ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 73 за 2015 г.

ISSN 2071-2898 (Print)
ISSN 2071-2901 (Online)

Горючкина И.В.

Классы формальных решений алгебраических ОДУ, вычисляемых методами плоской степенной геометрии

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Горючкина И.В. Классы формальных решений алгебраических ОДУ, вычисляемых методами плоской степенной геометрии // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2015. № 73. 26 с.
URL: http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2015-73

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
ИМЕНИ М.В. КЕЛДЫША

И. В. Горючкина

КЛАССЫ ФОРМАЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ОДУ, ВЫЧИСЛЯЕМЫХ МЕТОДАМИ ПЛОСКОЙ СТЕПЕННОЙ ГЕОМЕТРИИ

Москва, 2015 г.

УДК 517.91

И. В. Горючкина. Классы формальных решений алгебраических ОДУ, вычисляемых методами плоской степенной геометрии. Препринт Института прикладной математики им. М. В. Келдыша РАН. Москва, 2015.

Здесь представляется классификация формальных рядов и показывается, что если обыкновенное дифференциальное уравнение имеет формальное решение, принадлежащее выделенному классу, то укорочение этого решения будет являться решением укороченного уравнения, определяемого по исходному уравнению с помощью его многоугольника Ньютона-Брюно.

I. V. Goryuchkina. Classes of formal solutions of algebraic ODEs calculating by means of the methods of plane power geometry. Preprint of the Keldysh Institute of Applied Mathematics of RAS. Moscow, 2015.

Here is presented a classification of formal series and showed that if an ordinary differential equation has a formal solution belonging to chosen classes, then the truncation of this solution is a solution of the truncated equation that is determined by the initial equation with the help of its Newton-Bruno polygon.

Содержание

Обозначения

$\mathcal{D}$ – открытое связное подмножество множества комплексных чисел, замыкание которого содержит нуль;

$\mathcal{D}_\infty$ – открытое связное подмножество множества комплексных чисел, замыкание которого содержит бесконечность;

$\overline{\mathbb{R}}$ – множество вещественных чисел, пополненное $+\infty$ и $-\infty$;

$\mathbb{R}^*$ и $\mathbb{C}^*$ – множества вещественных и комплексных чисел без нуля соответственно;

$\mathbb{Z}_+$ и $\mathbb{R}_+$ – множества неотрицательных целых и вещественных чисел соответственно;

$\mathcal{O}(\mathcal{D})$ – множество голоморфных в области $\mathcal{D}$ функций;

$\mathbb{C}[x]$ – пространство многочленов с комплексными коэффициентами;

$\mathbb{C}[x, 1/x]$ – пространство многочленов Лорана с комплексными коэффициентами;

$\mathbb{C}[[x]]$ – пространство формальных рядов Тейлора с комплексными коэффициентами в окрестности точки $x = 0$;

$\mathbb{C}[[x, 1/x]]$ – пространство формальных рядов Лорана с конечной главной частью и комплексными коэффициентами в окрестности точки $x = 0$;

$\mathbb{C}\{x\}$ – пространство рациональных функций с комплексными коэффициентами;

i – мнимая единица;

$O^*(\varphi(x))$ – функция, по модулю не превосходящая произведения положительной константы и модуля функции $\varphi(x)$, но не являющаяся бесконечно малой величиной по сравнению с $\varphi(x)$ во всех предельных точках рассматриваемой области.[1]

Введение

Предложенные в работе [2] методы плоской степенной геометрии позволяют для аналитических обыкновенных дифференциальных уравнений вычислять их формальные решения (или формальные асимптотики решений), имеющие вид функциональных рядов, содержащих степенные функции с комплексными показателями степени, кратные и некратные логарифмы. При этом под вычислением формального решения, имеющего вид функционального ряда, понимается вычисление коэффициентов начальной части ряда, описание его структуры (системы функций), а также определение количества произвольных постоянных и членов, в которых эти произвольные постоянные содержатся. Напомним, что формальный функциональный ряд с упорядоченными членами является формальным решением обыкновенного дифференциального уравнения, ес-

[1] В отличие от стандартного $O(\varphi(x))$, которое допускает $o(\varphi(x))$. Подробнее об обозначениях O и o см. в гл. 1 [1].

ли после подстановки его в уравнение, используя формальные правила умножения, сложения и дифференцирования рядов, получается формальный ряд с нулевыми коэффициентами, к которому применимы те же самые правила упорядочивания, что и для исходного ряда.

В процессе развития методов плоской степени геометрии появилась связанная с вычислениями классификация формальных решений. Так, для шестого уравнения Пенлеве с помощью методов плоской степенной геометрии [3] были найдены (в указанном в предыдущем абзаце смысле) все формальные решения в окрестностях особых и неособых точек при всех значениях параметров уравнения, условно разделенные на пять типов: степенные, степенно-логарифмические, сложные, экзотические и полуэкзотические. Все формальные решения обыкновенного дифференциального уравнения этих пяти типов в каждой особой точке можно записать единым выражением. Например, все формальные решения шестого уравнения Пенлеве этих пяти типов в окрестности точки $x = 0$ можно записать в виде

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k(x)\, x^{s_k}, \tag{1}$$

где $s_k \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Re} s_k < \operatorname{Re} s_{k+1}$, $\lim\limits_{k\to\infty} \operatorname{Re} s_k = +\infty$, а коэффициенты $c_k(x)$ различаются согласно типам:

– $c_0(x) \in \mathbb{C}^*$, остальные $c_k(x) \in \mathbb{C}[x^{\alpha \mathrm{i}},\, x^{-\alpha \mathrm{i}}]$, $\alpha \in \mathbb{R}^*$ (*степенные разложения*),

– $c_0(x) \in \mathbb{C}^*$, остальные $c_k(x) \in \mathbb{C}[\ln x]$ (*степенно-логарифмические разложения*),

– все $c_k(x) \in \mathbb{C}\{\ln^{-1} x\} \subset \mathbb{C}[[\ln^{-1} x, \ln x]]$ (*сложные разложения*),

– $c_0(x) \in \mathbb{C}[x^{\beta \mathrm{i}},\, x^{-\beta \mathrm{i}}]$, остальные $c_k(x) \in \mathbb{C}\{x^{\beta \mathrm{i}}\} \subset \mathbb{C}[[x^{\beta \mathrm{i}}, x^{-\beta \mathrm{i}}]]$, $\beta \in \mathbb{R}^*$ (*полуэкзотические разложения*),

– все $c_k(x) \in \mathbb{C}\{x^{\gamma \mathrm{i}}\} \subset \mathbb{C}[[x^{\gamma \mathrm{i}}, x^{-\gamma \mathrm{i}}]]$, $\gamma \in \mathbb{R}^*$ (*экзотические разложения).*

Напомним, что методы плоской степенной геометрии основываются на методе выделения ведущих членов уравнения по многоугольнику Ньютона-Брюно. Многоугольник Ньютона-Брюно аналитического обыкновенного дифференциального уравнения – это выпуклый геометрический объект на плоскости, граница которого состоит из вершин и ребер. Каждая вершина или ребро соответствуют одному, нескольким или многим слагаемым в исходном обыкновенном дифференциальном уравнении. Эти слагаемые являются ведущими в определенных областях независимой переменной и образуют *укороченные уравнения* (приближенные уравнения). И *если существует в некоторой области формальное решение* (*имеющее вид функционального ряда, выделенного в* §1 *класса*) *алгебраического обыкновенного дифференциального уравнения, то его укорочение* (*первое слагаемое формального ряда, которое также может быть формальным рядом*) *будет удовлетворять соответствующему укороченному уравнению*. Выделенное курсивом утверждение является т е о р е м о й 1, которая доказывается в §3. Утверждение теоремы 1 для случая, когда алгебраическое обыкновенное дифференциальное уравнение имеет формальное решение в виде степенного ряда с вещественными показателями степени, имеется в [2].

Ключевым понятием при построении многоугольника Ньютона-Брюно является понятие порядка функции. Будем говорить, что *функция* $\varphi(\xi)$ *в точке* $\xi = 0$ *имеет порядок* $\operatorname{ord}_0 \varphi(\xi) \in \overline{\mathbb{R}}$, *если существует предел*

$$\lim_{\substack{\xi\to 0\\ \xi\in\mathcal{D}}} \frac{\ln|\varphi(\xi)|}{\ln|\xi|} = \operatorname{ord}_0 \varphi(\xi). \tag{2}$$

Подобным образом определим порядок функции $\varphi(\xi)$ в точке $\xi = \infty$. *Функция* $\varphi(\xi)$ *в точке* $\xi = \infty$ *имеет порядок* $\operatorname{ord}_\infty \varphi(\xi) \in \overline{\mathbb{R}}$, *если существует предел*

$$\lim_{\substack{\xi\to \infty\\ \xi\in\mathcal{D}_\infty}} \frac{\ln|\varphi(\xi)|}{\ln|\xi|} = \operatorname{ord}_\infty \varphi(\xi). \tag{3}$$

Подобное определение порядка функции встречается в теории целых функций, см., например, гл. V в [6].

Отметим, что среди функций, содержащихся в формальных рядах указанных ранее пяти типов, имеются степенные функции с комплексными показателями степени, кратные и некратные логарифмы. Любая из этих функций обладает тем свойством, что ее порядки в нуле и бесконечности совпадают. Более того, если продифференцировать любую из этих функций n раз, то получается функция, порядки которой в нуле и в бесконечности также совпадают (конечно, если только эта функция не равна тождественно нулю), но меньше на n единиц порядков в нуле и в бесконечности исходной функции[2].

З а д а ч а э т о й р а б о т ы: выделить общий класс формальных решений алгебраических обыкновенных дифференциальных уравнений, которые могут быть вычислены с помощью методов плоской степенной геометрии. Это значит, что необходимо выделить класс формальных функциональных рядов, который содержит только те ряды, *укорочения* $\hat{\varphi}$ (первые слагаемые) которых являются такими формальными рядами комплексной переменной ξ, что порядки в точках $\xi = 0$ и $\xi = \infty$ каждого их члена совпадают с порядком исходного ряда (понятие порядка формального ряда будет дано в §1). Кроме того,

[2]Например, рассмотрим степенную функцию x^α и ее n-ую производную $\alpha(\alpha-1)\cdot\ldots\cdot(\alpha-n+1)\,x^{\alpha-n}$, $\alpha\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}$. Для них имеем соотношения $\operatorname{ord}_0 x^\alpha = \operatorname{ord}_\infty x^\alpha = \operatorname{Re}\alpha$ и $\operatorname{ord}_0(\alpha(\alpha-1)\cdot\ldots\cdot(\alpha-n+1)\,x^{\alpha-n}) = \operatorname{ord}_\infty(\alpha(\alpha-1)\cdot\ldots\cdot(\alpha-n+1)\,x^{\alpha-n}) = \operatorname{Re}\alpha - n$.

после подстановки укорочения $\hat{\varphi}$ в однородное обыкновенное дифференциальное уравнение $\mathcal{P}_0(u_0, \ldots, u_n) = 0$,[3] $u_j = x^j\, u^{(j)}$, получается формальный ряд $\mathcal{P}_0(\hat{\varphi}_0, \ldots, \hat{\varphi}_n)$ (где $\hat{\varphi}_j = x^j\, \hat{\varphi}^{(j)}$) того же класса, что и исходный ряд, имеющий л и б о ненулевые коэффициенты (тогда порядки функций при этих коэффициентах в точках $\xi = 0$ и $\xi = \infty$ равны порядку получившегося формального ряда и порядку исходного ряда), л и б о все его коэффициенты – это нули (тогда порядок получившегося ряда равен $-\infty$, поскольку этот ряд соответствует тождественному нулю[4]). Также необходимо доказать, что выделенный класс замкнут относительно алгебраических операций и дифференцирования. Для этого от функций, содержащихся в функциональных рядах, мы будем требовать понижения порядка на единицу после дифференцирования и наложим ограничения на их рост (см. условия 1 – 3 в §1)[5]. Кроме того, как уже было сказано ранее, в §5 доказывается теорема 1 для формальных решений (выделенного класса) алгебраических обыкновенных дифференциальных уравнений.

Немного иное построение классов формальных функциональных рядов со свойством функций понижения порядка на n единиц после дифференцирования n раз без доказательства замкнутости этих классов относительно операций сложения, умножения и дифференцирования, а также доказательство теоремы 1 для формальных рядов таких классов имеется в работе [7].

§1. О классах формальных решений ОДУ, которые могут быть найдены методами плоской степенной геометрии

1.1. Построение классов. Рассмотрим последовательность функций

$$\{\varphi_{k_0}(\xi_0)\}_{k_0=0}^{\infty}, \tag{4}$$

где ξ_0 – это независимая комплексная переменная, $\xi_0 \in \mathcal{D}$, $\varphi_{k_0}(\xi_0) \in \mathcal{O}(\mathcal{D})$,

$$\lim_{\substack{\xi_0 \to 0 \\ \xi_0 \in \mathcal{D}}} \frac{\varphi_{k_0+1}(\xi_0)}{\varphi_{k_0}(\xi_0)} = 0,$$

т. е. $\varphi_{k_0+1} = o(\varphi_{k_0})$.

Рассмотрим формальный ряд

$$\sum_{k_0=0}^{\infty} \alpha_{k_0}\, \varphi_{k_0}(\xi_0), \quad \alpha_{k_0} = \mathrm{const} \in \mathbb{C}, \tag{5}$$

[3] Функция $\mathcal{P}_0(u_0, \ldots, u_n)$ – это многочлен с постоянными коэффициентами.

[4] В этом случае говорят, что формальный ряд удовлетворяет этому уравнению.

[5] Так, например, функции x и $\ln^{-1} x$ удовлетворяют условию 1. Но первая из них удовлетворяет только условию 2, а вторая – только условию 3.

соответствующий системе функций (4).

Пусть класс $\widetilde{\mathcal{C}}_0$ образован формальными рядами вида (5).

Определим по индукции классы $\widetilde{\mathcal{C}}_j$ формальных рядов $j+1$ переменных $\xi_0, \ldots, \xi_j$, где $j = 1, \ldots, N, \quad N \in \mathbb{N}$. На первом шаге индукции определим класс

$$\widetilde{\mathcal{C}}_1 = \left\{ \sum_{k_0=0}^{\infty} \widetilde{\varphi}_{k_0}(\xi_1)\, \varphi_{k_0}(\xi_0) \;\middle|\; \widetilde{\varphi}_{k_0} \in \widetilde{\mathcal{C}}_0 \right\},$$

на втором – класс

$$\widetilde{\mathcal{C}}_2 = \left\{ \sum_{k_0=0}^{\infty} \widetilde{\varphi}_{k_0}(\xi_1, \xi_2)\, \varphi_{k_0}(\xi_0) \;\middle|\; \widetilde{\varphi}_{k_0} \in \widetilde{\mathcal{C}}_1 \right\},$$

и. т. д., и на N - ом шаге – класс

$$\widetilde{\mathcal{C}}_N = \left\{ \sum_{k_0=0}^{\infty} \widetilde{\varphi}_{k_0}(\xi_1, \ldots, \xi_N)\, \varphi_{k_0}(\xi_0) \;\middle|\; \widetilde{\varphi}_{k_0} \in \widetilde{\mathcal{C}}_{N-1} \right\},$$

где

$$\varphi_{k_0}(\xi_0) \in \mathcal{O}(\mathcal{D}), \quad \varphi_{k_0+1} = o(\varphi_{k_0}),$$

$$\xi_0 \in \mathcal{D}, \quad \xi_{i+1} = \xi_{i+1}(\xi_i), \quad \xi_{i+1} \in \mathcal{O}(\mathcal{D}), \quad i = 0, \ldots, N-1.$$

Отметим, что ряд $\sum\limits_{k_0=0}^{\infty} \widetilde{\varphi}_{k_0}(\xi_1)\varphi_{k_0}(\xi_0)$ класса $\mathcal{C}_1$ можно записать в виде

$$\sum_{k_0=0}^{\infty} \left(\sum_{k_1=0}^{\infty} \alpha_{k_0 k_1} \varphi_{k_0 k_1}(\xi_1) \right) \varphi_{k_0}(\xi_0),$$

ряд $\sum\limits_{k_0=0}^{\infty} \widetilde{\varphi}_{k_0}(\xi_1, \xi_2)\varphi_{k_0}(\xi_0)$ класса $\mathcal{C}_2$ – в виде

$$\sum_{k_0=0}^{\infty} \left(\sum_{k_1=0}^{\infty} \left(\sum_{k_2=0}^{\infty} \alpha_{k_0 k_1 k_2} \varphi_{k_0 k_1 k_2}(\xi_2) \right) \varphi_{k_0 k_1}(\xi_1) \right) \varphi_{k_0}(\xi_0),$$

и. т. д.

Далее аргументы функций, указанные в скобках, будем опускать в тех случаях, когда это не приводит к путанице, с целью облегчения восприятия текста.

Сформулируем условия, необходимые для определения специальных классов формальных рядов $\mathcal{C}(\xi_0), \; \ldots, \; \mathcal{C}(\xi_0, \ldots, \xi_N)$, $N \in \mathbb{N}$, которые являются решениями алгебраических обыкновенных дифференциальных уравнений и могут быть вычислены с помощью методов плоской степенной геометрии [2] (основанных на выделении приближенных уравнений посредством многоугольника Ньютона-Брюно).

Условие 1. Пусть функция $\varphi(\xi)$ непрерывно дифференцируема ℓ раз в областях $\mathcal{D}$ и $\mathcal{D}_\infty$, $\ell \in \mathbb{N}$. Кроме того, для нее и ее производных справедливы соотношения

$$\operatorname{ord}_0 \varphi(\xi) = \operatorname{ord}_\infty \varphi(\xi) \in \mathbb{R},$$

и если $\varphi^{(\ell)}(\xi) \not\equiv 0$ и $\varphi^{(\ell-1)}(\xi) \not\equiv 0$, то

$$\operatorname{ord}_0 \varphi^{(\ell)}(\xi) = \operatorname{ord}_\infty \varphi^{(\ell)}(\xi) = \operatorname{ord}_0 \varphi^{(\ell-1)}(\xi) - 1 = \operatorname{ord}_\infty \varphi^{(\ell-1)}(\xi) - 1 \in \mathbb{R}.$$

Условие 2. Пусть функция $\varphi(\xi)$ удовлетворяет условию 1 и в областях $\mathcal{D}$ и $\mathcal{D}_\infty$ при $\varphi^{(\ell)}(\xi) \not\equiv 0$ имеет место равенство[6]

$$\frac{\xi^\ell \varphi^{(\ell)}(\xi)}{\varphi(\xi)} = O^*(1).$$

Условие 3. Пусть функция $\phi(\xi)$ удовлетворяет условию 1 и в областях $\mathcal{D}$ и $\mathcal{D}_\infty$ для нее справедливы соотношения

$$\phi^{(\ell)}(\xi) \not\equiv 0,$$

$$\frac{\xi^\ell \phi^{(\ell)}(\xi)}{\phi(\xi)} = O(1).$$

Кроме того, обратная функция $\xi(\phi)$ непрерывно дифференцируема ℓ раз в области $\mathcal{E}$, где $\mathcal{E}$ – это образ отображения $\phi:\ \widetilde{\mathcal{D}} \mapsto \mathcal{E}$, $\widetilde{\mathcal{D}} \subset \mathcal{D}$ или $\widetilde{\mathcal{D}} \subset \mathcal{D}_\infty$, множество $\widetilde{\mathcal{D}}$ такое, что при $\xi \to 0$ или при $\xi \to \infty$, $\xi \in \widetilde{\mathcal{D}}$, выполняется $\phi(\xi) \to 0$, $\phi(\xi) \in \mathcal{E}$. И имеет место равенство

$$\lim_{\substack{\phi \to 0 \\ \phi \in \mathcal{E}}} \phi^\ell \xi^{(\ell)}(\phi) = \lim_{\substack{\phi \to 0 \\ \phi \in \mathcal{E}}} \xi(\phi).$$

Пользуясь условиями 1 – 3, определим индуктивно специальные классы формальных рядов $\mathcal{C}(\xi_0)$, $\ldots$, $\mathcal{C}(\xi_0, \ldots, \xi_N)$.

Формальный ряд класса $\widetilde{\mathcal{C}}_0$ будем относить к классу $\mathcal{C}(\xi_0)$, если функции φ_{k_0} удовлетворяют условию 2.

Формальный ряд класса $\widetilde{\mathcal{C}}_j$, $j = 1, \ldots, N$, будем относить к классу $\mathcal{C}(\xi_0, \ldots, \xi_j)$, если

[6] Обозначение O^* введено в начале препринта в разделе "Обозначения".

- *функции* φ_{k_0} *удовлетворяют условию 2,*
- *функции* $\xi_{i+1}(\xi_i)$ *удовлетворяют условию 3,* $i = 0, \ldots, N-1$,
- $\xi_i = o(\xi_{i+1}),\quad \ln|\xi_{i+1}| = o(\ln|\xi_i|)$,
- $\varphi_{k_0} = o(\varphi_{k_0 k_1}),\ \ldots,\ \varphi_{k_0\ldots k_{N-1}} = o(\varphi_{k_0\ldots k_N})$ *для всех* $\varphi_{k_0},\ \ldots,\ \varphi_{k_0\ldots k_N}$, *кроме тех, для которых произведения* $\varphi_{k_0}\varphi_{k_0 k_1},\ \ldots,\ \varphi_{k_0\ldots k_{N-1}}\varphi_{k_0\ldots k_N}$ *постоянны.*

Также будем полагать, что нулевой ряд включен в классы $\mathcal{C}(\xi_0),\ \ldots,\ \mathcal{C}(\xi_0, \ldots, \xi_N)$.

1.2. Примеры рядов выделенных классов.

П р и м е р 1. Рассмотрим ряд

$$\sum_{k_0=0}^{\infty}\left(\sum_{k_1=0}^{\infty} c_{k_0 k_1}\,(\ln^{-1} x)^{k_1}\right)\, x^{k_0} \tag{6}$$

класса $\mathcal{C}\left(x,\, \ln^{-1} x\right)$ (также этот ряд относится к *сложным разложениям* в классификации разложений, указанных в работах [2] и [3]), где

$$\sum_{k_1=0}^{\infty} c_{k_0 k_1}(\ln^{-1} x)^{k_1} \in \mathbb{C}[[\ln^{-1} x]],$$

$x \in \mathcal{D}$, $\mathcal{D}$ – открытый сектор с вершиной в нуле конечного раствора и конечного радиуса, а $\mathcal{D}_\infty$ – это множество, полученное инверсией множества $\mathcal{D}$.

Проверим условия принадлежности формального ряда (6) классу $\mathcal{C}\left(x, \ln^{-1} x\right)$.

- Функции x^{k_0} удовлетворяют условиям 1 и 2. Действительно,

$$\operatorname{ord}_0 x^{k_0} = \operatorname{ord}_\infty x^{k_0} = k_0. \tag{7}$$

Если $k_0 \geqslant \ell$, тогда

$$\operatorname{ord}_0 \left(x^{k_0}\right)^{(\ell)} = \operatorname{ord}_\infty \left(x^{k_0}\right)^{(\ell)} = k_0 - \ell, \tag{8}$$

$$\operatorname{ord}_0 \left(x^{k_0}\right)^{(\ell-1)} = \operatorname{ord}_\infty \left(x^{k_0}\right)^{(\ell-1)} = k_0 - \ell + 1 \tag{9}$$

и

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x\in\mathcal{D}}} \frac{x^\ell \left(x^{k_0}\right)^{(\ell)}}{x^{k_0}} = \lim_{\substack{x\to\infty\\ x\in\mathcal{D}_\infty}} \frac{x^\ell \left(x^{k_0}\right)^{(\ell)}}{x^{k_0}} = $$
$$= k_0\,(k_0-1)\cdot\ldots\cdot(k_0-\ell+1) \in \mathbb{N}. \tag{10}$$

- Функция $\ln^{-1} x$ удовлетворяет условиям 1 и 3. Действительно,

$$\mathrm{ord}_0 \ln^{-1} x = \mathrm{ord}_\infty \ln^{-1} x = 0.$$

Кроме того,

$$\mathrm{ord}_0 \left(\ln^{-1} x\right)^{(\ell)} = \mathrm{ord}_\infty \left(\ln^{-1} x\right)^{(\ell)} = -\ell,$$
$$\mathrm{ord}_0 \left(\ln^{-1} x\right)^{(\ell-1)} = \mathrm{ord}_\infty \left(\ln^{-1} x\right)^{(\ell-1)} = -\ell+1,$$
$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x\in\mathcal{D}}} \frac{x^\ell \left(\ln^{-1} x\right)^{(\ell)}}{\ln^{-1} x} = \lim_{\substack{x\to \infty\\ x\in\mathcal{D}_\infty}} \frac{x^\ell \left(\ln^{-1} x\right)^{(\ell)}}{\ln^{-1} x} = 0,$$

$$\lim_{\substack{t\to 0\\ t\in\mathcal{E}}} t^\ell \left(\exp\left(1/t\right)\right)^{(\ell)} = \lim_{\substack{t\to 0\\ t\in\mathcal{E}}} \exp\left(1/t\right), \tag{11}$$

где $t = \ln^{-1} x$, $\mathcal{E} = \{\mathrm{Re}\, t < 0\}$ при $x \to 0$ или $\mathcal{E} = \{\mathrm{Re}\, t > 0\}$ при $x \to \infty$.

- $x^{k_0+1} = o(x^{k_0})$, $(\ln^{-1} x)^{k_1+1} = o\left((\ln^{-1} x)^{k_1}\right)$,
- $x = o(\ln^{-1} x)$, $\ln|\ln^{-1} x| = o(\ln|x|)$,
- $x^{k_0} = o\left((\ln^{-1} x)^{k_1}\right)$ для любых k_0 и k_1.

Все необходимые условия выполняются, следовательно, ряд (6) принадлежит классу $\mathcal{C}\left(x,\ \ln^{-1} x\right)$.

П р и м е р 2. Рассмотрим ряд

$$\sum_{k_0=0}^{\infty} \mathcal{R}_{k_0}\left(x^{\mathrm{i}}\right)\ x^{k_0} \tag{12}$$

класса $\mathcal{C}(x)$, где $\mathcal{R}_{k_0}^{(j)}\left(x^{\mathrm{i}}\right) x^j$ – это функции, рациональные относительно функции x^{i} ($j = 0,\ldots,\ell \in \mathbb{Z}_+$) и голоморфные в областях $\mathcal{D}$ и $\mathcal{D}_\infty$, $\mathcal{D}$ – это открытый сектор конечного раствора и малого радиуса в $\mathbb{C}^*$ с вершиной в нуле, а $\mathcal{D}_\infty$ – это множество, полученное инверсией множества $\mathcal{D}$, радиус сектора $\mathcal{D}$ настолько мал, что оба множества $\mathcal{D}$ и $\mathcal{D}_\infty$ не содержат в себе *особых точек* $x^{\mathrm{i}} = a \neq 0$ (или, что то же самое, $\ln x = \arg a - \mathrm{i}\ln|a|$), расположенных на лучах $\arg x = -\ln|a|$, a – это полюс или нуль рациональных функций $\mathcal{R}_{k_0}^{(j)}\left(x^{\mathrm{i}}\right) x^j$. Отметим, что этот ряд может относиться к *степенным, полуэкзотическим* или *экзотическим разложениям* в классификации разложений, указанных в работах [2] и [3]. Отметим, что функция $x^{\mathrm{i}} = \exp(-\arg x)\cdot \exp(\mathrm{i}\ln|x|)$ ограничена в $\mathcal{D}$ и в $\mathcal{D}_\infty$ (значение $\arg x$ ограничено, а значения функции $\exp(\mathrm{i}\ln|x|)$ лежат на единичной окружности).

Проверим условия принадлежности формального ряда (12) классу $\mathcal{C}(x)$.

- Функции $\mathcal{R}_{k_0}\left(x^{\mathrm{i}}\right)\ x^{k_0}$ удовлетворяют условию 1. Действительно,

$$\operatorname{ord}_0\left(\mathcal{R}_{k_0}\left(x^{\mathrm{i}}\right)\ x^{k_0}\right)=\operatorname{ord}_\infty\left(\mathcal{R}_{k_0}\left(x^{\mathrm{i}}\right)\ x^{k_0}\right)=k_0.$$

Порядок произведения функций равен сумме порядков этих функций и в нуле, и в бесконечности, поэтому

$$\operatorname{ord}_0\left(\mathcal{R}_{k_0}\left(x^{\mathrm{i}}\right)\ x^{k_0}\right)=\operatorname{ord}_0\mathcal{R}_{k_0}\left(x^{\mathrm{i}}\right)+k_0,$$

$$\operatorname{ord}_\infty\left(\mathcal{R}_{k_0}\left(x^{\mathrm{i}}\right)\ x^{k_0}\right)=\operatorname{ord}_\infty\mathcal{R}_{k_0}\left(x^{\mathrm{i}}\right)+k_0,$$

а

$$\operatorname{ord}_0\mathcal{R}_{k_0}\left(x^{\mathrm{i}}\right)=\operatorname{ord}_\infty\mathcal{R}_{k_0}\left(x^{\mathrm{i}}\right)=0.$$

Убедимся в этом. Рассмотрим функционал

$$\operatorname{ord}_0\left(\mathcal{R}_{k_0}\left(x^{\mathrm{i}}\right)\right)=\lim_{\substack{x\to 0\\ \xi\in\mathcal{D}}}\frac{\ln\left|\mathcal{R}_{k_0}\left(x^{\mathrm{i}}\right)\right|}{\ln|x|}.$$

Поскольку функция $\mathcal{R}_{k_0}\left(x^{\mathrm{i}}\right)$ не обращается ни в нуль, ни в бесконечность в области $\mathcal{D}$, модуль $\left|x^{\mathrm{i}}\right|=\exp(-\arg x)$ ограничен с двух сторон положительными константами, следовательно, модуль $\left|\mathcal{R}_{k_0}\left(x^{\mathrm{i}}\right)\right|$ также ограничен с двух сторон положительными константами в области $\mathcal{D}$. Отсюда следует, что функция $\ln\left|\mathcal{R}_{k_0}\left(x^{\mathrm{i}}\right)\right|$ также ограничена в области $\mathcal{D}$ при неограниченном стремлении $|x|$ к нулю, т. е. $\operatorname{ord}_0\mathcal{R}_{k_0}\left(x^{\mathrm{i}}\right)=0$. Аналогично доказывается, что $\operatorname{ord}_\infty\mathcal{R}_{k_0}\left(x^{\mathrm{i}}\right)=0$.

В силу того, что $\left(\mathcal{R}_{k_0}\left(x^{\mathrm{i}}\right)\ x^{k_0}\right)^{(\ell)}\not\equiv 0$,

$$\ln\left|\left(\mathcal{R}_{k_0}\left(x^{\mathrm{i}}\right)\ x^{k_0}\right)^{(\ell)}\right|=\ln\left|x^{k_0-\ell}\sum_{j=0}^{\ell}\alpha_j\,\mathcal{R}_{k_0}^{(j)}\left(x^{\mathrm{i}}\right)\right|=$$

$$\ln\left|x^{k_0-\ell}\right|+\ln\left|\sum_{j=0}^{\ell}\alpha_j\,\mathcal{R}_{k_0}^{(j)}\left(x^{\mathrm{i}}\right)\right|,$$

где $\alpha_j=\mathrm{C}_j^{\ell}\prod_{t=1}^{j}(k_0-j+1)$, C_j^{ℓ} – биноминальные коэффициенты, модуль $\left|\sum_{j=0}^{\ell}\alpha_j\,\mathcal{R}_{k_0}^{(j)}\left(x^{\mathrm{i}}\right)\right|$ ограничен с двух сторон положительными константами в областях $\mathcal{D}$ и $\mathcal{D}_\infty$,[7] и в этих областях справедливы равенства

$$\operatorname{ord}_0\left(\mathcal{R}_{k_0}\left(x^{\mathrm{i}}\right)\ x^{k_0}\right)^{(\ell)}=\operatorname{ord}_\infty\left(\mathcal{R}_{k_0}\left(x^{\mathrm{i}}\right)\ x^{k_0}\right)^{(\ell)}=k_0-\ell,$$

[7] Это следует из того, что модуль $\left|x^{\mathrm{i}}\right|=\exp(-\arg x)$ ограничен с двух сторон положительными константами, а функции $\mathcal{R}_{k_0}^{(j)}\left(x^{\mathrm{i}}\right)\ x^{j}$ не обращаются ни в нуль, ни в бесконечность в областях $\mathcal{D}$ и $\mathcal{D}_\infty$.

$$\operatorname{ord}_0\left(\mathcal{R}_{k_0}\left(x^{\mathrm{i}}\right)\ x^{k_0}\right)^{(\ell-1)} = \operatorname{ord}_\infty\left(\mathcal{R}_{k_0}\left(x^{\mathrm{i}}\right)\ x^{k_0}\right)^{(\ell-1)} = k_0 - \ell + 1,$$

$$\frac{x^\ell\left(\mathcal{R}_{k_0}\left(x^{\mathrm{i}}\right)\ x^{k_0}\right)^{(\ell)}}{\mathcal{R}_{k_0}\left(x^{\mathrm{i}}\right)\ x^{k_0}} = O^*(1).$$

- $\mathcal{R}_{k_0+1}\left(x^{\mathrm{i}}\right)\ x^{k_0+1} = o\left(\mathcal{R}_{k_0}\left(x^{\mathrm{i}}\right)\ x^{k_0}\right).$

Все необходимые условия выполняются, следовательно, ряд (12) принадлежит классу $\mathcal{C}\,(x)$.

Отметим, что в большинстве случаев вычисление формальных рядов выделенных классов (даже в указанном во введении смысле) является довольно сложной задачей. Изучение свойств (асимптотичность, сходимость, суммируемость) таких рядов еще более сложная задача. Иногда вычислить даже второе слагаемое формального решения уравнения в виде произведения степенной функции с вещественным показателем степени и функции нулевого порядка невозможно. Но можно исследовать (обычно линейное) обыкновенное дифференциальное уравнение на второе слагаемое во всех его особых точках (чтобы получить информацию о настоящем решении этого уравнения) и предъявить его формальное решение в виде произведения степенной функции с тем же самым вещественным показателем степени и степенного ряда по функции нулевого порядка в окрестности нуля (или в окрестности другой особой или неособой точки, в зависимости от поставленной задачи). То же самое имеет место и для следующих слагаемых ряда. По этой причине вычислить области $\mathcal{D}$ и $\mathcal{D}_\infty$ в которых все слагаемые бесконечного ряда будут вести себя регулярно возможно в исключительных случаях.

Многие известные формальные ряды выделенных классов – объекты новые и крайне сложные. Их также можно отнести к называемым в иностранной литературе рядам *transseries*. Изучение таких формальных асимптотик и рядов представляет большой интерес, поскольку они претендуют на роль асимптотик и асимптотических разложений настоящих решений уравнений. Например, шестое уравнение Пенлеве при некоторых значениях параметров уравнения интегрируется в эллиптических функциях [4], и его решение имеет поведение вблизи особых и неособых точек, подобное поведению формальных асимптотик, вычисленных с помощью методов плоской степенной геометрии. И, как уже было сказано, эти формальные асимптотики продолжаются в разложения.

1.3. О порядке формального ряда выделенных классов. Формальный ряд $\check{\varphi}$, принадлежащий классу $\mathcal{C}(\xi_0,\ldots,\xi_N)$, записывается в виде

$$\check{\varphi} = \sum_{k_0,k_1,\ldots,k_N=0}^{\infty} \alpha_{k_0k_1\ldots k_N}\ \varphi_{k_0k_1\ldots k_N}\left(\xi_N\right)\ldots\varphi_{k_0k_1}\left(\xi_1\right)\ \varphi_{k_0}(\xi_0). \tag{13}$$

Порядком $p(\check{\varphi}) \in \mathbb{R}$ *ненулевого формального ряда* (13) *класса* $\mathcal{C}(\xi_0, \ldots, \xi_N)$ *будем считать порядок его первого ненулевого члена в точке* $\xi_0 = 0$ *(или в точке* $\xi = \infty$*, поскольку порядки первого слагаемого ряда, указанного класса, совпадают и в нуле, и в бесконечности)*, т. е.

$$p(\check{\varphi}) = \mathrm{ord}_0(\alpha_{0\ldots0}\,\varphi_{0\ldots0}\ldots\varphi_0) = \mathrm{ord}_\infty(\alpha_{0\ldots0}\,\varphi_{0\ldots0}\ldots\varphi_0), \quad \alpha_{0\ldots0} \neq 0.$$

Более того, отметим, что $p(\check{\varphi}) = \mathrm{ord}_0(\varphi_0(\xi_0)) = \mathrm{ord}_\infty(\varphi_0(\xi_0))$. Действительно,

$$p(\check{\varphi}) = \lim_{\substack{\xi_0 \to 0 \\ \xi_0 \in \mathcal{D}}} \frac{\ln|\alpha_{0\ldots0}\,\varphi_{0\ldots0}\ldots\varphi_0|}{\ln|\xi_0|} =$$

$$\lim_{\substack{\xi_0 \to 0 \\ \xi_0 \in \mathcal{D}}} \left[\frac{\ln|\alpha_{0\ldots0}|}{\ln|\xi_0|} + \frac{\ln|\varphi_0|}{\ln|\xi_0|} + \frac{\ln|\varphi_{00}|}{\ln|\xi_1|}\,\frac{\ln|\xi_1|}{\ln|\xi_0|} + \cdots + \frac{\ln|\varphi_{0\ldots0}|}{\ln|\xi_N|}\,\frac{\ln|\xi_N|}{\ln|\xi_0|}\right] =$$

$$= \lim_{\substack{\xi_0 \to 0 \\ \xi_0 \in \mathcal{D}}} \frac{\ln|\varphi_0|}{\ln|\xi_0|} = \mathrm{ord}_0(\varphi_0(\xi_0)) = \mathrm{ord}_\infty(\varphi_0(\xi_0)).$$

Порядком нулевого ряда класса $\mathcal{C}(\xi_0, \ldots, \xi_N)$ *будем считать* $-\infty$.[8]

Замечание. При дифференцировании постоянного члена ряда, получается ряд с нулевым членом. Естественно было бы его исключить из бесконечной суммы, перенумеровав члены ряда. Но мы этого делать не будем, поскольку это приведет к усложнению изложения. Наоборот, мы сохраним нумерацию в полученном после дифференцирования ряде. При этом нуль будем записывать, как некоторую нам удобную функцию с нулевым коэффициентом.

§2. Доказательство замкнутости выделенного класса относительно алгебраических операций и дифференцирования

2.1. Доказательство замкнутости относительно дифференцирования.

Предложение 1. *Формальный ряд* $\dfrac{d\check{\varphi}}{d\xi_0}$*, полученный в результате дифференцирования по* ξ_0 *ряда* $\check{\varphi}$ *порядка* $p(\check{\varphi})$ *класса* $\mathcal{C}(\xi_0, \ldots, \xi_N)$: 1) *также принадлежит классу* $\mathcal{C}(\xi_0, \ldots, \xi_N)$, *и* 2) *его порядок равен* $p(\check{\varphi}) - 1$.

Доказательство. Докажем сначала первую часть предложения 1. Для простоты изложения будем рассматривать случай $N = 1$, т. е. $\check{\varphi} \in \mathcal{C}(\xi_0, \xi_1)$.

Запишем ряд $\check{\varphi}$ в виде

$$\check{\varphi} = \sum_{k_0, k_1 = 0}^{\infty} \alpha_{k_0 k_1}\,\varphi_{k_0 k_1}(\xi_1)\,\varphi_{k_0}(\xi_0).$$

[8]Нулевой ряд класса $\mathcal{C}(\xi_0, \ldots, \xi_N)$ – это ряд (13), где все $\alpha_{k_0 \ldots k_N} = 0$.

Продифференцируем его по ξ_0 и получим ряд

$$\frac{d\breve{\varphi}}{d\xi_0} = \sum_{k_0,k_1=0}^{\infty} \alpha_{k_0k_1}\,\Phi_{k_0k_1}(\xi_1)\,\frac{\varphi_{k_0}(\xi_0)}{\xi_0}, \tag{14}$$

где

$$\Phi_{k_0k_1}(\xi_1) = \varphi'_{k_0k_1}(\xi_1)\,\xi'_1(\xi_0)\,\xi_0 + \varphi_{k_0k_1}(\xi_1)\,\frac{\varphi'_{k_0}(\xi_0)\,\xi_0}{\varphi_{k_0}(\xi_0)}$$

при $\varphi'_{k_0}(\xi_0) \not\equiv 0$ или $\varphi'_{k_0k_1}(\xi_1) \not\equiv 0$, и

$$\Phi_{k_0k_1}(\xi_1) = \frac{\varphi_{k_0k_1}(\xi_1)}{\xi_1}\,\xi'_1(\xi_0)\,\xi_0, \quad \text{а} \quad \alpha_{k_0k_1} = 0,$$

при $\varphi_{k_0}(\xi_0)\varphi_{k_0k_1}(\xi_1) = \mathrm{const}$.

Покажем, что ряд (14) принадлежит классу $\mathcal{C}(\xi_0, \xi_1)$, т. е. функции $\Phi_{k_0k_1}(\xi_1)$ и $\varphi_{k_0}(\xi_0)$ обладают свойствами

1. $\Phi_{k_0k_1+1} = o(\Phi_{k_0k_1})$,
2. $\dfrac{\Phi^{(\ell)}_{k_0k_1}(\xi_1)\,\xi_1^{\ell}}{\Phi_{k_0k_1}(\xi_1)} = O^*(1)$, если $\Phi^{(\ell)}_{k_0k_1}(\xi_1) \not\equiv 0$,
3. $\mathrm{ord}_0\left(\Phi^{(\ell)}_{k_0k_1}(\xi_1)\right) = \mathrm{ord}_0\left(\Phi^{(\ell-1)}_{k_0k_1}(\xi_1)\right) - 1$ и
$$\mathrm{ord}_\infty\left(\Phi^{(\ell)}_{k_0k_1}(\xi_1)\right) = \mathrm{ord}_\infty\left(\Phi^{(\ell-1)}_{k_0k_1}(\xi_1)\right) - 1,$$
если $\Phi^{(\ell)}_{k_0k_1}(\xi_1)$, $\Phi^{(\ell-1)}_{k_0k_1}(\xi_1) \not\equiv 0$,
4. $\varphi_{k_0} = o\left(\Phi_{k_0k_1}\right)$ для всех φ_{k_0} и $\Phi_{k_0k_1}$, кроме тех, для которых произведения $\varphi_{k_0}\Phi_{k_0k_1}$ постоянны.

Свойство 1. Рассмотрим отношение $\Phi_{k_0k_1+1}/\Phi_{k_0k_1}$. Поскольку функции $\varphi_{k_0k_1}(\xi_1)$ и $\varphi_{k_0}(\xi_0)$ удовлетворяют условию 2, а функция $\xi_1(\xi_0)$ удовлетворяет условию 3, то

$$\Phi_{k_0s}(\xi_1) = \begin{cases} O^*\left(\varphi_{k_0s}(\xi_1)\right), & \text{если } \varphi'_{k_0}(\xi_0) \not\equiv 0, \\[2ex] O^*\left(\varphi_{k_0s}(\xi_1)\,\dfrac{\xi'_1(\xi_0)\,\xi_0}{\xi_1(\xi_0)}\right), & \text{если } \varphi'_{k_0}(\xi_0) \equiv 0, \end{cases} \tag{15}$$

$s = k_1,\ k_1+1$. Тогда

$$\frac{\Phi_{k_0k_1+1}}{\Phi_{k_0k_1}} = O^*\left(\frac{\varphi_{k_0k_1+1}}{\varphi_{k_0k_1}}\right).$$

А поскольку $\varphi_{k_0 k_1+1} = o(\varphi_{k_0 k_1})$, то свойство 1 выполнено.

Свойство 2. Требуется доказать, что если $\Phi^{(\ell)}_{k_0 k_1}(\xi_1) \not\equiv 0,$ то

$$\frac{\Phi^{(\ell)}_{k_0 k_1}(\xi_1)\,\xi_1^{\ell}}{\Phi_{k_0 k_1}(\xi_1)} = O^*(1).$$

Продифференцируем ℓ раз по ξ_1 функцию $\Phi_{k_0 k_1}$. Будем полагать, что производная $\Phi^{(\ell)}_{k_0 k_1}(\xi_1) \not\equiv 0.$ При этом, если $\varphi'_{k_0}(\xi_0) \not\equiv 0$ или $\varphi'_{k_0 k_1}(\xi_1) \not\equiv 0$, то получаем выражение

$$\Phi^{(\ell)}_{k_0 k_1}(\xi_1) = \sum_{p=0}^{\ell} \mathrm{C}_{\ell}^{p} \left[\varphi^{(\ell-p+1)}_{k_0 k_1}(\xi_1)\,(\xi_1'(\xi_0)\,\xi_0)^{(p)}_{\xi_1} + \varphi^{(\ell-p)}_{k_0 k_1}(\xi_1) \left(\frac{\varphi'_{k_0}(\xi_0)\,\xi_0}{\varphi_{k_0}(\xi_0)} \right)^{(p)}_{\xi_1} \right],$$

а если $\varphi'_{k_0}(\xi_0) \equiv 0$ и $\varphi'_{k_0 k_1}(\xi_1) \equiv 0,$ то выражение

$$\Phi^{(\ell)}_{k_0 k_1}(\xi_1) = (-1)^{\ell} \ell!\ \frac{\varphi_{k_0 k_1}(\xi_1)}{\xi_1^{\ell+1}}\ (\xi_1'(\xi_0)\,\xi_0)^{(\ell)}_{\xi_1}.$$

Далее воспользуемся формулой Фаа-ди-Бруно производной сложной функции (см. [5])

$$\frac{d^{\,p} f(g(x))}{dx^p} = \sum_{\sum\limits_{t=1}^{p} t m_t = p} \frac{p!}{m_1! \ldots m_p!}\ f^{(m_1+\cdots+m_p)}(g) \prod_{t=1}^{p} \frac{\left(g^{(t)}(x)\right)^{m_t}}{t!},$$

$p \in \mathbb{N},\ \ m_1, \ldots, m_p \in \mathbb{Z}_+$. Применяя эту формулу к членам выражений выше, получаем соотношения

$$(\xi_1'(\xi_0)\,\xi_0)^{(p)}_{\xi_1} = \sum_{\sum\limits_{t=1}^{p} t m_t = p} \frac{p!}{m_1! \ldots m_p!}\ \ (\xi_1'(\xi_0)\,\xi_0)^{(m_1+\cdots+m_p)}_{\xi_0}\ \prod_{t=1}^{p} \frac{(\xi_0^{(t)}(\xi_1))^{m_t}}{t!}$$

и

$$\left(\frac{\varphi'_{k_0}(\xi_0)\,\xi_0}{\varphi_{k_0}(\xi_0)} \right)^{(p)}_{\xi_1} = \sum_{\sum\limits_{t=1}^{p} t m_t = p} \frac{p!}{m_1! \ldots m_p!}\ \left(\frac{\varphi'_{k_0}(\xi_0)\,\xi_0}{\varphi_{k_0}(\xi_0)} \right)^{(m_1+\cdots+m_p)}_{\xi_0}\ \prod_{t=1}^{p} \frac{(\xi_0^{(t)}(\xi_1))^{m_t}}{t!}.$$

Расписав более подробно выражения выше и учитывая тот факт, что функции $\varphi_{k_0}(\xi_0)$, $\varphi_{k_0 k_1}(\xi_1)$ удовлетворяют условию 2, а функция $\xi_1(\xi_0)$ удовлетворяет условию 3, получаем равенства

$$\xi_1^{\ell-p+1}\,\varphi^{(\ell-p+1)}_{k_0 k_1}(\xi_1) = O^*\left(\varphi_{k_0 k_1}(\xi_1)\right), \quad \xi_1^{\ell-p}\,\varphi^{(\ell-p)}_{k_0 k_1}(\xi_1) = O^*\left(\varphi_{k_0 k_1}(\xi_1)\right),$$

$$\xi_0^{m_1+\cdots+m_p}\ \left(\xi_1'(\xi_0)\,\xi_0\right)_{\xi_0}^{(m_1+\cdots+m_p)} = O^*\left(\xi_1(\xi_0)\right),$$

$$\xi_0^{m_1+\cdots+m_p}\ \left(\frac{\varphi_{k_0}'(\xi_0)\xi_0}{\varphi_{k_0}(\xi_0)}\right)_{\xi_0}^{(m_1+\cdots+m_p)} = O^*\left(1\right),$$

$$\xi_1^p\ \prod_{t=1}^{p}\left(\xi_0^{(t)}(\xi_1)\right)^{m_t} = \prod_{t=1}^{p}\left(\xi_0^{(t)}(\xi_1)\,\xi_1^t\right)^{m_t}, \tag{16}$$

где

$$\lim_{\xi_1\to 0}\prod_{t=1}^{p}\left(\xi_0^{(t)}(\xi_1)\,\xi_1^t\right)^{m_t} = \lim_{\xi_1\to 0}\xi_0^{m_0+\cdots+m_p}(\xi_1).$$

Таким образом, получаем, что функция

$$\Phi_{k_0k_1}^{(\ell)}(\xi_1)\,\xi_1^\ell = \begin{cases} O^*\left(\varphi_{k_0k_1}(\xi_1)\right), & \text{если } \varphi_{k_0}'(\xi_0)\not\equiv 0,\\[2ex] O^*\left(\varphi_{k_0k_1}(\xi_1)\,\dfrac{\xi_1'(\xi_0)\,\xi_0}{\xi_1(\xi_0)}\right), & \text{если } \varphi_{k_0}'(\xi_0)\equiv 0. \end{cases} \tag{17}$$

Наконец, из формул (15) и (17) следует, что свойство 2 выполняется.

Свойство 3. Равенство

$$\mathrm{ord}_0(\Phi_{k_0k_1}^{(\ell)}(\xi_1)) = \mathrm{ord}_0(\Phi_{k_0k_1}^{(\ell-1)}(\xi_1)) - 1$$

при $\Phi_{k_0k_1}^{(\ell)}(\xi_1)\not\equiv 0$ и $\Phi_{k_0k_1}^{(\ell-1)}(\xi_1)\not\equiv 0$, равносильно равенству

$$\lim_{\xi_1\to 0}\ln\left|\Phi_{k_0k_1}^{(\ell-1)}(\xi_1)/\Phi_{k_0k_1}^{(\ell)}(\xi_1)\right| = \lim_{\xi_1\to 0}\ln|\xi_1|. \tag{18}$$

При этом равенство (18) выполняется, если выполняется равенство

$$\lim_{\xi_1\to 0}\left|\Phi_{k_0k_1}^{(\ell-1)}(\xi_1)/\Phi_{k_0k_1}^{(\ell)}(\xi_1)\right| = \lim_{\xi_1\to 0}|\xi_1|\ \ (=0). \tag{19}$$

Аналогичные формулы получаем при $\xi_1\to\infty$. Применяя формулу (17) к левой части равенства (19), видим, что функции $\Phi_{k_0k_1}$ обладают свойством 3.

Свойство 4. Пользуясь формулой (15), нетрудно убедиться, что $\varphi_{k_0} = o(\Phi_{k_0k_1})$.

Первая часть предложения 1 доказана, ряд (14) принадлежит классу $\mathcal{C}(\xi_0,\xi_1)$.

Докажем вторую часть предложения 1. Поскольку ряд (14) принадлежит классу $\mathcal{C}(\xi_0,\xi_1)$, то его порядок определяется по первому ненулевому члену ряда, т. е. $p\left(\dfrac{d\check{\varphi}}{d\xi_0}\right) = \mathrm{ord}_0\left(\alpha_{00}\,\Phi_{00}(\xi_1)\varphi_0(\xi_0)\right)$. Учитывая формулу (15), и то, что функция $\xi_1(\xi_0)$ удовлетворяет условию 1, получаем равенство

$$\lim_{\xi_0\to 0}\frac{\ln\left|\dfrac{\alpha_{00}\,\Phi_{00}\,\varphi_0}{\xi_0}\right|}{\ln|\xi_0|}=\lim_{\xi_0\to 0}\left(\frac{\ln|\alpha_{00}|}{\ln|\xi_0|}+\frac{\ln|\Phi_{00}|}{\ln|\xi_0|}+\frac{\ln|\varphi_0|}{\ln|\xi_0|}-1\right)=$$
$$=\operatorname{ord}_0\varphi_0(\xi_0)-1=p(\check\varphi)-1.\quad\square$$

2.2. Доказательство замкнутости относительно суммы.

Предложение 2. *Сумма* $\check\varphi+\check\psi\neq 0$ *формальных рядов* $\check\varphi$ *и* $\check\psi$ *класса* $\mathcal{C}(\xi_0, \ldots, \xi_N)$ *порядков* $p(\check\varphi)$ *и* $p(\check\psi)\in\mathbb{R}$ *соответственно является формальным рядом* $\check\theta$ *класса* $\mathcal{C}(\xi_0, \ldots, \xi_N)$ *порядка* $p(\check\theta)\in\mathbb{R}$, *где* $p(\check\theta)\geqslant p(\check\varphi)$ *или* $p(\check\theta)\geqslant p(\check\psi)$.[9]

Доказательство. Снова для простоты изложения будем рассматривать случай $N=1$, т. е. $\check\varphi,\ \check\psi\in\mathcal{C}(\xi_0,\xi_1)$.

Запишем ряды $\check\varphi$ и $\check\psi$ в виде

$$\check\varphi=\sum_{k_0=0}^{\infty}\tilde\varphi_{k_0}(\xi_1)\,\varphi_{k_0}(\xi_0),\qquad \tilde\varphi_{k_0}(\xi_1)=\sum_{k_1=0}^{\infty}\alpha_{k_0k_1}\,\varphi_{k_0k_1}(\xi_1),\tag{20}$$

$$\check\psi=\sum_{k_0=0}^{\infty}\tilde\psi_{k_0}(\xi_1)\,\psi_{k_0}(\xi_0),\qquad \tilde\psi_{k_0}(\xi_1)=\sum_{k_1=0}^{\infty}\beta_{k_0k_1}\,\psi_{k_0k_1}(\xi_1),\tag{21}$$

а их сумму $\check\theta$ – в виде

$$\check\theta=\sum_{k_0=0}^{\infty}\tilde\theta_{k_0}(\xi_1)\,\theta_{k_0}(\xi_0),\qquad \tilde\theta_{k_0}(\xi_1)=\sum_{k_1=0}^{\infty}\gamma_{k_0k_1}\,\theta_{k_0k_1}(\xi_1).\tag{22}$$

Упорядочим члены ряда (22) следующим образом:

$$\theta_0=\begin{cases}\varphi_0 & \text{при}\quad \psi_0=o(\varphi_0),\\[2ex] \psi_0 & \text{при}\quad \varphi_0=o(\psi_0),\\[2ex] \varphi_0 & \text{при}\quad \psi_0=O^*(\varphi_0),\end{cases}$$

[9] При этом вместо этих неравенств можно написать равенство, т. е. $p(\check\theta)=p(\check\varphi)$ или $p(\check\theta)=p(\check\psi)$, если $p(\check\varphi)\neq p(\check\psi)$ или если $p(\check\varphi)=p(\check\psi)$, но не все слагаемые с $k_0=0$ в этих рядах противоположные.

если $k_0 \geqslant 1$, то $\theta_{k_0} = \varphi_{m_0}$ при

$$\begin{cases} \varphi_{m_0} = o(\theta_{k_0-1}), \\ \psi_{p_0} = o(\varphi_{m_0}) \text{ для } \forall\, p_0 \text{ таких, что } \psi_{p_0} = o(\theta_{k_0-1}), \\ \varphi_{m_0-1} \neq o(\theta_{k_0-1}) \text{ при } m_0 \geqslant 1, \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} \varphi_{m_0} = O^*(\psi_{p_0}), \\ \varphi_{m_0} = o(\theta_{k_0-1}), \text{ но } \varphi_{m_0-1} \neq o(\theta_{k_0-1}) \text{ при } m_0 \geqslant 1; \end{cases}$$

$\theta_{k_0} = \psi_{p_0}$ при

$$\begin{cases} \psi_{p_0} = o(\theta_{k_0-1}), \\ \varphi_{m_0} = o(\psi_{p_0}) \text{ для } \forall\, m_0 \text{ таких, что } \varphi_{m_0} = o(\theta_{k_0-1}), \\ \psi_{p_0-1} \neq o(\theta_{k_0-1}) \text{ при } p_0 \geqslant 1; \end{cases}$$

$$\tilde{\theta}_{k_0} = \tilde{\varphi}_{m_0} \quad \text{при} \quad \begin{cases} \theta_{k_0} = \varphi_{m_0}, \\ \psi_{p_0} \neq O^*(\varphi_{m_0}) \quad \text{для} \quad \forall p_0; \end{cases}$$

$$\tilde{\theta}_{k_0} = \tilde{\psi}_{p_0} \quad \text{при} \quad \begin{cases} \theta_{k_0} = \psi_{p_0}, \\ \psi_{p_0} \neq O^*(\varphi_{m_0}) \quad \text{для} \quad \forall\, m_0; \end{cases}$$

$$\tilde{\theta}_{k_0} = \tilde{\varphi}_{m_0} + \tilde{\psi}_{p_0} \frac{\psi_{p_0}}{\varphi_{m_0}} \quad \text{при} \quad \begin{cases} \theta_{k_0} = \varphi_{m_0}, \\ \varphi_{m_0} = O^*(\psi_{p_0}), \end{cases}$$

где

$$\theta_{k_0 0} = \varphi_{m_0 0}$$

при $\psi_{p_0 0} = o(\varphi_{m_0 0})$ или $\varphi_{m_0 0} = O^*(\psi_{p_0 0})$, $\beta_{p_0 0} = 0$;

$$\theta_{k_0 0} = \psi_{p_0 0} \frac{\psi_{p_0}}{\varphi_{m_0}}$$

при $\varphi_{m_0 0} = o(\psi_{p_0 0})$ или $\varphi_{m_0 0} = O^*(\psi_{p_0 0})$, $\alpha_{m_0 0} = 0$;

$$\theta_{k_0 0} = \varphi_{m_0 0} + \psi_{p_0 0} \frac{\beta_{p_0 0}}{\alpha_{m_0 0}} \frac{\psi_{p_0}}{\varphi_{m_0}}$$

при $\varphi_{m_0 0} = O^*(\psi_{p_0 0})$ и $\alpha_{m_0 0},\ \beta_{p_0 0} \in \mathbb{C}^*$;

если $k_0 + k_1 \geqslant 1$, то $\theta_{k_0 k_1} = \varphi_{m_0 m_1}$ при

$$\begin{cases} \varphi_{m_0 m_1} = o(\theta_{k_0 k_1 - 1}), \\ \psi_{p_0 p_1} = o(\varphi_{m_0 m_1}) \ \text{ для } \forall\, p_1 \text{ таких, что } \psi_{p_0 p_1} = o(\theta_{k_0 k_1 - 1}), \\ \varphi_{m_0 m_1 - 1} \neq o(\theta_{k_0 k_1 - 1}) \ \text{ при } \ m_1 \geqslant 1, \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} \varphi_{m_0 m_1} = O^*(\psi_{p_0 p_1}), \ \ \beta_{p_0 p_1} = 0, \\ \varphi_{m_0 m_1} = o(\theta_{k_0 k_1 - 1}), \ \text{но } \varphi_{m_0 m_1 - 1} \neq o(\theta_{k_0 k_1 - 1}) \ \text{ при } \ m_1 \geqslant 1; \end{cases}$$

$$\theta_{k_0 k_1} = \psi_{p_0 p_1} \frac{\psi_{p_0}}{\varphi_{m_0}} \quad \text{при}$$

$$\begin{cases} \psi_{p_0 p_1} = o(\theta_{k_0 k_1 - 1}), \\ \varphi_{m_0 m_1} = o(\psi_{p_0 p_1}) \ \text{ для } \ \forall\, m_1 \text{ таких, что } \varphi_{m_0 m_1} = o(\theta_{k_0 k_1 - 1}), \\ \psi_{p_0 p_1 - 1} \neq o(\theta_{k_0 k_1 - 1}) \ \text{ при } \ m_1 \geqslant 1, \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} \varphi_{m_0 m_1} = O^*(\psi_{p_0 p_1}), \ \alpha_{m_0 m_1} = 0, \\ \varphi_{m_0 m_1} = o(\theta_{k_0 k_1 - 1}), \ \text{но } \varphi_{m_0 m_1 - 1} \neq o(\theta_{k_0 k_1 - 1}) \ \text{ при } \ m_1 \geqslant 1; \end{cases}$$

$$\theta_{k_0 k_1} = \varphi_{m_0 m_1} + \frac{\beta_{p_0 p_1}}{\alpha_{m_0 m_1}} \psi_{p_0 p_1} \frac{\psi_{p_0}}{\varphi_{m_0}} \quad \text{при}$$

$$\begin{cases} \varphi_{m_0 m_1} = O^*(\psi_{p_0 p_1}), \\ \varphi_{m_0 m_1} = o(\theta_{k_0 k_1 - 1}), \ \text{но } \varphi_{m_0 m_1 - 1} \neq o(\theta_{k_0 k_1 - 1}) \ \text{ при } \ m_1 \geqslant 1, \\ \alpha_{m_0 m_1}, \ \beta_{p_0 p_1} \neq 0. \end{cases}$$

Теперь покажем, что ряд (22) принадлежит классу $\mathcal{C}(\xi_0, \xi_1)$, т. е. функции $\theta_{k_0 k_1}(\xi_1)$ и $\theta_{k_0}(\xi_0)$ обладают свойствами

1. $\theta_{k_0 k_1 + 1} = o(\theta_{k_0 k_1})$,

2. $\dfrac{\theta^{(\ell)}_{k_0k_1}(\xi_1)\ \xi_1^\ell}{\theta_{k_0k_1}(\xi_1)} = O^*(1)$, если $\theta^{(\ell)}_{k_0k_1}(\xi_1) \not\equiv 0$,

3. $\operatorname{ord}_0\left(\theta^{(\ell)}_{k_0k_1}(\xi_1)\right) = \operatorname{ord}_0\left(\theta^{(\ell-1)}_{k_0k_1}(\xi_1)\right) - 1$ и

$$\operatorname{ord}_\infty\left(\theta^{(\ell)}_{k_0k_1}(\xi_1)\right) = \operatorname{ord}_\infty\left(\theta^{(\ell-1)}_{k_0k_1}(\xi_1)\right) - 1,$$

если $\theta^{(\ell)}_{k_0k_1}(\xi_1) \not\equiv 0$ и $\theta^{(\ell-1)}_{k_0k_1}(\xi_1) \not\equiv 0$,

4. $\theta_{k_0} = o\left(\theta_{k_0k_1}\right)$ для всех $\theta_{k_0}\theta_{k_0k_1} \neq \mathrm{const}$.

Нетрудно видеть, что функции $\theta_{k_0}(\xi_0)$ и $\theta_{k_0k_1}(\xi_1)$ обладают свойствами 1 и 4 в силу введенной упорядоченности. Докажем, что функции $\theta_{k_0k_1}(\xi_1)$ обладают свойством 2.

Достаточно рассмотреть случай

$$\theta_{k_0} = \varphi_{m_0}, \ \ \theta_{k_0k_1} = \psi_{p_0p_1}\,\frac{\psi_{p_0}}{\varphi_{m_0}}, \ \ \psi_{p_0} = O^*(\varphi_{m_0}),$$

так как во всех остальных случаях справедливость свойства 2 либо очевидна, либо очевидно следует из этого случая.

Дифференцируя $\psi_{p_0p_1}\dfrac{\psi_{p_0}}{\varphi_{m_0}}$ по ξ_1 ℓ раз, получаем выражения

$$\left(\psi_{p_0p_1}(\xi_1)\,\frac{\psi_{p_0}(\xi_0)}{\varphi_{m_0}(\xi_0)}\right)^{(\ell)}_{\xi_1} = \sum_{j=0}^{\ell} \mathrm{C}_\ell^j\ \left(\psi_{p_0p_1}(\xi_1)\right)^{(\ell-j)}\ \left(\frac{\psi_{p_0}(\xi_0)}{\varphi_{m_0}(\xi_0)}\right)^{(j)}_{\xi_1},$$

при $j \geqslant 1$

$$\left(\frac{\psi_{p_0}(\xi_0)}{\varphi_{m_0}(\xi_0)}\right)^{(j)}_{\xi_1} = \sum_{\sum\limits_{t=1}^{j} tm_t = j} \frac{j!}{m_1!\dots m_j!}\ \left(\frac{\psi_{p_0}(\xi_0)}{\varphi_{m_0}(\xi_0)}\right)^{(m_1+\dots+m_j)}_{\xi_0}\ \prod_{t=1}^{j}\frac{(\xi_0^{(t)}(\xi_1))^{m_t}}{t!},$$

$m_1, \dots, m_j \in \mathbb{Z}_+$.

Применяя снова формулы производной произведения, производной сложной функции и учитывая то, что функции $\varphi_{m_0}(\xi_0)$, $\psi_{p_0}(\xi_0)$ и $\psi_{p_0p_1}(\xi_1)$ удовлетворяют условию 2, получаем выражения

$$\xi_1^{\ell-j}\psi^{(\ell-j)}_{p_0p_1}(\xi_1) = O^*\left(\psi_{p_0p_1}(\xi_1)\right),$$

$$\xi_0^{m_1+\dots+m_j}\left(\frac{\psi_{p_0}(\xi_0)}{\varphi_{m_0}(\xi_0)}\right)^{(m_1+\dots+m_j)}_{\xi_0} = O^*\left(\frac{\psi_{p_0}(\xi_0)}{\varphi_{m_0}(\xi_0)}\right).$$

Кроме того, для выражения $\prod_{t=1}^{j} \frac{(\xi_0^{(t)}(\xi_1))^{m_t}}{t!}$ справедлива формула (16).

Тогда имеем соотношение

$$\left(\psi_{p_0p_1}(\xi_1)\,\frac{\psi_{p_0}(\xi_0)}{\varphi_{m_0}(\xi_0)}\right)^{(\ell)}_{\xi_1}\,\xi_1^\ell = O^*\left(\psi_{p_0p_1}(\xi_1)\,\frac{\psi_{p_0}(\xi_0)}{\varphi_{m_0}(\xi_0)}\right). \tag{23}$$

Следовательно, равенство

$$\frac{\theta^{(\ell)}_{k_0k_1}(\xi_1)\,\xi_1^\ell}{\theta_{k_0k_1}(\xi_1)} = O^*(1)$$

выполняется.

Нетрудно проверить, что при $\theta^{(\ell)}_{k_0k_1}(\xi_1) \not\equiv 0$ и $\theta^{(\ell-1)}_{k_0k_1}(\xi_1) \not\equiv 0$ свойство 3 выполняется, т. е. имеют место соотношения

$$\mathrm{ord}_0\left(\theta^{(\ell)}_{k_0k_1}(\xi_1)\right) = \mathrm{ord}_0\left(\theta^{(\ell-1)}_{k_0k_1}(\xi_1)\right) - 1$$

и

$$\mathrm{ord}_\infty\left(\theta^{(\ell)}_{k_0k_1}(\xi_1)\right) = \mathrm{ord}_\infty\left(\theta^{(\ell-1)}_{k_0k_1}(\xi_1)\right) - 1.$$

Доказательство этих соотношений не приводим, поскольку оно аналогично доказательству выполнения свойства 3 предложения 1 с учетом формулы (16).

Итак, мы доказали, что ряд $\check\theta = \check\varphi + \check\psi$ принадлежит классу $\mathcal{C}(\xi_0, \xi_1)$.

Из введенной упорядоченности членов ряда $\check\theta$ очевидно следует, что его порядок $p(\check\theta) \in \mathbb{R}$ и выполняется одно из двух неравенств, $p(\check\theta) \geqslant p(\check\varphi)$ или $p(\check\theta) \geqslant p(\check\psi)$. $\square$

2.3. Доказательство замкнутости относительно произведения.

Предложение 3. *Произведение* $\check\varphi \cdot \check\psi \neq 0$ *формальных рядов* $\check\varphi$ *и* $\check\psi$ *класса* $\mathcal{C}(\xi_0, \ldots, \xi_N)$ *порядков* $p(\check\varphi)$ *и* $p(\check\psi) \in \mathbb{R}$ *соответственно является формальным рядом* $\check\vartheta$ *класса* $\mathcal{C}(\xi_0, \ldots, \xi_N)$ *порядка* $p(\check\vartheta) = p(\check\varphi) + p(\check\psi)$.

Доказательство. Снова для простоты изложения будем рассматривать случай $N = 1$.

Рассмотрим ряды (20) и (21). Их произведение $\check\vartheta$ запишем в виде

$$\check\vartheta = \sum_{k_0=0}^{\infty} \tilde\vartheta_{k_0}(\xi_1)\,\vartheta_{k_0}(\xi_0), \qquad \tilde\vartheta_{k_0}(\xi_1) = \sum_{k_1=0}^{\infty} \delta_{k_0k_1}\,\vartheta_{k_0k_1}(\xi_1). \tag{24}$$

где

$$\vartheta_0 = \varphi_0\psi_0, \qquad \delta_{00}\,\vartheta_{00} = \alpha_{00}\,\beta_{00}\,\varphi_{00}\psi_{00}, \quad \alpha_{00},\,\beta_{00} \in \mathbb{C}^*,$$

$$\vartheta_{k_0} = \varphi_{m_0}\psi_{p_0} \quad \text{при} \quad k_0 \geqslant 1 \;\; \text{и} \quad \begin{cases} \varphi_{m_0}\psi_{p_0} = o(\vartheta_{k_0-1}), \text{ но} \\[2ex] \varphi_{m_0-1}\psi_{p_0} \neq o(\vartheta_{k_0-1}) \quad \text{при} \quad m_0 \geqslant 1, \\[2ex] \varphi_{m_0}\psi_{p_0-1} \neq o(\vartheta_{k_0-1}) \quad \text{при} \quad p_0 \geqslant 1, \end{cases}$$

$\vartheta_{k_0k_1} = \varphi_{m_0m_1}\psi_{p_0p_1}$ при $k_0 + k_1 \geqslant 1$ и

$$\begin{cases} \vartheta_{k_0} = \varphi_{m_0}\psi_{p_0}, \\[2ex] \varphi_{m_0m_1}\psi_{p_0p_1} = o(\vartheta_{k_0k_1-1}), \;\text{ но} \\[2ex] \varphi_{m_0m_1-1}\psi_{p_0p_1} \neq o(\vartheta_{k_0k_1-1}) \quad \text{при} \quad m_1 \geqslant 1, \\[2ex] \varphi_{m_0m_1}\psi_{p_0p_1-1} \neq o(\vartheta_{k_0k_1-1}) \quad \text{при} \quad p_1 \geqslant 1. \end{cases}$$

Покажем, что ряд (24) принадлежит классу $\mathcal{C}(\xi_0, \xi_1)$, т. е. функции $\vartheta_{k_0k_1}(\xi_1)$ и $\vartheta_{k_0}(\xi_0)$ обладают свойствами

1. $\vartheta_{k_0+1} = o(\vartheta_{k_0})$ и $\vartheta_{k_0k_1+1} = o(\vartheta_{k_0k_1})$,

2. $\dfrac{\vartheta^{(\ell)}_{k_0}(\xi_0)\;\xi_0^\ell}{\vartheta_{k_0}(\xi_0)} = O^*(1)$ и $\dfrac{\vartheta^{(\ell)}_{k_0k_1}(\xi_1)\;\xi_1^\ell}{\vartheta_{k_0k_1}(\xi_1)} = O^*(1)$,
   если $\vartheta^{(\ell)}_{k_0}(\xi_0) \not\equiv 0$ и $\vartheta^{(\ell)}_{k_0k_1}(\xi_1) \not\equiv 0$,

3. $\operatorname{ord}_0\left(\vartheta^{(\ell)}_{k_0}(\xi_0)\right) = \operatorname{ord}_0\left(\vartheta^{(\ell-1)}_{k_0}(\xi_0)\right) - 1$ и

$$\operatorname{ord}_0\left(\vartheta^{(\ell)}_{k_0k_1}(\xi_1)\right) = \operatorname{ord}_0\left(\vartheta^{(\ell-1)}_{k_0k_1}(\xi_1)\right) - 1,$$

$$\operatorname{ord}_\infty\left(\vartheta^{(\ell)}_{k_0}(\xi_0)\right) = \operatorname{ord}_0\left(\vartheta^{(\ell-1)}_{k_0}(\xi_0)\right) - 1$$

   и

$$\operatorname{ord}_\infty\left(\vartheta^{(\ell)}_{k_0k_1}(\xi_1)\right) = \operatorname{ord}_0\left(\vartheta^{(\ell-1)}_{k_0k_1}(\xi_1)\right) - 1,$$

   если $\vartheta^{(\ell)}_{k_0k_1}(\xi_1) \not\equiv 0$ и $\vartheta^{(\ell-1)}_{k_0k_1}(\xi_1) \not\equiv 0$,

4. $\vartheta_{k_0} = o\left(\vartheta_{k_0k_1}\right)$ для всех $\vartheta_{k_0}\vartheta_{k_0k_1} \neq \text{const}$.

Для функций $\vartheta_{k_0}(\xi_0)$ и $\vartheta_{k_0k_1}(\xi_1)$ свойства 1 и 4 выполнены согласно введенной упорядоченности. Нетрудно проверить, что для функций $\varphi_1(\xi)$ и $\varphi_2(\xi)$, удовлетворяющих условию 2, справедливо равенство

$$\frac{(\varphi_1(\xi)\varphi_2(\xi))^{(\ell)}\xi^\ell}{\varphi_1(\xi)\varphi_2(\xi)} = O^*(1), \tag{25}$$

если $\varphi_1(\xi)\varphi_2(\xi) \neq \text{const}$. Из равенства (25) следует, что функции $\vartheta_{k_0}(\xi_0)$ и $\vartheta_{k_0k_1}(\xi_1)$ обладают свойством 2.

Повторяя рассуждения доказательства свойства 3 предложения 1 с учетом формулы (25), получаем, что свойство 3 предложения 3 также справедливо.

Итак, ряд $\check{\vartheta} = \check{\varphi} \cdot \check{\psi}$ принадлежит классу $\mathcal{C}(\xi_0, \xi_1)$.

Из введенной упорядоченности членов ряда $\check{\vartheta}$ очевидно следует, что его порядок $p(\check{\vartheta})$ равен $p(\check{\varphi}) + p(\check{\psi})$. $\square$

2.4. Заключение. Операции сложения и умножения формальных рядов класса $\mathcal{C}(\xi_0, \dots, \xi_N)$, а также их дифференцирование не выводят их из этого класса.

§3. О формальных рядах класса $\mathcal{C}(\xi_0, \dots, \xi_N)$, являющихся формальными решениями алгебраического ОДУ

Рассмотрим формальный ряд вида (13) класса $\mathcal{C}(\xi_0, \dots, \xi_N)$. Обозначим его порядок $p(\check{\varphi}) = \rho_0 \in \mathbb{R}$.

Пусть ряд (13) является формальным решением (см. замечание 1) алгебраического обыкновенного дифференциального уравнения

$$f(\xi_0, y_0, \dots, y_n) = 0, \tag{26}$$

где $y_j = \xi_0^j \dfrac{d^j y}{d\xi_0^j}$, $f(\xi_0, y_0, \dots, y_n)$ – многочлен своих переменных, т. е.

$$f(\xi_0, \check{\varphi}_0, \dots, \check{\varphi}_n) \equiv 0, \qquad \check{\varphi}_j = \xi_0^j \frac{d^j\check{\varphi}}{d\xi_0^j},$$

и в силу предложений 1 – 3

$$f(\xi_0, \check{\varphi}_0, \dots, \check{\varphi}_n) \in \mathcal{C}(\xi_0, \dots, \xi_N).$$

Согласно предложению 1

$$p(\check{\varphi}_0) = \rho_0, \ \dots, \ p(\check{\varphi}_n) = \rho_0.$$

Каждому слагаемому уравнения (26) вида

$$\lambda\, \xi_0^{q_1}\, y_0^{q_{20}} \cdot \ldots \cdot y_n^{q_{2n}},$$

где $\lambda \in \mathbb{C}^*$, $q_1, q_{20}, \ldots, q_{2n} \in \mathbb{Z}_+$, можно поставить в соответствие точку (векторный показатель степени этого слагаемого) (q_1, q_2), $q_2 = q_{20} + \cdots = q_{2n}$. Согласно предложениям 2 и 3

$$p(\xi_0^{q_1}\, \check{\varphi}_0^{q_{20}} \cdot \ldots \cdot \check{\varphi}_n^{q_{2n}}) = q_1 + q_2\rho_0.$$

Пусть множество $\{Q_i = (q_1^i, q_2^i),\ i = 0, \ldots, m\}$ – это носитель уравнения (26), т. е. множество, содержащее все векторные показатели степени всех слагаемых этого уравнения, а R – это вектор $(1, \rho_0)$. Рассмотрим все возможные скалярные произведения $\langle Q_i, R\rangle = c_i \in \mathbb{R}$. Пусть $c = \min\limits_{i=0,\ldots,m} c_i$. Сумма слагаемых уравнения (26) с такими векторными показателями степени, что $\langle Q_i, R\rangle = c \in \mathbb{R}$, называется *укороченной суммой* (см. [2]), обозначим ее $\hat{f}(\xi_0, y_0, \ldots, y_n)$, а уравнение

$$\hat{f}(\xi_0, y_0, \ldots, y_n) = 0 \tag{27}$$

– *укороченным уравнением*. Уравнение (27) является *квазиоднородным* обыкновенным дифференциальным уравнением, это означает, что

$$\hat{f}(\xi_0, y_0, \ldots, y_n)\Big|_{y=\xi_0^{\rho_0} u} = \xi_0^c\, \mathcal{P}_0(u_0, \ldots, u_n),$$

где $\mathcal{P}_0(u_0, \ldots, u_n)$ – это многочлен с постоянными коэффициентами, $u_j = \xi_0^j\, u^{(j)}$.

Теорема 1. *Если уравнение* (26) *имеет формальное решение* $\check{\varphi} \in \mathbb{C}(\xi_0, \ldots, \xi_N)$ *вида* (13)*, тогда укороченное уравнение* (27) *имеет укороченное* (*формальное*) *решение*

$$y = \hat{\varphi}, \qquad \hat{\varphi} = \tilde{\varphi}_0(\xi_1, \ldots, \xi_N)\, \varphi_0(\xi_0). \tag{28}$$

Доказательство. Если $\rho_0 \neq 0$, то в уравнении (26) и его формальном решении $\check{\varphi}$ вида (13) сделаем степенное преобразование

$$y = \xi_0^{\rho_0} u. \tag{29}$$

Получаем уравнение

$$F(\xi_0, u_0, \ldots, u_n) = 0, \tag{30}$$

с решением $u = \check{\Phi}$, $\check{\varphi} = \xi_0^{\rho_0}\, \check{\Phi}$, $p(\check{\Phi}) = 0$. Уравнение (30) уже не полином, поскольку содержит ξ_0 в вещественных степенях. Под действием степенного преобразования каждое слагаемое уравнения (26) вида

$$\beta\, \xi_0^{q_1}\, y_0^{q_{20}} \ldots y_n^{q_{2n}},$$

где $\beta \in \mathbb{C}$, $q_1, q_{20}, \ldots, q_{2n} \in \mathbb{Z}_+$, переходит в сумму слагаемых вида

$$\tilde{\beta}\, \xi_0^{q_1 + q_2\rho_0} u_0^{\tilde{q}_{20}} \ldots u_n^{\tilde{q}_{2n}}, \tag{31}$$

где $\tilde{\beta} \in \mathbb{C}^*$, $\tilde{q}_{20}, \ldots, \tilde{q}_{2n} \in \mathbb{Z}_+$, $\tilde{q}_{20} + \cdots + \tilde{q}_{2n} = q_2$. Под действием степенного преобразования (29) укороченная сумма $\hat{f}(\xi_0, y_0, \ldots, y_n)$ перейдет в выражение $\xi_0^c\ \mathcal{P}_0(u_0, \ldots, u_n)$, где c – это минимум всех значений $q_1 + q_2\rho_0$, $\mathcal{P}_0(u_0, \ldots, u_n)$ – это многочлен с постоянными коэффициентами, $u_j = \xi_0^j\, u^{(j)}$, а остальные слагаемые перейдут в сумму слагаемых вида (31) с $q_1 + q_2\rho_0 > c$. Поэтому уравнение (30) имеет вид

$$\xi_0^c\ [\mathcal{P}_0(u_0, \ldots, u_n) + \xi_0^{v_1}\mathcal{P}_1(u_0, \ldots, u_n) + \cdots + \xi_0^{v_t}\mathcal{P}_t(u_0, \ldots, u_n)] = 0,$$

где $\mathcal{P}_0(u_0, \ldots, u_n), \ldots, \mathcal{P}_t(u_0, \ldots, u_n)$ – это многочлены с постоянными коэффициентами, числа $v_1, \ldots, v_n \in \mathbb{R}_+$, $v_1, \ldots, v_n \neq 0$. Разделим это уравнение на ξ_0^c, получим уравнение

$$\mathcal{P}_0(u_0, \ldots, u_n) + \xi_0^{v_1}\mathcal{P}_1(u_0, \ldots, u_n) + \cdots + \xi_0^{v_t}\mathcal{P}_t(u_0, \ldots, u_n) = 0, \tag{32}$$

которое обозначим $g(\xi_0, u_0, \ldots, u_n) = 0$. Из записи (32) и предложений 1 – 3 следует, что порядок $p\left(g(\xi_0, \check{\Phi}_0, \ldots, \check{\Phi}_n)\right) \geqslant 0$.

Решение

$$u = \check{\Phi}, \qquad \check{\Phi} = \sum_{k_0=0}^{\infty} \tilde{\Phi}_{k_0}(\xi_1, \ldots, \xi_N)\, \Phi_{k_0}(\xi_0)$$

уравнения (32) запишем в виде

$$u = \hat{\Phi} + w, \qquad \hat{\Phi} = \tilde{\Phi}_0(\xi_1, \ldots, \xi_N)\, \Phi_0(\xi_0). \tag{33}$$

Подставим решение (33) в уравнение (32), а затем (учитывая то, что уравнение (32) полиномиально по $u_0, \ldots, u_n$) в выражении после подстановки раскроем скобки по формуле бинома Ньютона, получим выражение

$$\mathcal{P}_0(\hat{\Phi}_0, \ldots, \hat{\Phi}_n) + \left[\frac{\partial\mathcal{P}_0(\hat{\Phi}_0, \ldots, \hat{\Phi}_n)}{\partial u_0}\, w_0 + \cdots + \frac{\partial\mathcal{P}_0(\hat{\Phi}_0, \ldots, \hat{\Phi}_n)}{\partial u_n}\, w_n\right] +$$

$$+ \cdots + \xi_0^{v_1}\mathcal{P}_1(\hat{\Phi}_0, \ldots, \hat{\Phi}_n) + \cdots = 0, \qquad \hat{\Phi}_j = \xi_0^j\, \hat{\Phi}^{(j)}, \qquad w = \xi_0^j\, w^{(j)}. \tag{34}$$

Отдельно оценивая порядок каждого слагаемого уравнения (34), убеждаемся, что наименьший порядок функций в нуле и в бесконечности имеют члены ряда $\mathcal{P}_0(\hat{\Phi}_0, \ldots, \hat{\Phi}_n)$, при этом порядок ряда $p(\mathcal{P}_0(\hat{\Phi}_0, \ldots, \hat{\Phi}_n))$ либо равен нулю, либо равен $-\infty$ (если $\mathcal{P}_0(\hat{\Phi}_0, \ldots, \hat{\Phi}_n) = 0$). А порядки остальных слагаемых равенства (34) больше нуля. Действительно, порядок $p(w_j) > p(\hat{\Phi}_j) = 0$, многочлены $\mathcal{P}_0(u_0, \ldots, u_n)$, ..., $\mathcal{P}_t(u_0, \ldots, u_n)$ и их производные по $u_0, \ldots,$ u_n (которые тоже многочлены) при $u_j = \hat{\Phi}_j$ либо равны нулю, либо имеют порядок, равный нулю в силу предложений 2 и 3, а числа $v_n > \cdots > v_1 > 0$. Но поскольку ряд $\check{\Phi}$ формально удовлетворяет уравнению (32), то сумма всех слагаемых минимального порядка в выражении (34) равна нулю, т. е.

$\mathcal{P}_0(\hat{\Phi}_0, \ldots, \hat{\Phi}_n) = 0$. Делая в уравнении $\mathcal{P}_0(u_0, \ldots, u_n) = 0$ обратное преобразование к преобразованию (29) и домножая результат на ξ_0^c, получаем, что

$$\hat{f}(\xi_0, \hat{\varphi}_0, \ldots, \hat{\varphi}_n) = 0, \qquad \hat{\varphi}_j = \xi_0^j\, \hat{\varphi}^{(j)}, \qquad \hat{\varphi} = \xi_0^{\rho_0}\, \hat{\Phi}. \quad \square$$

Глубоко благодарю профессора Александра Дмитриевича Брюно за замечания к тексту препринта.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Эрдейи А.* Асимптотические разложения. Государственное издательство физико-математической литературы. 1962. 128 с.

2. *Брюно А.Д.* Асимптотики и разложения решений обыкновенного дифференциального уравнения // УМН. 2004. Т. 59. № 3. С. 31–80.

3. *Брюно А.Д., Горючкина И.В.* Асимптотические разложения решений шестого уравнения Пенлеве // Труды ММО. 2010. Т. 71. С. 6–118.

4. *Горючкина И.В.* Точное решение шестого уравнения Пенлеве и экзотическая асимптотика // Докдады АН. 2013. Т. 450. № 4. С. 381-383.

5. *Кудрявцев В.А.* Общая формула для производной n-го порядка степени некоторой функции // Математическое Просвещение. М.-Л.: ОНТИ, 1934. Выпуск 1. С. 24-27.

6. *Шабат Б.В.* Введение в теорию аналитических функций. Часть 1. М. Наука, 1985. 336 с.

7. *Брюно А.Д.*, *Шадрина Т.В.* Осесимметричный пограничный слой на игле // Труды ММО. 2007. Т. 68. С. 224–287.