана-Пуанкаре  $(R_\alpha, R_\pi)$ . Нанесены линии уровня первичных резонансов (прямые) и изолинии наклонений.

### Ресурсы для изменения орбитального наклонения в Солнечной системе

Отметим, что геометрическая допустимость формирования значительных наклонений (1) ещё не гарантирует их реализуемости, поскольку угол  $\delta$  (ресурс) поворота вектора скорости КА на одном ГАМ является ограниченным:

$$\sin \frac{\delta}{2} = \frac{1}{1 + V_{\text{inf}}^2 R_{\text{min}} / \mu_p}, \quad (4)$$

или, переходя к первой космической скорости  $V_{UpPl} = \sqrt{\mu / R_{pl}}$  в гравитационном поле планеты и вводя параметр  $\Theta_{pl} = V_{pl} / V_{UpPl}$  искривления траектории КА гравитационным полем планеты:

$$\sin \frac{\delta}{2} \approx \frac{1}{1 + (V_{\text{inf}} / V_{UpPl})^2} = \frac{1}{1 + (V_{\text{inf}} / V_{pl})^2 (V_{pl} / V_{UpPl})^2} \equiv \frac{1}{1 + (V_{\text{inf}} / V_{pl})^2 \Theta_{pl}^2}.$$

В частном случае миссии класса Интергелио-Зонд ( $V_{inf} / V_{pl} = 0.5$ )

$$\sin \frac{\delta}{2} = \frac{1}{1 + 0.25 \Theta_{pl}^2}. \quad (5)$$

Таким образом, увеличение асимптотической скорости КА, с одной стороны, повышает *геометрически возможное* максимальное наклонение, но, с другой – приводит к уменьшению «ресурса» – угла поворота вектора скорости на одном CGA. В результате выбор «рабочего» значения  $V_{inf}$  представляет собой отдельную проблему (см., например, [7]). В **таблице 2** представлены ресурсы углов поворота на одном CGA для планет Солнечной системы для космических миссий класса «Интергелио-Зонд».

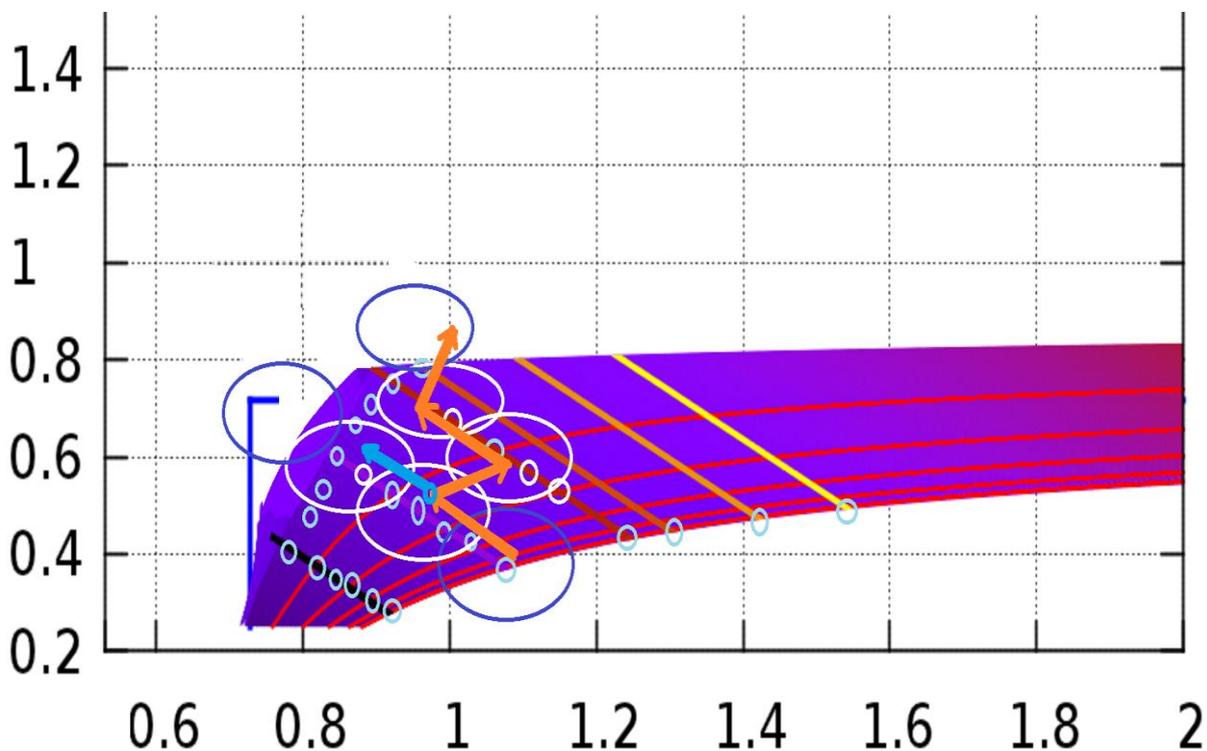
**Таблица 2.** Максимально возможные вариации наклонения орбиты КА при однократном пролёте крупных небесных тел Солнечной системы

для  $\frac{V_{inf}}{V_{pl}} = \frac{1}{2}$

Планета	Первая космическая скорость	Вариация наклонения $\delta$ , град.
Меркурий	3.1	3.49
Венера	7.23	16.75
Земля	7.92	19.58
Марс	3.54	4.47
Юпитер	41.13	115.47
Сатурн	25.46	85.53
Уран	15.56	52.40
Нептун	16.97	58.16
Плутон	1.2	0.54

### «Пояс Венеры»

Движение на втором этапе по диаграмме Тиссерана-Пуанкаре с учетом ограничения поворота скорости на одном СГА должно состоять из «перескоков» с одной области с центром - точкой на некоторой резонансной линии тиссерановой поверхности на другую область с центром, покрываемую первой областью (не обязательно той же резонансной линии) (рис. 9). При достаточно большом ограничении на время существования миссии резонансные кривые будут достаточно плотно покрывать тиссеранову поверхность и такая ломаная-«цепочка» должна существовать.



**Рис. 9.** Проекция Тиссерановой поверхности на базовую диаграмму Тиссерана-Пуанкаре. Движение на втором этапе показано цепочкой оранжевых векторов. Области, схематически показанные кружками, соответствуют всем возможным положениям фазового состояния КА после СГА с учетом *половины* ограничения поворота скорости. Цепочка состоит из «перескоков» с одной области с центром – точкой на некоторой резонансной линии Тиссерановой поверхности на пересекающуюся с ней область с центром на некоторой резонансной кривой.

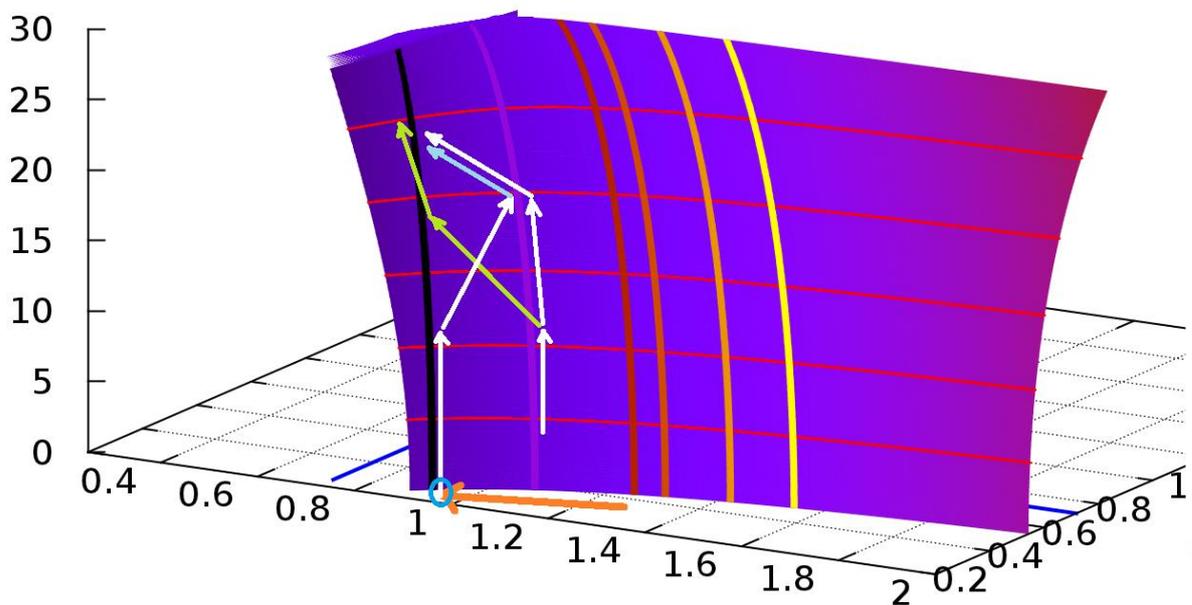
Представим следующую теорему о «поясе Венеры».

**Теорема.** Существует ограниченное значение длительности космической миссии  $T_{int}$ , ниже которого всегда найдутся «цепочки»-последовательности ограниченного числа пересекающихся областей элементарных СГА около планеты («Венеры»), приводящих к любым геометрически допустимым наклонениям (иными словами – «пояс Венеры» есть связное конечное подпокрытие тиссерановой поверхности).

*Доказательство.* Заметим, что выбором соответствующих резонансов более высокого порядка мы всегда можем добиться достаточно плотного покрытия ГТП областями. Придадим каждой точке резонансной кривой, отвечающей рациональному числу типа  $p/q$  (число оборотов КА  $p$ , отнесённое к числу оборотов планеты  $q$ ), область размером, отвечающим половине ресурса – угла поворота по формуле (4). Они образуют *вспомогательное* покрытие тиссерановой поверхности. Тиссеранова поверхность – компакт, и, по лемме Бореля-Лебега, из любого покрытия можно выделить конечное подпокрытие с числом элементов  $N_V$ . Области соответствующего *основного* конечного подпокрытия, состоящего из областей с удвоенным размером, отвечающим полной величине ресурса, будут попеременно содержать пары точек-центров вспомогательного подпокрытия. Вычислим для вспомогательного конечного подпокрытия  $\max(q) = Q_V$  по всем его областям. Тогда общая длительность прохождения любой цепочки «вверх по наклонению» не превосходит числа  $T_{int} = N_V Q_V T_V$ , где  $T_V$  – период обращения планеты («Венеры»)■

Отметим, что космические миссии класса «Интергелио-Зонд» более жестко ограничены по времени и требуют связности «пояса» из областей СГА на Тиссерановой поверхности Венеры, состоящего только из основных резонансов с  $T_V q$ , не превосходящим 5-7 лет. В результате из набора основных резонансов для дальнейшего рассмотрения остаются цепочки, состоящие из

двухкомпонентных комбинаций элементов  $\{1:1\}$  и  $\{4:3\}$ , но способные завершаться произвольным третьим элементом  $\{\bar{R}\}$  (нерезонансным гравитационным манёвром), который, вообще говоря, при отсутствии ограничений на период может обеспечить большую величину финального наклона рабочей орбиты (рис. 10). На плоскости основания отложены расстояния перицентра и апоцентра орбиты КА в астрономических единицах, по вертикали – наклонение в градусах. На поверхность нанесены резонансы (справа налево) 5:3, 3:2, 4:3, 5:4, 1:1, 3:4 и линии уровня наклона с шагом  $5^\circ$ .



**Рис. 10.** Проектирование схем проведения гравитационных манёвров в Солнечной системе с помощью 3D диаграмм Тиссерена-Пуанкаре, обеспечивающих формирование орбиты КА с большим наклоном для случая величины асимптотической скорости 17.5 км/с.

В дальнейшем осуществляется поиск согласно выявленной формализованной структуре (3) на множестве траекторных пучков, построенных с учетом полной эфемеридной модели ТЭМ [24-25]. При

определённом выборе малых импульсов соответствующий набор возможных продольной и боковой высот пролёта планеты-мишени. Модельная протяжка такого набора с использованием ТЭМ до выхода из сферы действия планеты-мишени приводит к формированию траекторного пучка. Отбираются только те траектории, которые в ТЭМ вторично «отражаются» на какую-либо резонансную линию ГТП (рис. 10). Для потребностей миссии класса «Интергелио-Зонд» может быть востребовано до десятков миллионов вариантов.

### **Формирование рабочей орбиты КА миссии «Интергелио-Зонд» на втором этапе при проведении серии CGA у Венеры**

Остановимся подробнее на способах селекции «рабочих» резонансов на примере предварительной проработки миссии «Интергелио-Зонд» [22-23].

Для всех вариантов значений отлётного гиперболического избытка скорости КА дата старта, дата GAM у Земли и дата первого подлёта к Венере в рамках представленной работы совпадают:

- дата старта от Земли 18 апреля 2022 года (юлианская дата 2459687.662304);
- время гелиоцентрического перелёта Земля – Земля 428.837696 суток;
- дата осуществления гравитационного манёвра у Земли 21 июля 2023 года (юлианская дата 2460116.5);
- время гелиоцентрического перелёта Земля – Венера 49.105264 суток;
- дата подлёта к Венере для осуществления первого гравитационного манёвра у неё 9 августа 2023 года (юлианская дата 2460165.605264).

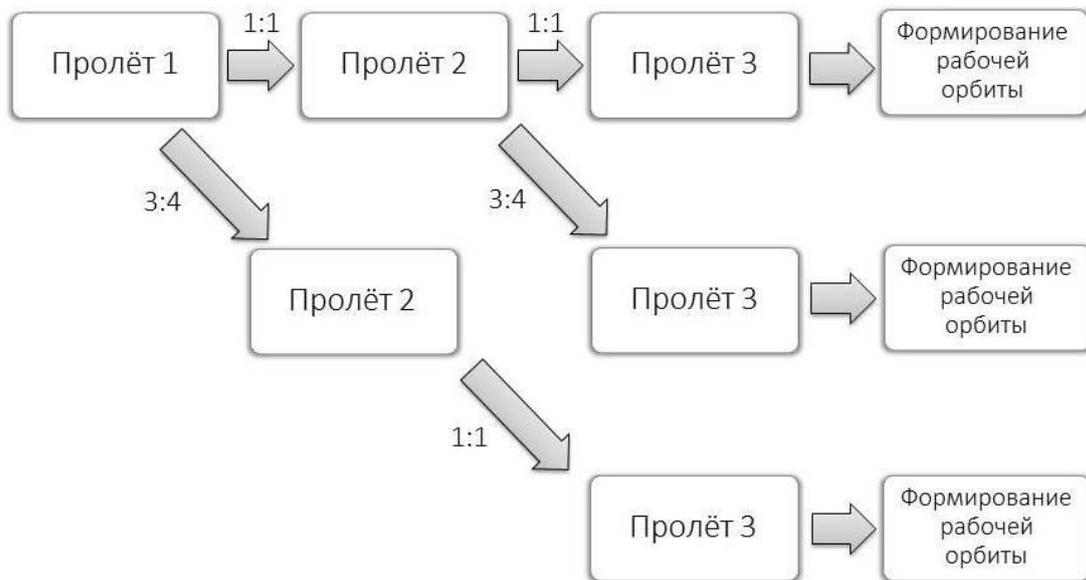
Условия первого подлёта КА к сфере действия Венеры для проведения гравитационного манёвра так же полагаются фиксированными и определяются следующими значениями:

- дата первого гравитационного манёвра у Венеры 9 августа 2023 года (юлианская дата 2460165.605264);
- вектор гелиоцентрической скорости КА при первом подлёте к Венере [10053.461; 32476.140; -679.914] м/с;
- вектор гиперболического избытка скорости при подлёте к Венере для первого гравитационного манёвра [-15228.197; 8610.943; 451.198] м/с.

При этом осуществляется переход на так называемые рабочие орбиты. Высота пролёта над поверхностью Венеры фиксируется и полагается равной 400 км. Таким образом, угол раствора пролётной гиперболы фиксирован и составляет для Венеры величину 16.234 град. Попадание на резонанс обеспечивается вторым 3D-параметром пролётной гиперболы (углом ее наклона к плоскости экватора планеты), причём выбирается его максимально возможное значение, обеспечивающее такой резонанс. Для обеспечения этого условия непосредственно перед предстоящим совершением запланированного гравитационного манёвра достаточно проводить манёвр попадания в необходимую точку сферы действия планеты-мишени (Венеры). Двумерная параметризация взаимного расположения планеты и пролётной гиперболы КА позволяет проектировать как разгонно-редукционные по скорости GAM PGA, так и манёвры по изменению наклона орбиты КА CGA.

Ещё раз отметим, что для построения каскадов CGA с целью повышения наклона орбиты КА, можно рассматривать использование на первом манёвре около Венеры основных резонансов типа 8:3, 5:2, 7:3, 2:1, 7:4, 5:3, 3:2, 4:3, 5:4, 1:1 (в обратном формате [22-23] отношения количества витков, т.е. угловых скоростей КА и планеты). Однако сопоставление этого набора с  $V_{\infty}$ -картой (см. Приложение), а также с «контуром перигелиев» (см., например, [23]) показывает, что для требований миссии «Интергелио-Зонд» динамически реализуемы только периоды КА в диапазоне 149.0-322.6 дней и, соответственно, резонансы типа 3:2, 4:3, 5:4, 1:1. При этом первый и третий

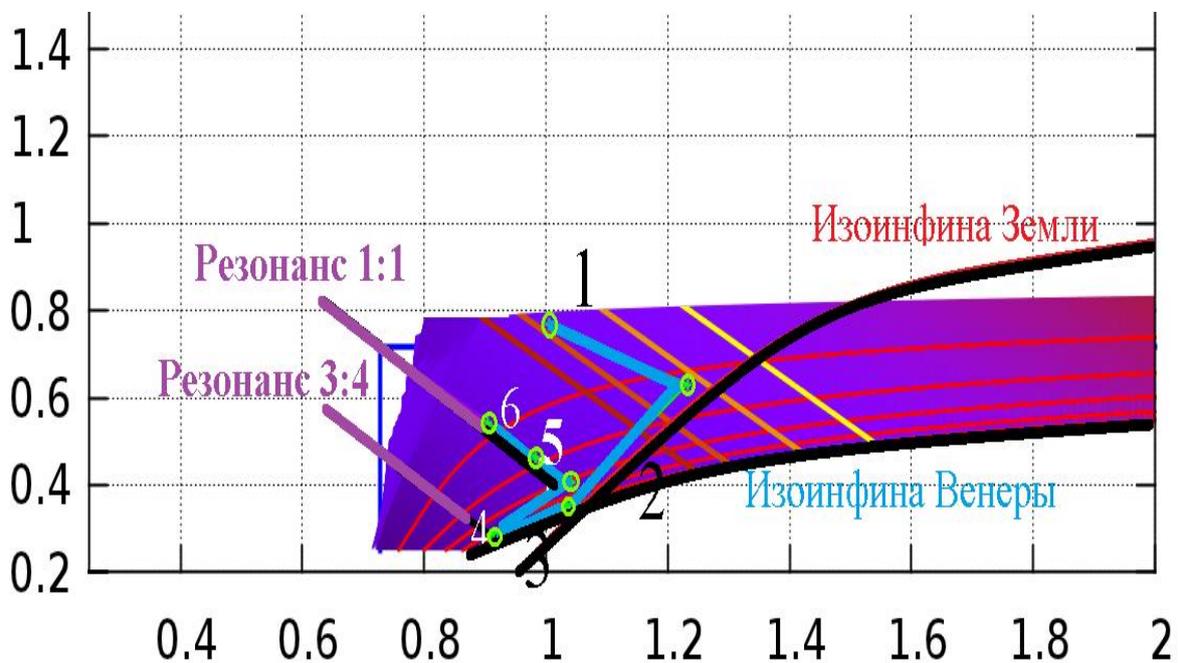
варианты являются затратными по времени. Рассмотрим схему формирования рабочей орбиты КА «Интергелио-Зонд» с использованием оставшихся соизмеримостей: трёх гравитационных манёвров у Венеры, первые два из которых имеют резонансы 1:1 и 3:4 в формате отношения периодов КА и Венеры (рис. 11). Цифрами указан порядок резонанса в *прямом формате* – отношение периода гелиоцентрической орбиты КА на данном этапе полета к периоду гелиоцентрической орбиты Венеры.



**Рис. 11.** Возможные сценарии гравитационных манёвров КА «Интергелио-Зонд» при пролётах Венеры.

Разберём типовой предварительный вариант миссии «Интергелио-Зонд» из [22] с точки зрения построенной выше структуры проектирования баллистических сценариев GAM. Спроецируем параметры полученной в [22] орбиты КА «Интергелио-Зонд» на базовую плоскость графа Тиссерана-Пуанкаре с изолиниями резонансных периодов и наклонений (рис. 12). Нанесём линии уровня (прямые) соизмеримостей орбитальных периодов КА и Венеры 3:4, 1:1, 5:4, 4:3, 3:2, 5:3 (слева направо). Розовые линии суть изолинии

наклонений с шагом  $5^\circ$ . Из рисунка видно, что отчетливо выделяются наиболее характерные структурные этапы: (пронумерованы черными и белыми цифрами): 1-разгон; 2-PGA около Земли; 3-PGA около Венеры с целью выхода на резонанс (3:4); 4-PGA около Венеры с целью выхода на резонанс (1:1); 5,6-СГА около Венеры вдоль резонанса (1:1) с целью повышения наклона. Видим хорошее совпадение результатов разработанной методики с результатами других подходов.



**Рис. 12.** Трек предварительной рабочей траектории «Интергелио-Зонд» [22] в проекции на базовую координатную плоскость диаграммы Тиссерана ( $R_\alpha, R_\pi$ ) показан голубой ломаной. Наиболее характерные структурные этапы пронумерованы черными и белыми цифрами: 1-разгон; 2-PGA около Земли; 3-PGA около Венеры с целью выхода на резонанс (3:4); 4-PGA около Венеры с целью выхода на резонанс (1:1); 5,6-СГА около Венеры вдоль резонанса (1:1) с целью повышения наклона.

## Заключение

Представлена методика баллистического проектирования сценариев выхода КА на орбиты, высоко наклонённые к плоскости эклиптики и солнечному экватору с применением серии полиобъектных гравитационных манёвров и модели движения КА, которая использует реальные эфемериды Земли, Венеры и других естественных тел Солнечной системы. Даются приложения построенной методики к проектированию космических миссий класса «Интергелио-Зонд».

\* \* \*

## Библиографический список

1. Белбруно Э. Динамика захвата и хаотические движения в небесной механике с приложениями к конструированию малоэнергетических перелётов. Ижевский институт компьютерных исследований, 2011. 264 с.
2. Minovitch M.A. The Determination and Characteristics of Ballistic Interplanetary Trajectories under the Influence of Multiple Planetary Attractions // Jet Propulsion Lab., Pasadena, Calif., Tech. Rept. 32-464. Oct. 31, 1963.
3. Labunsky A.V., Papkov O.V., Sukhanov K.G. Multiple Gravity Assist Interplanetary Trajectories // Earth Space Institute Book Series. L.: Gordon and Breach Publishers, 1998. P. 33–68.
4. Strange N.J., Longuski J.M. Graphical Method for Gravity-Assist Trajectory Design // J. Spacecraft and Rockets. 2002. V. 39. № 1. P. 9–16, doi: 10.2514/2.3800.
5. Strange N.J., Russell R., Buffington B., Mapping the  $V_{\infty}$  Globe // AIAA/AAS Space Flight Mechanics Meeting, AAS Paper 07-277, 2007.
6. José Manuel Sánchez Pérez. Trajectory design of solar orbiter. 23d ISSFD, Pasadena, California, October 29 - November 2, 2012. Paper IMD1\_3
7. Barrabéz E., Gómez G., Rodríguez-Canabal J. Notes for the Gravitational Assisted Trajectories // Advanced Topics in Astrodynamics. Summer course. Barcelona, July 2004. URL: <http://www.ieec.fcr.es/astro04/notes/gravity.pdf>.
8. Campagnola S., Russell R.P. Endgame Problem. Part 1: V-Infinity Leveraging Technique and Leveraging Graph // J. Guidance, Control, and Dynamics. 2010. V. 33. № 2. 2010. P. 463–475, doi: 10.2514/1.44258.

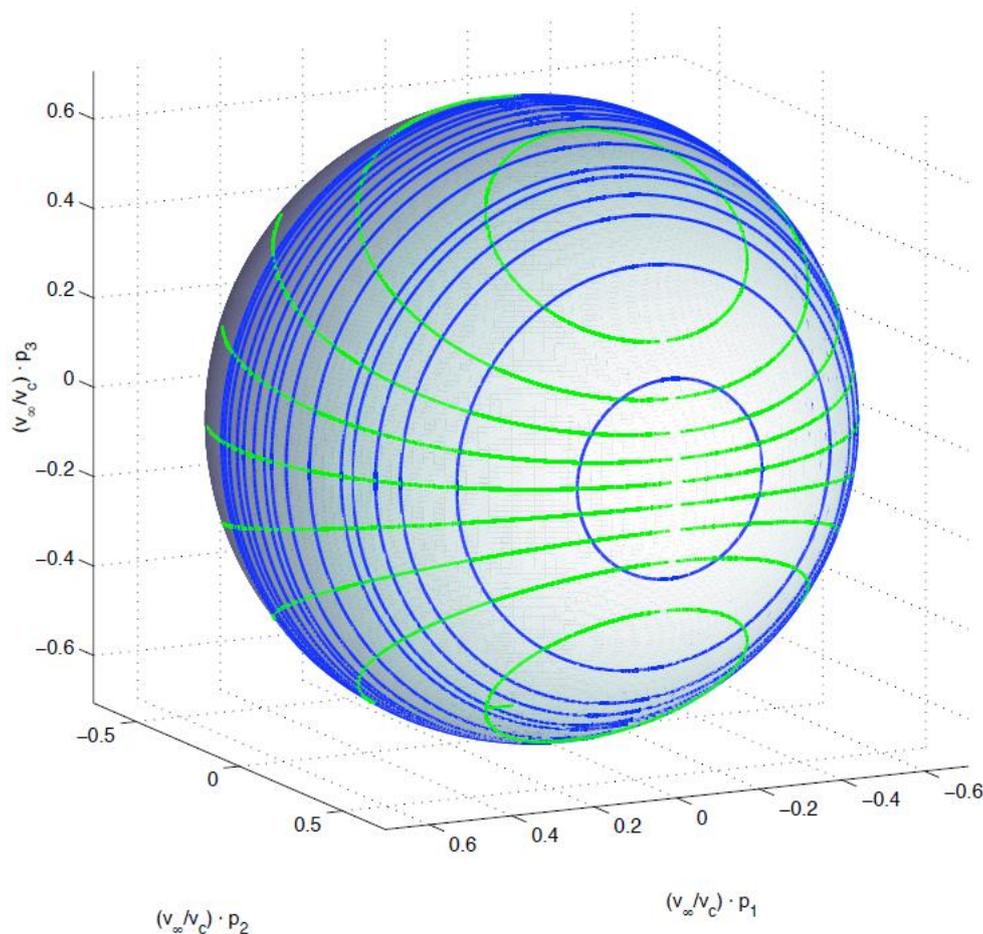
9. Campagnola S., Russell R.P. Endgame Problem. Part 2: Multi-Body Technique and TP Graph // *J. Guidance, Control, and Dynamics*. 2010. V. 33. № 2. Pp. 476–486, doi: 10.2514/1.44290.
10. Голубев Ю.Ф., Грушевский А.В., Корянов В.В., Тучин А.Г. Гравитационные маневры космического аппарата в системе Юпитера. *Изв. РАН. ТИСУ*. 2014. № 3. С. 149-167; Golubev Yu.F., Grushevskii A.V., Koryanov V.V., Tuchin A.G. Gravity Assist Maneuvers of a Spacecraft in Jupiter System // *Journal of Computer and Systems Sciences International, Pleiades Publishing, Ltd.* 2014. V. 53. № 3. P. 445–463. doi: 10.1134/S1064230714030083
11. Голубев Ю.Ф., Грушевский А.В., Корянов В.В., Тучин А.Г. Синтез сценариев космических миссий в системе Юпитера с использованием гравитационных маневров. *Доклады Академии Наук*. 2014. Т. 456. № 1. С. 39–41; Golubev Yu.F., Grushevskii A.V., Koryanov V.V., Tuchin A.G. Synthesis of space mission scenarios in the Jovian system using gravity assist maneuvers // *Doklady Physics, Pleiades Publishing Ltd.* 2014. V. 59. № 5. P. 226–228. doi: 10.1134/S1028335814050024
12. Голубев Ю.Ф., Грушевский А.В., Корянов В.В., Тучин А.Г., Тучин Д.А. Разработка стратегий исследования системы Юпитера при использовании модели ограниченной задачи четырёх тел. // *Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша*. 2014. № 50. 30 с. URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2014-50>
13. Grushevskii A.V., Golubev Yu.F., Koryanov V.V., Tuchin A.G. To the adaptive multibody gravity assist tours design in Jovian system for the Ganymede Landing // *24th International Symposium on Space Flight Dynamics (ISSFD), Laurel, Maryland, Johns Hopkins University Applied Physics Laboratory (JHU APL), May 5-9 2014. Paper S15-4.*
14. Grushevskii Alexey V., Golubev Yury F., Koryanov Victor V., Tuchin Andrey G. Adaptive low radiation multibody gravity assist tours design in Jovian system for the landing on Jovian's moons // *Proc. 65th International Astronautical Congress (IAC 2014), 29 September–3 October 2014, Toronto, Canada. Manuscript IAC-14,C1,9,13,x21406. In CD Book 65th IAC, IAC-14/C1/9/manuscripts/IAC-14,C1,9,13,x21406.pdf*
15. Оптимизация схемы сближения с Ганимедом с использованием последовательности гравитационных манёвров. *НТО по НИР. Инв. № 5-006-12// ИПМ им. М.В. Келдыша РАН. М.: 2009. 58 с.*
16. Проработка предложений по схеме полёта к Юпитеру и проведению работ по баллистической поддержке миссии к Юпитеру и Европе на участке перелёта Земля – Юпитер. *НТО по НИР «Лаплас-ИПМ». Инв. № 5-012-09// ИПМ им. М.В. Келдыша РАН. М.: 2009. 58 с.*
17. Пуанкаре А. Избранные труды в трех томах. Т. 1. Новые методы небесной механики. М.: Наука, 1971.

18. Себехей В. Теория орбит. Ограниченная задача трёх тел. М.: Наука, 1982.
19. Tisserand F.F. *Traité de Méchanique Céleste*. V. 4. Gauthier-Villars et fils. Paris, 1896. P. 203–205.
20. Campagnola S., Kawakatsu Y. Jupiter Magnetospheric Orbiter: Trajectory Design in the Jovian system. *J. Spacecraft and Rockets*. V. 49. № 2. 2012. P. 318-324. doi: 10.2514/1.A32055
21. Kawakatsu Y. "V $\infty$  Direction Diagram and its Application to Swingby design", 21st International Symposium on Space Flight Dynamics, September 28-October 2 2009, Toulouse, France
22. Лёб Х.В., Петухов В.Г., Попов Г.А. Гелиоцентрические траектории космического аппарата с ионными двигателями для исследования Солнца. // *Электронный журнал «Труды МАИ»*, 2011, № 42, 22 с.
23. Konstantinov M., Petukhov V., Thein M. Optimization spacecraft insertion into the system of heliocentric orbits for Sun exploration. 65th IAC, Toronto, Canada, 2014.IAC-14-C1.9.4
24. Сайт NAIF (Navigation and Ancillary Information Facility) URL: <http://naif.jpl.nasa.gov/naif/index.html> (дата обращения 08.06.2013).
25. Yoder C.F. Astrometric and Geodetic Properties of Earth and the Solar Systems. URL: <http://www.agu.org/books/rf/v001/RF001p0001/RF001p0001.pdf>.
26. Арнольд В.И. Математические методы классической механики. – М.: Наука, 1974.
27. Аносов Д.В. Об одном классе инвариантных множеств гладких динамических систем // *Труды 5-й Межд. конф. по нелин. колеб.* Киев. 1970. Т. 2. С. 39-45.
28. Каток А. Б., Хасселблат Б. Введение в современную теорию динамических систем. М., 1999. 768 с.
29. Пилюгин С.Ю., Тихомиров С.Б. Множества векторных полей с различными свойствами отслеживания псевдотраекторий // *Доклады АН*. 2008. Т. 422. № 1. С. 30-31.

## ПРИЛОЖЕНИЕ

### Диаграмма Vinfinity-Map

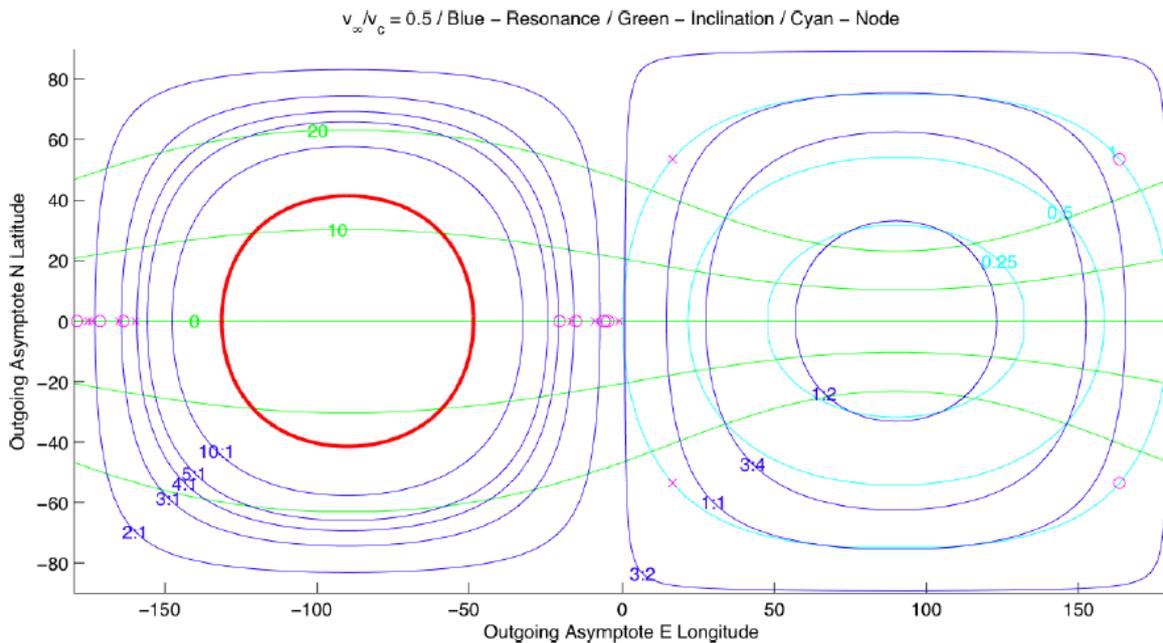
Существование интеграла Якоби  $J$  и критерия Тиссерана определяет баллистический детерминизм проведения гравитационных манёвров с одним небесным телом (в рамках ограниченной задачи трёх тел), что приводит к динамической невозможности приближения КА к этому телу («мишени»). В 3D-варианте все возможные векторы  $\vec{V}_\infty$  также не являются свободными, а их концы лежат на инвариантной поверхности « $V_\infty$ -Globe» (сфере с радиусом, равным величине асимптотической скорости) [5] (рис. П.1).



**Рис. П.1.** Поверхность « $V_\infty$ -Globe», на которой лежат концы всех возможных векторов асимптотической скорости отлётных гипербол  $\vec{V}_\infty$  (рисунок заимствован из [5]). На сферу радиуса  $V_\infty$  наносятся изолинии

резонансных с орбитальным периодом Венеры периодов КА после выполнения гравитационного маневра. Соизмеримости 1:1, 6:5, 5:4, 4:3, 3:2, 2:1 и т.д. (показаны синим цветом) обеспечивают новую встречу КА с Венерой. Сетка изолиний наклонений нанесена зелёным цветом.

С точки зрения наработки баллистических схем и стратегий оказывается продуктивной развёртка сферы « $V_\infty$ -Globe» на плоскость «широта-долгота» (« $V_\infty$ -Map»). Соответствующая «карта» для нашего случая  $v_\infty = 17.5/35 = 1/2$  показана на рис. П.2 (Fig. 8 из [5]).



**Рис П.2.** Карта  $V_\infty$  для случая миссии «Интергелио-Зонда» (Значение  $V_\infty = 0.5$ ).

По осям абсцисс и ординат – широта и долгота вектора  $V_\infty$ .